Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ενότητα 3: Συστήματα Διακριτού Χρόνου
Μελέτη Σ.Δ.Χ. με το Συνελικτικό Άθροισμα

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Εισαγωγή στα Συστήματα Διακριτού Χρόνου
- Κατηγοριοποίηση Συστημάτων Διακριτού Χρόνου
  - Αιτιατά Συστήματα
  - Στατικά και Δυναμικά Συστήματα
  - Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα
  - Ομογενή και Αθροιστικά Συστήματα
  - Γραμμικά Συστήματα
  - Ευσταθή Συστήματα
  - Αντιστρέψιμα Συστήματα

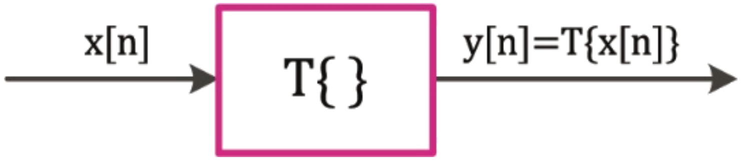
Περιεχόμενα Διάλεξης

- Τρόποι Περιγραφής Συστημάτων Διακριτού Χρόνου
  - Με Διαγράμματα Βαθμίδων
  - Με Συνελικτικό Άθροισμα και Κρουστική Απόκριση
  - Με Εξισώσεις Διαφορών (Αναδρομικά και Μη-Αναδρομικά Συστήματα)
- Μελέτη Συστημάτων με το Συνελικτικό Άθροισμα (Συνέλιξη)
- Ιδιότητες της Συνέλιξης

Εισαγωγή στα Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Ένα **σύστημα διακριτού χρόνου** θεωρείται ένας μαθηματικός τελεστής $T[.]$ με τον οποίο ένα σήμα εισόδου [διέγερση] $x[n]$ μετατρέπεται σε ένα σήμα εξόδου [απόκριση] $y[n]$.



Ο συνήθης τρόπος περιγραφής ενός συστήματος είναι μέσω της **σχέσης εισόδου – εξόδου** $y[n] = T[x[n]]$.

Πλεονεκτήματα Συστημάτων Δ.Χ.

Τα συστήματα διακριτού χρόνου ή εν συντομία ψηφιακά συστήματα παρουσιάζουν σημαντικά πλεονεκτήματα σε σχέση με τα αναλογικά συστήματα, όπως:

- Μεγαλύτερη αντοχή στο θόρυβο και δυνατότητα ευκολότερης αφαίρεσης του θορύβου από τα χρήσιμα σήματα χρησιμοποιώντας εξελιγμένες τεχνικές αποθορυβοποίησης.
- Αυξημένη αξιοπιστία λειτουργίας λόγω της μηδενικής επίδρασης από τις θερμοκρασιακές μεταβολές των εξαρτημάτων ή τη γήρανση του υλικού.
- Ευκολότερη σχεδίαση, χαμηλότερη κατανάλωση ισχύος και σημαντική μείωση του κόστους κατασκευής, καθώς τα ψηφιακά συστήματα υλοποιούνται κατά κύριο λόγο με την μορφή λογισμικού, το οποίο εκτελείται σε υπολογιστικό σύστημα γενικού σκοπού, όπως PCs, DSPs, FPGAs, ASICs, άρα χαμηλού κόστους.
- Εύκολη δυνατότητα προσθήκης λειτουργιών όπως αποθήκευση δεδομένων, συμπίεση δεδομένων και κρυπτογράφηση δεδομένων.

Τα αναλογικά συστήματα υπερέχουν στην υλοποίηση συστημάτων πολύ υψηλών συχνοτήτων.

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος με σχέση εισόδου – εξόδου: $y[n] = x[n] + x[n-1] + 3x[n-2]$.

Απάντηση: Θέτουμε είσοδο $x[n] = \delta[n]$ στη σχέση εισόδου – εξόδου, οπότε η κρουστική απόκριση είναι $h[n] = y[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + 3\delta[n-2]$. Θέτουμε τιμές στο n και βρίσκουμε:

- $n = -1, \quad h[-1] = \delta[-1] + \delta[-2] + 3\delta[-3] = 1.0 + 1.0 + 3.0 = 0$
- $n = 0, \qquad h[0] = \delta[0] + \delta[-1] + 3\delta[-2] = 1.1 + 1.0 + 3.0 = 1$
- $n = 1, \qquad h[1] = \delta[1] + \delta[0] + 3\delta[-1] = 1.0 + 1.1 + 3.0 = 1$
- $n = 2, \qquad h[2] = \delta[2] + \delta[1] + 3\delta[0] = 1.0 + 1.0 + 3.1 = 3$
- $n = 3, \qquad h[3] = \delta[3] + \delta[2] + 3\delta[1] = 1.0 + 1.0 + 3.0 = 0$
- $n \geq 4, \qquad h[n] = 0$

Επομένως, η κρουστική απόκριση είναι $h[n] = \left\{\hat{1}, 1, 1, 3, 0, 0, \dots\right\}, \qquad 0 \leq n \leq 2$

Άσκηση 2

Δίνεται το σήμα εισόδου $x[n] = \{1, -1, 2, -1, \hat{0}, 1, 2, -3\}$. Να υπολογιστούν τα σήματα εξόδου $y_1[n] = x[n-3]$ και $y_2[n] = 2x[n] - x[n-3]$.

Απάντηση: Από τη σχέση εισόδου – εξόδου του $y_1[n]$ παρατηρούμε ότι το τρέχον δείγμα της εξόδου $y_1[n]$ παράγεται αν στο σήμα εισόδου $x[n]$ εφαρμόσουμε καθυστέρηση τριών μονάδων χρόνου. Επομένως το σήμα εξόδου δίνεται από:

$$y_1[n] = \left\{1, -\hat{1}, 2, -1, 0, 1, 2, -3\right\}$$

Για το $y_2[n]$ θα δημιουργήσουμε τις ακολουθίες $2x[n]$ και $x[n-3]$ και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε τα αντίστοιχα δείγματα. Για να «ευθυγραμμίσουμε» χρονικά τις δύο ακολουθίες θα **προσθέσουμε μηδενικά** δείγματα έτσι ώστε το στοιχείο $x[0]$ να αντιστοιχεί στην ίδια θέση και στις δύο ακολουθίες, π.χ. στην 5η θέση. Είναι:

$$2x[n] = \{2, -2, 4, -2, \hat{0}, 2, 4, -6, 0, 0, 0\}$$

$$x[n-3] = \left\{0, 0, 0, 1, -\hat{1}, 2, -1, 0, 1, 2, -3\right\}$$

Επομένως μετά την αφαίρεση προκύπτει η ακολουθία:

$$y_2[n] = 2x[n] - x[n-3] = \{2, -2, 4, -3, \hat{1}, 0, 5, -6, -1, -2, 3\}$$

Κατηγοριοποίηση Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

- Αιτιατά συστήματα
- Στατικά και Δυναμικά συστήματα
- Χρονικά Αμετάβλητα συστήματα
- Ομογενή και Αθροιστικά συστήματα
- Αντιστρέψιμα συστήματα
- Γραμμικά συστήματα

Αιτιατά Συστήματα Δ.Χ.

Ένα σύστημα σε **ηρεμία** (δηλ. μηδενική αρχική έξοδος), μπορεί να είναι:

- **Αιτιοκρατικό ή αιτιατό** (causal), όταν η έξοδός του σε κάθε χρονική στιγμή $n = n_0$, εξαρτάται μόνο από την είσοδο **μέχρι** τη στιγμή $n = n_0$.

  Μαθηματική διατύπωση: $x[n] = 0,\ n < n_0$ τότε $y[n] = 0,\ n < n_0$.

- **Μη-αιτιατό** είναι το σύστημα στο οποίο η έξοδος τη χρονική στιγμή $n = n_0$ μπορεί να εξαρτάται και από μελλοντικά δείγματα της εισόδου.

<u>Παράδειγμα</u>: το σύστημα με σχέση εισόδου – εξόδου $y[n] = ax[n] + bx[n-1]$ είναι αιτιατό, ενώ το σύστημα $y[n] = ax[n] + bx[n+1]$ είναι μη-αιτιατό.

- Ένα μη-αιτιατό σύστημα διακριτού χρόνου μπορεί να υλοποιηθεί με την αποθήκευση των δειγμάτων εξόδου σε μία μνήμη και την καθυστέρηση ανάγνωσης των δειγμάτων της εισόδου σε σχέση με την έξοδο.
- Αν είναι επιθυμητή η επεξεργασία του σήματος σε πραγματικό χρόνο τότε το σύστημα πρέπει να είναι αιτιατό.

Αιτιατά Συστήματα Δ.Χ.

