Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ενότητα 5: Μετασχηματισμός Ζ

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Ορισμός Μετασχηματισμού Z
    - Ευθύς μετασχηματισμός Z
    - Αντίστροφος μετασχηματισμός Z
- Περιοχή Σύγκλισης
    - Περιοχή σύγκλισης ακολουθιών άπειρης διάρκειας
    - Περιοχή σύγκλισης ακολουθιών πεπερασμένης διάρκειας
- Σχέση Μετασχηματισμού Z με άλλους Μετασχηματισμούς
    - Με τον μετασχηματισμό Fourier
    - Με τον μετασχηματισμό Laplace
- Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Z
- Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχηματισμών Z & Περιοχές Σύγκλισης

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Ιδιότητες Μετασχηματισμού Ζ
  - Γραμμικότητα
  - Μετατόπιση στο Χρόνο
  - Αντιστροφή στο Χρόνο
  - Κλιμάκωση στο Χρόνο
  - Κλιμάκωση στη Μιγαδική Συχνότητα
  - Θεώρημα Συνέλιξης
  - Παραγώγιση στο Πεδίο Ζ
  - Μιγαδική Συζυγία
  - Πολλαπλασιασμός Σημάτων
  - Θεώρημα Αρχικής Τιμής
  - Θεώρημα Τελικής Τιμής
- Πόλοι και Μηδενικά του Μετασχηματισμού Ζ

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Μέθοδοι Υπολογισμού Αντίστροφου Μετασχηματισμού Ζ
    - Με θεωρήματα ολοκληρωτικών υπολοίπων
    - Με ανάπτυξη σε δυναμοσειρές
    - Με ανάπτυξη σε μερικά αθροίσματα

Μετασχηματισμός Ζ
και Περιοχή Σύγκλισης

Μετασχηματισμός Z (Z-Transform)

Για ένα σήμα $x[n]$ ο **αμφίπλευρος Μετασχηματισμός Z** (bilateral, two-sided Z-Transform, ZT) ορίζεται ως:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

όπου $z = re^{j\omega}$ μιγαδική μεταβλητή ($z \in C$) που ονομάζεται **μιγαδική συχνότητα**
Ισχύει: $z = |z|\, e^{j\omega}$, όπου $|z|$ είναι η **απόσβεση** και ω είναι η **ψηφιακή συχνότητα.**

Οι τιμές της z για τις οποίες συγκλίνει το άθροισμα ορίζουν στο επίπεδο-z την **Περιοχή Σύγκλισης** (Region of Convergence - ROC) που συμβολίζεται με R_x.

Ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός Z μετατρέπει την ακολουθία $x[n]$ σε ένα πολυώνυμο $X(z)$ με (πιθανά) άπειρους όρους θετικών και αρνητικών δυνάμεων του z, όπου κάθε δείγμα $x[n_0]$ αντιστοιχεί στο μονώνυμο z^{-n_0}.

Ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός Z δεν είναι χρήσιμος στην επίλυση εξισώσεων διαφορών με αρχικές συνθήκες επειδή δεν μπορεί να συμπεριλάβει τις αρχικές συνθήκες στον υπολογισμό του. Για το λόγο αυτό προτιμούμε τον **μονόπλευρο μετασχηματισμό Z**, που θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

Αν $X(z)$ μία μιγαδική συνάρτηση με περιοχή σύγκλισης R_x, είναι ο μετασχηματισμός Z ενός σήματος $x[n]$, τότε το $x[n]$ μπορεί να ανακτηθεί από τον **αντίστροφο μετασχηματισμό Z**:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)\, z^{n-1}\, dz$$

Ο όρος C περιγράφει κάθε κλειστή απλή καμπύλη στο $z = 0$, που περικλείει την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου, βρίσκεται μέσα στην περιοχή σύγκλισης, περικλείει όλους τους πόλους και διαγράφεται αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Στην πράξη για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Z χρησιμοποιούμε τεχνικές που θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Οι συμβολισμοί για τον μετασχηματισμό Z είναι:

- $x[n] \overset{\mathrm{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$
- $X(z) = Z\{[x[n]\}$ $\qquad\qquad$ $x[n] = Z^{-1}\{X(z)\}$

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού Ζ

Οι τιμές της z για τις οποίες συγκλίνει το άθροισμα, ορίζουν στο επίπεδο-z την **Περιοχή Σύγκλισης** (Region of Convergence - ROC) που συμβολίζεται με R_x:

$$R_x = \left\{ z \in C : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]\, z^{-n}| < \infty \right\}$$

ή ισοδύναμα:

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

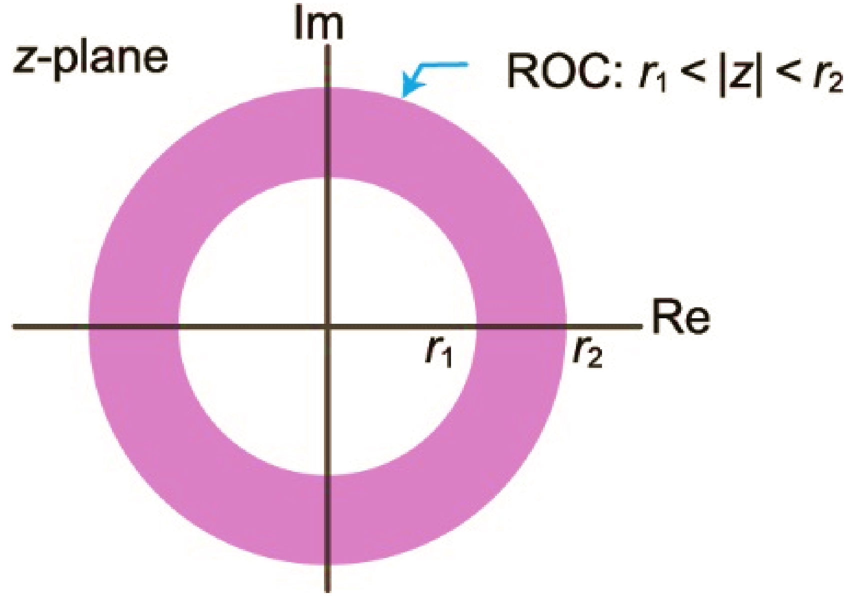
Γράφοντας τη συνάρτηση $X(z)$ σε κλασματική μορφή, έχουμε:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

- Οι τιμές του z για τις οποίες η συνάρτηση $X(z)$ απειρίζεται ονομάζονται **πόλοι** $\{p_k\}$ και βρίσκονται πάντα εκτός της περιοχής σύγκλισης. Ισχύει $X(p_k) \to \infty$. Οι πόλοι υπολογίζονται από τη σχέση: $A(z) = 0$.

- Οι τιμές του z για τις οποίες η συνάρτηση $X(z)$ μηδενίζεται ονομάζονται **μηδενικά** $\{z_k\}$. Ισχύει $X(z_k) = 0$. Τα μηδενικά υπολογίζονται από: $B(z) = 0$.

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού Z



Γενική μορφή περιοχής σύγκλισης (R_x ή ROC) μετασχηματισμού Z

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού Ζ

- Η περιοχή σύγκλισης καθορίζεται αποκλειστικά από τη **διάρκεια** και τη **μορφή** του σήματος διακριτού χρόνου:
  - Αν η διάρκεια του σήματος είναι **πεπερασμένη** τότε η περιοχή σύγκλισης είναι **όλο το επίπεδο z**, εξαιρώντας ενδεχομένως το 0 και το ∞, ανάλογα με τη διάρκεια του σήματος.
  - Αν η διάρκεια του σήματος είναι **άπειρη** τότε η περιοχή σύγκλισης εξαρτάται από τη μορφή του σήματος, δηλαδή αν το σήμα είναι **δεξιάς πλευράς** (αιτιατό), **αριστερής πλευράς** (αντι-αιτιατό) ή **διπλής πλευράς** (μη-αιτιατό).
- Η περιοχή σύγκλισης ορίζεται πάντα από έναν **κύκλο**, επειδή ορίζεται σε σχέση με το $|z|$. Είναι πάντα μία ενιαία περιοχή και δεν μπορεί να αποτελείται από επιμέρους τμήματα.
- Η συνάρτηση $|z| = 1$ ή $z = e^{j\omega}$ είναι ένας κύκλος με μοναδιαία ακτίνα και ονομάζεται **μοναδιαίος κύκλος**.
- Η περιοχή σύγκλισης <u>δεν περιέχει πόλους</u>, επειδή οι πόλοι είναι σημεία του επιπέδου μιγαδικών συχνοτήτων z, στα οποία η συνάρτηση $X(z)$ απειρίζεται.
- Το R_{x-} μπορεί να ισούται με μηδέν ή/και το R_{x+} μπορεί να τείνει στο άπειρο.
- Αν $R_{x+} < R_{x-}$ τότε η περιοχή σύγκλισης είναι το κενό διάστημα και ο μετασχηματισμός Ζ δεν υπάρχει.

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Z των σημάτων:

(α) $x_1[n] = a^n u[n], \quad 0 < |a| < \infty$

(β) $x_2[n] = -b^n u[-n-1], \;\; 0 < |b| < \infty$

(γ) $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$

Απάντηση: (α) Το σήμα $x_1[n]$ είναι αιτιατό και έχει τιμές μόνο για θετικό χρόνο (positive-time sequence). Ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός Z είναι:

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

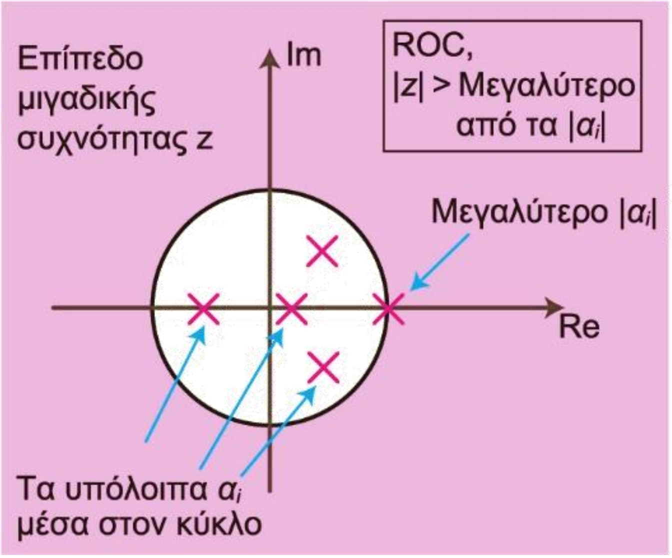
Η συνάρτηση $X_1(z)$ συγκλίνει όταν $\left|az^{-1}\right| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$. Άρα η ROC είναι η **εξωτερική επιφάνεια** ενός κύκλου που ορίζεται από το σύνολο των σημείων για τα οποία ισχύει R_{x1}: $|z| > |a|$.

