Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ενότητα 1: Μετατροπή Σήματος από Αναλογική Μορφή σε Ψηφιακή

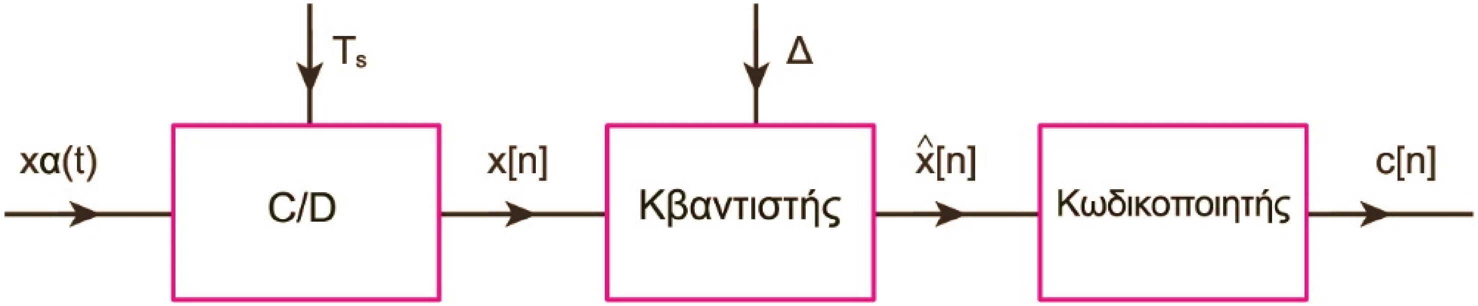
Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Μετατροπή Αναλογικού Σήματος σε Ψηφιακό
- Είδη Δειγματοληψίας:
  - Ιδανική δειγματοληψία
  - Πρακτική δειγματοληψία
  - Δειγματοληψία επίπεδης κορυφής
- Κβαντισμός
  - Ομοιόμορφος και Ανομοιόμορφος Κβαντισμός
  - Παράμετροι Κβαντισμού
- Κωδικοποίηση
- Ανακατασκευή Αναλογικού Σήματος από Ψηφιακό

Μετατροπή Αναλογικού Σήματος σε Ψηφιακό

Τα περισσότερα σήματα διακριτού χρόνου (ΣΔΧ) παράγονται από σήματα συνεχούς χρόνου (ΣΣΧ), με επεξεργασία των τριών ακόλουθων σταδίων:



Μετατροπέας Analog/Digital

- **Δειγματοληψία** (sampling): Continuous to Discrete Conversion. Παράγει το $x[n] = x_a(nT_s)$, όπου T_s: περίοδος δειγματοληψίας (sampling period).
- **Κβαντισμός** (quantization): αντιστοιχίζει το συνεχές πλάτος $x_a(nT_s)$ σε διακριτό σύνολο τιμών $\hat{x}[n]$. Χαρακτηριστικά: Δ: διάστημα κβαντισμού και μήκος λέξης (bits).
- **Κωδικοποίηση** (coding): Παράγει ακολουθία $c[n]$ δυαδικών κωδικών λέξεων, που μεταδίδονται στο κανάλι επικοινωνίας.

Δειγματοληψία

Δειγματοληψία (Sampling)

Δειγματοληψία (sampling) είναι η διαδικασία μετατροπής ενός σήματος συνεχούς χρόνου και συνεχούς πλάτους (αναλογικό σήμα) σε σήμα διακριτού χρόνου (ΣΔΧ).

Ένα αναλογικό σήμα $x_a(t)$ με πεπερασμένο εύρος ζώνης συχνοτήτων $X_a(\Omega)$ και μέγιστη συχνότητα Ω_{max}, υπόκειται σε δειγματοληψία με ρυθμό $f_s = 1/T_s$ (δείγματα/sec). Ως αποτέλεσμα παράγεται το **σήμα διακριτού χρόνου** $x_a[n]$:

$$x_a[n] \triangleq x_\alpha(nT_s) = x_\alpha(t)|_{t=nT_s}$$

Η τιμή της περιόδου δειγματοληψίας T_s προσδιορίζεται από το **κριτήριο Nyquist ή Θεώρημα Δειγματοληψίας** (sampling theorem). Σύμφωνα με αυτό, αν το αναλογικό σήμα $x_\alpha(t)$ έχει ένα αυστηρά περιορισμένο εύρος ζώνης συχνοτήτων [δηλ. ισχύει: $X_a(\Omega) = 0$ για $|\Omega| > \Omega_{max}$], τότε το $x_a(t)$ μπορεί να ανακτηθεί πλήρως από τα δείγματα του $x_a(nT_s)$, αν για τη συχνότητα δειγματοληψίας f_s ισχύει η σχέση:

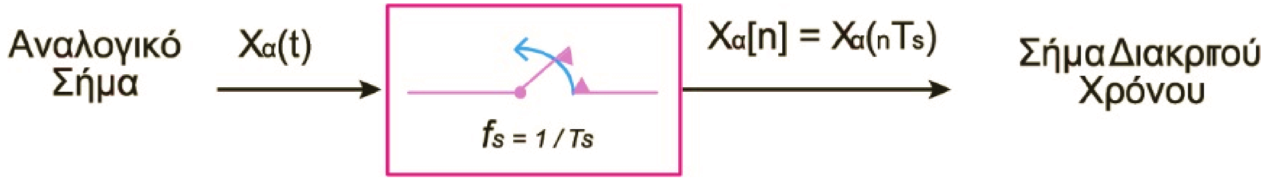
$$f_s \geq 2f_{max} \text{ ή ισοδύναμα } \Omega_s \geq 2\Omega_{max}$$

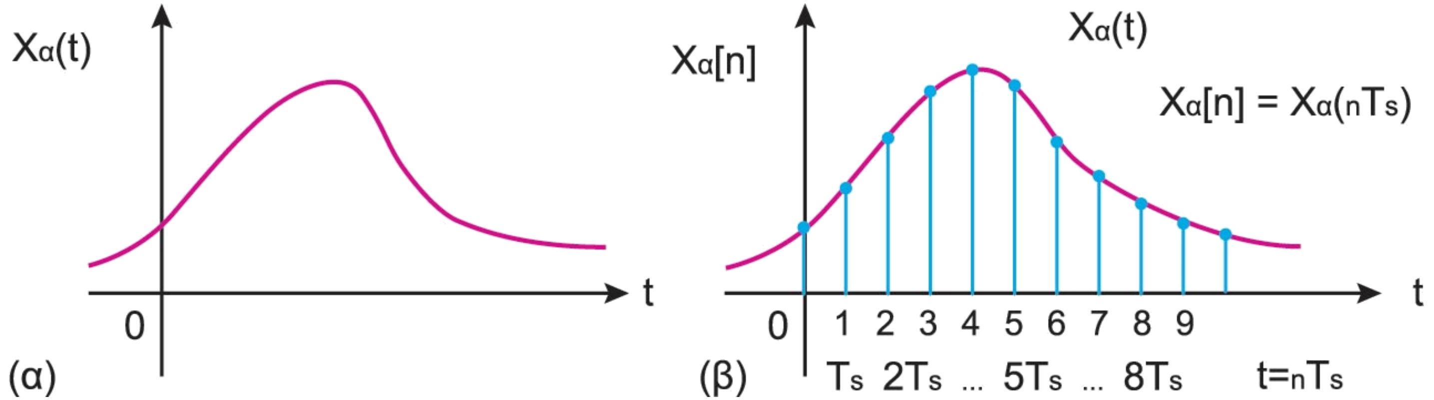
όπου f_{max} είναι η μέγιστη συχνότητα του σήματος συνεχούς χρόνου $x_\alpha(t)$.

Ο **ρυθμός Nyquist** ορίζεται από τη σχέση: $f_n = 2\ f_{max}$

Δειγματοληψία

Στην πράξη η δειγματοληψία μπορεί να υλοποιηθεί από το διαδοχικό άνοιγμα και κλείσιμο ενός ιδανικού διακόπτη ανά χρονικό διάστημα T_s. Τα δείγματα του σήματος λαμβάνονται κατά τις στιγμές που ο διακόπτης είναι κλειστός, ενώ τις στιγμές που ο διακόπτης είναι ανοικτός δεν προκύπτουν δείγματα.





(α) Αναλογικό σήμα $x_a(t)$, (β) σήμα διακριτού χρόνου $x_a[n]$.

Σχέση μεταξύ αναλογικής και ψηφιακής συχνότητας

Η αντιστοίχιση ανάμεσα στη **συνεχή συχνότητα** Ω (rad/sec) του σήματος συνεχούς χρόνου $x_a(t)$ και στη **διακριτή συχνότητα** ω (rad) του σήματος διακριτού χρόνου $x_a[n] = x_a(nT_s)$, δίνεται από τη σχέση:

$$\omega = \Omega T_s, \quad (rad/sec)\, x\, (sec) \ = \ (rad)$$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές της διακριτής συχνότητας ω προκύπτουν ως **δείγματα** της συνεχούς συχνότητας Ω, που λαμβάνονται ανά χρονικό διάστημα ίσο με την περίοδο δειγματοληψίας T_s.

