Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ενότητα 4: Μελέτη Συστημάτων Διακριτού Χρόνου με Εξισώσεις Διαφορών

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενα Διάλεξης

Μελέτη Συστημάτων Δ.Χ. με Εξισώσεις Διαφορών

- Εξισώσεις Διαφορών
- Επίλυση Εξισώσεων Διαφορών με Γραμμικούς Συντελεστές (Γ.Ε.Δ.Σ.Σ.)
- Ταξινόμηση Συστημάτων ανάλογα με τον Τύπο της Κρουστικής Απόκρισης
- Ασυμπτωτική Ευστάθεια Γ.Α.Κ.Μ. Συστημάτων Δ.Χ.

Περιγραφή Συστήματος με Εξισώσεις Διαφορών

Έχουμε δει ότι στα συστήματα Δ.Χ. η σχέση εισόδου – εξόδου μπορεί να λάβει τη γενική μορφή (εξίσωση διαφορών):

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k], \qquad n \geq 0$$

- $a_k,\ b_m$ σταθερές που καθορίζουν το σύστημα
- $y[-k], k = 1, \dots, N$ αρχική κατάσταση της εξόδου
- $x[-m],\ \ m = 1, \dots, M$ αρχική κατάσταση της εισόδου

- Η ΓΕΔΣΣ περιγράφει τη **δομή** του συστήματος.
- Αν το σύστημα είναι αιτιατό, δηλαδή $x[-m] = 0$ για $m = 1, \dots, M$, για να υπολογιστεί η έξοδος απαιτούνται μόνο οι αρχικές συνθήκες της εξόδου.
- Αν $y[-k] = 0$, για $k = 1, \dots, N$, τότε το σύστημα βρίσκεται σε **κατάσταση αρχικής ηρεμίας** (initially relaxed).

Περιγραφή Συστήματος με Εξισώσεις Διαφορών

- Η Εξίσωση Διαφορών περιγράφει πλήρως το σύστημα Δ.Χ. και είναι το ανάλογο της Διαφορικής Εξίσωσης για τα συστήματα συνεχούς χρόνου.
- Όπως και στα συστήματα συνεχούς χρόνου, αν η εξίσωση διαφορών είναι γραμμική με σταθερούς συντελεστές, μηδενικές αρχικές συνθήκες και η είσοδος του συστήματος είναι μηδενική για $n < 0$, τότε αναπαριστά ένα σύστημα γραμμικό και αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση (ΓΑΚΜ).
- Στην περίπτωση αυτή η παραπάνω σχέση ονομάζεται **Γραμμική Εξίσωση Διαφορών με Σταθερούς Συντελεστές** (ΓΕΔΣΣ) και συνιστά έναν επαναληπτικό τρόπο υπολογισμού της εξόδου.
- Η εξίσωση διαφορών παρέχει τη δυνατότητα να περιγραφεί ένα σύστημα με κρουστική απόκριση άπειρης διάρκειας, χρησιμοποιώντας ένα πεπερασμένο πλήθος συντελεστών. Αυτό απλοποιεί τον τρόπο περιγραφής ενός συστήματος
- Η ΓΕΔΣΣ μπορεί να επιλυθεί τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και στο πεδίο της συχνότητας με χρήση του μετασχηματισμού Z.
- Η χρήση του μετασχηματισμού Z απλοποιεί την επίλυση των ΓΕΔΣΣ που περιγράφουν ΓΑΚΜ συστήματα.

Γραμμική Εξίσωση Διαφορών με Σταθερούς Συντελεστές (ΓΕΔΣΣ)

Γραμμική Εξίσωση Διαφορών με Σταθερούς Συντελεστές (ΓΕΔΣΣ): για ΓΑΚΜ σύστημα, η εξίσωση διαφορών είναι γραμμική, με σταθερούς συντελεστές, με μηδενικές αρχικές συνθήκες και η είσοδος του συστήματος είναι μηδενική για $n < 0$.

- **ΓΕΔΣΣ πρώτης τάξης ($M = N = 1$):**

$$y[n] = -a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$

- **ΓΕΔΣΣ δεύτερης τάξης ($M = N = 2$):**

$$y[n] = -a_2 y[n-2] - a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

Παράδειγμα

Έστω το παρακάτω σύστημα διακριτού χρόνου, που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου - εξόδου και ονομάζεται συσσωρευτής (accumulator):

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n] = y[n-1] + x[n]$$

Από το αρχικό μέρος της σχέσης παρατηρούμε ότι η έξοδος $y[n]$ του συστήματος στην παρούσα χρονική στιγμή προκύπτει από την άθροιση όλων των δειγμάτων του σήματος εισόδου, από την έναρξη του σήματος εισόδου μέχρι και την τρέχουσα τιμή $x[n]$.

Από το τελευταίο μέρος της σχέσης παρατηρούμε ότι για τον υπολογισμό της τιμής του σήματος $y[n]$ για τις χρονικές στιγμές $n \geq n_0$ απαιτείται η γνώση της εισόδου $x[n]$ και της αρχικής συνθήκης $y[n_0 - 1]$.

Αν η $y[n_0 - 1] = 0$, τότε το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας.

Ταξινόμηση Συστημάτων με Βάση τη Διάρκεια της Κρουστικής Απόκρισης

- Αναδρομικά ή Άπειρης κρουστικής απόκρισης (IIR)
- Μη-Αναδρομικά ή Πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR)

Αναδρομικά Συστήματα (IIR) (1/2)

- Αν έστω και ένας όρος $\alpha(k)$ της ΓΕΔΣΣ είναι μη μηδενικός, δηλαδή $a(k) \neq 0$, $k = 1, \dots, N$ το σύστημα ονομάζεται **αναδρομικό** και περιγράφεται από τη ΓΕΔΣΣ:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k], \qquad n \geq 0$$

- Η έξοδος $y[n]$ υπολογίζεται, όχι μόνο με βάση τα δείγματα της εισόδου $x[n]$, αλλά και με τα προηγούμενα δείγματα της εξόδου $\{y[n-k],\ k = 1, \dots, N\}$, (ανατροφοδότηση της εξόδου).