- Τα μη-αιτιατά συστήματα διακριτού χρόνου αποτελούν το άνω όριο επιδόσεων των αιτιατών συστημάτων διακριτού χρόνου.
- Αν το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση **αρχικής ηρεμίας**, δηλαδή οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές και το σύστημα είναι γραμμικό και αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση (ΓΑΚΜ), τότε η ικανή και αναγκαία συνθήκη αιτιότητας δίνεται από τη σχέση:

$$h[n] = 0 \quad n < 0$$

  όπου $h[n]$ είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος.
- Η έξοδος $y[n]$ αιτιατών και ΓΑΚΜ συστημάτων για αιτιατή είσοδο $x[n]$ είναι:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[n]\, h[n-k]\,, \qquad n \geq 0$$

  Το κάτω όριο του αθροίσματος εξαρτάται από την αιτιότητα της εισόδου $x[k] = 0$ για $k < 0$, ενώ το άνω όριο από την αιτιότητα του συστήματος $h[n-k] = 0$ για $n - k < 0$ ή $k > n$.

Στατικά και Δυναμικά Συστήματα Δ.Χ.

Ένα σύστημα σε ηρεμία (δηλ. μηδενική αρχική έξοδος), μπορεί να είναι:

- **Στατικό** ή **χωρίς μνήμη** (memory less), όταν η έξοδός του σε κάθε χρονική στιγμή $n = n_0$ εξαρτάται μόνο από την είσοδο στην **ίδια** χρονική στιγμή $n = n_0$. Ένα στατικό σύστημα δεν περιλαμβάνει βαθμίδες καθυστέρησης.

- Στην αντίθετη περίπτωση το σύστημα ονομάζεται **δυναμικό** (dynamic) και το πλήθος των προηγούμενων δειγμάτων που επηρεάζουν το τρέχον δείγμα ονομάζεται **μνήμη** του συστήματος.

Ένα στατικό σύστημα είναι πάντα και αιτιατό. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

Άσκηση 3

Να εξετάσετε αν τα παρακάτω συστήματα είναι: (α) με μνήμη ή χωρίς μνήμη και (β) αιτιατά ή μη-αιτιατά.

(α) $y[n] = x^3[n]$

(β) $y[n] = x[n] + x[n-2]$

(γ) $y[n] = \sum_{n=k}^{+\infty} x[n-k]$

Απάντηση: (α) Παρατηρούμε ότι το τρέχον (n) δείγμα της εξόδου $y[n]$ επηρεάζεται μόνο από το τρέχον (n) δείγμα της εισόδου $x[n]$. Επομένως το σύστημα είναι χωρίς μνήμη και αιτιατό.

(β) Σε ότι αφορά την αιτιότητα, παρατηρούμε ότι το τρέχον (n) δείγμα της εξόδου $y[n]$ δεν επηρεάζεται από μελλοντικά δείγματα της εισόδου $x[n]$. Επομένως το σύστημα είναι αιτιατό. Σε ότι αφορά τη μνήμη, παρατηρούμε ότι το τρέχον (n) δείγμα της εξόδου $y[n]$ επηρεάζεται από το τρέχον (n) και από προηγούμενα δείγματα της εισόδου $x[n]$. Επομένως το σύστημα είναι με μνήμη ή δυναμικό.

Άσκηση 3 (συνέχεια)

(γ) Η δοθείσα σχέση εισόδου – εξόδου μπορεί να γραφεί:

$$y[n] = \sum_{n=k}^{+\infty} x[n-k] = \sum_{m=-\infty}^{0} x[m]$$

από την οποία παρατηρούμε ότι για να προσδιοριστεί η έξοδος $y[n]$ τη χρονική στιγμή n, πρέπει η είσοδος να είναι γνωστή για όλα τα $n \leq 0$. Π.χ. για να βρεθεί η τιμή $y[-5]$ πρέπει να γνωρίζουμε μελλοντικές τιμές της εισόδου, όπως $x[0], x[-1], x[-2], \dots$. Επομένως το σύστημα δεν είναι αιτιατό.

Το σύστημα δεν είναι ούτε στατικό, επειδή η παρούσα τιμή της εξόδου του εξαρτάται όχι μόνο από την παρούσα τιμή της εισόδου αλλά και από προηγούμενες. Η μνήμη του συστήματος είναι k.

Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα Δ.Χ.

Σύστημα ΔΧ ονομάζεται **χρονικά αμετάβλητο** ή χρονικά αναλλοίωτο ή χρονικά σταθερό (time invariant), όταν για οποιαδήποτε χρονική ποσότητα n_0, η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x[n-n_0]$ ισούται με $y[n-n_0]$.

Δηλαδή χρονικές ολισθήσεις κατά n_0 στην είσοδο $x[n]$ προκαλούν **ίδια ολίσθηση** κατά n_0 και στην έξοδο $y[n]$.

<u>Έλεγχος χρονικής αμεταβλητότητας</u>:

- Υπολογίζουμε την έξοδο $y[n,k]=T\{x[n-k]\}$, δηλαδή την έξοδο που προκύπτει για είσοδο που είναι χρονικά μετατοπισμένη κατά ποσότητα χρόνου k.
- Υπολογίζουμε τη χρονικά μετατοπισμένη έξοδο $y[n-k]$ κατά την ίδια ποσότητα χρόνου k.
- Αν διαπιστώσουμε ότι ισχύει η ισότητα $y[n,k]=y[n-k], \quad \forall k$, τότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Άσκηση 4

Να εξεταστεί αν τα παρακάτω συστήματα είναι αμετάβλητα κατά τη μετατόπιση.

(α) $y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2]$

(β) $y[n] = nx[n]$

Απάντηση: (α) Για να ελεγχθεί η αμεταβλητότητα στη μετατόπιση, συγκρίνουμε τη μετατοπισμένη απόκριση $y[n-n_0]$, με την απόκριση για χρονικά μετατοπισμένη είσοδο $x[n-n_0]$.

Η μετατοπισμένη απόκριση είναι:

$$y[n-n_0] = x[n-n_0] + x[n-n_0-1] + x[n-n_0-2]$$

Η απόκριση $y'[n]$ για μετατοπισμένη είσοδο $x'[n] = x[n-n_0]$, είναι:

$$y'[n] = x'[n] + x'[n-1] + x'[n-2] =$$

$$= x[n-n_0] + x[n-n_0-1] + x[n-n_0-2]$$

Επειδή ισχύει $y'[n] = y[n-n_0]$ το σύστημα είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση.

Άσκηση 4 (συνέχεια)

(β) Η μετατοπισμένη απόκριση $y[n-n_0]$ είναι:

$$y[n-n_0] = (n-n_0)\,x[n-n_0]$$

Η απόκριση $y'[n]$ για μετατοπισμένη είσοδο $x'[n] = x[n-n_0]$, είναι:

$$y'[n] = nx'[n] = n\,x[n-n_0]$$

Επειδή $y'[n] \neq y[n-n_0]$, το σύστημα είναι μεταβαλλόμενο κατά τη μετατόπιση.

Ομογενή και Αθροιστικά Συστήματα Δ.Χ.

- Ένα σύστημα Δ.Χ. ονομάζεται **ομογενές** εάν ο πολλαπλασιασμός της εισόδου με μία σταθερά οδηγεί στον πολλαπλασιασμό της εξόδου με την ίδια ακριβώς σταθερά. Η μαθηματική διατύπωση της ομογένειας δίνεται από τη σχέση:

$$T\{c\ x[n]\} = c\ T\{x[n]\}$$

  για κάθε μιγαδική σταθερά c και για οποιοδήποτε σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$.

- Ένα σύστημα Δ.Χ. ονομάζεται **αθροιστικό** εάν ένα άθροισμα σημάτων στην είσοδο οδηγεί σε έξοδο που είναι το άθροισμα των εξόδων για κάθε ένα σήμα εισόδου χωριστά. Η μαθηματική διατύπωση της αθροιστικότητας δίνεται από τη σχέση:

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]$$

  για οποιαδήποτε σήματα διακριτού χρόνου $x_1[n]$ και $x_2[n]$.

Αντιστρέψιμα Συστήματα Δ.Χ.

- Ένα σύστημα Δ.Χ. ονομάζεται **αντιστρέψιμο** εάν η είσοδός του μπορεί να προσδιοριστεί από την έξοδό του με μοναδικό τρόπο.

- Για να είναι ένα σύστημα αντιστρέψιμο πρέπει ξεχωριστά σήματα εισόδου να παράγουν ξεχωριστά σήματα εξόδου, δηλαδή αν:

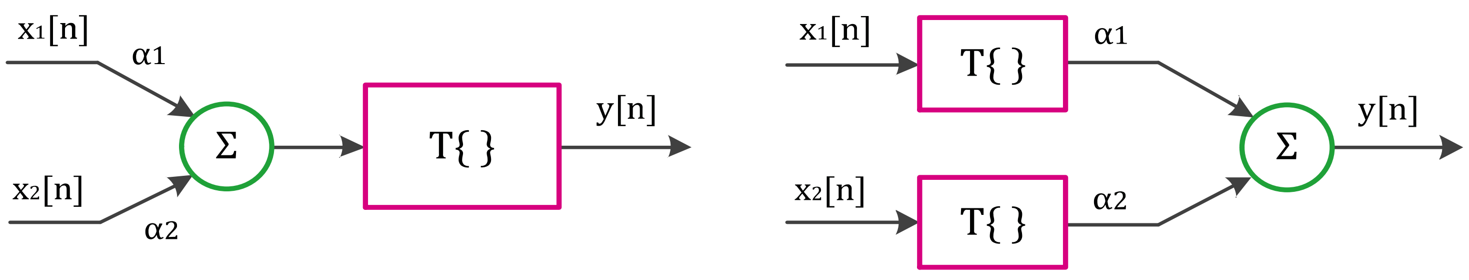
$$x_1[n] \neq x_2[n] \text{ τότε και } y_1[n] \neq y_2[n]$$

Γραμμικά Συστήματα Δ.Χ.