Είδη Δειγματοληψίας

- Ιδανική δειγματοληψία
- Πρακτική δειγματοληψία
- Δειγματοληψία επίπεδης κορυφής

Ιδανική Δειγματοληψία

Ιδανική Δειγματοληψία

Ιδανική δειγματοληψία είναι η διαδικασία παραγωγής δειγμάτων $x_s(nT_s)$ ενός ΣΣΧ $x_\alpha(t)$, στιγμιαία και με ομοιόμορφο τρόπο, δηλ. ένα δείγμα κάθε T_s, μέσω του πολλαπλασιασμού του $x_\alpha(t)$ με μία συνάρτηση δειγματοληψίας $\delta_{T_s}(t)$:

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$$

Το ιδανικά δειγματοληπτημένο σήμα $x_s(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$x_s(t) = x_a(t)\, \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT_s)\, \delta(t - nT_s)$$

Η διαδικασία ονομάζεται ιδανική επειδή βασίζεται στη συνάρτηση $\delta(t)$, η οποία έχει σημαντική θεωρητική αξία, αλλά δεν μπορεί να υλοποιηθεί στην πράξη.

Ο μετασχηματισμός Fourier $X_s(\Omega)$ του σήματος $x_s(t)$ το οποίο έχει προκύψει από την ιδανική δειγματοληψία, δίνεται από τη σχέση:

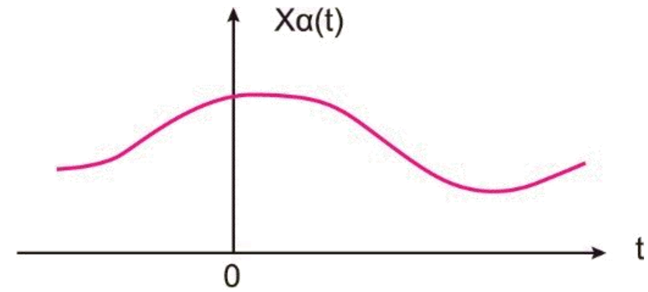
$$X_s(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\,(\Omega - k\Omega_s)$$

όπου $X_a(\Omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x_a(t)$.

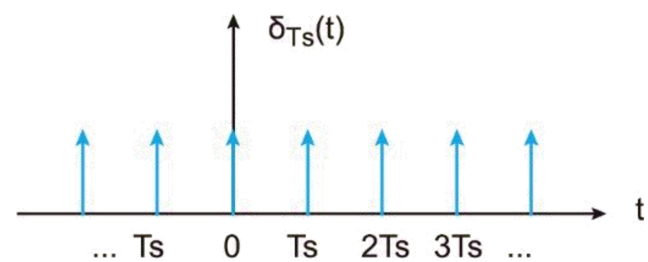
Ιδανική Δειγματοληψία

Παρατηρούμε ότι το φάσμα $X_s(\Omega)$ του ιδανικά δειγματοληπτημένου σήματος $x_s(t)$, προκύπτει ως άθροισμα επαναλήψεων του φάσματος $X_a(\Omega)$ του αρχικού σήματος $x_a(t)$, σε θέσεις που είναι ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας Ω_s.

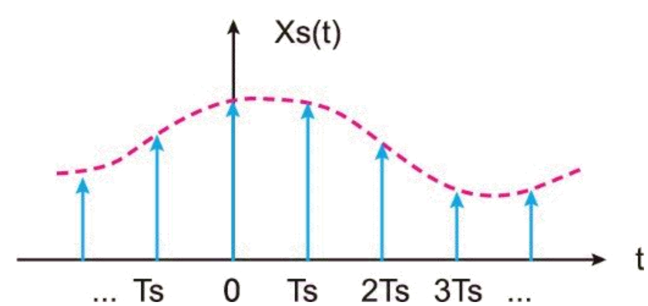
(α) Σήμα συνεχούς χρόνου x_α(t),



(β) Συνάρτηση δειγματοληψίας
$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$,



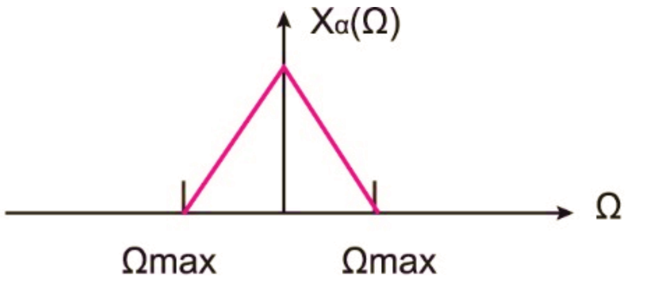
(γ) Ιδανικά δειγματοληπτημένο σήμα
$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT_s)\, \delta(t - nT_s)$



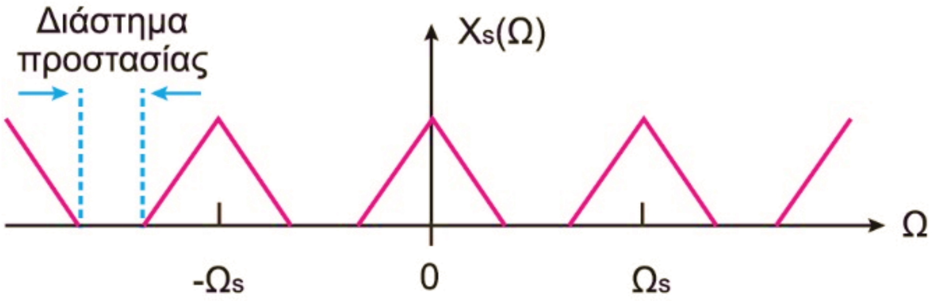
Η συχνότητα δειγματοληψίας είναι: $\Omega_s = 2\pi/T_s$

Ιδανική Δειγματοληψία (Πεδίο Συχνότητας)

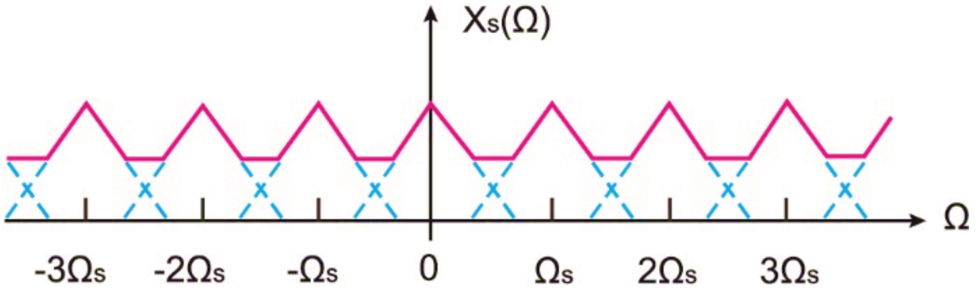
(α) Φάσμα αναλογικού σήματος $x_\alpha(t)$ με $X_a(f) = 0$ για $|f| > f_x$



(β) Φάσμα $X(f)$ δειγματοληπτημένου σήματος όταν $f_s \geq 2f_x$



(γ) Φάσμα $X(f)$ δειγματοληπτημένου σήματος όταν $f_s < 2f_x$



⇒ **Φαινόμενο επικάλυψης**
(aliasing effect)

Ιδανική Δειγματοληψία (Πεδίο Συχνότητας)

<u>Περίπτωση (α)</u>: $\boldsymbol{\Omega_s \geq 2\ \Omega_{max}}$ ή $f_s \geq 2f_{max}$

- Το φάσμα $X_s(\Omega)$ [σχήμα (β)] σχηματίζεται από διαδοχικές επαναλήψεις του $X_a(\Omega)$, που βρίσκονται σε ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας Ω_s. Δεν υπάρχει επικάλυψη (overlapping) μεταξύ των επαναλήψεων.
- **Διάστημα προστασίας:** Η απόσταση $\Omega_s - \Omega_{max}$ ανάμεσα σε δύο διαδοχικές επαναλήψεις του $X_a(\Omega)$.
- Η απουσία επικάλυψης μεταξύ των επαναλήψεων του φάσματος $X_a(\Omega)$ εξασφαλίζει την ανάκτηση του φάσματος $X_a(\Omega)$ από το $X_s(\Omega)$, άρα και του αρχικού σήματος $x_a(t)$ από το ιδανικά δειγματοληπτημένο σήμα $x_s(t)$.
- Η ανάκτηση γίνεται με βαθυπερατό φίλτρο με **συχνότητα αποκοπής** Ω_c, όπου:

$$\Omega_{max} < \Omega_c < \Omega_s \quad \text{ή} \quad f_{max} < f_c < f_s$$

- **Συχνότητα Nyquist:** $\Omega_N = 2\Omega_{max}$ **Κριτήριο Nyquist:** $\Omega_s \geq \Omega_N$ ή $\Omega_s \geq 2\ \Omega_{max}$ ή

$$T_s \leq \frac{\pi}{\Omega_{max}} = \frac{1}{2f_{max}}$$

- Το κριτήριο Nyquist εγγυάται ότι το σήμα $x_s(t)$ περιέχει όλη την πληροφορία του αρχικού σήματος $x_a(t)$ και το αρχικό σήμα μπορεί να <u>**ανακτηθεί πλήρως**</u> από το ιδανικά δειγματοληπτημένο.