Αναδρομικά Συστήματα (IIR) (2/2)

- Τα αναδρομικά συστήματα ονομάζονται και **άπειρης κρουστικής απόκρισης** (Infinite Impulse Response, IIR), επειδή η $h[n]$ έχει άπειρη διάρκεια:

$$h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} b_m \, \delta[n-k]$$

- Ονομάζονται επίσης και **αυτοπαλινδρομούμενα φίλτρα κινητού μέσου όρου** (Auto Regressive Moving Average, ARMA) τάξης (N, M).

- Στα ΓΑΚΜ αναδρομικά συστήματα, η έξοδος $y[n]$ υπολογίζεται από τη συνέλιξη:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \, h[n-k]$$

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του IIR (ARMA) συστήματος, το οποίο βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας και περιγράφεται από τη ΓΕΔΣΣ:

$$y[n] = -0.5y[n-1] + x[n] - x[n-1]$$

Απάντηση: Εφόσον ζητείται η κρουστική απόκριση $h[n]$ θεωρούμε είσοδο $x[n] = \delta[n]$. Λύνουμε επαναληπτικά τη ΓΕΔΣΣ για τιμές του $n = 0,1,2, \ldots$

- $n = 0,\;\; h[0] = -0.5\, h[-1] + \delta[0] - \delta[-1] = 0 + 1 - 0 \Rightarrow h[0] = 1$
- $n = 1,\;\; h[1] = -0.5\, h[0] + \delta[1] - \delta[0] = -0.5 + 0 - 1 \Rightarrow h[1] = -1.5$
- $n = 2,\;\; h[2] = -0.5\, h[1] + \delta[2] - \delta[1] = 0.75 + 0 - 0 \Rightarrow h[2] = 0.75$
- $n = 3,\;\; h[3] = -0.5\, h[2] + \delta[3] - \delta[2] = -0.375 + 0 - 0 \Rightarrow h[3] = -0.375$
- $n = 4,\;\; h[4] = -0.5\, h[3] + \delta[4] - \delta[3] = 0.1875 + 0 - 0 \Rightarrow h[4] = 0.1875$

Μη-Αναδρομικά Συστήματα (FIR) (1/2)

- Στα **μη-αναδρομικά** συστήματα η σχέση εισόδου – εξόδου προκύπτει από τη ΓΕΔΣΣ για $a(k) = 0,\ k = 1, \dots, N$:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

- Το τρέχον δείγμα της εξόδου $y[n]$ υπολογίζεται με βάση σταθμισμένες και χρονικά μετατοπισμένες τιμές της εισόδου μόνο: $\{b_m x[n-m],\ m = 0, \dots, M\}$.

- Η κρουστική απόκρισή τους δίνεται από τη σχέση:

$$h[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m \delta[n-m]$$

Μη-Αναδρομικά Συστήματα (FIR) (2/2)

- Τα μη-αναδρομικά συστήματα ονομάζονται και **πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης** (Finite Impulse Response, FIR) ή συστήματα **κινητού μέσου όρου** (Moving Average, MA).

- Οι συντελεστές της ΓΕΔΣΣ ενός FIR φίλτρου είναι ίδιοι με τους συντελεστές της $h[n]$ του FIR φίλτρου:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]\, x[n-k]$$

- <u>Σημαντική Παρατήρηση</u>: Η έξοδος μπορεί να υπολογιστεί από τη συνέλιξη, αλλά με πεπερασμένη διάρκεια $M+1$ σημείων:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

- Η κρουστική απόκριση ενός FIR φίλτρου είναι ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας. Όταν όμως η είσοδος στο φίλτρο είναι άπειρης διάρκειας, τότε και η έξοδος του φίλτρου είναι άπειρης διάρκειας

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του FIR συστήματος, το οποίο βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας και περιγράφεται από τη ΓΕΔΣΣ:

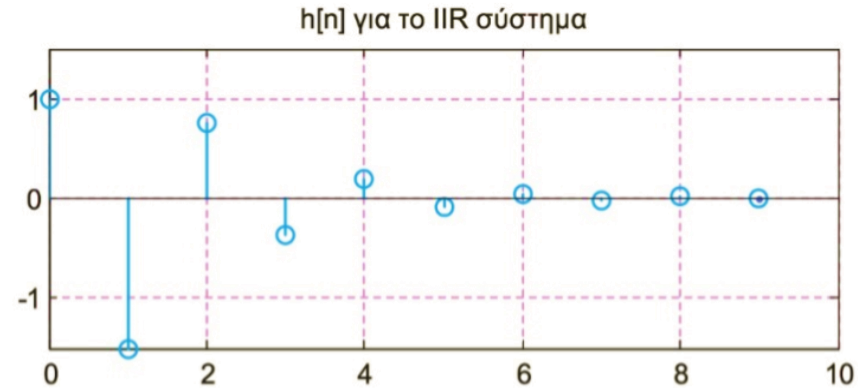
$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

Απάντηση: Εφόσον ζητείται η κρουστική απόκριση $h[n]$ θεωρούμε είσοδο $x[n] = \delta[n]$. Λύνουμε επαναληπτικά τη ΓΕΔΣΣ για τιμές του $n = 0,1,2, \ldots$