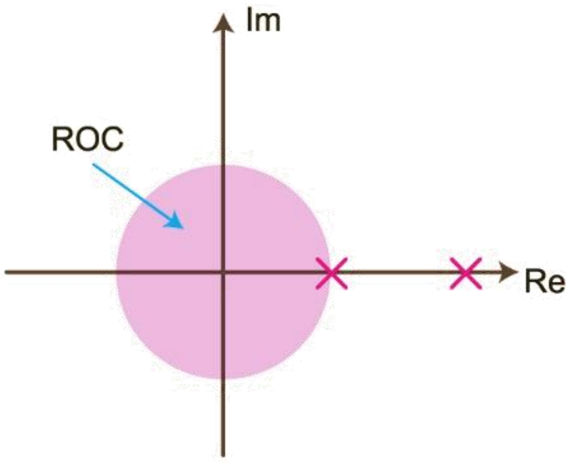
Δηλαδή:

$$R_{x1}: \quad |\alpha| < |z| < \infty$$

Επίσης, υπάρχει ένας πόλος για $z = a$ και ένα μηδενικό για $z = 0$ (σχήμα (α)).

Άσκηση 1 (συνέχεια)





(α) (β)

Περιοχές σύγκλισης (ROC) των ακολουθιών:
(α) $x_1[n]$ και (β) $x_2[n]$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

(β) Το σήμα $x_2[n]$ είναι αντι-αιτιατό και έχει τιμές μόνο για αρνητικό χρόνο (negative-time sequence). Ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός Z είναι:

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -b^n \, u[-n-1] \, z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (bz^{-1})^n$$

Θέτουμε $m = -n$ και έχουμε:

$$X_2(z) = -\sum_{m=1}^{\infty} \left(b^{-1}z\right)^m = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \left(b^{-1}z\right)^m = 1 - \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{z}{z-b}$$

Η συνάρτηση $X_2(z)$ συγκλίνει όταν $\left|b^{-1}z\right| < 1 \Rightarrow |z| < |b|$. Άρα η ROC είναι η **εσωτερική επιφάνεια** ενός κύκλου που ορίζεται από το σύνολο των σημείων για τα οποία ισχύει R_{x2}: $|z| < |b|$.

Δηλαδή:

$$R_{x2}: \; 0 < |z| < |b|$$

Επίσης, υπάρχει ένας πόλος για $z = b$ και ένα μηδενικό για $z = 0$. (σχήμα (β)).

Άσκηση 1 (συνέχεια)

- Αν στις παραπάνω ακολουθίες θέσουμε $a = b$, τότε ενώ οι ακολουθίες θα είναι διαφορετικές $x_1[n] \neq x_2[n]$, οι συναρτήσεις των μετασχηματισμών Z θα είναι ίδιες, δηλαδή $X_1(z) = X_2(z)$, αλλά με διαφορετικές περιοχές σύγκλισης ($R_{x1} \neq R_{x2}$).
- Άρα, ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Z προϋποθέτει, όχι μόνο τον υπολογισμό της $X(z)$, αλλά και τον προσδιορισμό της περιοχής σύγκλισης.

Άσκηση 1 (συνέχεια)

(γ) Το $x[n]$ είναι το άθροισμα $x_1[n] + x_2[n] = a^n u[n] - b^n u[-n-1]$ και καλείται ακολουθία διπλής πλευράς (two-side sequence). Ο μετασχηματισμός Z είναι:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\, z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n}$$

$$= \left\{\frac{z}{z-a}, R_{x1}\colon\ |z| > |\alpha|\right\} + \left\{\frac{z}{z-b}, R_{x2}\colon\ |z| < |b|\right\} = \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b}$$

$$R_x = R_{x1} \cap R_{x2}$$

- Αν $|b| < |a|$, τότε η περιοχή σύγκλισης R_x <u>δεν υπάρχει</u>, επειδή η τομή των περιοχών σύγκλισης R_{x1} και R_{x2} είναι το κενό σύνολο.
- Αν $|a| < |b|$, τότε η περιοχή σύγκλισης είναι R_x: $|\alpha| < |z| < |b|$

Συμπεράσματα για την Περιοχή Σύγκλισης

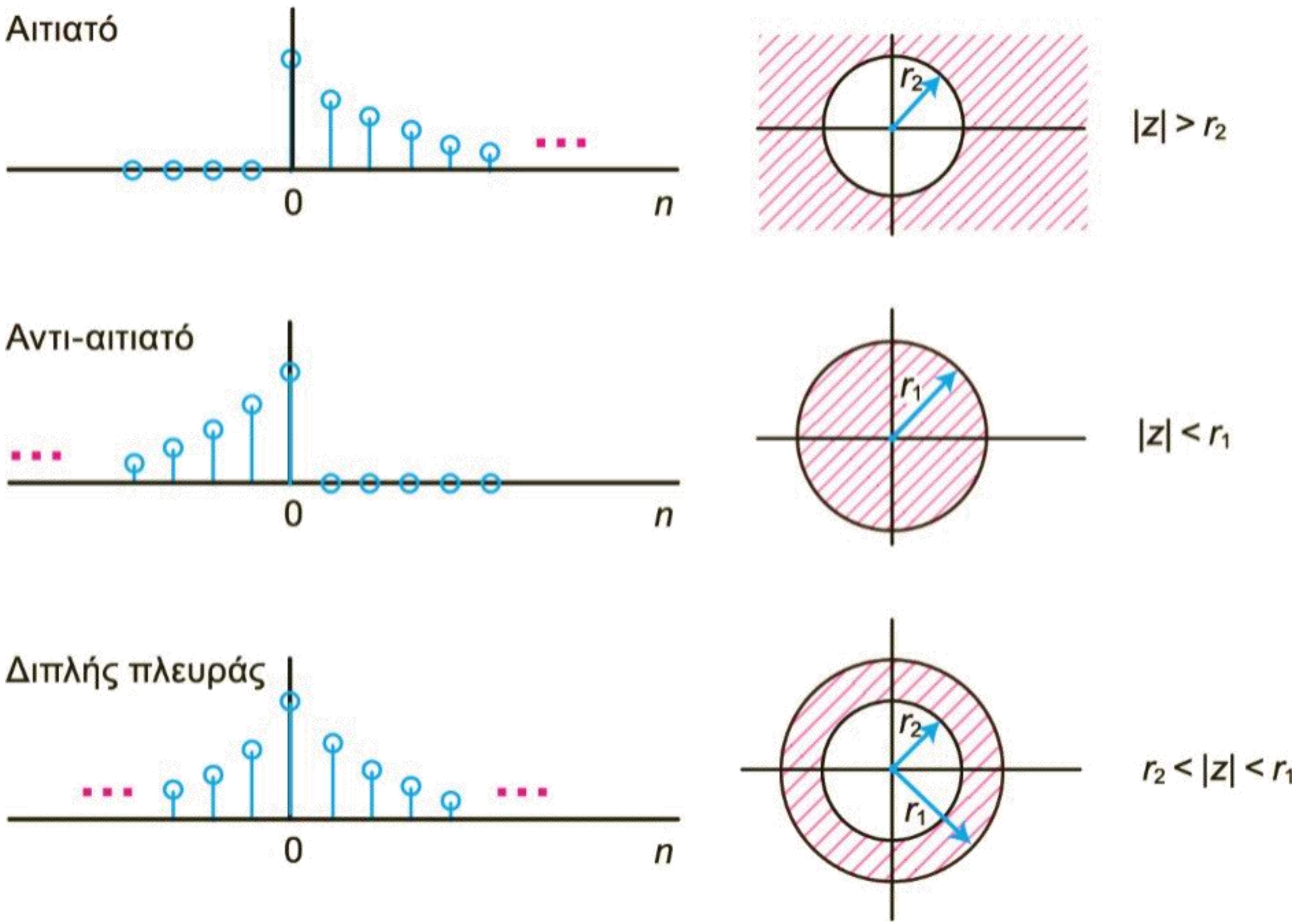
Από την επίλυση της άσκησης 1 προκύπτει ότι για σήματα **άπειρης διάρκειας** η περιοχή σύγκλισης διακρίνεται στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- **Σήματα δεξιάς πλευράς (αιτιατά)**: η περιοχή σύγκλισης είναι το **εξωτερικό** ενός κύκλου με ακτίνα R_{x-} τη μέγιστη ακτίνα των πόλων της $X(z)$ ή $|z| > R_{x-}$

- **Σήματα αριστερής πλευράς (αντι-αιτιατά)**: Η περιοχή σύγκλισης είναι το **εσωτερικό** κύκλου με ακτίνα R_{x+} την ελάχιστη ακτίνα των πόλων της $X(z)$ ή $|z| < R_{x+}$

- **Σήματα διπλής πλευράς (μη-αιτιατά)**: Η περιοχή σύγκλισης είναι το **εσωτερικό** ενός δακτυλίου με εσωτερική ακτίνα R_{x-} και εξωτερική ακτίνα R_{x+}, που αντιστοιχούν στη μέγιστη και στην ελάχιστη ακτίνα των πόλων της $X(z)$, δηλαδή ισχύει $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

Περιοχή σύγκλισης ακολουθιών <u>άπειρης διάρκειας</u>



Άσκηση 2

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος $x[n] = 3\delta[n] + \delta[n-2] + \delta[n+2]$.