Ιδανική Δειγματοληψία (Πεδίο Συχνότητας)

Περίπτωση (β): $\boldsymbol{\Omega_s < 2\, \Omega_{max}}$ ή $f_s < 2f_{max}$

- Στην περίπτωση αυτή προκύπτει επικάλυψη μεταξύ των διαδοχικών φασματικών επαναλήψεων του φάσματος $X_\alpha(\Omega)$ [σχήμα (γ)].
- Η ανάκτηση του αρχικού σήματος $x_\alpha(t)$ από το σήμα $x_s(t)$ είναι αδύνατη.
- **Φαινόμενο αναδίπλωσης συχνοτήτων** (aliasing effect): η επικάλυψη των διαδοχικών φασματικών επαναλήψεων. Προκαλεί μόνιμη και μη-αντιστρεπτή παραμόρφωση του σήματος.
- Αν επιχειρήσουμε φιλτράρισμα με βαθυπερατό φίλτρο με σκοπό την ανάκτηση του $x_\alpha(t)$, τότε θα προκύψουν συχνότητες οι οποίες δεν υπήρχαν στο αρχικό σήμα, οι **ψευδεπίγραφες** συχνότητες (aliasing frequencies).

Ιδανική Δειγματοληψία (Πεδίο Συχνότητας)

- Η παραπάνω μελέτη έγινε με την παραδοχή ότι το σήμα $x_\alpha(t)$ είναι ένα σήμα χαμηλών συχνοτήτων, δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση $X_\alpha(\Omega) = 0,$ για $|\Omega| > \Omega_{max}$.
- Αν το σήμα $x_\alpha(t)$ ένα φασματικά απεριόριστο, δηλαδή περιέχει συχνότητες οποιασδήποτε υψηλής τιμής, τότε το φαινόμενο της αναδίπλωσης συχνοτήτων θα υπάρχει για οποιαδήποτε (οσοδήποτε μεγάλη) τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας.
- Πρακτικά, σε περιπτώσεις τέτοιων σημάτων αρχικά φιλτράρουμε το σήμα με ένα βαθυπερατό φίλτρο και κατόπιν προχωρούμε στη δειγματοληψία.
- Αυτό βέβαια έχει ως αποτέλεσμα την οριστική απώλεια των υψηλών συχνοτήτων του σήματος.
- Ένα ακόμα πρόβλημα που καθιστά την ιδανική δειγματοληψία μη υλοποιήσιμη στην πράξη, είναι ότι το βαθυπερατό φίλτρο ανακατασκευής θεωρήθηκε ιδανικό, πράγμα που φυσικά δεν ισχύει, καθώς ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο έχει κρουστική απόκριση που είναι μη-αιτιατή και άπειρης διάρκειας. Στην πράξη, το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο ανακατασκευής προσεγγίζεται από ένα πρακτικό βαθυπερατό φίλτρο.

Φυσική Δειγματοληψία

Φυσική Δειγματοληψία (Πεδίο Χρόνου)

Το δειγματοληπτημένο σήμα $x_{ns}(t)$ προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του σήματος $x_{\alpha}(t)$ με μία περιοδική ακολουθία ορθογώνιων παλμών $x_p(t)$ με περίοδο T_s:

$$x_{ns}(t) = x_{\alpha}(t)\, x_p(t)$$

Κάθε ορθογώνιος παλμός $x_p(t)$ έχει χρονική διάρκεια τ και πλάτος ίσο με τη μονάδα.

Ονομάζεται φυσική επειδή η κορυφή κάθε παλμού στο $x_{ns}(t)$ διατηρεί το σχήμα του αντίστοιχου με αυτού αναλογικού τμήματος κατά τη διάρκεια του παλμού $x_p(t)$.

Επειδή το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της παλμοσειράς $x_p(t)$, είναι:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_k\, e^{j\boldsymbol{k}\Omega_s t} \quad \text{όπου} \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \quad \text{και} \quad X_k = \frac{\tau}{T_s}\frac{sin(k\Omega_s\tau/2)}{k\Omega_s\tau/2}$$

το δειγματοληπτημένο σήμα $x_{ns}(t)$ μπορεί να γραφεί:

$$x_{ns}(t) = x_{\alpha}(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_s t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k x_{\alpha}(t)\, e^{jk\Omega_s t}$$

Φυσική Δειγματοληψία (Πεδίο Συχνότητας)

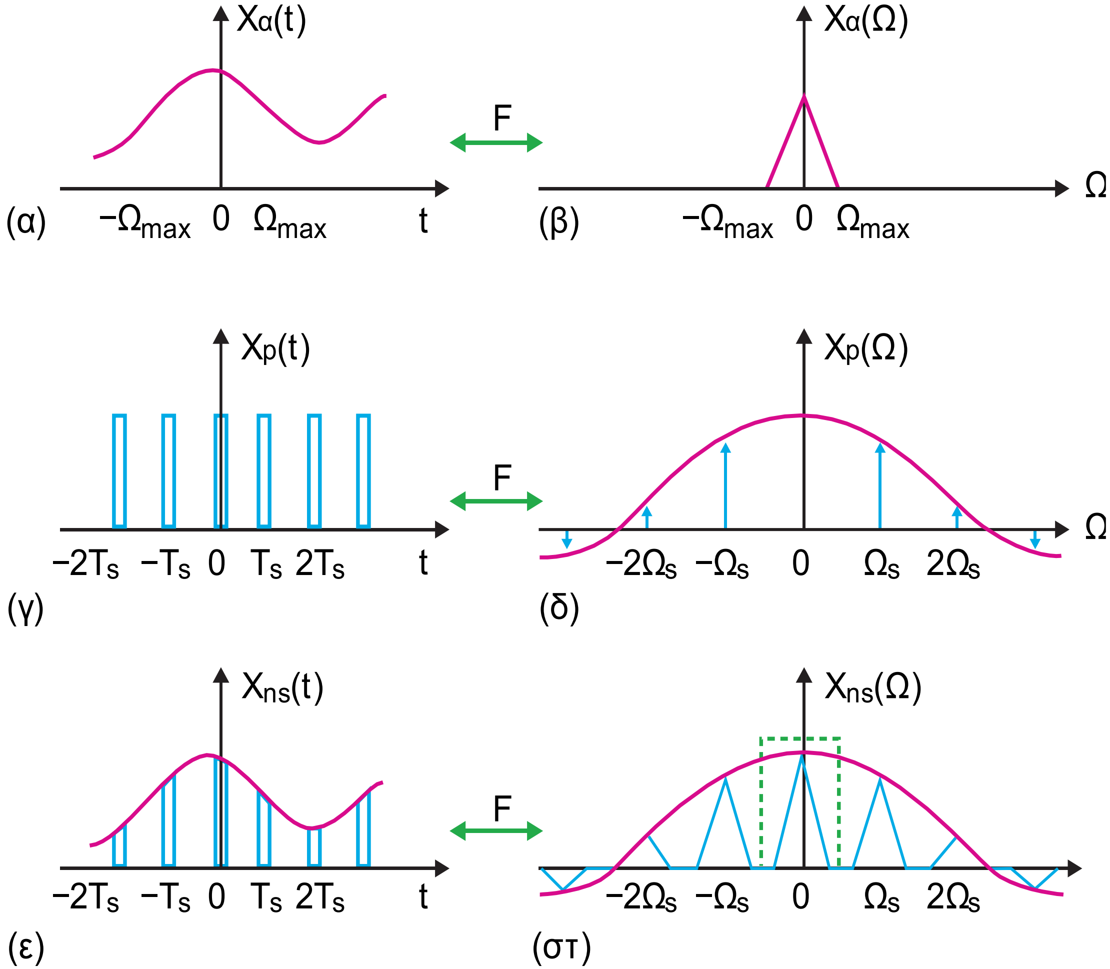
Με βάση την ιδιότητα της ολίσθησης συχνότητας του μετασχηματισμού Fourier, προκύπτει ότι το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος $x_{ns}(t)$ είναι:

$$X_{ns}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, X_\alpha(\Omega - k\Omega_s)$$

Άρα, και στη φυσική δειγματοληψία, το φάσμα $X_{ns}(\Omega)$ προκύπτει ως μία σταθμισμένη κατά X_k εκδοχή του φάσματος $X_\alpha(\Omega)$ του αρχικού σήματος $x_\alpha(t)$, κεντραρισμένη σε ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας Ω_s (βλ. επόμενη διαφάνεια).