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου ονομάζεται **γραμμικό** (linear) όταν η σχέση εισόδου - εξόδου που το περιγράφει ικανοποιεί την ισότητα**:**

$$T\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} = a_1 T\{x_1[n]\} + a_2 T\{x_2[n]\}, \qquad \forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in C$$

- Σε ένα γραμμικό σύστημα η επίδραση κάθε εισόδου στην έξοδο του συστήματος είναι ανεξάρτητη από την επίδραση των άλλων εισόδων.
- Η ιδιότητα της γραμμικότητας σε ένα σύστημα διακριτού χρόνου είναι πολύ σημαντική, επειδή απλοποιεί τον υπολογισμό της απόκρισης του συστήματος σε δεδομένη είσοδο.



Αναπαράσταση γραμμικότητας συστήματος διακριτού χρόνου

Γραμμικά και Αμετάβλητα κατά τη Μετατόπιση Συστήματα Δ.Χ.

- Ένα σύστημα είναι **Γραμμικό και Αμετάβλητο κατά τη Μετατόπιση** (ΓΑΚΜ ή LSI, Linear Shift Invariant) όταν ικανοποιεί ταυτόχρονα τη Γραμμικότητα και την Αμεταβλητότητα στη Μετατόπιση.

- Αν $h[n]$ είναι η **κρουστική απόκριση** ενός ΓΑΚΜ συστήματος, [δηλ. η έξοδος του συστήματος για είσοδο ίση με τη $\delta[n]$], τότε λόγω της αμεταβλητότητας η απόκριση σε είσοδο $\delta[n-k]$ θα είναι $h[n-k]$, δηλ. $h_k[n] = h[n-k]$. Από το άθροισμα της υπέρθεσης, βρίσκουμε ότι η έξοδος είναι:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

- Η παραπάνω σχέση ονομάζεται **Άθροισμα της Συνέλιξης** και εν συντομία γράφεται:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Θα μελετήσουμε αναλυτικότερα τη συνέλιξη στη συνέχεια.

Άσκηση 5

Να εξεταστεί αν είναι γραμμικό ή όχι το σύστημα με σχέση εισόδου – εξόδου:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Απάντηση: Για εισόδους $x_1[n]$ και $x_2[n]$ οι αντίστοιχες έξοδοι του συστήματος είναι $y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k]$ και $y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k]$.

Για είσοδο ίση με το γραμμικό συνδυασμό $x[n] = \alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]$, η έξοδος είναι:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} \{a_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{n} a_1 x_1[n] + \sum_{k=-\infty}^{n} a_2 x_2[n]$$

$$= a_1 \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[n] + a_2 \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[n] = \alpha_1 y_1\ [n] + \alpha_2 y_2[n]$$

Άρα το σύστημα είναι **γραμμικό**.

Άσκηση 6

Να εξεταστεί αν το σύστημα με σχέση εισόδου – εξόδου $y[n] = x[-n]$ είναι: (α) γραμμικό και (β) αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση.

Απάντηση: (α) Για τις εισόδους $x_1[n]$ και $x_2[n]$, οι αντίστοιχες έξοδοι του συστήματος είναι $y_1[n] = x_1[-n]$ και $y_2[n] = x_2[-n]$. Αν θέσουμε είσοδο ίση με το γραμμικό συνδυασμό $x[n] = \alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]$, η έξοδος είναι:

$$y[n] = x[-n] = \alpha_1 x_1\ [-n] + \alpha_2 x_2[-n] = \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n]$$

Άρα το σύστημα είναι **γραμμικό**.

(β) Για μία χρονικά μετατοπισμένη κατά n_0 είσοδο $x'[n] = x[n - n_0]$, η έξοδος είναι:

$$y[n, n_0] = x'[-n] = x[-n - n_0]$$

Η χρονικά μετατοπισμένη κατά n_0 έξοδος είναι:

$$y[n - n_0] = x[-(n - n_0)] = x[-n + n_0]$$

Επειδή $y[n, n_0] \neq y[n - n_0]$ το σύστημα είναι **χρονικά μεταβαλλόμενο**.

Ευσταθή Συστήματα Δ.Χ.

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου ονομάζεται **ευσταθές** ή **φραγμένης εισόδου – φραγμένης εξόδου** (BIBO stable), όταν για κάθε φραγμένη είσοδο $|x[n]| \leq A < \infty$, η έξοδος είναι επίσης φραγμένη, δηλαδή $|y[n]| \leq B < \infty$. Αν για φραγμένη είσοδο το σύστημα παράγει έξοδο που τείνει στο άπειρο, τότε το σύστημα ονομάζεται **ασταθές**.

<u>Παρατηρήσεις</u>:

- Ένα σύστημα ΓΑΜΚ είναι πάντα **ευσταθές** όταν η κρουστική απόκρισή του $h[n]$ είναι απολύτως συγκλίνουσα, δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$

- Ένα φίλτρο πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR) είναι πάντα ευσταθές, επειδή η κρουστική απόκρισή του ικανοποιεί πάντα την παραπάνω σχέση.
- Ένα φίλτρο άπειρης κρουστικής απόκρισης (IIR) δεν είναι εκ προοιμίου ευσταθές, αλλά μόνο αν αποδειχθεί ότι ικανοποιεί την παραπάνω σχέση.

Ασυμπτωτική Ευστάθεια Συστημάτων Δ.Χ.

Σε επόμενη διάλεξη θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια των συστημάτων. Σύμφωνα με αυτή:

- Ένα αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές όταν **όλες** οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου βρίσκονται **μέσα** στον μοναδιαίο κύκλο.
- Αν μία ρίζα βρίσκεται **επάνω** στο μοναδιαίο κύκλο τότε το σύστημα είναι **οριακά ευσταθές**.
- Αν περισσότερες από μία ρίζες βρίσκονται επάνω στον μοναδιαίο κύκλο ή έστω μία ρίζα βρίσκεται εκτός του μοναδιαίου κύκλου, τότε το σύστημα είναι **ασταθές**.

Θα μελετήσουμε αναλυτικά την ευστάθεια των συστημάτων με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Ζ.

Άσκηση 7

Να διαπιστωθεί αν το ΓΑΚΜ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n] = a^n\, u[n]$, $a < 1$ είναι ευσταθές ή όχι.

Απάντηση: Για να αποφανθούμε περί της ευστάθειας του συστήματος, πρέπει να διαπιστώσουμε αν η κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι απόλυτα συγκλίνουσα. Έχουμε:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a^n\, u[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a^n| = \frac{1}{1-|a|} < \infty$$

Επομένως η $h[n]$ είναι απόλυτα συγκλίνουσα, άρα το σύστημα είναι **ευσταθές**.

Άσκηση 8

Να εξεταστεί αν το σύστημα που περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση διαφοράς είναι ευσταθές ή όχι:

$$-0.08y[n] + 0.2y[n-1] + y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

Απάντηση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $-0.08 + 0.2\lambda + \lambda^2$, το οποίο παραγοντοποιείται:

$$\lambda^2 + 0.2\lambda - 0.08 = \lambda^2 - 0.2\lambda + 0.4\lambda - (0.2)(0.4) = (\lambda - 0.2)(\lambda + 0.4)$$

Οι ρίζες του πολυωνύμου είναι: $\lambda_1 = 0.2$ και $\lambda_2 = -0.4$

Επειδή **όλες** οι ρίζες βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, το σύστημα είναι **ευσταθές**.

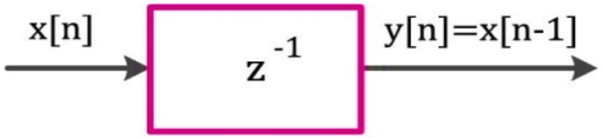
Τρόποι Περιγραφής ΓΑΚΜ Συστημάτων ΔΧ

- Διαγράμματα Βαθμίδων
- Εξισώσεις Διαφορών
- Συνελικτικό Άθροισμα (Γραμμική Συνέλιξη)

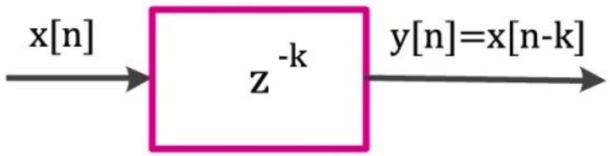
Περιγραφή Συστήματος με Διαγράμματα Βαθμίδων

Περιγραφή Συστήματος με Διαγράμματα Βαθμίδων

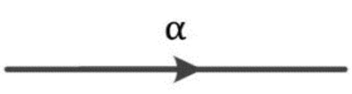
Βαθμίδα καθυστέρησης μίας μονάδας χρόνου: Ικανοποιεί τη σχέση: $y[n] = x[n-1]$. Για την προπορεία $y[n] = x[n+1]$.