Απάντηση: Ο μετ/σμός Z του σήματος πεπερασμένης διάρκειας $x[n]$ είναι:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{3\delta[n] + \delta[n-2] + \delta[+2]\}\, z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 3\delta[n]\, z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-2]\, z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n+2]\, z^{-n}$$

Επομένως:

$$X(z) = 3 + z^{-2} + z^{2}$$

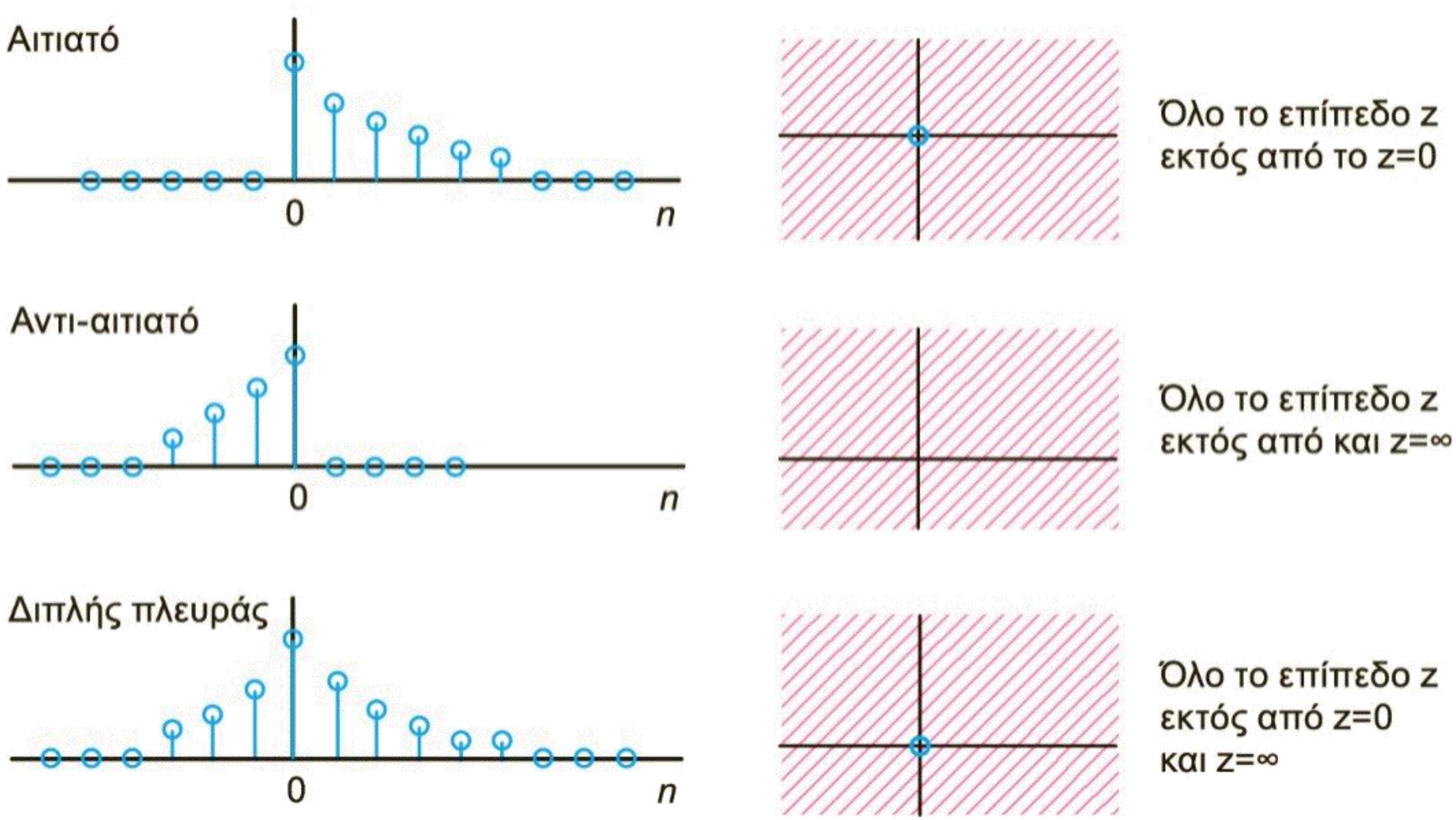
Η περιοχή σύγκλισης είναι:

$$R_x:\ 0 < |z| < \infty$$

- Επειδή $x[n] \neq 0$ για $n < 0$, η ROC δεν περιλαμβάνει τα σημεία με $|z| = \infty$.
- Επειδή $x[n] \neq 0$ για $n > 0$, η ROC δεν περιλαμβάνει το σημείο $z = 0$.

Η περιοχή σύγκλισης ακολουθιών πεπερασμένης διάρκειας απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα.

Περιοχή σύγκλισης ακολουθιών <u>πεπερασμένης διάρκειας</u>



Σχόλιο για ROC σημάτων πεπερασμένης διάρκειας

- Για σήματα **πεπερασμένης διάρκειας** $[N_1, N_2]$ όπου $(-\infty < N_1 \leq n \leq N_2 < \infty)$, η περιοχή σύγκλισης είναι ολόκληρο το μιγαδικό πεδίο z, εξαιρούμενων ενδεχομένως των 0 ή/και $\pm\infty$. Αυτά τα σημεία αποκλείονται επειδή το z^n $(n > 0)$ τείνει στο άπειρο για $z = \infty$ και το z^{-n} τείνει στο άπειρο για $z = 0$. Συγκεκριμένα:
    - Αν $N_1 < 0$, τότε το $z = \pm\infty$ δεν περιλαμβάνεται στην περιοχή σύγκλισης.
    - Αν $N_2 > 0$, τότε το $z = 0$ δεν περιλαμβάνεται στην περιοχή σύγκλισης.
- Από μαθηματική άποψη ο μετασχηματισμός Z είναι ένας εναλλακτικός τρόπος αναπαράστασης ενός σήματος, καθώς ο συντελεστής του z^{-n} είναι η τιμή του σήματος κατά τη χρονική στιγμή n.
- Ο εκθέτης του z παρέχει εκείνη την πληροφορία για τον χρόνο, η οποία είναι απαραίτητη για τον προσδιορισμό των δειγμάτων ενός σήματος.

Άσκηση 3

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος $x[n] = u[n] - u[n-5]$.

Απάντηση: Το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας. Ο μετασχηματισμός Z είναι:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{5} z^{-n} = \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^5 - 1}{z^4(z-1)}$$

και η ROC είναι: R_x: $|z| > 0$. Τα μηδενικά είναι ο λύσεις της $z^5 - 1 = 0$. Οι ρίζες αυτές είναι $z = e^{j2\pi k/5}$, $k = 0,1,\dots,4$ και είναι τοποθετημένες σε 5 ισαπέχοντα σημεία επάνω στον μοναδιαίο κύκλο.

Από τη μορφή της $X(z)$ φαίνεται ότι υπάρχει πόλος στο $z = 1$. Όμως ο πόλος αυτός εξουδετερώνεται από το μηδενικό στο $z = 1$ και συγκεκριμένα για $k = 0$. Πράγματι, παραγοντοποιώντας τον αριθμητή, έχουμε:

$$X(z) = \frac{(z-1)\left(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\right)}{z^4(z-1)} = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^4}$$

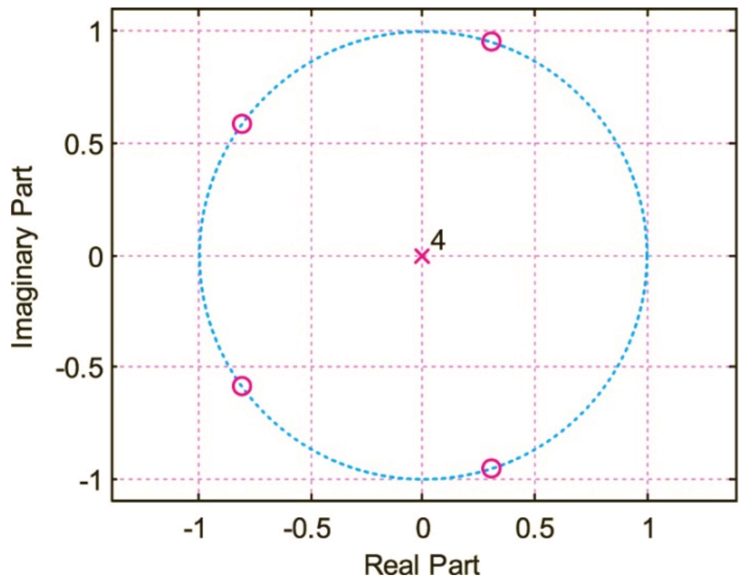
Έτσι, δεν υπάρχει πλέον ανάγκη να εξαιρέσουμε από την περιοχή σύγκλισης το $z = 1$. Αυτό επιβεβαιώνεται υπολογίζοντας το $X(1)$, το οποίο είναι $X(1) = 5$.

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Τελικά, ο μετασχηματισμός Z μπορεί να εκφραστεί στη μορφή:

$$X(z) = \frac{\prod_{k=1}^{4}\left(z - e^{jk\pi/5}\right)}{z^4}$$

και έχει τέσσερα μηδενικά τοποθετημένα επάνω στον μοναδιαίο κύκλο εκτός από τη θέση $z = 1$, καθώς επίσης και τέσσερις πόλους τοποθετημένους στο σημείο $z = 0$.



Διάγραμμα πόλων - μηδενικών

Άσκηση 4

Χωρίς τον απευθείας υπολογισμό της $X(z)$, να βρεθεί η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Ζ κάθε ενός από τα παρακάτω σήματα:

(α) $x[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] u[n-10]$

(β) $x[n] = 2^n u[-n]$

Απάντηση: (α) Επειδή το $x[n]$ είναι ακολουθία δεξιάς πλευράς, η περιοχή σύγκλισης καλύπτει την <u>εξωτερική</u> επιφάνεια ενός κύκλου. Με έναν πόλο στο $z = 1/2$ που προέρχεται από τον όρο $(1/2)^n$ και έναν πόλο στο $z = 3/4$ που προέρχεται από τον όρο $(3/4)^n$, έπεται ότι η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει τα σημεία για τα οποία είναι $|z| > 3/4$.