Το θεώρημα δειγματοληψίας (Nyquist) μπορεί να εφαρμοστεί και στη φυσική δειγματοληψία. Αν ισχύει $\Omega_s \geq 2\Omega_{max}$, τότε το $x_\alpha(t)$ μπορεί να ανακτηθεί από το $x_{ns}(t)$ με φιλτράρισμα χαμηλών συχνοτήτων.

Φυσική Δειγματοληψία (Χρόνος – Συχνότητα)



(α) Σήμα $x_\alpha(t)$, (β) Φάσμα $X_\alpha(\Omega)$, (γ) Παλμοσειρά $x_p(t)$, (δ) Φάσμα παλμοσειράς $X_p(\Omega)$, (ε) Φυσικά δειγματοληπτημένο σήμα $x_{ns}(t)$, (στ) Φάσμα φυσικά δειγματοληπτημένου σήματος $X_{ns}(\Omega)$.

Φυσική Δειγματοληψία

- Συγκρίνοντας τα φάσματα του ιδανικά δειγματοληπτημένου και του φυσικά δειγματοληπτημένου σήματος παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις δημιουργούνται αντίγραφα του αρχικού φάσματος, όμως στη δεύτερη περίπτωση τα αντίγραφα φάσματα έχουν πλάτος που ελαττώνεται καθώς η συχνότητα αυξάνεται.
- Το θεώρημα δειγματοληψίας (Nyquist) μπορεί να εφαρμοστεί και στη φυσική δειγματοληψία.
- Αν ισχύει $\Omega_s \geq 2\Omega_{max}$, τότε το $x_\alpha(t)$ μπορεί να ανακτηθεί από το $x_{ns}(t)$ με φιλτράρισμα χαμηλών συχνοτήτων.
- Και αυτό το είδος δειγματοληψίας είναι μη υλοποιήσιμο στην πράξη, επειδή προϋποθέτει την ύπαρξη ακολουθίας ιδανικών τετραγωνικών παλμών, που δεν είναι ρεαλιστική.

Δειγματοληψία Επίπεδης Κορυφής

Δειγματοληψία Επίπεδης Κορυφής

Είναι η απλούστερη και δημοφιλέστερη πρακτική μέθοδος δειγματοληψίας, που παράγει ένα δειγματολαμβανόμενο σήμα με **οριζόντια κορυφή**.

Ονομάζεται επίσης και **διαμόρφωση πλάτους παλμών** (Pulse Amplitude Modulation - PAM), επειδή τα πλάτη των ορθογωνίων παλμών μεταβάλλονται ανάλογα με τις στιγμιαίες τιμές δειγματοληψίας του αναλογικού σήματος πληροφορίας.

Το **σήμα PAM** $x_s(t)$ περιγράφεται από τη σχέση:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s)\, p(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s)\, p(t) * \delta(t - nT_s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s)\, \delta(t - nT_s) * p(t) = x_s(t) * p(t)$$

όπου $x_s(t)$ είναι το ιδανικά δειγματοληπτημένο σήμα.

Δειγματοληψίας Επίπεδης Κορυφής (Πεδίο Συχνότητας)

Το φάσμα του PAM σήματος $x_s(t)$ είναι:

$$X_{PAM}(\Omega) = \mathrm{X}_S(\Omega)\, P(\Omega) = \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_\alpha(\Omega - n\Omega_S)\, P(\Omega)$$

Η PAM διαμόρφωση είναι ισοδύναμη με τη διέλευση ιδανικά δειγματο-ληπτημένου σήματος από φίλτρο με απόκριση συχνότητας $H(\Omega) = P(\Omega)$.

Η συνάρτηση $P(\Omega)$ λειτουργεί σαν βαθυπερατό φίλτρο και εξασθενεί τις υψηλές συχνότητες του σήματος. Όσο μεγαλύτερη η διάρκεια τ του παλμού, τόσο ισχυρότερη είναι η εξασθένιση των υψηλών συχνοτήτων.

Η εξασθένιση υψηλών συχνοτήτων μπορεί να αγνοηθεί αν ισχύει $\tau/T_S \leq 0{,}1$

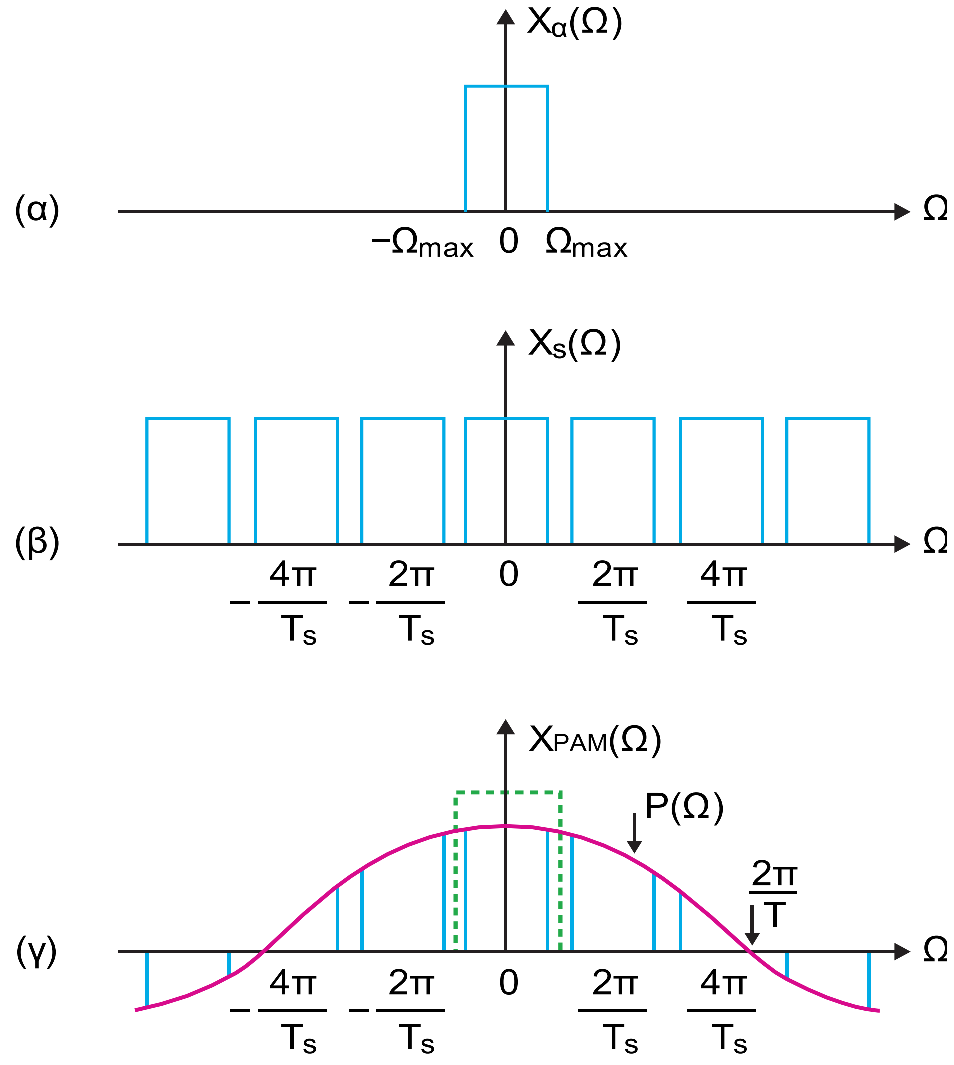
Το θεώρημα δειγματοληψίας (Nyquist) μπορεί να εφαρμοστεί και στη δειγματοληψία επίπεδης κορυφής. Αν $\Omega_s \geq 2\Omega_{max}$, τότε το $x_\alpha(t)$ μπορεί να ανακτηθεί από το $x_{PAM}(t)$ με φιλτράρισμα χαμηλών συχνοτήτων.