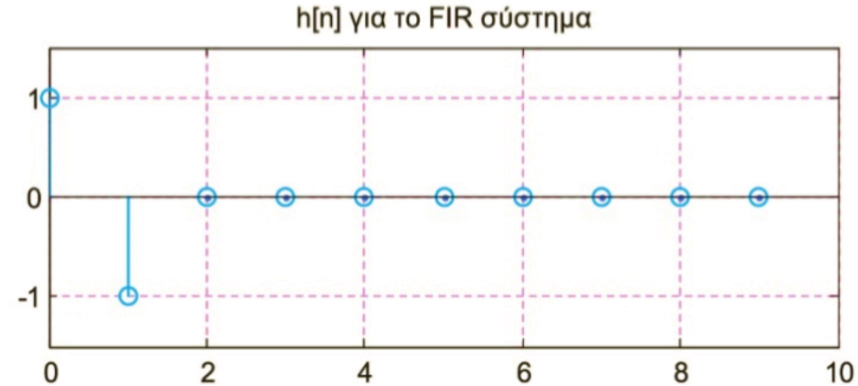
- $n = 0,$ $\quad h[0] = \delta[0] - \delta[-1] = 1 - 0 \Rightarrow h[0] = 1$
- $n = 1,$ $\quad h[1] = \delta[1] - \delta[0] = 0 - 1 \Rightarrow h[1] = -1$
- $n = 2,$ $\quad h[2] = \delta[2] - \delta[1] = 0 - 0 \Rightarrow h[2] = 0$
- $n = 3,$ $\quad h[3] = \delta[3] - \delta[2] = 0 - 0 \Rightarrow h[3] = 0$
- $n = 4,$ $\quad h[4] = \delta[4] - \delta[3] = 0 - 0 \Rightarrow h[4] = 0$

Κρουστική απόκριση συστήματος

(α)



(β)



(α) Άσκησης 1, (β) Άσκησης 2

Επίλυση Εξισώσεων Διαφορών
(στο πεδίο του χρόνου)

- Εύρεση μερικής λύσης
- Εύρεση ομογενούς λύσης

Επίλυση Εξισώσεων Διαφορών

Η γενική λύση της ΓΕΔΣΣ:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k], \qquad n \geq 0$$

μπορεί να διασπαστεί στα ακόλουθα δύο τμήματα:

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

- $y_h[n]$ η **ομογενής λύση:** η απόκριση του συστήματος για μηδενική είσοδο και με δεδομένες τις αρχικές συνθήκες (ονομάζεται και **απόκριση μηδενικής εισόδου ή φυσική απόκριση**) (συμβολίζεται επίσης ως $y_{zi}[n]$).

- $y_p[n]$ η **μερική λύση:** η απόκριση του συστήματος για τη δοθείσα είσοδο $x[n]$, θεωρώντας μηδενικές τις αρχικές συνθήκες (ονομάζεται και **απόκριση μηδενικής κατάστασης ή εξαναγκασμένη απόκριση)** (συμβολίζεται επίσης ως $y_{zs}[n]$).

Εύρεση Ομογενούς Λύσης (1/2)

Η **ομογενής λύση** $y_h[n]$ είναι η απόκριση του συστήματος για μηδενική είσοδο και με δεδομένες τις αρχικές συνθήκες. Η ΓΕΔΣΣ γράφεται:

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = 0, \qquad\qquad n \geq 0$$

και ονομάζεται ομογενής ΓΕΣΔΔ, η οποία έχει τη λύση (ομογενής λύση):

$$y_h[n] = \lambda^n$$

Αντικαθιστώντας την ομογενή λύση στην ομογενή ΓΕΔΣΣ έχουμε:

$$\lambda^n + \sum_{k=1}^{N} a_k \lambda^{n-k} = \ 0 \Rightarrow \lambda^{n-N}\{\lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + \cdots + a_{N-1}\lambda + \alpha_N\} = \ 0$$

Η παράσταση μέσα στις αγκύλες ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** $Q(\lambda)$ και έχει N ρίζες:

$$Q(\lambda) = \lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + \cdots + a_{N-1}\lambda + \alpha_N$$

Εύρεση Ομογενούς Λύσης (2/2)

Αν οι συντελεστές $a[k]$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε οι ρίζες $\lambda_k, k = 1, \dots . N$ είναι μιγαδικές συζυγείς. Αν οι ρίζες είναι **απλές**, τότε η ομογενής λύση δίνεται από:

$$y_h[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k \, \lambda_k^n$$

Αν υπάρχει κάποια **πολλαπλή ρίζα**, έστω η λ_1 με πολλαπλότητα m, τότε η ομογενής λύση δίνεται από τη σχέση:

$$y_h[n] = \left[A_1 + A_2 n + \cdots + A_m n^{m-1}\right] \lambda_1^n + \sum_{k=m+1}^{N} A_k \, \lambda_k^n$$

Σε αμφότερες τις περιπτώσεις, οι συντελεστές $A_k, k = 1, \dots N$, προκύπτουν από την επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων με αγνώστους τους συντελεστές A_k, το οποίο σχηματίζεται από την αρχική ΓΕΔΣΣ με τη γενική λύση, αντικαθιστώντας σε αυτή τις αρχικές συνθήκες για $n = 0,1, \dots , N - 1$.

Εύρεση Μερικής Λύσης

Η **μερική λύση** $y_p[n]$ είναι η απόκριση του συστήματος για τη δοθείσα είσοδο $x[n]$, θεωρώντας μηδενικές τις αρχικές συνθήκες.

Η εύρεση της μερικής λύσης δεν είναι μία απλή διαδικασία, ωστόσο για πολλές από τις συνηθισμένες εισόδους, η έξοδος έχει την ίδια μορφή με την είσοδο.