(β) Επειδή το $x[n]$ είναι ακολουθία αριστερής πλευράς, η περιοχή σύγκλισης καλύπτει την <u>εσωτερική</u> επιφάνεια ενός κύκλου. Με ένα πόλο στο $z = 2$, έπεται ότι η περιοχή σύγκλισης καλύπτει τα σημεία $|z| < 2$.

Σχέση μετασχηματισμού Z με άλλους μετασχηματισμούς

- Με τον μετασχηματισμό Fourier
- Με τον μετασχηματισμό Laplace

Σύνδεση μετασχηματισμού Z και Fourier

- Ο μετασχηματισμός Z είναι πιο γενικός από τον **μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου** (DTFT), που θα μελετήσουμε σε επόμενη διάλεξη. Αν θέσουμε $z = re^{j\omega}$ ο μετασχηματισμός Z είναι:

$$X(z)\Big|_{z=re^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, r^{-n}\, e^{-j\omega n} = DTFT\{x[n]\, r^{-n}\}$$

- Έτσι για ένα σήμα για το οποίο δεν μπορεί να υπολογιστεί ο DTFT, ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Z μπορεί να είναι εφικτός.

- Αν η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Z περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο ($r = |z| = 1$), τότε μπορούμε να λάβουμε τον DTFT υπολογίζοντας τον μετασχηματισμό Z επάνω στον μοναδιαίο κύκλο:

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} = DTFT\{x[n]\}$$

  δηλαδή για $r = 1$ καταλήγουμε στον μετ/σμό Fourier διακριτού χρόνου.

- Επομένως, ο DTFT μπορεί να θεωρηθεί ως μία <u>υποπερίπτωση</u> του μετασχηματισμού Z για υπολογισμό επάνω στον μοναδιαίο κύκλο ($|z| = 1$), εφόσον ο μοναδιαίος κύκλος <u>περιλαμβάνεται</u> στην περιοχή σύγκλισης.

Άσκηση 5

Ο μετασχηματισμός Z μιας ακολουθίας $x[n]$ είναι:

$$X(z) = \frac{z + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - 3z^{-4} + z^{-5}}$$

Αν η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο, να βρεθεί ο DTFT της $x[n]$ για $\omega = \pi$.

Απάντηση: Αν $X(z)$ είναι ο μετασχηματισμός Ζ της $x[n]$ και ο μοναδιαίος κύκλος βρίσκεται μέσα στη περιοχή σύγκλισης, ο DTFT της $x[n]$ μπορεί να βρεθεί από τον υπολογισμό της $X(z)$ επάνω στον μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X(z)\Big|_{z=-1}$$

Επομένως, ο DTFT στο σημείο $\omega = \pi$, είναι:

$$X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\pi} = X(z)\Big|_{z=e^{j\pi}} = X(z)\Big|_{z=-1}$$

και έχουμε:

$$X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\pi} = \frac{z + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - 3z^{-4} + z^{-5}}\Bigg|_{z=e^{j\pi}} = \frac{-1 + 2 - 1}{1 - 3 - 1} = 0$$

Σύνδεση μετασχηματισμού Z και Laplace

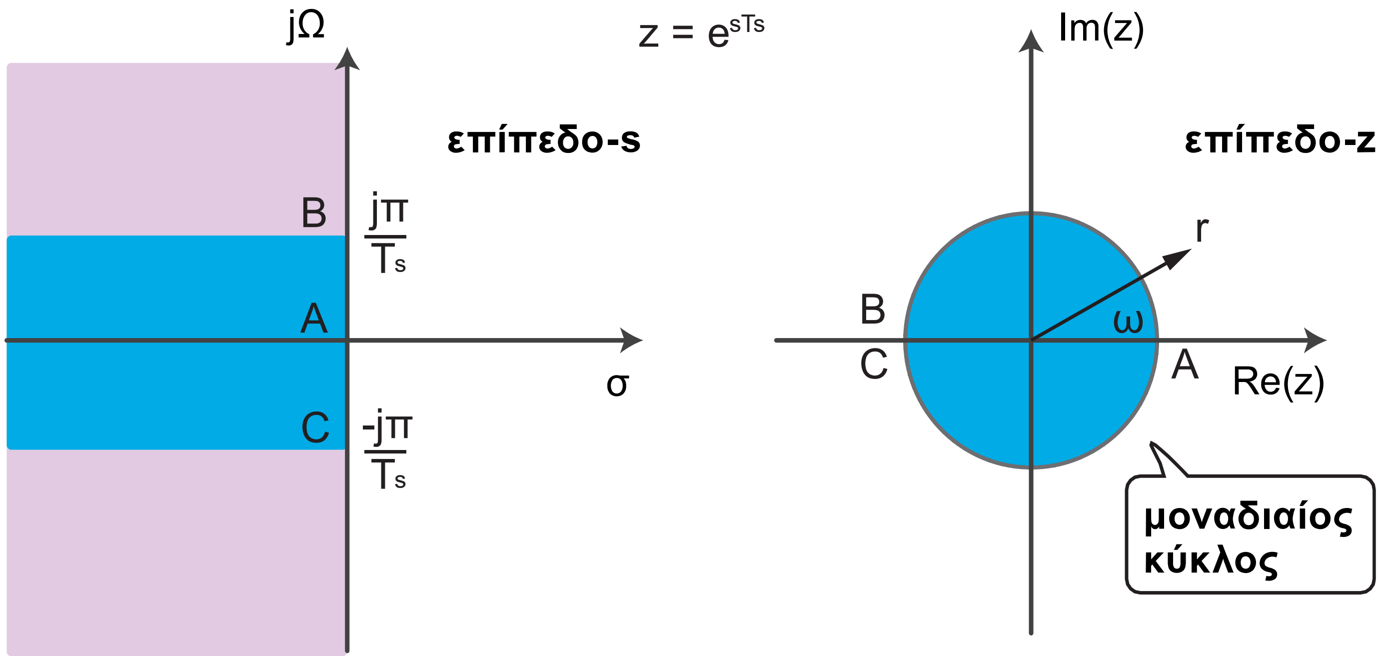
- **Μετασχηματισμός Z**: παράγει μία περιγραφή ενός σήματος ΔΧ στο πεδίο της **ψηφιακής μιγαδικής συχνότητας** z.
- **Μετασχηματισμός Laplace**: περιγράφει σήματα συνεχούς χρόνου στο πεδίο της **αναλογικής μιγαδικής συχνότητας** s.
- Αναλογική μιγαδική συχνότητα: $s = \sigma + j\Omega$, όπου σ συντελεστής απόσβεσης και Ω η αναλογική συχνότητα.
- Σύνδεση ανάμεσα στις μιγαδικές μεταβλητές συχνότητας z και s:

$$z = e^{s\,T_s} = e^{(\sigma + j\Omega)\,T_s} = e^{\sigma\,T_s}\,e^{j\Omega T_s}$$

όπου T_s η περίοδος δειγματοληψίας.

- Επομένως, η ψηφιακή μιγαδική συχνότητα z προκύπτει με **δειγματοληψία** της αναλογικής μιγαδικής συχνότητας s.
- Θέτοντας $r = e^{\sigma\,T_s}$ και $\omega = \Omega T_s$ προκύπτει $\boldsymbol{z = r\,e^{j\omega}}$, όπου r: συντελεστής απόσβεσης και ω: ψηφιακή (πραγματική) συχνότητα.
- Το μιγαδικό επίπεδο z αντιστοιχεί σε κύκλους ακτίνας r και γωνίας $-\pi \leq \omega < \pi$.

Σύνδεση μετασχηματισμού Z και Laplace



Σχέση μεταξύ πεδίων αναλογικής μιγαδικής συχνότητας s
και ψηφιακής μιγαδικής συχνότητας z

Σύνδεση μετασχηματισμού Z και Laplace

Η σχέση $z = e^{s\,T_s}$ είναι θεμελιώδους σημασίας για τη μετατροπή αναλογικών σημάτων σε ψηφιακά. Με βάση αυτή και το σχήμα προκύπτουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

- Η σχέση $z = e^{s\,T_s}$ απεικονίζει το πραγματικό μέρος του $s = \sigma + j\Omega$, δηλαδή το $Re(s) = \sigma$ σε κύκλο ακτίνας $r = e^{\sigma\,T_s} \geq 0$.
- Οι αναλογικές συχνότητες $-\pi/T_s \leq \Omega < \pi/T_s$ απεικονίζονται στις ψηφιακές συχνότητες $-\pi \leq \omega < \pi$ σύμφωνα με τη σχέση $\omega = \Omega T_s$.
- Αν $\sigma = 0$ τότε $s = j\Omega$, επομένως $|z| = 1$ και $\measuredangle z = \omega = \Omega T_s$. Δηλαδή ο άξονας $j\Omega$ του επιπέδου αναλογικής μιγαδικής συχνότητας s απεικονίζεται επάνω στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου ψηφιακής μιγαδικής συχνότητας z.
- Για $\sigma < 0$ το αριστερό ημιεπίπεδο του επιπέδου s απεικονίζεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου z, με ακτίνα $r = e^{0\,T_s} = 1$. Αντίθετα, για $\sigma > 0$ το δεξί ημιεπίπεδο του επιπέδου s απεικονίζεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου z.

Σύνδεση μετασχηματισμού Z και Laplace

- Η λωρίδα συχνοτήτων εύρους $2\pi/T_s$ στο επίπεδο s αντιστοιχεί στο κριτήριο Nyquist, το οποίο προσδιορίζει τη μέγιστη συχνότητα $\Omega_{max} = \Omega_s/2$ του αναλογικού σήματος που μπορεί να δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας Ω_s. Όσο μειώνεται το T_s τόσο αυξάνεται το εύρος της λωρίδας συχνοτήτων.
- Αν έχουμε ένα αναλογικό σήμα $x(t)$ με πεπερασμένο φάσμα συχνοτήτων [-$\pi/T_s, \pi/T_s$] και μέγιστη συχνότητα π/T_s και το δειγματοληπτήσουμε με περίοδο δειγματοληψίας T_s, τότε σύμφωνα με τη σχέση $z = e^{s\,T_s}$ το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος κυμαίνεται σε ψηφιακή συχνότητα [-π, π].
- Κινούμενοι επαναληπτικά επάνω στον μοναδιαίο κύκλο, προκύπτει ότι το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος είναι περιοδικό.
- Τα σημεία A, B, C στη λωρίδα συχνοτήτων του πεδίου αναλογικής μιγαδικής συχνότητας αντιστοιχούν στα σημεία A, B, C στο πεδίο μιγαδικών συχνοτήτων.