Βαθμίδα καθυστέρησης πολλών μονάδων χρόνου: παράγει σήμα εξόδου $y[n]$ με καθυστέρηση πολλών (k)μονάδων χρόνου σε σχέση με το σήμα εισόδου $x[n]$, Ικανοποιεί τη σχέση: $y[n] = x[n-k]$.

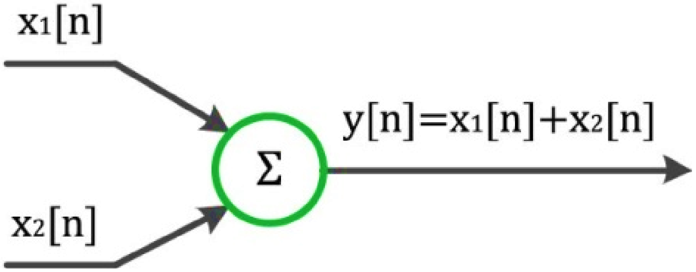


Βαθμίδα πολλαπλασιαστή με σταθερά: παράγει σήμα εξόδου $y[n]$ που είναι το γινόμενο της εισόδου $x[n]$ με μία σταθερή α, δηλαδή: $y[n] = \alpha\, x[n]$.

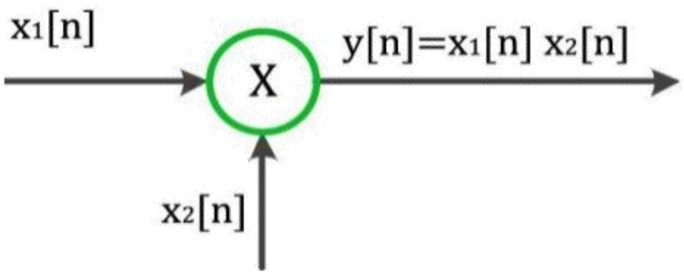


Περιγραφή Συστήματος με Διαγράμματα Βαθμίδων

Βαθμίδα αθροιστή: δέχεται δύο ή περισσότερα σήματα εισόδου και παράγει έξοδο $y[n]$ που είναι το άθροισμα των σημάτων εισόδου, δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση: $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$.



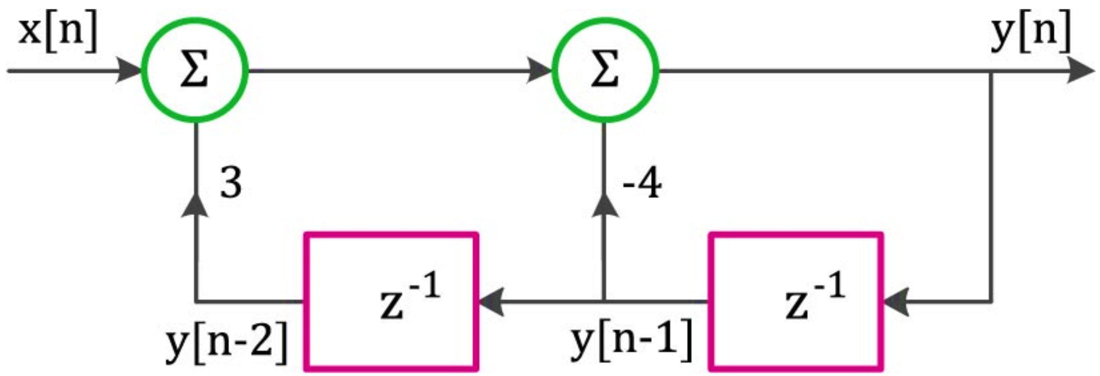
Βαθμίδα πολλαπλασιαστή: δέχεται δύο ή περισσότερα σήματα εισόδου και παράγει έξοδο $y[n]$ που είναι το γινόμενο των σημάτων εισόδου, δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση: $y[n] = x_1[n]\, x_2[n]$.



Άσκηση 9

Να αποδοθεί με μορφή διαγράμματος βαθμίδων το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y[n] = 3y[n-2] - 4y(n-1) + x[n]$.

Απάντηση: Με βάση τις διαθέσιμες βαθμίδες, σχεδιάζουμε το σχήμα:



Περιγραφή Συστήματος με Συνελικτικό Άθροισμα

Περιγραφή Συστήματος με Συνελικτικό Άθροισμα

Για ένα ΓΑΜΚ σύστημα η έξοδος $y[n]$ δίνεται ως $y[n] = T\{x[n]\}$. Επειδή ένα σήμα δ.χ. μπορεί να γραφεί ως το σταθμισμένο άθροισμα μοναδιαίων ώσεων:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

η έξοδος γράφεται:

$$y[n] = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right\}$$

Αν το σύστημα είναι γραμμικό, ισχύει:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,T\{\delta[n-k]\}$$

Επομένως, η έξοδος $T\{\delta[n-k]\}$ ενός γραμμικού συστήματος μπορεί να θεωρηθεί ως η έξοδος του συστήματος στη χρονική στιγμή n εξαιτίας μίας μοναδιαίας ώσης $\delta[n-k]$ η οποία εφαρμόστηκε στην είσοδό του στη χρονική στιγμή k. Αυτή καλείται **κρουστική απόκριση** και συμβολίζεται $h(n,k)$.

Κρουστική απόκριση ΓΑΚΜ συστήματος: $h(n-k) = T[\delta(n-k)]$

Περιγραφή Συστήματος με Συνελικτικό Άθροισμα

Επομένως, η έξοδος του γραμμικού συστήματος γράφεται:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n,k]$$

Αν το σύστημα είναι Γραμμικό και Αμετάβλητο κατά τη Μετατόπιση (ΓΑΚΜ), τότε η έξοδος στην κρουστική είσοδο

$$h[n,k] = h[n-k]$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην προηγούμενη, βρίσκουμε ότι για είσοδο $x[n]$, η έξοδος ενός συστήματος Γραμμικού και Αμετάβλητου Κατά τη Μετατόπιση (ΓΑΚΜ) με κρουστική απόκριση $h[n]$, δίνεται από το άθροισμα:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]\, h[k] = x[n] * h[n]$$

- Ο τελεστής * αναπαριστά το **άθροισμα συνέλιξης** μεταξύ $x[n]$ και $h[n]$.
- Η συνέλιξη προσφέρει έναν τρόπο υπολογισμού για ΓΑΚΜ συστήματα μέσω της $h[n]$, η οποία περιγράφει τη **συμπεριφορά** του συστήματος σε κρουστική είσοδο. Η $h[n]$ δεν φέρει πληροφορία για τη δομή του συστήματος.
- Η συνέλιξη είναι ένα ισχυρό εργαλείο για τη μελέτη ΓΑΚΜ συστημάτων.

Περιγραφή Συστήματος με Συνελικτικό Άθροισμα

Όταν οι ακολουθίες $x[n]$ και $h[n]$ είναι:

- άπειρης διάρκειας, τότε και η συνέλιξη είναι **άπειρης διάρκειας**.
- πεπερασμένης διάρκειας, τότε και η συνέλιξη είναι **πεπερασμένης διάρκειας**.

Αναλυτικότερα, αν οι μη-μηδενικές τιμές της ακολουθίας $x[n]$ περιέχονται σε ένα διάστημα $[M_x, N_x]$ με μήκος $L_x = N_x - M_x + 1$ τότε:

- και οι **μη-μηδενικές τιμές** της ακολουθίας $y[n]$ περιορίζονται στο διάστημα:

$$[M_x + M_h, N_x + N_h]$$

- και το **μήκος** της ακολουθίας $y[n]$ είναι:

$$L_y = L_x + L_h - 1$$

<u>Απόδειξη</u>:

$$\begin{aligned} L_y &= (N_x + N_h) - (M_x + M_h) + 1 \\ &= (N_x - M_x + 1) + (N_h - M_h + 1) - 1 = \\ &= L_x + L_h - 1 \end{aligned}$$

Περιγραφή Συστήματος με Εξισώσεις Διαφορών

Περιγραφή Συστήματος με Εξισώσεις Διαφορών

Στα συστήματα διακριτού χρόνου η σχέση εισόδου – εξόδου μπορεί να λάβει τη μορφή:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\,, \qquad n \geq 0$$

- $a_k \;\; b_m$ σταθερές που καθορίζουν το σύστημα
- $y[-k], k = 1, \dots, N$ αρχική κατάσταση της εξόδου
- $x[-m], \;\; m = 1, \dots, M$ αρχική κατάσταση της εισόδου

- Αν το σύστημα είναι αιτιατό, δηλαδή $x[-m] = 0$ για $m = 1, \dots, M$, για να υπολογιστεί η έξοδος απαιτούνται μόνο οι αρχικές συνθήκες της εξόδου.
- Αν $y[-k] = 0$, για $k = 1, \dots, N$, τότε το σύστημα βρίσκεται σε **κατάσταση αρχικής ηρεμίας** (initially relaxed).

Γραμμική Εξίσωση Διαφορών με Σταθερούς Συντελεστές (ΓΕΔΣΣ): για ΓΑΚΜ σύστημα, η Δ.Ε. είναι γραμμική, με σταθερούς συντελεστές, με μηδενικές αρχικές συνθήκες και η είσοδος του συστήματος είναι μηδενική για $n < 0$.