Μερικές λύσεις για απλά σήματα εισόδου:

Όρος στη $x[n]$:		Μερική λύση:	
	C		C_1
	$C\ n$		$C_1 n + C_2$
	$C\ a^n$		$C_1 a^n$
	$C\ \cos(n\omega_0)$		$C_1 \cos(n\omega_0) + C_2\ sin(n\omega_0)$
	$C\ \sin(n\omega_0)$		$C_1 \cos(n\omega_0) + C_2\ sin(n\omega_0)$
	$C\ a^n \cos(n\omega_0)$		$C_1 a^n \cos(n\omega_0) + C_2 a^n\, sin(n\omega_0)$
	$C\ \delta(n)$		Καμία

Υπολογισμός Κρουστικής Απόκρισης ΓΑΚΜ Συστημάτων

Επειδή αναζητούμε την κρουστική απόκριση $h[n]$, θέτουμε στη ΓΕΔΣΣ ως είσοδο $x[n] = \delta[n]$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες, επειδή το σύστημα είναι σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας.

Όμως η εμφάνιση στην είσοδο μιας τόσο δραστικής ακολουθίας όπως η Δέλτα δημιουργεί νέες αρχικές συνθήκες στο σύστημα.

Η έξοδος στην περίπτωση αυτή, δηλαδή η κρουστική απόκριση, θα προκύψει από τη λύση της ομογενούς εξίσωσης (απόκριση μηδενικής εισόδου) για τις νέες αρχικές συνθήκες.

Επομένως, το πρόβλημα της εύρεσης της κρουστικής απόκρισης από τη ΓΕΔΣΣ ανάγεται στην εύρεση των νέων αρχικών συνθηκών εξαιτίας της ακολουθίας Δέλτα και κατόπιν στην επίλυση της ομογενούς λύσης ώστε να βρεθεί η απόκριση μηδενικής εισόδου, δηλαδή η κρουστική απόκριση.

Στα επόμενα παραδείγματα θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό της κρουστικής απόκρισης όταν είναι γνωστή η ΓΕΔΣΣ και το σύστημα είναι σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας, δηλαδή είναι ΓΑΚΜ.

Άσκηση 3

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση του αναδρομικού συστήματος που περιγράφεται από τη ΓΕΔΣΣ:

$$y[n] + \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$

Απάντηση: Θέτουμε ως είσοδο $x[n] = \delta[n]$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες επειδή το σύστημα είναι σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας. Έχουμε:

$$h[n] + \frac{3}{4}h[n-1] + \frac{1}{8}h[n-2] = \delta[n]$$

Η ομογενής εξίσωση είναι:

$$h[n] + \frac{3}{4}h[n-1] + \frac{1}{8}h[n-2] = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{8}$$

και έχει ρίζες $\lambda_1 = -1/2$ και $\lambda_2 = -1/4$. Επομένως, η λύση της ομογενούς εξίσωσης (απόκριση μηδενικής εισόδου) είναι:

$$h[n] = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n = A_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n + A_2\left(-\frac{1}{4}\right)^n, \qquad n \geq 0$$

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Θα υπολογίσουμε τις τιμές των σταθερών A_1 και A_2 με χρήση των αρχικών συνθηκών. Για τη δοθείσα ΓΕΔΣΣ ισχύουν:

$$h[0] + \frac{3}{4}h[-1] + \frac{1}{8}h[-2] = \delta[0] \Rightarrow h[0] + 0 + 0 = 1 \Rightarrow h[0] = 1$$

και

$$h[1] + \frac{3}{4}h[0] + \frac{1}{8}h[-1] = \delta[1] \Rightarrow h[1] + \frac{3}{4} + 0 = 0 \Rightarrow h[1] = -\frac{3}{4}$$

Εφαρμόζουμε αυτές τις αρχικές συνθήκες στη μέχρι τώρα λύση της ομογενούς και έχουμε:

$$h[0] = A_1\left(-\frac{1}{2}\right)^0 + A_2\left(-\frac{1}{4}\right)^0 \Rightarrow A_1 + A_2 = 1$$

και

$$h[1] = A_1\left(-\frac{1}{2}\right)^1 + A_2\left(-\frac{1}{4}\right)^1 \Rightarrow -\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{4}A_2 = -\frac{3}{4}$$

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Γράφουμε το ζεύγος εξισώσεων με αγνώστους A_1 και A_2 σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 \\ \mathrm{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3/4 \end{bmatrix}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε: $A_1 = 2$ και $A_2 = -1$.

Επειδή το δεξί μέλος της ΓΕΔΣΣ είναι $x[n]$ προκύπτει ότι η κρουστική απόκριση είναι ίση με την ομογενή λύση, δηλαδή:

$$h_g[n] = h[n] = \left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n]$$

Άσκηση 4

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση συστήματος με αρχικές συνθήκες $y[-1] = y[-2] = 1/8$ που περιγράφεται από τη ΓΕΔΣΣ:

$$y[n] - 8y[n-1] + 16y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]$$

<u>Απάντηση</u>: Εύρεση μερικής λύσης: Για είσοδο $x[n] = \delta[n]$, η μερική λύση/λύση μηδενικής κατάστασης σύμφωνα με τον πίνακα της διαφάνειας 19 είναι:

$$y_p[n] = 0, \qquad n \geq 0$$

Εύρεση ομογενούς λύσης:

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\lambda^2 - 8\lambda + 16$
- Φυσικές συχνότητες: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\,(1 \pm j\sqrt{3}) = e^{\pm j\pi/3}$
  (φανταστικές συζυγείς)
- Ομογενής λύση/
  μηδενικής εισόδου: $y_h[n] = A_1\, e^{jn\pi/3} + A_2\, e^{-jn\pi/3}$
- Γενική λύση: $y[n] = A_1\, e^{jn\pi/3} + A_2 e^{-jn\pi/3},\ n \geq 0$ (1)