Σύνδεση μετασχηματισμού Ζ και Laplace

Ο Laplace ενός δειγματοληπτημένου σήματος $x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$ είναι:

$$X(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)L\{\delta(t - nT_s)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)e^{-nsT_s}$$

Θέτοντας $z = e^{s\,T_s}$ η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$X(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\, z^n$$

ισοδύναμα:

$$Z\{x(nT_s)\} = L\{x_s(t)\}\Big|_{z=e^{s\,T_s}}$$

Η σχέση αυτή συνδέει τους δύο μετασχηματισμούς και δείχνει ότι ο μετασχηματισμός Ζ είναι αντίστοιχος του Laplace, για σήματα διακριτού χρόνου.

Σύνδεση μετασχηματισμού Z και Laplace

- Οι μετασχηματισμοί Z και Laplace έχουν κοινές ιδιότητες. Όπως ο μετασχηματισμός Laplace μετατρέπει ένα συνελικτικό ολοκλήρωμα σε γινόμενο, έτσι και ο μετασχηματισμός Z μετατρέπει σε γινόμενο ένα συνελικτικό άθροισμα.
- Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Z χρησιμοποιείται για την επίλυση εξισώσεων διαφορών που προκύπτουν από την διακριτοποίηση των διαφορικών εξισώσεων.
- Η μέθοδος μερικών κλασμάτων για τον υπολογισμό του αντίστροφου Laplace χρησιμοποιείται και για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Z.
- Τέλος, η χρήση του μετασχηματισμού Z για τον σχεδιασμό ψηφιακών φίλτρων, κατά αναλογία της χρήσης του μετασχηματισμού Laplace για τον σχεδιασμό αναλογικών φίλτρων, είναι διαδεδομένη και υπάρχουν πολλές και αποτελεσματικές μέθοδοι σχεδιασμού FIR και IIR ψηφιακών φίλτρων.

Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Z

Στις πρακτικές περιπτώσεις ψηφιακών συστημάτων το σύστημα είναι **αιτιατό**, δηλαδή $h[n] = 0$ για $n < 0$ και το σήμα εισόδου είναι επίσης αιτιατό, δηλαδή $x[n] = 0$ για $n < 0$. Για την περίπτωση αιτιατού σήματος ο ορισμός του μετασχηματισμού Z γράφεται:

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

- με περιοχή σύγκλισης R_x και ορίζει τον **μονόπλευρο** (unilateral, one sided Z^+ transform) μετασχηματισμό Z^+.

- Μπορούμε να ορίσουμε τον μονόπλευρο μετασχηματισμό για οποιοδήποτε σήμα $x[n]$, το οποίο μετατρέπουμε σε αιτιατό, εφόσον το πολλαπλασιάσουμε με το μοναδιαίο βήμα $u[n]$:

$$X^+(z) = Z\{x[n]\, u[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, u[n]\, z^{-n}$$

με περιοχή σύγκλισης R_{x^+}

Σχέση μεταξύ Μονόπλευρου Z^+ και Αμφίπλευρου Z Μετασχηματισμού

Ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός Ζ μπορεί να εκφραστεί σε όρους μονόπλευρου μετασχηματισμού Z^+ από τη σχέση:

$$X(z) = Z^+\{x[n]\, u[n]\} + Z^+\{x[-n]\, u[n]\} - x[0]$$

με περιοχή σύγκλισης $R_x = R_{x1} \cap R_{x2}$, όπου R_{x1} η περιοχή σύγκλισης του $Z^+\{x[n]\, u[n]\}$ και R_{x2} η περιοχή σύγκλισης του $Z^+\{x[-n]\, u[n]\}$.

- Ο Z^+ **συμπίπτει** με τον Z όταν το σήμα $x[n]$ είναι **αιτιατό**.
- Ο Z^+ είναι πολύ χρήσιμος στη μελέτη αποκρίσεων ΓΑΚΜ συστημάτων σε αιτιατά σήματα εισόδου, καθώς και στην επίλυση ΓΕΔΣΣ επειδή μπορεί να **συμπεριλάβει τις αρχικές συνθήκες** $y[-1], y[-2], \dots, y[N-1]$ της εξόδου του συστήματος.
- Λόγω της χρησιμότητάς του η αναφορά σε μετασχηματισμό Ζ συνήθως ταυτίζεται με τον Z^+, εκτός αν ρητά αναφέρεται ο αμφίπλευρος.

Άσκηση 6

Να βρεθεί ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Ζ του σήματος:

$$x[n] = \delta[n-5] + \delta[n] + 2^{n-1}u[-n]$$

Απάντηση: Θεωρούμε τον συμβολισμό $x_+[n]$ για την ακολουθία που σχηματίζεται από το $x[n]$, θέτοντας $x[n] = 0$ για $n < 0$, δηλαδή:

$$x_+[n] = \begin{cases} x[n] & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Για την ακολουθία αυτή, επειδή είναι:

$$x_+[n] = \delta[n-5] + \delta[n] + 2^{-1}\delta[n]$$

Ο μονόπλευρος Ζ είναι:

$$X_1(z) = z^{-5} + 1 + 0.5 = 1.5 + z^{-5}$$

Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχηματισμών Ζ και Περιοχές Σύγκλισης

Σήμα, $x[n]$	Μετασχηματισμός Ζ, $X(z)$	Περιοχή Σύγκλισης (ROC)
$\delta[n]$	1	Όλο το πεδίο z
$\delta[n-n_0]$	z^{-n_0}	Όλο το πεδίο z, εκτός από το 0 αν $n_0 > 0$ και το ∞ αν $n_0 < 0$
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$	$\|z\| < 1$
$a^n\, u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n\, u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$\|z\| < \|a\|$
$n\, a^n\, u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\| > \|a\|$

Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχηματισμών Ζ και Περιοχές Σύγκλισης

Σήμα, $x[n]$	Μετασχηματισμός Ζ, $X(z)$	Περιοχή Σύγκλισης (ROC)
$\cos(\omega_0 n)\, u[n]$	$\dfrac{1 - z^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\omega_0 n)\, u[n]$	$\dfrac{z^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n)\, u[n], \quad \lvert\alpha\rvert < 1$	$\dfrac{1 - az^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$a^n \sin(\omega_0 n)\, u[n], \quad \lvert\alpha\rvert < 1$	$\dfrac{az^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Ζ

- Γραμμικότητα
- Μετατόπιση στο Χρόνο
- Αντιστροφή στο Χρόνο
- Κλιμάκωση στο Χρόνο
- Κλιμάκωση στη Μιγαδική Συχνότητα
- Θεώρημα Συνέλιξη
- Παραγώγιση στο Πεδίο Ζ
- Μιγαδική Συζυγία
- Πολλαπλασιασμός Σημάτων
- Θεώρημα Αρχικής Τιμής
- Θεώρημα Τελικής Τιμής

Γραμμικότητα

Αν για τα σήματα $x_1[n]$ και $x_2[n]$ ισχύει:

$$x_1[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z), \qquad R_{x_1}$$

$$x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z), \qquad R_{x_2}$$

τότε ο μετασχηματισμός του γραμμικού συνδυασμού $a_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]$ θα είναι:

$$a_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} a_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z)$$

$$R_x \ = R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

Μετατόπιση στο Χρόνο (Ολίσθηση Δειγμάτων)

Αν ο μετασχηματισμός Z του σήματος $x[n]$ είναι:

$$x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z), \qquad R_x$$

τότε ο μετασχηματισμός Z του χρονικά μετατοπισμένου σήματος $x[n-n_0]$ είναι:

$$x[n-n_0] \overset{Z}{\longleftrightarrow} z^{-n_0}X(z)$$

με περιοχή σύγκλισης την ίδια, εκτός από το σημείο $z=0$ αν $n_0>0$ και το σημείο $z=\infty$ αν $n_0<0$.

Αν το σήμα $x[n]$ είναι αιτιατό, για τον μονόπλευρο μετασχηματισμό Z^+ ισχύει:

$$x[n-n_0]\,u[n] \overset{Z^+}{\longleftrightarrow} z^{-n_0}X^+(z) + \sum_{n=1}^{n_0} x[-n]\,z^{n-n_0}$$

Άσκηση 7

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ συναρτήσει του μετασχηματισμού Z της $x[n]$.

Απάντηση: Η σχέση $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$, μπορεί να γραφεί $y[n] = y[n-1] + x[n]$. Επομένως:

$$x[n] = y[n] - y[n-1]$$

Αν μετασχηματίσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης και χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο του μετασχηματισμού Z, βρίσκουμε:

$$X(z) = Y(z) - z^{-1}Y(z) \Rightarrow X(z) = Y(z)[1 - z^{-1}]$$

Λύνουμε ως προς $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}\ X(z)$$

Επομένως:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$$

Αντιστροφή και Κλιμάκωση στο Χρόνο

Αντιστροφή στο χρόνο (αναδίπλωση): Αν ο μετ/σμός Ζ ενός σήματος $x[n]$ είναι:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \qquad R_x : r_1 < |z| < r_2$$

τότε ο μετασχηματισμός Ζ της ανάκλασης $x[-n]$ είναι:

$$y[n] = x[-n] \xleftrightarrow{Z} X\left(z^{-1}\right), \qquad R_y : \frac{1}{r_1} < |z| < \frac{1}{r_2}$$

Κλιμάκωση στο Χρόνο: Αν ο μετασχηματισμός Ζ ενός σήματος $x[n]$ είναι:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \qquad R_x : r_1 < |z| < r_2$$

τότε ο μετ/σμός Ζ του υπερδειγματοληπτημένου σήματος $x[n/N]$, $(N > 1)$, είναι:

$$y[n] = x[n/N] \xleftrightarrow{Z} X\left(z^N\right), \qquad R_y : R = R_x^{1/k}$$

Κλιμάκωση στη Μιγαδική Συχνότητα

Αν ο μετασχηματισμός Z ενός σήματος $x[n]$ είναι:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \qquad R_x\colon\ r_1 < |z| < r_2$$

τότε ο μετασχηματισμός του γινομένου $a^n x[n]$, $a \in C$, είναι:

$$y[n] = a^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{\alpha}\right), \qquad R_y\colon |a| r_1 < |z| < |a| r_2$$

Θεώρημα Συνέλιξης

Αν οι μετασχηματισμοί Ζ δύο σημάτων $x[n]$ και $h[n]$ είναι:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \qquad R_x$$

$$h[n] \xleftrightarrow{Z} H(z), \qquad R_h$$

τότε ο μετασχηματισμός Ζ της συνέλιξης $y[n] = h[n] * x[n]$ είναι το **γινόμενο** των επιμέρους μετασχηματισμών:

$$y[n] = h[n] * x[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι η **τομή** των επιμέρους περιοχών σύγκλισης, δηλαδή:

$$R_y = R_h \cap R_x$$

Η ιδιότητα της συνέλιξης είναι εξαιρετικά χρήσιμη για τη μελέτη ΓΑΚΜ συστημάτων επειδή δίνει έναν εναλλακτικό και απλούστερο υπολογισμό της συνέλιξης σε σχέση με τους υπολογισμούς στο πεδίο του χρόνου.