Η εξίσωση διαφορών παρέχει τη δυνατότητα να περιγραφεί ένα σύστημα με κρουστική απόκριση άπειρης διάρκειας, χρησιμοποιώντας ένα πεπερασμένο πλήθος συντελεστών. Αυτό απλοποιεί τον τρόπο περιγραφής ενός συστήματος.

Μη-Αναδρομικά Συστήματα

- Κρουστική απόκριση με πεπερασμένο πλήθος δειγμάτων: το αιτιατό ΓΑΚΜ σύστημα ονομάζεται **πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης** (Finite Impulse Response – FIR) ή **μη-αναδρομικό** (non-recursive) και η έξοδός του είναι:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] = \sum_{k=0}^{M} x[k]\, h[n-k]$$

- Επομένως, στα FIR συστήματα η έξοδος μπορεί να υπολογιστεί από το συνελικτικό άθροισμα αντί της εξίσωσης διαφοράς.
- Η κρουστική απόκρισή του είναι:

$$h[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m \delta[n-m]$$

- Η κρουστική απόκριση ενός FIR συστήματος είναι ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας. Όταν όμως η είσοδος στο σύστημα είναι άπειρης διάρκειας, τότε και η έξοδος του φίλτρου είναι άπειρης διάρκειας.

Αναδρομικά Συστήματα

- Κρουστική απόκριση με άπειρο πλήθος δειγμάτων: το αιτιατό ΓΑΚΜ σύστημα ονομάζεται **άπειρης κρουστικής απόκρισης** (Infinite Impulse Response – IIR) ή **αναδρομικό** (recursive) και η έξοδός του δίνεται από τη σχέση:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

- Στα αναδρομικά συστήματα η κρουστική απόκριση $h[n]$ έχει άπειρη διάρκεια και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \delta[n-k]$$

Μελέτη Συστημάτων με τη Μέθοδο της (Γραμμικής) Συνέλιξης

Ιδιότητες της Γραμμικής Συνέλιξης

- Ομογένεια
- Αντιμεταθετική
- Προσεταιριστική
- Επιμεριστική
- Ταυτοτική

Ιδιότητα Ομογένειας

Η συνέλιξη είναι ένας **γραμμικός** τελεστής με τις ακόλουθες ιδιότητες

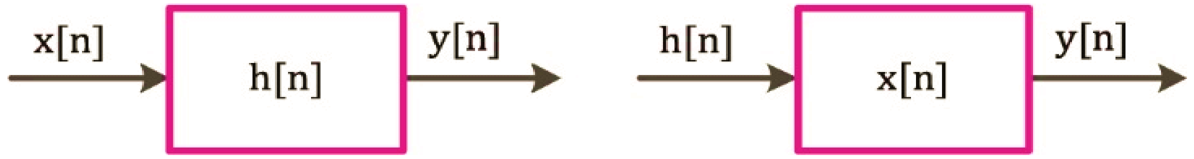
1. **Ομογένεια:** Ισχύουν οι σχέσεις:

$$(\alpha x[n]) * y[n] = x[n] * (a y[n])$$

$$x[n] * (a y[n]) = a(x[n] * y[n])$$

Αντιμεταθετική Ιδιότητα

2. Αντιμεταθετική: $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$

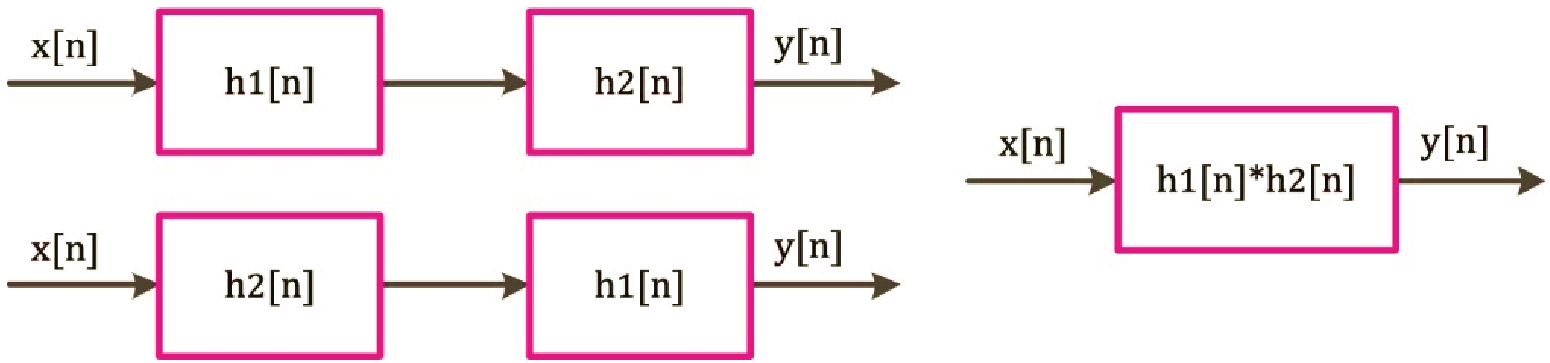


Η σειρά με την οποία εκτελείται η συνέλιξη, δεν έχει σημασία.

Ένα σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n]$ και είσοδο $x[n]$, συμπεριφέρεται το ίδιο με ένα σύστημα με κρουστική απόκριση $x[n]$ και είσοδο $h[n]$.

Προσεταιριστική Ιδιότητα

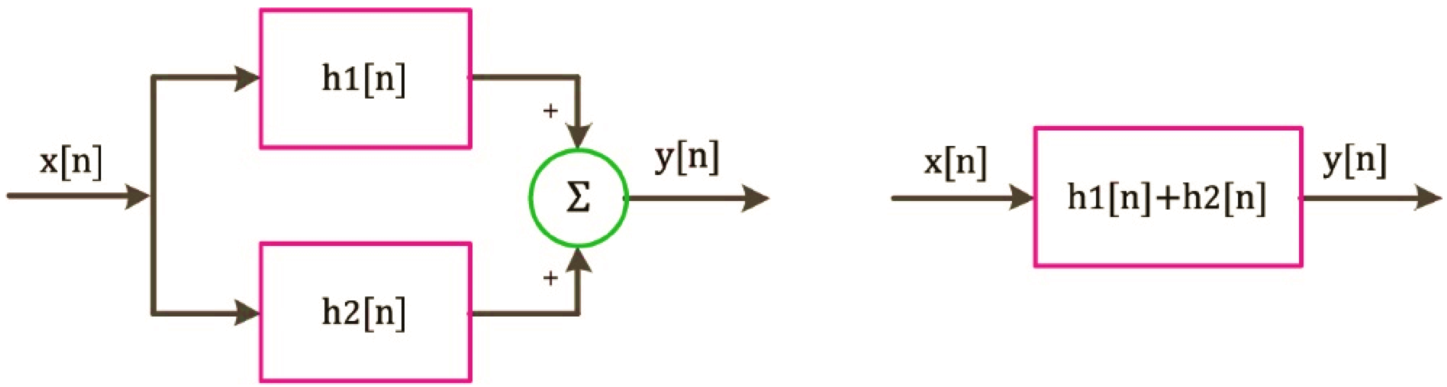
3. Προσεταιριστική: $\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$



Αν δύο συστήματα με κρουστικές αποκρίσεις $h_1[n]$ και $h_2[n]$ συνδεθούν σε σειρά (cascade), το ισοδύναμο σύστημα που προκύπτει έχει κρουστική απόκριση ίση με τη **συνέλιξη** των $h_1[n]$ και $h_2[n]$.

Επιμεριστική και Ταυτοτική Ιδιότητες

4. Επιμεριστική: $x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\} = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$



Αν δύο συστήματα με κρουστικές αποκρίσεις $h_1[n]$ και $h_2[n]$ συνδεθούν παράλληλα, το ισοδύναμο σύστημα που προκύπτει έχει κρουστική απόκριση ίση με το **άθροισμα** των $h_1[n]$ και $h_2[n]$.

5. Ταυτοτική: $x[n] * \delta[n] = x[n]$

Το ουδέτερο στοιχείο της πράξης της συνέλιξης είναι η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta[n]$.

Ιδιότητες Συνέλιξης

Εύκολα αποδεικνύεται (βλ. παράδειγμα 8.23) ότι η συνέλιξη είναι μια πράξη γραμμική και χρονικά αμετάβλητη, δηλαδή ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$h[n] * \{a_1\, x_1[n] + a_2\, x_2[n]\} = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n]$$

$$h[n] * x[n - n_0] = y[n - n_0]$$

Τρόποι Υπολογισμού της Γραμμικής Συνέλιξης

- Απευθείας (αναλυτικός) υπολογισμός
- Γραφικός υπολογισμός
- Μέθοδος Πίνακα
- Υπολογισμός με Πίνακα Toeplitz

Τρόποι Υπολογισμού Συνέλιξης

Για τον υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης (στο πεδίο του χρόνου)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ακόλουθοι τρόποι:

1. Απευθείας (αναλυτικός) υπολογισμός: όταν τα σήματα που πρόκειται να συνελιχθούν περιγράφονται από απλές μαθηματικές εκφράσεις κλειστού τύπου.

2. Γραφικός υπολογισμός: για σήματα που έχουν εύκολη γραφική αναπαράσταση και κατά προτίμηση είναι πεπερασμένου μήκους.