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Για να υπολογίσουμε τις σταθερές A_1 και A_2, λύνουμε τη ΓΕΔΣΣ για $n = 0$ και $n = 1$ και έχουμε:

$$y[0] = 8y[-1] - 16y[-2] + x[0] - 2x[-1] = 1 - 2 + 1 - 0 = 0 \Rightarrow y[0] = 0$$

$$y[1] = 8y[0] - 16y[-1] + x[1] - 2x[0] = 0 - 2 + 0 - 2 \Rightarrow y[1] = 4$$

Αντικαθιστούμε τις νέες αρχικές συνθήκες στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$y[0] = y_h[0] = A_1\, e^0 + A_2\, e^0 = A_1 + A_2 = 0$$

$$y[1] = y_h[1] = A_1 e^{j\pi/3} + A_2 e^{-j\pi/3} = 4$$

Γράφουμε το ζεύγος εξισώσεων με αγνώστους A_1 και A_2 σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{j\pi/3} & e^{-j\pi/3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 \\ \mathrm{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε:

$$A_1 = 0 - 2.31j = 2.31\, e^{-j\pi/2}$$

$$A_2 = 0 + 2.31j = 2.31\, e^{j\pi/2}$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Αντικαθιστούμε τις σταθερές A_1 και A_2 στην (1) και χρησιμοποιώντας τη σχέση Euler βρίσκουμε:

$$h[n] = 2.31\ (e^{jn\pi/3}e^{-j\pi/2} + 2.31\ e^{-jn\pi/3}e^{j\pi/2})\ u[n]$$

$$= 2.31\left(e^{j\pi\left(\frac{n}{3}-\frac{1}{2}\right)} + e^{-j\pi\left(\frac{n}{3}-\frac{1}{2}\right)}\right)u[n] = 4{,}62\, sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)u[n]$$

Επειδή το δεξί μέλος της ΓΕΔΣΣ είναι $x[n] + 2x[n-1]$, η κρουστική απόκριση είναι ίση με το άθροισμα $h[n] + 2h[n-1]$, δηλαδή είναι:

$$h_g[n] = h[n] + 2h[n-1] = 4{,}62\left[sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) + 2\, sin\left(\frac{\pi(n-1)}{3}\right)\right]u[n]$$

Άσκηση 5

Να υπολογιστούν η ομογενής λύση (απόκριση μηδενικής εισόδου), η μερική λύση (απόκριση μηδενικής κατάστασης) και η συνολική έξοδος για είσοδο $x[n] = (-0.6)^n u[n]$ για ένα αναδρομικό σύστημα με αρχικές συνθήκες $y[-1] = 1$ και $y[-2] = 1$ και ΓΕΔΣΣ:

$$y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] - y[n-2] = x[n]$$

Απάντηση: <u>Εύρεση μερικής λύσης</u>: Για είσοδο $x[n] = (-0.6)^n u[n]$, η μερική λύση (απόκριση μηδενικής κατάστασης) σύμφωνα με τον πίνακα της διαφάνειας 19, είναι:

$$y_p[n] = C_1(-0.6)^n u[n]$$

Η μερική λύση ικανοποιεί τη ΓΕΔΣΣ, δηλαδή:

$$C_1(-0.6)^n u[n] - \frac{3}{2}C_1(-0.6)^{n-1}u[n-1] - C_1(-0.6)^{n-2}u[n-2] = (-0.6)^n u[n]$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

Βρίσκουμε την τιμή του C_1 θέτοντας $n = 2$ στην παραπάνω σχέση, οπότε έχουμε:

$$C_1(-0.6)^2 u[2] - \frac{3}{2} C_1(-0.6)^1 u[1] - C_1(-0.6)^0 u[0] = (-0.6)^2 u[2]$$

από την οποία βρίσκουμε:

$$C_1 = \frac{18}{13}$$

Επομένως, η μερική λύση είναι:

$$y_p[n] = \frac{18}{13}(-0.6)^n u[n]$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

<u>Εύρεση ομογενούς λύσης</u>: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - 1$$

και οι φυσικές συχνότητες είναι:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 2$$

Επομένως, η ομογενής λύση (απόκριση μηδενικής εισόδου) είναι:

$$y_h[n] = A_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n + A_2(2)^n$$

Η συνολική λύση είναι το άθροισμα της μερικής και της ομογενούς λύσης:

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n] = \frac{18}{13}(-0.6)^n u[n] + A_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n + A_2(2)^n$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

Για να υπολογίσουμε τις σταθερές A_1 και A_2, λύνουμε τη ΓΕΔΣΣ για $n = 0$ και $n = 1$ και έχουμε:

$$y[0] = \frac{3}{2}y[-1] - y[-2] + x[0] = \frac{3}{2} - 1 + 1 \Rightarrow y[0] = \frac{3}{2}$$

$$y[1] = \frac{3}{2}y[0] - y[-1] + x[1] = \frac{9}{4} - 1 + (-0.6) \Rightarrow y[1] = \frac{13}{20}$$

Αντικαθιστούμε τις νέες αρχικές συνθήκες στη πλήρη λύση και βρίσκουμε:

$$y[0] = y_p[0] + y_h[0] = \frac{3}{2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_1 + A_2 = \frac{3}{26}$$

$$y[1] = y_p[1] + y_h[1] = \frac{13}{20} \Rightarrow \ldots \Rightarrow -\frac{1}{2}A_1 + 2A_2 = -\frac{47}{260}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $A_1 = 0{,}1646$ και $A_2 = -0.0492$.

$$y[n] = \frac{18}{13}(-0.6)^n u[n] + 0{,}1646\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 0{,}0492(2)^n$$

Άσκηση 6

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση του αναδρομικού συστήματος που περιγράφεται από τη ΓΕΔΣΣ $y[n] + 0.1y[n-1] - 0.72y[n-2] = x[n]$ και το οποίο βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας.