Άσκηση 8

Να υπολογιστεί η συνέλιξη μεταξύ των ακολουθιών $x[n] = \{\hat{1}, -2, 0, 3, -1\}$ και $h[n] = \left\{2, \hat{3}, 0, 1\right\}$.

Απάντηση: Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Z κάθε ακολουθίας χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο και έχουμε:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{4} x[n]\, z^{-n} = 1 - 2^{-1} + 3z^{-3} - z^{-4}$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-1}^{2} h[n]\, z^{-n} = 2z + 3 + z^{-2}$$

Με βάση την ιδιότητα της συνέλιξης έχουμε:

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z)\, H(z) = \left(1 - 2z^{-1} + 3z^{-3} - z^{-4}\right)\left(2z + 3 + z^{-2}\right) \\ &= 2z + 3 + z^{-2} - 4 - 6z^{-1} - 2z^{-3} + 6z^{-2} + 9z^{-3} + 3z^{-5} - 2z^{-3} - 3z^{-4} - z^{-6} \\ &= 2z - 1 + 6z^{-1} + 7z^{-2} + 5z^{-3} - 3z^{-4} + 3z^{-5} - z^{-6} = \sum_{n=-1}^{6} y[n]\, z^{-n} \end{aligned}$$

Από την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο, λαμβάνουμε το αποτέλεσμα:

$$y[n] = \{2, -\hat{1}, -6, 7, 5, -3, 3, -1\}$$

Παραγώγιση και Μιγαδική Συζυγία

Παραγώγιση στο Πεδίο z: Αν ο μετασχηματισμός Z ενός σήματος $x[n]$ είναι:

$$x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z), \qquad R_x : r_1 < |z| < r_2$$

τότε ισχύει:

$$y[n] = n\,x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{dX(z)}{dz}, \qquad R_y = R_x$$

Μιγαδική Συζυγία: Αν ο μετασχηματισμός Z ενός μιγαδικού σήματος $x[n]$ είναι:

$$x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z), \qquad R_x$$

τότε ισχύει:

$$y[n] = x^*[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X^*(z^*), \qquad R_y = R_x$$

Πολλαπλασιασμός Σημάτων

Αν οι μετασχηματισμοί Ζ δύο σημάτων $x_1[n]$ και $x_2[n]$ είναι:

$$x_1[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z), \qquad R_{x_1}$$

$$x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z), \qquad R_{x_2}$$

τότε για τον μετασχηματισμό Ζ του γινομένου των σημάτων ισχύει:

$$y[n] = x_1[n]\, x_2[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) X_2(z/v)\, v^{-1}\, dv$$

όπου C είναι μια κλειστή καμπύλη, που βρίσκεται εντός της περιοχής σύγκλισης και διαγράφεται με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Η περιοχή σύγκλισης είναι:

$$R_y\colon\ R_{x_1} \cap \bar{R}_{x_2}$$

όπου $\bar{R}_{x_2}$είναι η συμπληρωματική περιοχή της R_{x_2}.

Θεωρήματα Αρχικής και Τελικής Τιμής

Θεώρημα Αρχικής Τιμής: Αν $X(z)$ είναι ο μετασχηματισμός Ζ ενός αιτιατού σήματος $x[n]$ ($x[n] = 0$ για $n < 0$), τότε το όριο της συνάρτησης $X(z)$ όταν το z τείνει στο άπειρο ισούται με την τιμή του σήματος στο $n = 0$:

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

Θεώρημα Τελικής Τιμής: Αν $X(z)$ είναι ο μετασχηματισμός Ζ ενός σήματος $x[n]$, τότε το όριο της ακολουθίας $x[n]$, όταν το n τείνει στο άπειρο, δίνεται από τη σχέση:

$$\lim_{n \to \infty} x[n] = \lim_{z \to 1} (z - 1) X(z)$$

Άσκηση 9

Αιτιατό σήμα διακριτού χρόνου έχει μετασχηματισμό Z που δίνεται από τη σχέση:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Να υπολογιστεί η τιμή του σήματος $x[n]$ στη θέση $n = 0$.

Απάντηση: Για $x[0]$ από το θεώρημα αρχικής τιμής προκύπτει:

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{1 - az^{-1}} = 1$$

Άσκηση 10

Αιτιατό σήμα διακριτού χρόνου έχει μετασχηματισμό Ζ που δίνεται από τη σχέση:

$$X(z) = \frac{4z^2 + 3z + 1}{(z-1)(z+2)^2}$$

Να υπολογιστεί η τιμή του σήματος $x[n]$ για $n \to \infty$.

<u>Απάντηση</u>: Για $X[n], n \to \infty$ από το θεώρημα τελικής τιμής προκύπτει:

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{4z^2 + 3z + 1}{(z-1)(z+2)^2}$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{4z^2 + 3z + 2}{(z+2)^2} = \frac{4+3+1}{3^2} = \frac{8}{9}$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Ζ

Ιδιότητα	Σήμα διακριτού χρόνου	Μετασχηματισμός Ζ	Περιοχή Σύγκλισης
Γραμμικότητα	$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]$	$a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s)$	$R_{x_1} \cap R_{x_2}$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x[n-k]$	$z^{-k} X(s)$	R_x
Μετατόπιση στη συχνότητα	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\|z_0\| R_x$
Συνέλιξη	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)\, X_2(z)$	$R_{x_1} \cap R_{x_2}$
Συζυγία στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
Αλλαγή κλίμακας χρόνου	$x[n/k]$	$X\left(z^k\right)$	$R_x^{1/k}$
Ανάκλαση	$x[-n]$	$X(1/z)$	$\frac{1}{r_1} < \|z\| < \frac{1}{r_2}$
Άθροισμα στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$	$R_x \cap \{\|z\| > 1\}$
Διαφορά στο χρόνο	$x[n] - x[n-1]$	$(1-z^{-1}) X(z)$	$R_x \cap \{\|z\| > 0\}$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$n\, x[n]$	$-\frac{dX(z)}{dz}$	R_x
Θεώρημα αρχικής τιμής	$x[n]$ αιτιατό	$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$	
Θεώρημα τελικής τιμής	$x[n]$ αιτιατό	$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1} (z-1) X(z)$	

Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Ζ

Σήμα διακριτού χρόνου	Μετασχηματισμός Ζ	Περιοχή Σύγκλισης
$\delta[n]$	1	Όλο το επίπεδο z
$\delta[n-n_0]$	z^{-n_0}	Όλο το επίπεδο z
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 0$
$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$\cos(\omega_0 n)\, u[n]$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos(\omega_0 n)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$\sin(\omega_0 n)\, u[n]$	$\dfrac{z^{-1}\sin(\omega_0 n)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos(\omega_0 n)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$
$a^n sin(\omega_0 n) u[n]$	$\dfrac{az^{-1}\sin(\omega_0 n)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$

Πόλοι και Μηδενικά του Μετασχηματισμού Ζ

Πόλοι και Μηδενικά Μετασχηματισμού Z

Η συνάρτηση $X(z)$ μπορεί να εκφραστεί σε κλασματική μορφή ως πηλίκο πολυωνύμων όρων του z^{-1} ή του z:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m \, z^{-m}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k \, z^{-k}}$$

Μετά από παραγοντοποίηση αριθμητή και παρονομαστή, η συνάρτηση $X(z)$ γράφεται:

$$H(z) = b_0 \, z^{N-M} \frac{\prod_{m=1}^{M}(z - z_m)}{\prod_{k=1}^{N}(z - p_k)}$$

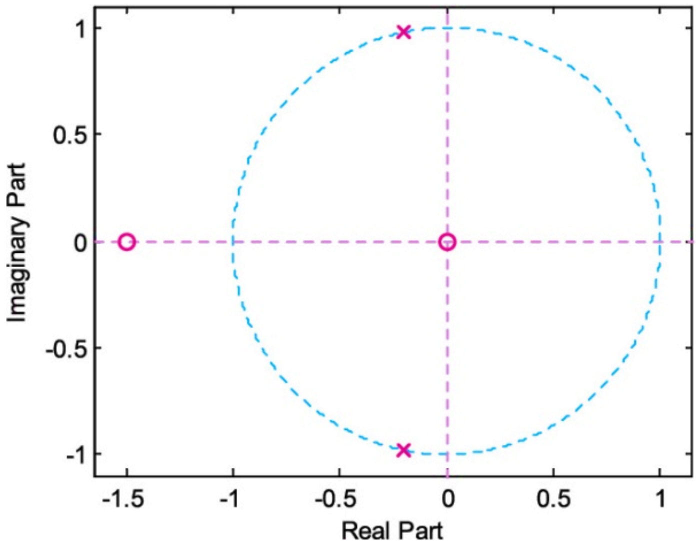
- Οι ρίζες $\boldsymbol{z_k}$ του αριθμητή ονομάζονται **μηδενικά** (zeros) και οι ρίζες $\boldsymbol{p_k}$ του παρονομαστή ονομάζονται **πόλοι** (poles).
- Οι πόλοι και τα μηδενικά παρέχουν μια γραφική αναπαράσταση της $X(z)$, η οποία ονομάζεται **διάγραμμα πόλων – μηδενικών**.
- Τα διαγράμματα πόλων – μηδενικών αποτελούν ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο μελέτης των ΓΑΚΜ συστημάτων διακριτού χρόνου, καθώς υπολογίζονται με εύκολο τρόπο και παρέχουν ποιοτικές πληροφορίες για τη συμπεριφορά του συστήματος, όπως για την αιτιότητα και την ευστάθεια.