Δειγματοληψίας Επίπεδης Κορυφής (Πεδίο Συχνότητας)

(α) Φάσμα $X_\alpha(\Omega)$

(β) Φάσμα ιδανικά δειγματο-ληπτημένου σήματος $X_S(\Omega)$

(γ) Φάσμα σήματος PAM $X_{PAM}(\Omega)$



Άσκηση 1

Αν ο ρυθμός Nyquist για το σήμα $x(t)$ είναι Ω_s, να βρεθεί ο ρυθμός Nyquist για τα σήματα:

(α) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ (β)$y(t) = x(t)\cos(\Omega_0 t)$

Απάντηση: (α) Για να υπολογίσουμε τον DTFT της $y(t)$ χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της παραγώγισης του DTFT , από την οποία προκύπτει ότι:

$$Y(\Omega) = j\Omega\, X(\Omega)$$

Παρατηρούμε ότι δεν προκύπτει κάποια αλλαγή στο πεδίο της συχνότητας, επομένως και η συχνότητα Nyquist παραμένει σταθερή.

(β) Η δοθείσα πράξη υποδηλώνει διαμόρφωση και μάλιστα διαμόρφωση πλάτους. Είναι γνωστό ότι κατά τη διαμόρφωση ενός σήματος $x(t)$ με έναν όρο $\cos(\Omega_0 t)$, προκύπτει μετατόπιση του φάσματος του σήματος $x(t)$ κατά συχνότητα $\pm\Omega_0$. Επομένως, η συχνότητα Nyquist του $y(t) = x(t)\cos(\Omega_0 t)$ θα είναι $\Omega_s + 2\Omega_0$.

Άσκηση 2

Να βρεθεί ο ρυθμός Nyquist του σήματος $x_a(t) = 5\, cos\, 1000\pi t\ \ cos\, 4000\pi t$

Απάντηση: Από την τριγωνομετρική ιδιότητα $cos\, A\, .\, cosB = \frac{1}{2}[cos(A + B) + cos(A - B)],$ έχουμε:

$$x_a(t) = \frac{5}{2}(cos(1000\pi t + 4\,000\pi t) + cos(1000\pi t\ - 4\,000\pi t))$$
$$= 2{,}5(cos\, 5000\pi t + cos\, 3000\pi t)$$

Έτσι, το$x_a(t)$ είναι ένα σήμα με μέγιστη συχνότητα $f_{max} = 2.500\ Hz$.

Κατά συνέπεια, ο ρυθμός Nyquist είναι $2\ x\ 2.500 = 5.000\ Hz$

Το διάστημα (περίοδος) Nyquist είναι $1/5.000\ \text{sec} =\ 0{,}2\ ms$

Άσκηση 2

Να βρεθεί ο ρυθμός Nyquist του σήματος $x_a(t) = 5\,cos\,1000\pi t\ \ cos\,4000\pi t$

Απάντηση: Από την τριγωνομετρική ιδιότητα $cos\,A\,.\,cosB = \frac{1}{2}[cos(A+B) + cos(A-B)]$, έχουμε:

$$x_a(t) = \frac{5}{2}(cos(1000\pi t + 4\,000\pi t) + cos(1000\pi t\ - 4\,000\pi t))$$
$$= 2{,}5(cos\,5000\pi t + cos\,3000\pi t)$$

Έτσι, το$x_a(t)$ είναι ένα σήμα με μέγιστη συχνότητα $f_{max} = 2.500\ Hz$.

Κατά συνέπεια, ο ρυθμός Nyquist είναι $2\ x\ 2.500 = 5.000\ Hz$

Το διάστημα (περίοδος) Nyquist είναι $1/5.000$ sec $=\ 0{,}2\ ms$

Άσκηση 3

Να βρεθεί ο ρυθμός Nyquist για το σήμα:

$$x_a(t) = \frac{\sin 200\pi t}{\pi t}$$

Απάντηση: Από την ανάλυση κατά Fourier γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\frac{\sin at}{\pi t} \overset{\mathrm{F}}{\longleftrightarrow} P_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \alpha \\ 0 & |\omega| > \alpha \end{cases}$$

Το $x_a(t)$ είναι ένα σήμα με μέγιστη συχνότητα $f_{max} = 100\ Hz$.

Άρα ο ρυθμός Nyquist είναι 200 Hz, και το διάστημα Nyquist είναι 1/200 sec.

Άσκηση 4

Να βρεθεί ο ρυθμός Nyquist για το σήμα:

$$x_a(t) = \left(\frac{\sin 200\pi t}{\pi t}\right)^2$$

Απάντηση: Από το θεώρημα της συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier:

$$x_1(t)\, x_2(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}\, X_1(\Omega)\, X_2(\Omega)$$

και σε συνδυασμό με την προηγούμενη άσκηση, βρίσκουμε ότι το σήμα $x_a(t)$ είναι και αυτό οριοθετημένης ζώνης και ότι το εύρος ζώνης του είναι διπλάσιο από αυτό του σήματος της προηγούμενης άσκησης, δηλ. είναι 200 Hz.

Έτσι, ο ρυθμός Nyquist είναι 400 Hz, και το διάστημα Nyquist είναι 1/400 sec.

Άσκηση 5

Το αναλογικό σήμα $x_a(t) = 2cos(20\pi t)\cos(30\pi t) + \sin(40\pi t)$ δειγματοληπτείται με συχνότητα 20 δειγμάτων ανά δευτερόλεπτο. Να καθοριστεί το σήμα διακριτού χρόνου που θα προκύψει.

<u>Απάντηση</u>: Θα εκφράσουμε το δοθέν σήμα σε άθροισμα ημιτονοειδών συναρτήσεων. Το γινόμενο $cos(20\pi t)\cos(30\pi t)$ γράφεται:

$$2cos(20\pi t)\, cos(30\pi t) = \cos(50\pi t) + \cos(10\pi t)$$

Οπότε το αναλογικό σήμα είναι $x_a(t) = \cos(50\pi t) + \cos(10\pi t) + \sin(40\pi t)$ και περιέχει τις συχνότητες $f_1 = 25\ Hz$, $f_2 = 5\ Hz$ και $f_3 = 20\ Hz$. Η συχνότητα Nyquist είναι $f_N = 2x25\ Hz = 50\ Hz$. Το σήμα διακριτού χρόνου που προκύπτει από δειγματοληψία με συχνότητα $f_s = 20\ Hz$ $(T_s = 1/20\ sec)$, είναι:

$$x(n) = x_a(t)\Big|_{t=nTs} = \cos\left(\frac{50\pi}{20}n\right) + \cos\left(\frac{10\pi}{20}n\right) + \sin\left(\frac{40\pi}{20}n\right)$$
$$= \cos\left(\frac{5\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \sin(2\pi n) = \cdots = 0$$

Η συχνότητα δειγματοληψίας που επιλέχθηκε δεν ικανοποιεί το κριτήριο Nyquist και οι συχνότητες που παρήχθησαν οδήγησαν σε μηδενική τιμή σήματος.

Χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή σχέση: $cosA\ cosB = (1/2)[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

Άσκηση 6

Να επαναληφθεί η προηγούμενη άσκηση για συχνότητα δειγματοληψίας 50 δειγμάτων ανά δευτερόλεπτο.

<u>Απάντηση</u>: Το σήμα διακριτού χρόνου που προκύπτει από δειγματοληψία με συχνότητα $f_s = 50\ Hz$ $(T_s = 1/50\ sec)$, είναι:

$$x(n) = x_a(t)\Big|_{t=nTs} = \cos\left(\frac{50\pi}{50}n\right) + \cos\left(\frac{10\pi}{50}n\right) + \sin\left(\frac{40\pi}{50}n\right)$$
$$= \cos(\pi n) + \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}n\right)$$

Η συχνότητα της συνιστώσας $\cos(\pi n)$ είναι:

$$\omega_1 = \pi \Rightarrow \Omega_1 T_s = \pi \Rightarrow 2\pi f_1 \frac{1}{f_s} = \pi \Rightarrow f_1 = \frac{f_s}{2} \Rightarrow f_1 = \frac{50}{2} = 25\ Hz$$

Η συχνότητα της συνιστώσας $\cos(\pi n/5)$ είναι:

$$\omega_2 = \frac{\pi}{5} \Rightarrow \Omega_2 T_s = \frac{\pi}{5} \Rightarrow 2\pi f_2 \frac{1}{f_s} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow f_2 = \frac{f_s}{10} \Rightarrow f_2 = \frac{50}{10} = 5\ Hz$$

Η συχνότητα της συνιστώσας $\cos(4\pi n/5)$ είναι:

$$\omega_3 = \frac{4\pi}{5} \Rightarrow \Omega_3 T_s = \frac{4\pi}{5} \Rightarrow 2\pi f_3 \frac{1}{f_s} = \frac{4\pi}{5} \Rightarrow f_3 = \frac{2f_s}{5} \Rightarrow f_3 = \frac{100}{5} = 20\ Hz$$

Παρατηρούμε ότι οι συχνότητες του σήματος διακριτού χρόνου είναι ίδιες με τις συχνότητες του αναλογικού σήματος, γεγονός που οφείλεται στο ότι η συχνότητα δειγματοληψίας που επιλέχθηκε ικανοποιεί το κριτήριο Nyquist.