3. Μέθοδος Πίνακα: όταν τα σήματα που πρόκειται να συνελιχθούν είναι πεπερασμένου μήκους και σύντομα ως προς τη διάρκεια (διαδικασία ίδια με την προηγούμενη αλλά χωρίς γραφική αναπαράσταση).

4. Υπολογισμός με Πίνακα Toeplitz.

Απευθείας Υπολογισμός Συνέλιξης

Συνήθως προκύπτει υπολογισμός αθροισμάτων που συγκλίνουν ή δεν συγκλίνουν, και τα οποία περιέχουν όρους της μορφής α^n ή $n\alpha^n$.

Παρακάτω δίνονται μερικές εκφράσεις κλειστού τύπου για τις πιό κοινά χρησιμοποιούμενες σειρές:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-a^N}{1-a}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-a}, \qquad |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} n\,\alpha^n = \frac{(N-1)a^{N+1} - Na^N + a}{(1-a)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\,\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-a)^2}, \qquad |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{2}N(N-1)$$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \alpha^n = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}$$

Άσκηση 10

Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος με κρουστική απόκριση $h[n] = u[n]$ και είσοδο το σήμα:

$$x[n] = a^n\, u[n] = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Απάντηση: Αντικαθιστούμε τις δοθείσες ακολουθίες στον ορισμό του συνελικτικού αθροίσματος και βρίσκουμε:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k\, u[k]\, u[n-k]$$

Για $n \geq 0$ ισχύει:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Συνεπώς η έξοδος είναι:

$$y[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}\, u[n]$$

Άσκηση 11

Να υπολογιστεί η συνέλιξη μεταξύ των $x[n] = (0.9)^n u[n]$ και $h[n] = n\, u[n]$.

Απάντηση: Η συνέλιξη είναι:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{(0.9)^k\, u[k]\right\} \{[n-k]\, u[n-k]\}$$

Επειδή $u[k] = 0$ για $k < 0$ και $u[n-k] = 0$ για $k > n$, έχουμε :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} [n-k](0.9)^k = n \sum_{k=0}^{n} (0.9)^k - \sum_{k=0}^{n} k(0.9)^k \quad \text{για } n \geq 0$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους των σειρών, έχουμε:

$$y[n] = n\frac{1-(0.9)^{n+1}}{1-0.9} - \frac{n(0.9)^{n+2} - [n+1](0.9)^{n+1} + 0.9}{[1-0.9]^2}$$

$$= 10n\left\{1-(0.9)^{n+1}\right\} - 100\left\{n(0.9)^{n+2} - [n+1](0.9)^{n+1} + 0.9\right\} \quad n \geq 0$$

$$= \{10n - 90 + 90(0.9)^n\}\, u[n]$$

Γραφικός Υπολογισμός Συνέλιξης

Για τον **γραφικό υπολογισμό** της συνέλιξης ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

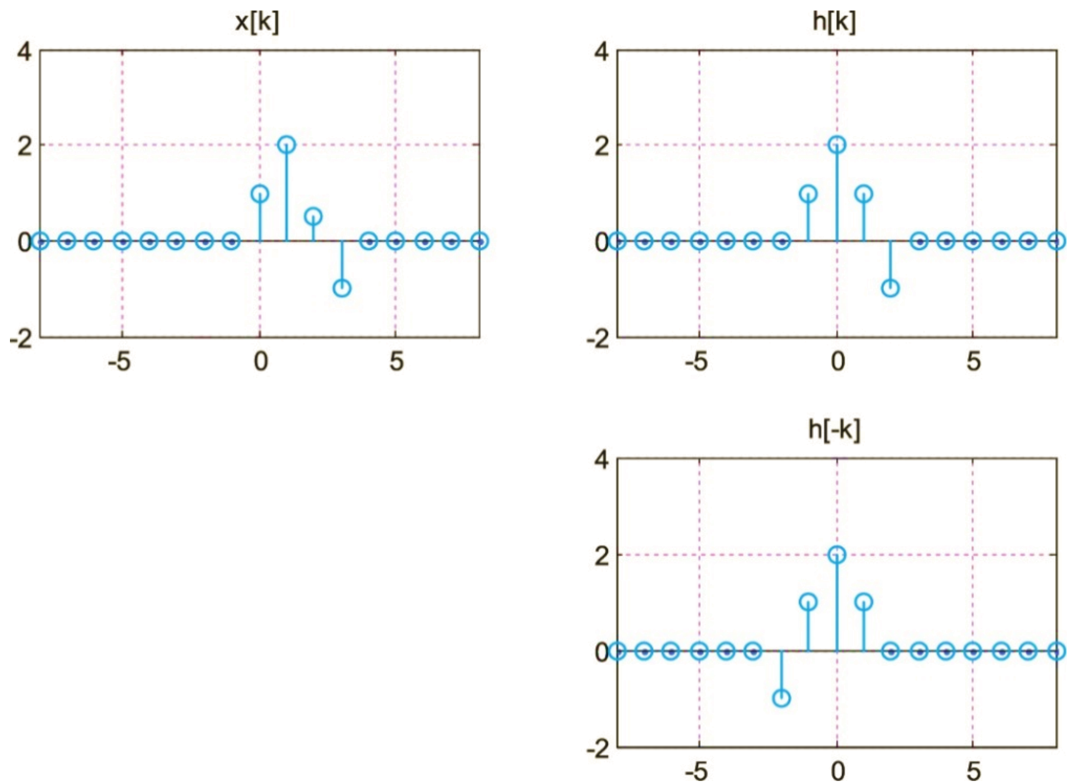
1. Σχεδιάζουμε την ακολουθία $x[k]$.
2. Σχεδιάζουμε την ανάκλαση $h[-k]$ ως προς $k = 0$, της $h[k]$.
3. Μετατοπίζουμε την $h[-k]$ κατά n_0 σημεία και λαμβάνουμε τη χρονική μετατόπιση $h[n_0 - k]$ την οποία και σχεδιάζουμε.
4. Πολλαπλασιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των $x[k]$ και $h[n_0 - k]$ και υπολογίζουμε το μερικό γινόμενο $u_{n_o}[k] = x[k]\, h[n_0 - k]$.
5. Για κάθε τιμή του k υπολογίζουμε το συνολικό άθροισμα των επιμέρους μερικών γινομένων και βρίσκουμε την τιμή $y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n_0 - k]$.

Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 3, 4 και 5 για επόμενη τιμή του n_0. Σταματάμε όταν το άθροισμα των γινομένων στο βήμα 4 δίνει μηδέν για όλες τις υπόλοιπες τιμές του k.

Άσκηση 12

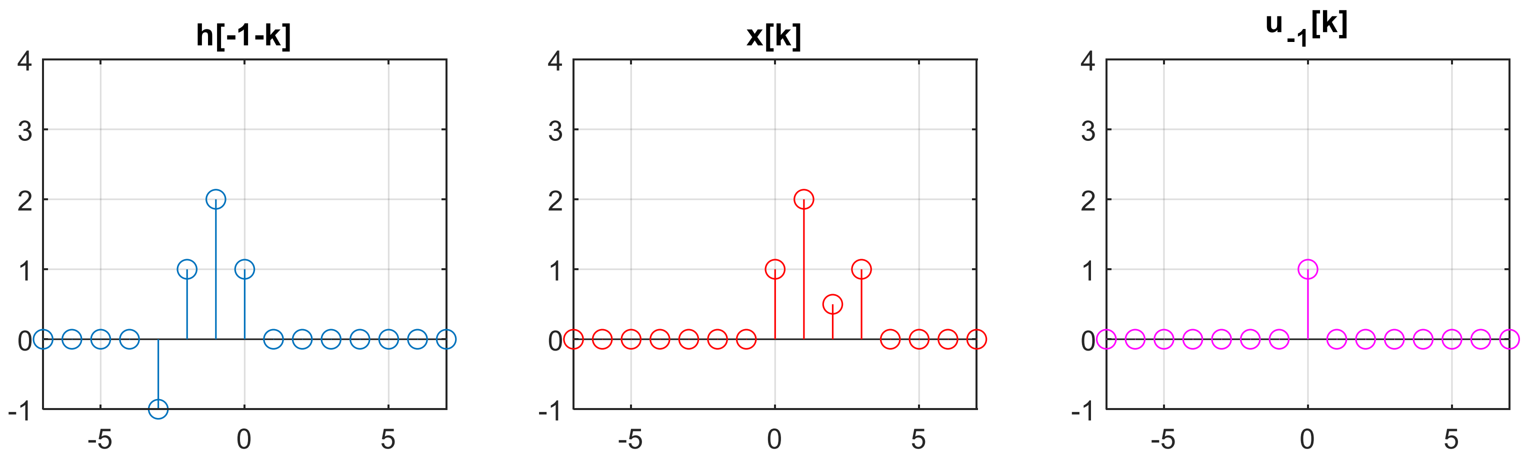
Να υπολογιστεί η συνέλιξη μεταξύ των σημάτων $h[n] = \{\ldots 0, 1, \hat{2}, 1, -1, 0 \ldots\}$ και $x[n] = \{\ldots 0, \hat{1}, 2, 0.5, 1,\ \ 0 \ldots\}$ με τη γραφική μέθοδο.