Απάντηση: Εφαρμόζουμε την ίδια μεθοδολογία επίλυσης. Θέτουμε ως είσοδο $x[n] = \delta[n]$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες επειδή το σύστημα είναι σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας.

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\lambda^2 + 0.1\lambda - 0.72 = (\lambda - 0.8)(\lambda + 0.9)$ (1)
- Φυσικές συχνότητες: $\lambda_1 = 0.8$ και $\lambda_2 = -0.9$ (απλές ρίζες)
- Ομογενής λύση /μηδενικής εισόδου: $y_h[n] = A_1(0.8)^n + A_2(-0.9)^n,\ n \geq 0$ (2)
- Μερική λύση /μηδενικής κατάστασης: $y_p[n] = 0$, επειδή $x[n] = \delta[n]$
- Πλήρης λύση: $y[n] = y_h[n] + y_p[n] = y_h[n]$ (3)

Άσκηση 6 (συνέχεια)

<u>Εύρεση ομογενούς λύσης</u>: Επειδή το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας, οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, δηλαδή: $y[-1] = y[-2] = 0$. Λύνοντας τη ΓΕΔΣΣ για $n = 0$ και $n = 1$, έχουμε για την πλήρη λύση τις νέες αρχικές συνθήκες εξαιτίας της εφαρμογής της κρουστικής εισόδου:

$$y[0] = -0.1y[-1] + 0.72y[-2] + x[0] = 1 \Rightarrow y[0] = 1$$

$$y[1] = -0.1y[0] + 0.72y[-1] + x[1] = -0.1 \Rightarrow y[1] = -0.1$$

Για να υπολογίσουμε τις σταθερές A_1 και A_2, λύνουμε την ομογενή λύση (2) για $n = 0$ και $n = 1$, λαμβάνουμε υπόψη τη σχέση (3) και βρίσκουμε:

$$y[0] = y_h[0] = A_1(0.8)^0 + A_2(-0.9)^0 \Rightarrow A_1 + A_2 = 1 \quad (4)$$

$$y[1] = y_h[1] = A_1(0.8)^1 + A_2(-0.9)^1 \Rightarrow 0.8A_1 - 0.9A_2 = -0.1 \quad (5)$$

Λύνουμε το παραπάνω σύστημα των εξισώσεων (4) και (5) ως προς A_1, A_2 και βρίσκουμε:

$$A_1 = \frac{8}{17} \text{ και } A_2 = \frac{9}{17}$$

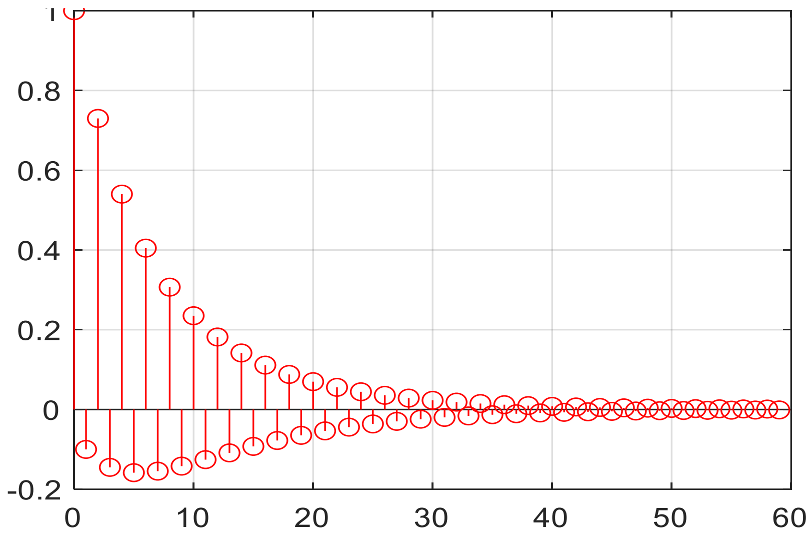
Άσκηση 6 (συνέχεια)

Επομένως η πλήρης λύση της ΓΕΔΣΣ είναι:

$$y[n] = y_h[n] = \left[\frac{8}{17}(0.8)^n + \frac{9}{17}(-0.9)^n\right]u[n]$$

Με βάση το δεξί μέλος της ΓΕΔΣΣ, η κρουστική απόκριση ισούται με την ομογενή λύση και είναι:

$$h[n] = y_h[n] = \left[\frac{8}{17}(0.8)^n + \frac{9}{17}(-0.9)^n\right]u[n]$$



Κρουστική απόκριση

Άσκηση 7

Δίνεται ένα σύστημα που περιγράφεται από την παρακάτω ΓΕΔΣΣ:

$$y[n] = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x[n-m]$$

Για $M = 4$ να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος για την είσοδο:

$$x[n] = s[n] + e[n] = 2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + noise$$

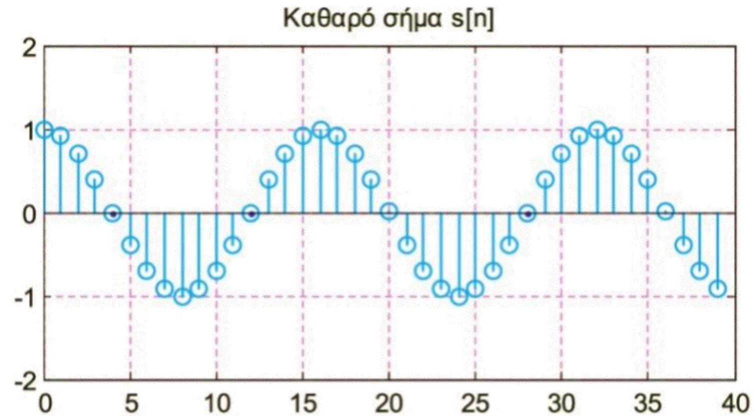
Απάντηση: Από τη ΓΕΔΣΣ παρατηρούμε ότι η έξοδος του συστήματος είναι ο μέσος όρος των M προηγούμενων τιμών της εισόδου. Το σύστημα αυτό ονομάζεται **φίλτρο μέσης τιμής τάξης Μ** και οι συντελεστές $b[m]$ είναι μεταξύ τους ίσοι, δηλαδή ισχύει $b[0] = b[1] = \cdots = b[m-1] = 1/M$.