Άσκηση 11

Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων και μηδενικών της συνάρτησης:

$$X(z) = \frac{2z^2 + 3z}{z^2 + 0.4z + 1}$$

Απάντηση: Με παραγοντοποίηση αριθμητή και παρονομαστή βρίσκουμε τα μηδενικά και τους πόλους αντίστοιχα. Είναι: $p_{1,2} = -0.20 \pm j0.9798$ και $z_1 = 0,\quad z_2 = -1.5$



Διάγραμμα πόλων - μηδενικών

Μέθοδοι Υπολογισμού Αντίστροφου Μετασχηματισμού Ζ

- Με θεωρήματα ολοκληρωτικών υπολοίπων
- Με ανάπτυξη σε δυναμοσειρές
- Με ανάπτυξη σε μερικά αθροίσματα

Ανάπτυγμα σε Δυναμοσειρά

Όταν η συνάρτηση $X(.)$ δίνεται σε κλασματική μορφή $X(z) = B(z)/A(z)$ και έχει περιοχή σύγκλισης εκτός κύκλου ακτίνας R, (δηλαδή το $x[n]$ είναι αιτιατό), τότε μπορεί να εκφραστεί σε πολυωνυμική μορφή, διαιρώντας το $B(z)$ με το $A(z)$:

$$X(z) = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots$$

Στην περίπτωση αυτή η ακολουθία $x[n]$ μπορεί να παραχθεί από τη σχέση:

$$x[n] = x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \cdots$$

Η μέθοδος ονομάζεται και «μέθοδος μακράς διαίρεσης» (long-division method).

Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ αρκεί να εκτελέσουμε τη διαίρεση $B(z)/A(z)$, η οποία μας δίνει ένα (πιθανά άπειρης τάξης) πολυώνυμο, του οποίου οι συντελεστές διατεταγμένοι σε φθίνουσα σειρά των δυνάμεων του z^{-1} ή του z είναι οι τιμές της ακολουθίας $x[n]$.

Το μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι δεν οδηγεί σε μια κλειστή μαθηματική μορφή της ακολουθίας $x[n]$.

Άσκηση 12

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της συνάρτησης:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}, \qquad R_x : |z| > \frac{1}{2}$$

Απάντηση: Η μορφή της περιοχής σύγκλισης υποδηλώνει ότι το σήμα $x[n]$ είναι δεξιάς πλευράς (αιτιατό). Εκτελούμε τη διαίρεση $B(z)/A(z)$, ώστε να αποδώσουμε τη συνάρτηση $X(z)$ ως δυναμοσειρά ως προς z^{-1} και βρίσκουμε:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = 1 + \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2} + \frac{1}{8} z^{-3} + \frac{1}{16} z^{-4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}$$

Επομένως, η ακολουθία του σήματος διακριτού χρόνου είναι:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Άσκηση 12 (συνέχεια)

Η διαίρεση $B(z)/A(z)$ που εκτελέσαμε, φαίνεται παρακάτω:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1-\frac{1}{2}z^{-1} \\ \hline
-1+\frac{1}{2}z^{-1} & 1+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}+\frac{1}{8}z^{-3}+\frac{1}{16}z^{-4}+\cdots \\
\quad -\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2} & \\
\qquad -\frac{1}{4}z^{-2}+\frac{1}{8}z^{-3} & \\
\qquad\qquad -\frac{1}{8}z^{-3} & \\
\qquad\qquad +\frac{1}{16}z^{-4} & \\
\qquad\qquad\quad \ldots &
\end{array}
$$

Ανάπτυγμα σε Άθροισμα Μερικών Κλασμάτων

Όταν η συνάρτηση $X(z)$ είναι εκφρασμένη σε κλασματική μορφή όρων z^{-1} ή z, μπορεί να εκφραστεί σαν άθροισμα απλών (πρώτης τάξης) κλασμάτων, όπου κάθε κλάσμα έχει έναν γνωστό μετασχηματισμό Z (είναι η πλέον διαδεδομένη).

Θεωρούμε ότι η συνάρτηση $X(z)$ γράφεται σε κλασματική μορφή ως:

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

και έχει περιοχή σύγκλισης $R_{x-} < |z| < R_{x+}$.

Η μέθοδος εφαρμόζεται εφόσον ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι **μικρότερος** από τον βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή ($M < N$).

Ανάπτυγμα σε Άθροισμα Μερικών Κλασμάτων

Αν αυτό δεν ισχύει, δηλαδή αν $M \geq N$, τότε εκτελούμε πρώτα πολυωνυμική διαίρεση και μετατρέπουμε τη συνάρτηση $X(z)$ στη μορφή:

$$X(z) = \frac{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 z^{-1} + \cdots + \tilde{b}_{N-1} z^{-(N-1)}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} + \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k}$$

Στην περίπτωση που βαθμός του αριθμητή είναι ίσος ή μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρονομαστή ($M \geq N$), τότε στο αποτέλεσμα θα εμφανιστούν όροι $\delta[n]$ και παράγωγοί τους.

Ωστόσο, αυτό δεν δημιουργεί κάποιο πρόβλημα, όπως δημιουργούσε η εμφάνιση συναρτήσεων $\delta(t)$ στα σήματα συνεχούς χρόνου, επειδή η ακολουθία $\delta[n]$ στον διακριτό χρόνο είναι καλά ορισμένη.

Ανάπτυγμα σε Άθροισμα Μερικών Κλασμάτων

Το άθροισμα (ευθεία μορφή) υπάρχει μόνο εφόσον $M \geq N$, διαφορετικά είναι μηδενικό.

Παραγοντοποιώντας το $A(z)$, το κλασματικό μέρος του αθροίσματος γράφεται:

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{1 - p_k z^{-1}}$$

όπου p_k είναι ο k πόλος του $X(z)$ και R_k είναι το **υπόλοιπο** της διαίρεσης του κλασματικού μέρους για τον πόλο p_k.

Αν οι πόλοι είναι **απλοί διακριτοί**, το υπόλοιπο R_k δίνεται από τη σχέση:

$$R_k = \left. \frac{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 z^{-1} + \cdots + \tilde{b}_{N-1} z^{-(N-1)}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} \left(1 - p_k z^{-1}\right) \right|_{z=p_k}$$

Αν υπάρχει **πολλαπλός πόλος**, έστω ο p_k με πολλαπλότητα r, τότε αυτός αναλύεται:

$$\sum_{l=1}^{r} \frac{R_{k,l\, z^{-(l-1)}}}{(1 - p_k z^{-1})^l} = \frac{R_{k,1}}{1 - p_k z^{-1}} + \frac{R_{k,2} z^{-1}}{(1 - p_k z^{-1})^2} + \cdots + \frac{R_{k,r} z^{-(r-1)}}{(1 - p_k z^{-1})^r}$$

Ανάπτυγμα σε Άθροισμα Μερικών Κλασμάτων

Τέλος, η ακολουθία $x[n]$ δίνεται από τη σχέση:

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} R_k Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-p_k z^{-1}}\right\} + \sum_{k=0}^{M-N} C_k\, \delta[n-k]$$

Αν υπάρχει το πρώτο άθροισμα, τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός Ζ αυτού, υπολογίζεται με την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο. Η συνάρτηση $X(z)$ μπορεί να περιγραφεί σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{1}{1-p_k z^{-1}} = \frac{z}{z-p_k}$$

οι οποίοι έχουν αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ:

$$Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-p_k}\right\} = \begin{cases} p_k^n\, u[n], & \text{αν } |z_k| \le R_{x-} \\ -p_k^n\, u[-n-1], & \text{αν } |z_k| \ge R_{x+} \end{cases}$$

Ο επάνω κλάδος περιγράφει μία ακολουθία **δεξιάς πλευράς** και ο κάτω κλάδος περιγράφει μία ακολουθία **αριστερής πλευράς**.

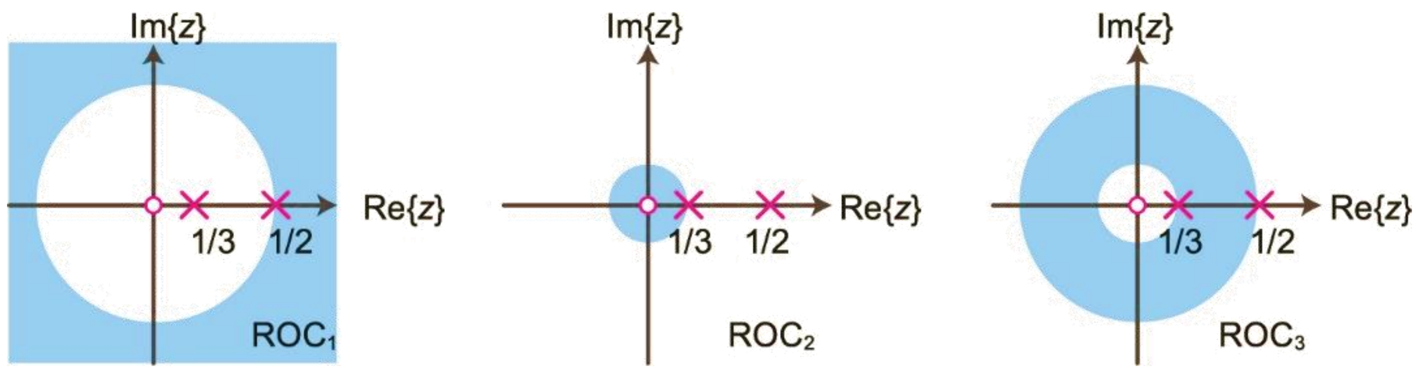
Αν η συνάρτηση $X(z)$ δίνεται ως λόγος πολυωνύμων εκφρασμένων σε όρους του z (και όχι του z^{-1}), τότε εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία και αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα την παράσταση $X(z)/z$.