Άσκηση 7

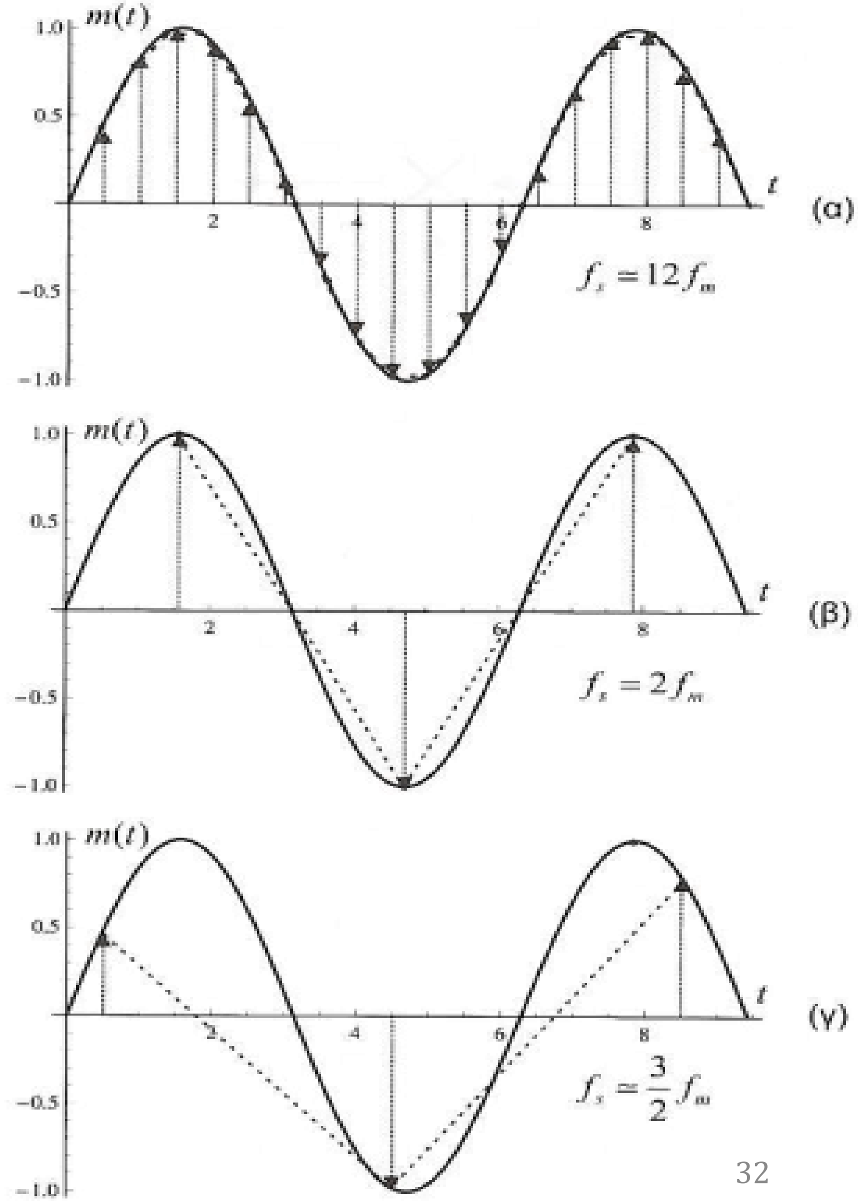
Ένα ημιτονοειδές σήμα $m(t)$ με συχνότητα f_m δειγματοληπτείται με συχνότητα:

(α) $f_s = 12f_m$

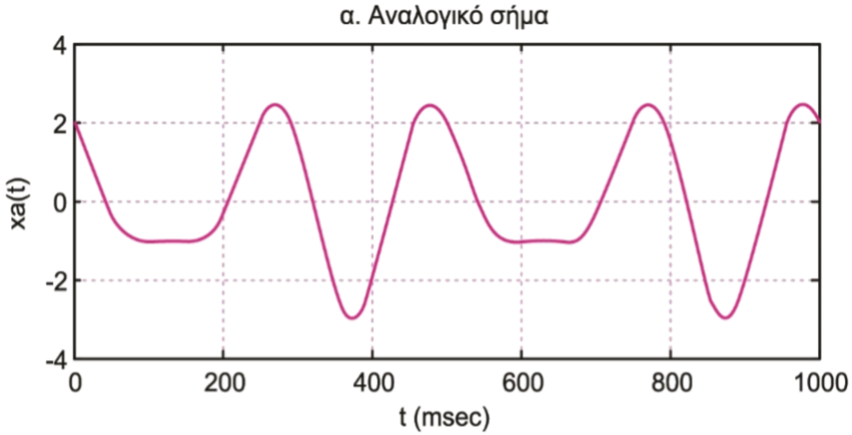
(β) $f_s = 2f_m$

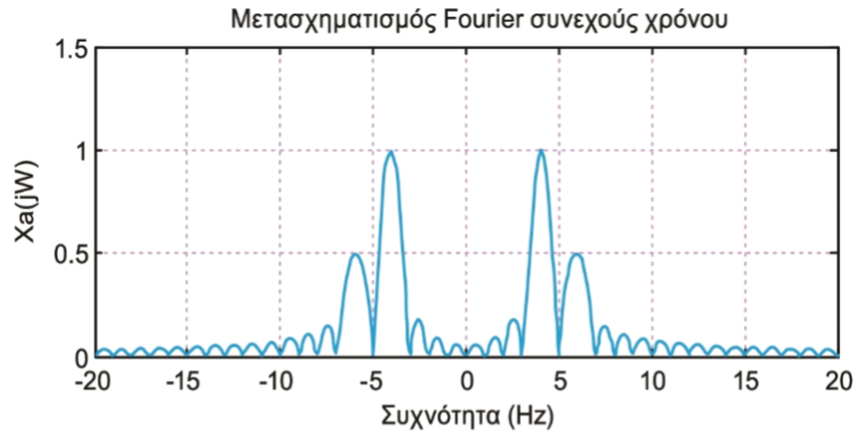
(γ) $f_s = \frac{3}{2}f_m$

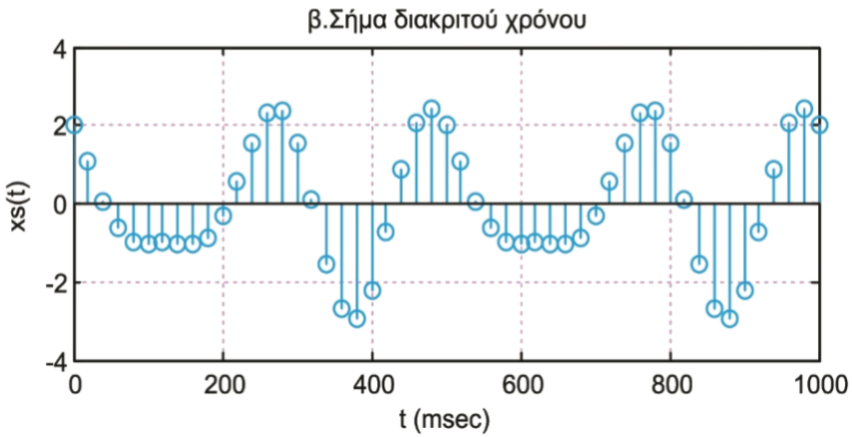
Να σχολιάσετε τις περιπτώσεις που ικανοποιείται ή όχι η συνθήκη Nyquist.