Απάντηση: Σχεδιάζουμε τα σήματα $x[k]$ και $h[k]$ στην αρχική τους μορφή, καθώς και την ανάκλαση $h[-k]$ ως προς $k = 0$.



Άσκηση 12 (συνέχεια)

Σχεδιάζουμε τα σήματα για μετατόπιση $n = -1$, δηλαδή $h[-1-k]$ και το γινόμενο $u_{-1}[k] = x[k]\, h[-1-k]$.

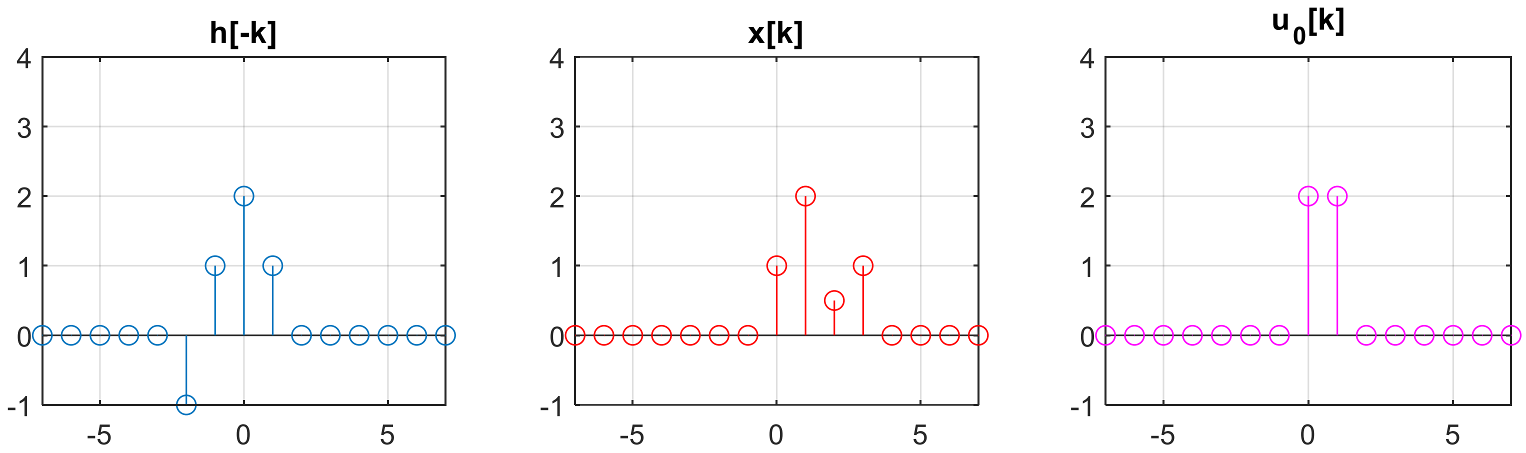


Η τιμή της εξόδου $y[n]$ υπολογίζεται αθροίζοντας τα δείγματα του σήματος $u_{-1}[k]$ δηλαδή:

$$y[-1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_{-1}[k] = 1$$

Άσκηση 12 (συνέχεια)

Σχεδιάζουμε τα σήματα για μετατόπιση $n = 0$, δηλαδή $h[-k]$ και το γινόμενο $u_0[k] = x[k]\, h[-k]$.

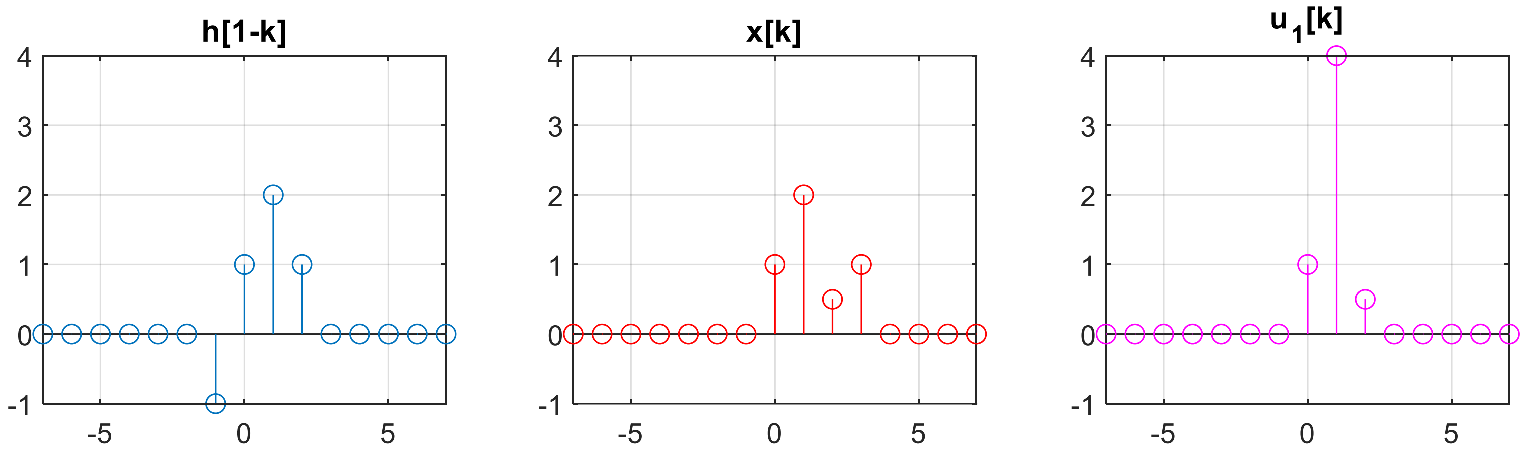


Η τιμή της εξόδου $y[n]$ υπολογίζεται αθροίζοντας τα δείγματα του σήματος $u_0[k]$ δηλαδή:

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_0[k] = 4$$

Άσκηση 12 (συνέχεια)

Σχεδιάζουμε τα σήματα για μετατόπιση $n = 1$, δηλαδή $h[1-k]$ και το γινόμενο $u_1[k] = x[k]\, h[1-k]$.

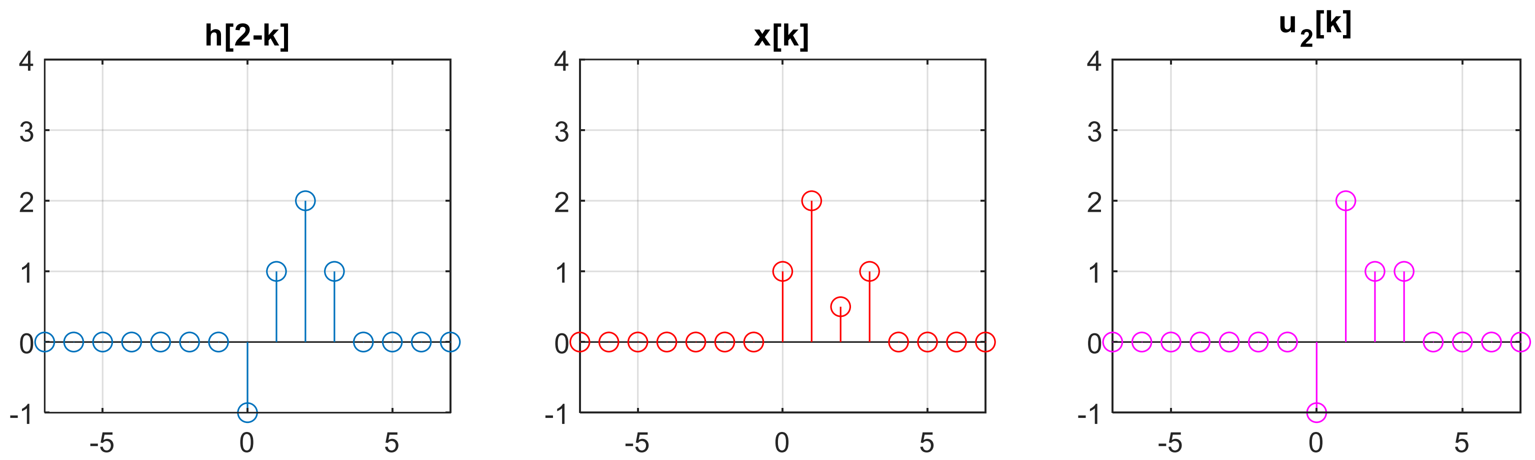


Η τιμή της εξόδου $y[n]$ υπολογίζεται αθροίζοντας τα δείγματα του σήματος $u_1[k]$ δηλαδή:

$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_1[k] = 5.5$$

Άσκηση 12 (συνέχεια)

Σχεδιάζουμε τα σήματα για μετατόπιση $n = 2$, δηλαδή $h[2-k]$ και το γινόμενο $u_2[k] = x[k]\, h[2-k]$.