Άσκηση 13

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της συνάρτησης:

$$X(z) = \frac{3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

Απάντηση: Ο δοθείς μετασχηματισμός Z είναι το άθροισμα δύο ρητών συναρτήσεων πρώτου βαθμού, δηλαδή βρίσκεται ήδη σε μορφή αθροίσματος απλών κλασμάτων. Οι πόλοι του μετασχηματισμοί είναι $z_1 = 1/2$ και $z_2 = 1/3$. Επειδή δεν έχει προσδιοριστεί η περιοχή σύγκλισης, υπάρχουν τρεις δυνατές περιπτώσεις περιοχών σύγκλισης, όπως δείχνεται στο σχήμα:



Περιοχές σύγκλισης

Άσκηση 13 (συνέχεια)

(α) Περιοχή σύγκλισης $\boldsymbol{R_{x_1}}$: $\mathbf{1/2} < |\boldsymbol{z}| < \infty$

Επειδή η περιοχή σύγκλισης της $X(z)$ είναι η εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου και οι πόλοι της βρίσκονται στην <u>εσωτερική</u> πλευρά του κύκλου, προκύπτει ότι η ακολουθία $x[n]$ είναι <u>δεξιάς πλευράς</u> (αιτιατό σήμα). Χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο ζεύγος για τις εκθετικές ακολουθίες δεξιάς πλευράς, βρίσκουμε:

$$x[n] = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] = \left\{3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} u[n]$$

(β) Περιοχή σύγκλισης $\boldsymbol{R_{x_2}}$: $\mathbf{0} < |\boldsymbol{z}| < \mathbf{1/3}$

Επειδή η περιοχή σύγκλισης της $X(z)$ είναι η εσωτερική επιφάνεια ενός κύκλου και οι πόλοι της βρίσκονται στην <u>εξωτερική</u> πλευρά του κύκλου, ακολουθία $x[n]$ είναι <u>αριστερής πλευράς</u> (αντι-αιτιατό σήμα). Χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο ζεύγος για τις εκθετικές ακολουθίες αριστερής πλευράς, βρίσκουμε:

$$x[n] = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] = -\left\{3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} u[-n-1]$$

Άσκηση 13 (συνέχεια)

(γ) Περιοχή σύγκλισης $\boldsymbol{R_{x_3}}$: $\mathbf{1/3 < |z| < 1/2}$

Επειδή η περιοχή σύγκλισης της $X(z)$ είναι η εσωτερική επιφάνεια ενός κυκλικού δακτυλίου, ο πόλος z_1 βρίσκεται στην εξωτερική πλευρά του μεγάλου κύκλου ενώ ο πόλος z_2 βρίσκεται στην εσωτερική πλευρά του μικρού κύκλου, η ακολουθία $x[n]$ είναι διπλής πλευράς που σχηματίζεται από το άθροισμα μιας ακολουθίας αριστερής πλευράς και μιας ακολουθίας δεξιάς πλευράς.

Ομοίως με παραπάνω, βρίσκουμε:

$$x[n] = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Άσκηση 14

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της συνάρτησης:

$$X(z) = \frac{1}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}, \qquad |z| > 2$$

Απάντηση: Η $X(z)$ είναι μια ρητή συνάρτηση του z^{-1} της οποίας ο παρονομαστής είναι δευτέρου βαθμού ως προς τον όρο z. Ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή, οπότε προχωρούμε απευθείας στην παραγοντοποίηση του παρονομαστή και στην ανάπτυξη της $X(z)$ σε μερικά κλάσματα. Είναι:

$$X(z) = \frac{1}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{1}{(1 + 2z^{-1})(1 + z^{-1})}$$

$$= \frac{2}{1 + 2z^{-1}} - \frac{1}{1 + z^{-1}}$$

Επειδή $|z| > 2$, η ακολουθία $x[n]$ είναι δεξιάς πλευράς και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z είναι:

$$x[n] = 2(-2)^n\, u[n] - (-1)^n\, u[n] = \{2(-2)^n - (-1)^n\}u[n]$$

Άσκηση 15

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων:

$$h[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] \quad \text{και} \quad x[n] = 3^n u[-n]$$

<u>Απάντηση</u>: Η ακολουθία $h[n]$ είναι δεξιάς πλευράς (αιτιατή) και έχει μετ/σμό Ζ:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}, \qquad R_h : \ |z| > \frac{1}{2}$$

Η ακολουθία $x[n]$ είναι αριστερής πλευράς (αντι-αιτιατή) και ο μετ/σμός Ζ μπορεί να βρεθεί με χρήση των ιδιοτήτων της μετατόπισης και αντιστροφής στο χρόνο:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} 3^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3} z\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z} = -\frac{3z^{-1}}{1 - 3z^{-1}},$$

$$R_x : \ |z| < 3$$

Άσκηση 15 (συνέχεια)

Άρα, ο μετασχηματισμός Ζ της συνέλιξης $y[n] = h[n] * x[n]$, είναι:

$$Y(z) = -\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{3z^{-1}}{1-3z^{-1}}$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι $R_y = R_x \cap R_h$, για τις οποίες ισχύει $|\mathrm{z}| > 1/2$ και $|z| < 3$. Επομένως είναι $R_y : 1/2 < |z| < 3$.

Εξαιτίας της μορφής της περιοχής σύγκλισης αναμένουμε η ακολουθία $y[n]$ να είναι το άθροισμα μίας ακολουθίας δεξιάς πλευράς και μίας ακολουθίας αριστερής πλευράς.

Ο αντίστροφος μετ/σμός Ζ της $Y(z)$ προκύπτει με ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα:

$$Y(z) = \frac{R_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{R_2}{1-3z^{-1}}$$

όπου τα υπόλοιπα R_1 και R_2 της πολυωνυμικής διαίρεσης για τους αντίστοιχους πόλους δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

Άσκηση 15 (συνέχεια)

$$R_1 = \left[\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)Y(z)\right]_{z=\frac{1}{2}} = \left[\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\cdot\frac{3z^{-1}}{1-3z^{-1}}\right]_{z=\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{3z^{-1}}{1-3z^{-1}}\right]_{z=\frac{1}{2}} \Rightarrow R_1 = \frac{6}{5}$$

και

$$R_2 = \left[\left(1-3z^{-1}\right)Y(z)\right]_{z=3} = \left[\left(1-3z^{-1}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\cdot\frac{3z^{-1}}{1-3z^{-1}}\right]_{z=3}$$

$$= \left[\frac{3z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right]_{z=3} \Rightarrow R_2 = -\frac{6}{5}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το πρώτο κλάσμα της $Y(z)$ είναι αριστερής πλευράς, ενώ το δεύτερο είναι δεξιάς πλευράς, προκύπτει:

$$y[n] = \left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{6}{5}\right)3^n u[-n-1]$$

Άσκηση 16

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Ζ της συνάρτησης:

$$X(z) = \frac{2z(z-0.5)}{(z-1)(z+1)}, \qquad R_x:\ |z| > 1$$

Απάντηση: Ο βαθμός του αριθμητή είναι $M = 2$ και ο βαθμός του παρονομαστή $N = 2$.

Επειδή τα πολυώνυμα είναι εκφρασμένα σε θετικές δυνάμεις του z, θα υπολογίσουμε το ανάπτυγμα της παράστασης $X(z)/z$.

$$\frac{X(z)}{z} = \tilde{X}(z) = \frac{2(z-0.5)}{(z-1)(z+1)} = \frac{R_1}{z-1} + \frac{R_2}{z+1}$$

Για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Ζ της συνάρτησης $\tilde{X}(z)$ εφαρμόζουμε τη μέθοδο μερικών κλασμάτων. Είναι:

$$\tilde{X}(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{1 - p_k z^{-1}} = \frac{R_1}{z-1} + \frac{R_2}{z+1}$$

Άσκηση 16 (συνέχεια)

όπου τα υπόλοιπα R_1 και R_2 της πολυωνυμικής διαίρεσης για τους αντίστοιχους πόλους δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$R_1 = \left[(z-1)\tilde{X}(z)\right]_{z=1} = \left[(z-1)\frac{2(z-0.5)}{(z-1)(z+1)}\right]_{z=1} = \left[\frac{2(z-0.5)}{(z+1)}\right]_{z=1} = 0.5$$

$$R_2 = \left[(z+1)\tilde{X}(z)\right]_{z=-1} = \left[(z+1)\frac{2(z-0.5)}{(z-1)(z+1)}\right]_{z=-1} = \left[\frac{2(z-0.5)}{(z-1)}\right]_{z=-1} = 1.5$$

Επομένως, το ανάπτυγμα της συνάρτησης $X(z)$ είναι:

$$X(z) = \frac{0.5\,z}{z-1} + \frac{1.5\,z}{z+1}$$

από το οποίο προκύπτει:

$$x[n] = 0.5\,u[n] + 1.5(-1)^n\,u[n]$$

Άσκηση 16 (συνέχεια)

Για να ελέγξουμε την ορθότητα της επίλυσης εφαρμόζουμε τα θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής. Γράφουμε τη συνάρτηση $X(z)$ σε όρους z^{-1}. Είναι:

$$X(z) = \frac{2z(z-0.5)}{(z-1)(z+1)} = \frac{2(1-0.5z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}$$

οπότε το $\lim_{z\to\infty} X(z)$ είναι:

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{2(1-0.5z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+z^{-1})} = 2$$

Υπολογίζουμε την τιμή $x[0]$ από την επίλυση:

$$x[0] = 0.5\,u[0] + 1.5(-1)^0\,u[0] = 0.5 + 1.5 = 2$$

και διαπιστώνουμε ότι $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$, οπότε ικανοποιείται το θεώρημα αρχικής τιμής.

Επίσης έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{n\to\infty} 0.5\,u[n] + 1.5(-1)^n\,u[n] = 0.5$$

και:

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{2z(z-0.5)}{(z-1)(z+1)} = \lim_{z\to 1}\frac{2z(z-0.5)}{(z+1)} = 0.5$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$ διαπιστώνουμε ότι ικανοποιείται και το θεώρημα τελικής τιμής.