Τα φίλτρα μέσης τιμής χρησιμοποιούνται για την αφαίρεση θορύβου από σήματα, επειδή ο υπολογισμός της εξόδου από τον μέσο όρο πολλών προηγούμενων τιμών της εισόδου τείνει να αντισταθμίζει την τυχαιότητα των τιμών του θορύβου που έχουν προστεθεί στο χρήσιμο σήμα.

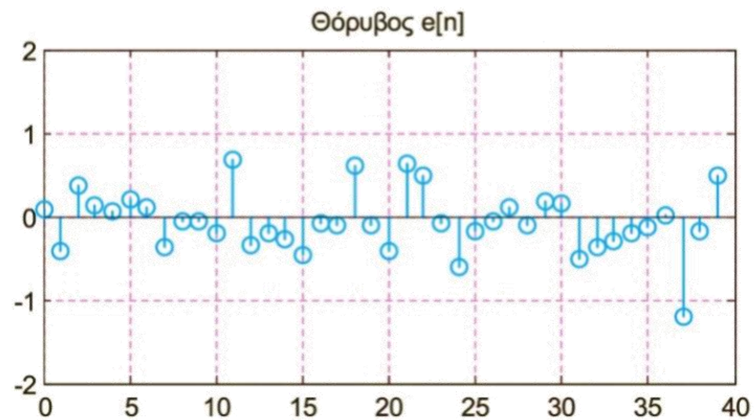
Με επίλυση στο Matlab λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Άσκηση 7 (συνέχεια)

(α)



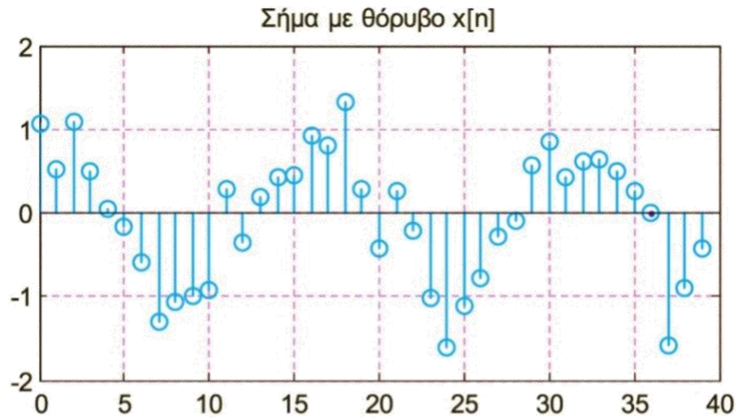
(β)



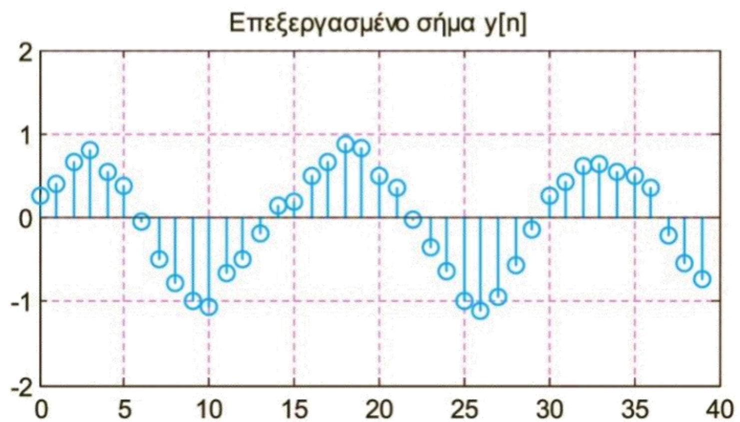
(α) Καθαρό σήμα $s[n]$, (β) Θόρυβος $e[n]$

Άσκηση 7 (συνέχεια)

(γ)



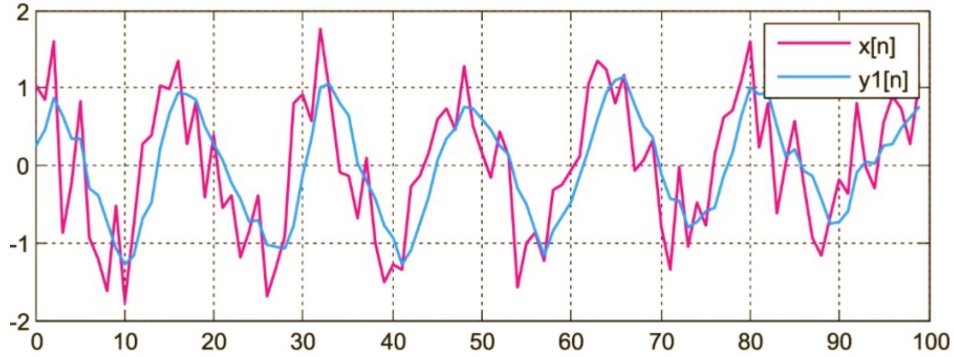
(δ)