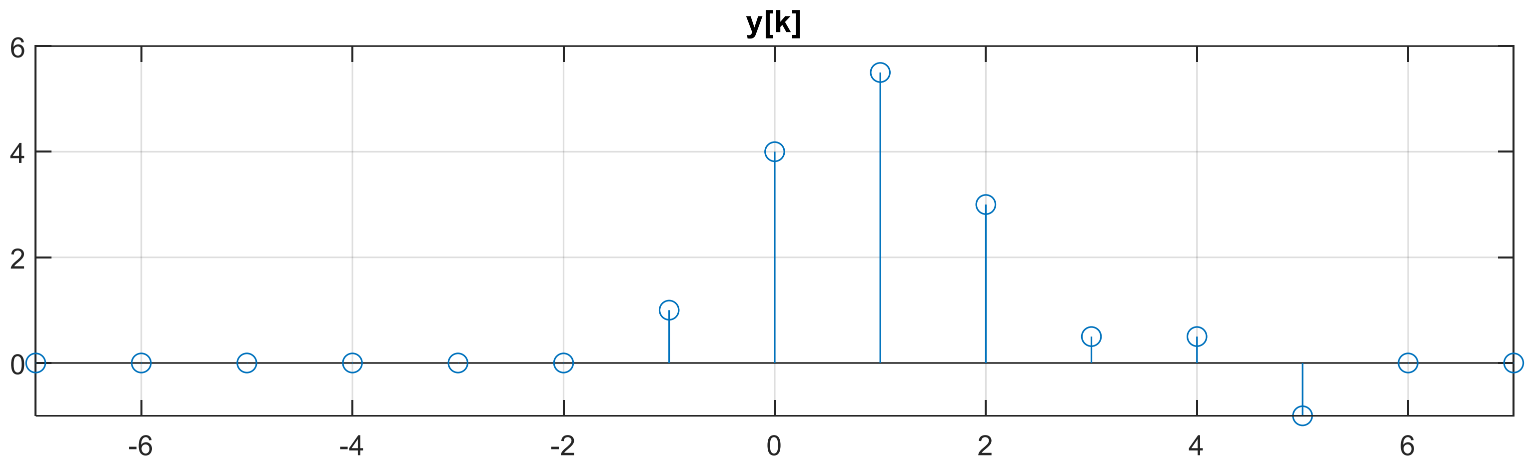
Η τιμή της εξόδου $y[n]$ υπολογίζεται αθροίζοντας τα δείγματα του σήματος $u_2[k]$ δηλαδή:

$$y[2] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_2[k] = 3$$

Άσκηση 12 (συνέχεια)

Ομοίως για διαφορετικές μετατοπίσεις προκύπτει το αποτέλεσμα:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \{\dots 0, 1, \hat{4}, 5.5, 3, 0.5, 0.5, -1, 0, \dots\}$$



Άσκηση 13

Να βρεθεί η συνέλιξη μεταξύ των σημάτων $h[n] = n\{u[n] - u[n-5]\} + 1$ και $x[n] = u[n+2] - u[n-2]$ με τη μέθοδο του πίνακα.

Απάντηση: Γράφουμε τα δοθέντα σήματα σε μορφή ακολουθιών. Είναι: $h[n] = \{\ldots 0, \hat{1}, 2, 3, 4, 5{,}0 \ldots\}$, $x[n] = \{\ldots 0, 1, 1, \hat{1}, 1, 1, 0 \ldots\}$.

Δημιουργούμε τον πίνακα της επόμενης διαφάνειας:

- Στην πρώτη γραμμή απεικονίζουμε την κλίμακα χρόνου, έστω $-7 \leq k \leq 7$.
- Στις επόμενες δύο γραμμές τοποθετούμε τις δοθείσες ακολουθίες $x[k]$ και $h[k]$ και στην επόμενη την ανάκλαση $h[-k]$ ως προς $k = 0$.
- Στις επόμενες γραμμές τοποθετούμε ολισθήσεις κατά n_0 της ακολουθίας $h[-k]$, δηλαδή τις ακολουθίες $h[n_0 - k]$, όπου $n_0 = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.
- Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για όσες τιμές του n_0 οι ακολουθίες $x[k]$ και $h[n_0 - k]$ παρουσιάζουν μεταξύ τους επικάλυψη.

Άσκηση 13 (συνέχεια)

n_0	k	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	n	$\boldsymbol{y[n]}$
	$x[k]$						1	1	1	1	1							
	$h[k]$								1	2	3	4	5					
	$h[-k]$				5	4	3	2	1									
-3	$h[-3-k]$	5	4	3	2	1											-3	**0**
-2	$h[-2-k]$		5	4	3	2	1										-2	**1**
-1	$h[-1-k]$			5	4	3	2	1									-1	**3**
0	$h[-k]$				5	4	3	2	1								0	**6**
1	$h[1-k]$					5	4	3	2	1							1	**10**
2	$h[2-k]$						5	4	3	2	1						2	**15**
3	$h[3-k]$							5	4	3	2	1					3	**14**
4	$h[4-k]$								5	4	3	2	1				4	**12**
5	$h[5-k]$									5	4	3	2	1			5	**9**
6	$h[6-k]$										5	4	3	2	1		6	**5**
7	$h[7-k]$											5	4	3	2	1	7	**0**

Άσκηση 13 (συνέχεια)

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε για τιμές $n_0 \leq -3$ και $n_0 \geq 7$ οι ακολουθίες $x[k]$ και $h[n_0 - k]$ δεν επικαλύπτονται. Έτσι $x[k]\, h[n_0 - k] = 0$, επειδή τουλάχιστον μία από τις δύο ακολουθίες είναι μηδενική. Επομένως, για το δοθέν παράδειγμα οι τιμές του n_0 που παράγουν μη-μηδενικό αποτέλεσμα είναι αυτές που ικανοποιούν την ανισότητα $-2 \leq n_0 \leq 6$.

Στη συνέχεια, για μία τιμή του n_0 που ικανοποιεί την ανισότητα, πολλαπλασιάζουμε σημείο προς σημείο τις ακολουθίες $[n_0 - k]$ και $x[k]$ και λαμβάνουμε το γινόμενο $x[k]\, h[n_0 - k]$. Προσθέτουμε τα γινόμενα για $-7 \leq k \leq 7$ και βρίσκουμε το σημείο $y[n_0] = \sum_{k=-7}^{7} x[k]\, h[n_0 - k]$.

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αυτή για μία νέα τιμή του n_0 μέχρι να εξαντλήσουμε τις τιμές του n_0 που παράγουν μη μηδενικό αποτέλεσμα $y[n_0]$.

Απεικονίζουμε τα $y[n_0]$ στην τελευταία στήλη του πίνακα και έχουμε:

- $y[-3] = 0, \quad y[-2] = 1, \quad y[-1] = 3, \quad y[0] = 6, \quad y[1] = 10, \quad y[2] = 15$
- $y[3] = 14, \quad y[4] = 12, \quad y[5] = 9, \quad y[6] = 5, \quad y[7] = 0$

Επομένως: $y[n] = \{\ldots 0, 1, 3, \hat{6}, 10, 15, 14, 12, 9, 5, 0, \ldots.\}$

Υπολογισμός με Πίνακα Toeplitz

Η γραμμική συνέλιξη δύο ακολουθιών $x[n]$ μήκους L_x και $h[n]$ μήκους L_h είναι μία ακολουθία $y[n]$ μήκους $L_y = L_x + L_h - 1$, η οποία μπορεί να εκφραστεί σε μορφή πινάκων:

$$\boldsymbol{y}^T = \boldsymbol{H}\ \boldsymbol{x}^T$$

- το διάνυσμα $\boldsymbol{x}^T$ είναι ο ανάστροφος πίνακας του $x[\mathrm{n}]$, δηλαδή έχει τις τιμές του σήματος $x[n]$ και είναι διαστάσεων $[L_x, 1]$,
- ο πίνακας $\boldsymbol{H}$ έχει τις τιμές του σήματος $h[n]$ αναδιπλωμένες και μετατοπισμένες και είναι διαστάσεων $[L_y, L_x]$, και
- το διάνυσμα $\boldsymbol{y}^T$ έχει τις τιμές της συνέλιξης $y[n]$ και είναι διαστάσεων

Άσκηση 14

Να υπολογιστεί με χρήση πίνακα Toeplitz η συνέλιξη μεταξύ των σημάτων $x[n] = \{\hat{1}, -2, 0, 3, -1\}$ και $h[n] = \{2, \hat{3}, 0, 1\}$.

Απάντηση: Το σήμα $x[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας στο διάστημα $[-1, 2]$ με μήκος $L_h = 4$.

Επομένως, η συνέλιξη είναι πεπερασμένης διάρκειας στο χρονικό διάστημα $[0 + (-1), 4 + 2] = [-1, 6]$ και έχει μήκος ίσιο με:

$$L_y = L_x + L_h - 1 = 5 + 4 - 1 = 8 \text{ δείγματα}$$

Το διάνυσμα $\boldsymbol{x}$ έχει διαστάσεις $[L_x, 1] = [5, 1]$ και είναι: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Άσκηση 14 (συνέχεια)

Ο πίνακας $\boldsymbol{H}$ έχει διαστάσεις $[L_y, L_x] = [8, 5]$ και είναι: $H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Υπολογίζουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{y}^T$:

$$\boldsymbol{y}^T = \boldsymbol{H}\,\boldsymbol{x}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -6 \\ 7 \\ 5 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Επομένως η συνέλιξη είναι:

$$y[n] = \{2, -\hat{1}, -6, 7, 5, -3, 3, -1\}$$