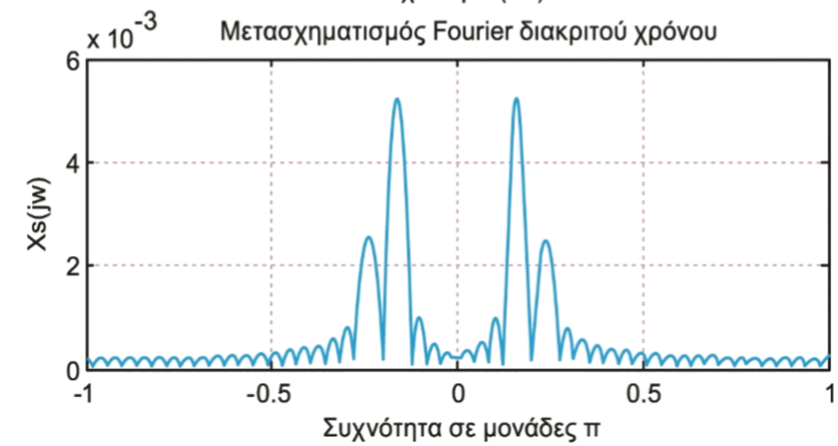


Δειγματοληψία χωρίς αλλοίωση





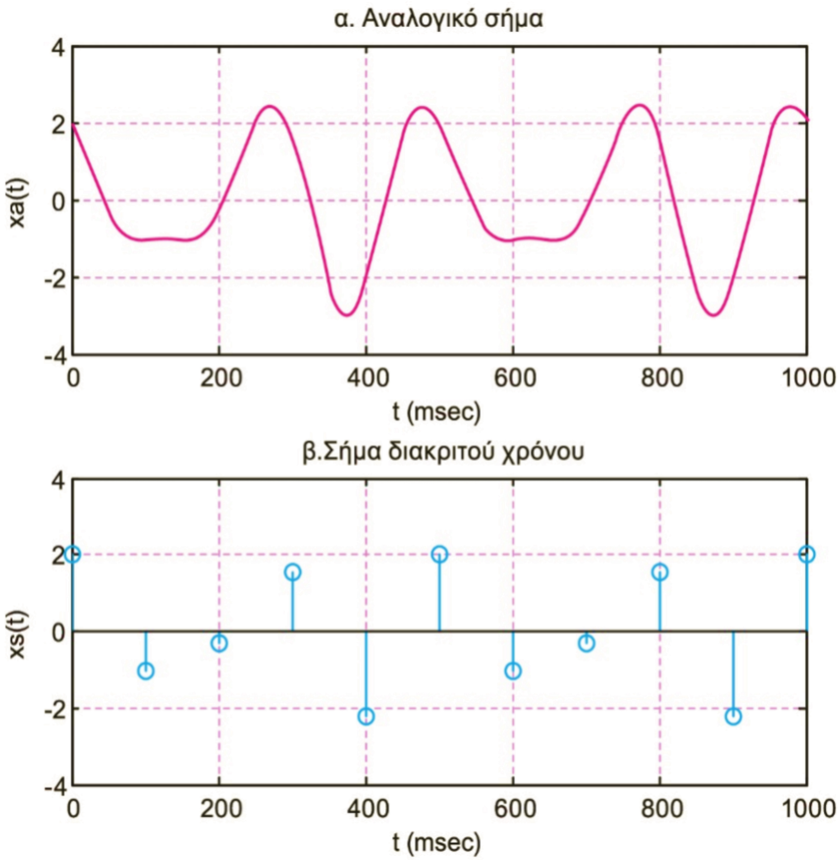


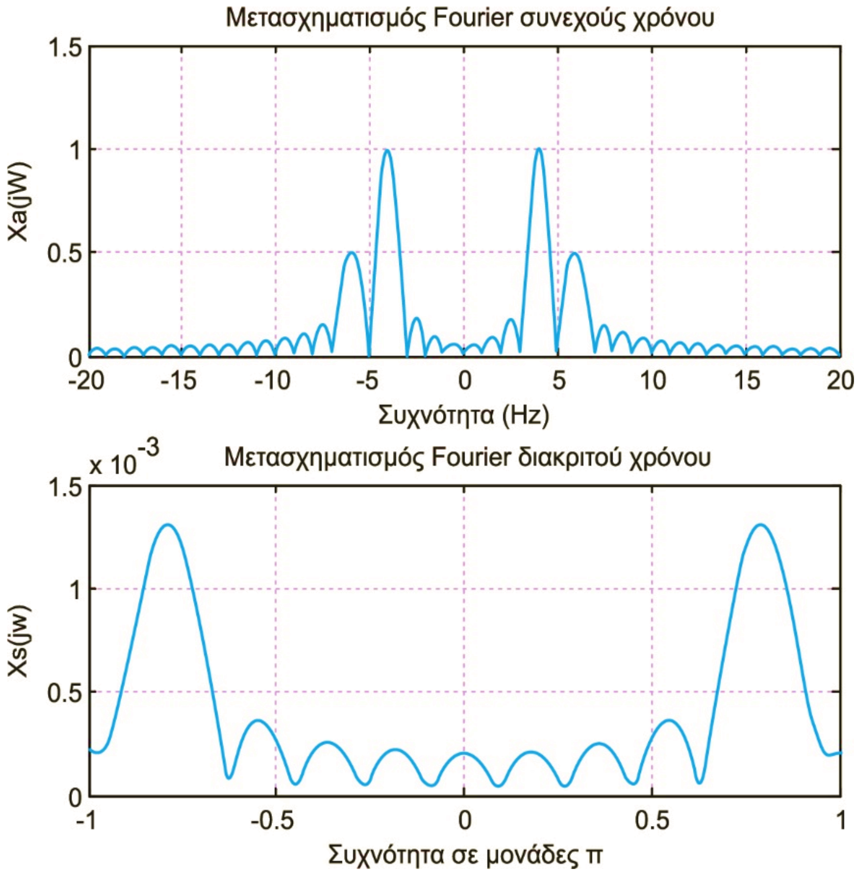


(α) Αναλογικό σήμα $x_a(t)$,
(β)Δειγματοληπτημένο σήμα $x_s(t)$
με $T_s = 0.02\ sec/sample$

(α) FT $X_a(\Omega)$ του αναλογικού σήματος $x_a(t)$,
(β) FT $X_s(e^{j\omega})$ του δειγματοληπτημένου σήματος $x_s(t)$

Δειγματοληψία με αλλοίωση





(α) Αναλογικό σήμα $x_a(t)$,
(β)Δειγματοληπτημένο σήμα $x_s(t)$
με $T_s = 0.1\ sec/sample$

(α) FT $X_a(\Omega)$ του αναλογικού σήματος $x_a(t)$,
(β) FT $X_s(e^{j\omega})$ του δειγματοληπτημένου σήματος $x_s(t)$

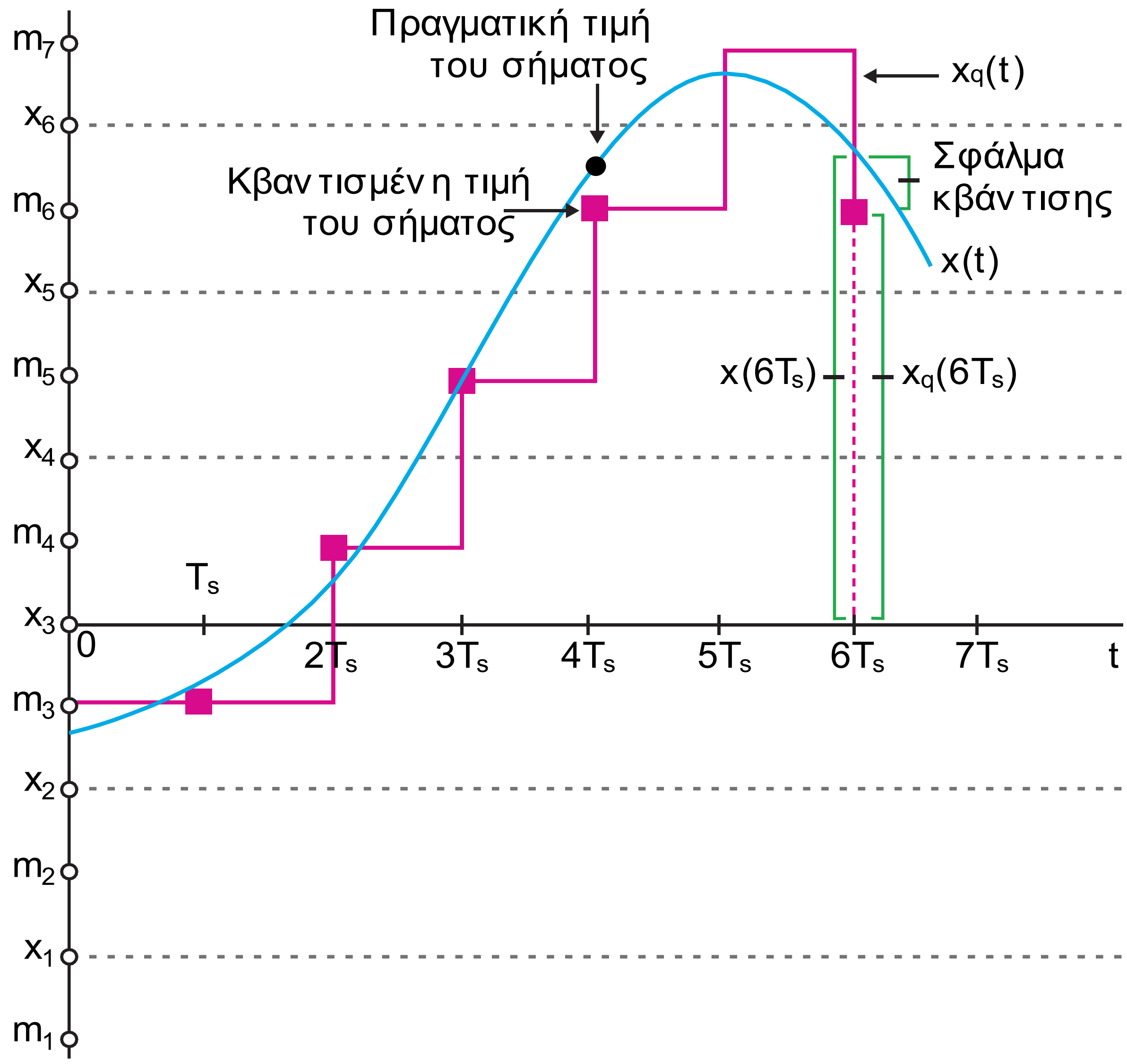
Κβαντισμός

Κβαντισμός

Κβαντισμός είναι μία μη-γραμμική και μη-αντιστρέψιμη διαδικασία, η οποία μετασχηματίζει μία ακολουθία εισόδου $x_\alpha(n)$ συνεχούς πλάτους για την οποία ισχύει $x(n) \in (-m_p, m_p)$, σε ακολουθία **διακριτού πλάτους** $m(n) = Q[x_\alpha(n)]$.