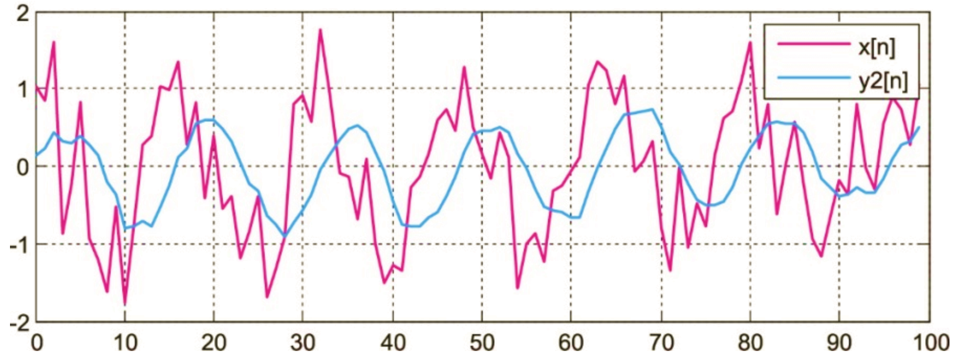
(α) Σήμα με θόρυβο x$[n]$, (δ) Επεξεργασμένο σήμα $y[n]$

Άσκηση 7 (συνέχεια)

(ε)



(στ)



Εξομάλυνση σήματος για: (ε) $M = 4$, (στ) $M = 8$

Άσκηση 7 (συνέχεια)

Από τα σχήματα (ε) και (στ) παρατηρούμε ότι η έξοδος $y[n]$ του φίλτρου μέσης τιμής:

- Μοιάζει περισσότερο με το αρχικό «καθαρό» σήμα $s[n]$, από ότι το ενθόρυβο σήμα $x[n]$.
- Η ομοιότητα αυτή βελτιώνεται όσο αυξάνεται ο συντελεστής M, επειδή ένα μεγαλύτερο πλήθος προηγούμενων τιμών της εισόδου αντισταθμίζει καλύτερα την τυχαιότητα των τιμών του θορύβου. Ωστόσο η βελτίωση αυτή γίνεται εις βάρος της ταχύτητας υπολογισμού της εξόδου, καθώς μία καθυστέρηση $M/2$ σημείων προστίθεται σε σχέση με την είσοδο.
- Η παραπάνω τεχνική φιλτραρίσματος γίνεται στο πεδίο του χρόνου (time domain) και είναι μία **γραμμική** τεχνική (Linear Filtering). Είναι κατάλληλη για την αντιμετώπιση θορύβου με Gaussian κατανομή, αλλά ακατάλληλη για την αντιμετώπιση κρουστικών θορύβων.
- Οι περισσότερο εξελιγμένες τεχνικές αφαίρεσης θορύβου συναντώνται στο πεδίο της συχνότητας (frequency domain). Θα μελετήσουμε ορισμένες από αυτές σε επόμενες διαλέξεις.

Ευστάθεια ΓΑΚΜ Συστήματος Διακριτού Χρόνου

- Στην περίπτωση της ασυμπτωτικής ευστάθειας υπολογίζουμε τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της ΓΕΔΣΣ που περιγράφει το σύστημα και διακρίνουμε στις ακόλουθες περιπτώσεις:
  - Όταν όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (ενδεχομένως κάποιες να έχουν πολλαπλότητα $p > 1$) βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή είναι $|\lambda_i| < 1,\ i = 1,2, \dots N$, τότε το σύστημα είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές**.
  - Όταν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο διαθέτει ρίζες πολλαπλότητας $p > 1$, μερικές από τις οποίες βρίσκονται επάνω στον μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή είναι $|\lambda_i| = 1$, τότε το σύστημα είναι **ασυμπτωτικά ασταθές**.
  - Αν έστω μία ρίζα βρεθεί εκτός του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή είναι $|\lambda_i| > 1$, τότε το σύστημα είναι **ασυμπτωτικά ασταθές**.
  - Αν μια απλή ρίζα είναι επάνω στον μοναδιαίο κύκλο δηλαδή είναι $|\lambda_i| = 1$, $i = 1,2, \dots N$, τότε το σύστημα είναι **οριακά ευσταθές**.
  - Αν μία πολλαπλή ρίζα βρίσκεται επάνω στον μοναδιαίο κύκλο, τότε το σύστημα είναι **ασταθές**.
- Θα ολοκληρώσουμε τη μελέτη της ευστάθειας των ΓΑΚΜ συστημάτων σε επόμενη διάλεξη με χρήση του μετασχηματισμού Ζ.

Άσκηση 8

Να διερευνηθεί ως προς την ασυμπτωτική ευστάθεια το σύστημα διακριτού χρόνου με ΓΕΔΣΣ:

$$9y[n] + 13y[n-1] + 5y[n-2] + y[n-3] = x[n] + 2x[n-1]$$

<u>Απάντηση</u>: Η ομογενής ΓΕΔΣΣ είναι:

$$9y[n] + 13y[n-1] + 5y[n-2] + y[n-3] = 0$$

από την οποία προκύπτει ότι η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 9\lambda + \lambda^2 + 4\lambda + 9 = (\lambda+1)\left(\lambda^2 + 4\lambda + 9\right)$$
$$= (\lambda+1)(\lambda+2-3j)(\lambda+2+3j) = 0$$

Επομένως, οι ρίζες (φυσικές συχνότητες - ιδιοτιμές) είναι $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2+3j$, $\lambda_3 = -2-3j$. Τα μέτρα των ριζών είναι: $|\lambda_1| = 1,\ |\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt{13}$. Επειδή υπάρχουν ρίζες που βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ασταθές.