- **L επίπεδα απόφασης (ζώνες)** $x_1, x_2 \ldots, x_L$ διαιρούν την περιοχή τιμών πλάτους της $x[n]$ σε L διαστήματα $I_k = [x_k, x_{k+1}], \quad k = 1,2, \ldots, L$.
- Για μία είσοδο $x_a[n]$ που κείται μέσα στο I_k, εκχωρείται μία στάθμη $m(k) \in I_k$.
- Το πλάτος του σήματος (δυναμική περιοχή) δίνεται από τη σχέση: $|x_{max}(n)| = 2\, m_p$

Ομοιόμορφος Κβαντισμός



Παράμετροι Κβαντισμού (1/2)

- **Πλήθος επιπέδων**: $L = 2^B$ όπου Β το μήκος (σε bits) κάθε **στάθμης** $m[n]$.
  Ισχύει η σχέση:

$$B = \log_2(L)$$

- **Βήμα κβαντισμού**:

$$\Delta = x_{k+1} - x_k$$

Για ισαπέχουσες στάθμες (ομοιόμορφη κβάντιση), ισχύει:

$$\Delta = \frac{|x_{max}[n]|}{2^B}$$

- **Σφάλμα (θόρυβος) κβαντισμού**:

$$e[n] = m[n] \ - x_a[n] \text{ και ισχύει } -\frac{\Delta}{2} < e(n) < \frac{\Delta}{2}$$

Παράμετροι Κβαντισμού (2/2)

- **Μέσο τετραγωνικό σφάλμα κβαντισμού ή ισχύς θορύβου κβαντισμού**:

$$\mathrm{E}\left[(x[n]\ - m[n])^2\right] = \sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12}$$

Επίσης ισχύει:

$$\sigma_e^2 = m_p^2/3L^2$$

- **Λόγος σήματος προς θόρυβο** (σε dB) Signal to Noise Ratio (SNR):

$$SNR = 10log\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = 6{,}02\ B + 10{,}81 - 20\ log\frac{|x_{max}[n]|}{\sigma_x}$$

- Επομένως ο SNR αυξάνεται (βελτιώνεται) κατά **~6dB** για **κάθε επιπλέον bit** που προστίθεται στην περιγραφή κάθε κβαντισμένου δείγματος $m[n]$.

Κωδικοποίηση

Κωδικοποίηση

- Κάθε κβαντισμένη στάθμη $m[n]$ αναπαρίσταται με μία **κωδική λέξη**.
- Αν L είναι το πλήθος των σταθμών κβάντισης, τότε κάθε δείγμα περιγράφεται με $\boldsymbol{log_2 L = B}$ ψηφία (bits), όπου το B είναι ακέραιος αριθμός.

- **Ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας** στην έξοδο του κωδικοποιητή:

  $R = f_s\, log_2 L = f_s\, B$ (bits/s), όπου f_s η συχνότητα δειγματοληψίας
- **Ελάχιστο εύρος ζώνης** προκειμένου το σήμα που προκύπτει στην έξοδο του κωδικοποιητή να μεταδοθεί με διαμόρφωση PCM:

$$W_{PCM} = \frac{1}{2} f_s B$$

Κωδικοποίηση

Τα περισσότερα συστήματα ΨΕΣ χρησιμοποιούν την παράσταση αριθμών με το **συμπλήρωμα του 2** (two’s complement).

Στο σύστημα αυτό, με κωδική λέξη $c = [b_0, b_1, \ldots b_B]$ μήκους B+1 bits:

- Το περισσότερο σημαντικό ψηφίο είναι το **ψηφίο προσήμου**
- Τα υπόλοιπα ψηφία αντιστοιχούν στην αριθμητική τιμή δυαδικών ακεραίων ή κλασμάτων.
- Θεωρώντας δυαδικά κλάσματα, η κωδική λέξη $b_0, b_1, b_2, \ldots b_B$ έχει την τιμή: $x = (-1)b_0 + b_1 2^{-1} + b_2 2^{-2} + \ldots + b_B 2^{-B}$

Άσκηση 8

Δίνεται το αναλογικό σήμα:

$$x_a(t) = -\frac{3}{2} + cos(100\pi t)\cos(200\pi t) + \frac{1}{2}\sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(300\pi t)$$

(α) Να καθοριστεί η συχνότητα Nyquist και η ελάχιστη αποδεκτή τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας.

(β) Ποιες συχνότητες θα προκύψουν αν το αναλογικό σήμα δειγματοληπτείται με συχνότητα δειγματοληψίας 150 Hz.

(γ) Ποιο είναι το σήμα διακριτού χρόνου που θα προκύψει από το ερώτημα (β);

(δ) Αν το πλάτος του σήματος εκφράζεται σε Volts και κάθε δείγμα του διακριτού σήματος κβαντίζεται στα 8 bits, σε πόσα Volts αντιστοιχεί το βήμα κβαντισμού;

<u>Απάντηση</u>: (α) Για να καθοριστεί η συχνότητα Nyquist πρέπει να βρεθεί η μέγιστη συχνότητα του σήματος. Για το λόγο αυτό θα εκφράσουμε το δοθέν σήμα σε άθροισμα ημιτονοειδών συναρτήσεων. Το γινόμενο $cos(100\pi t)\cos(200\pi t)$ γράφεται:

$$cos(100\pi t)\ cos(200\pi t) = \frac{1}{2}[\cos(300\pi t) + \cos(100\pi t)]$$

Άρα το αναλογικό σήμα γράφεται:

$$x_a(t) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos(300\pi t) + \frac{1}{2}\cos(100\pi t) + \frac{1}{2}\sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(300\pi t)$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos(100\pi t) + \frac{1}{2}\sin\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{2}\cos(300\pi t) \qquad (1)$$

Άσκηση 8 (συνέχεια)

Επομένως οι συχνότητες του σήματος είναι: $f_1 = 0\ Hz, f_2 = 50\ Hz, f_3 = 100\ Hz$ και $f_4 = 150\ Hz$. Άρα η συχνότητα Nyquist και ελάχιστη αποδεκτή τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας είναι:

$$f_{s(min)} = f_N = 2f_4 = 300\ Hz.$$

(β) Για συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 150\ Hz$, θα αναπαρασταθούν σωστά μόνο οι συχνότητες $f_1 = 0\ Hz$ και $f_2 = 50\ Hz$, που βρίσκονται μέσα στην περιοχή $[-f_s/2, f_s/2] = [-75Hz\ , 75\ Hz]$. Οι συχνότητες $f_3 = 100\ Hz$ και $f_4 = 150\ Hz$ θα υποστούν αναδίπλωση και θα φαίνεται ότι αντιστοιχούν στις ψευδεπίγραφες συχνότητες:

$$f_3' = f_3 - kf_s = 100 - 150 = -50Hz$$
$$f_4' = f_4 - kf_s = 150 - 150 = 0Hz$$

Με βάση τα παραπάνω, προκύπτει ότι το δειγματοληπτημένο σήμα θα περιέχει μία συνιστώσα συνεχούς ($0\ Hz$) και μία ημιτονοειδή συνιστώσα συχνότητας $50\ Hz$, δηλαδή οι συχνότητες $100\ Hz$ και $150\ Hz$ δεν θα εμφανίζονται πλέον στο δειγματοληπτημένο σήμα.

(γ) Για συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 150\ Hz$ (δηλ. περίοδος δειγματοληψίας $T_s = 1/150\ sec$), το σήμα διακριτού χρόνου είναι:

$$x(n) = x_a(t)\Big|_{t=nTs} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{100\pi}{150}n\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{200\pi}{150}n - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{2}\cos\left(\frac{300\pi}{150}n\right)$$
$$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{3}n\right) + \frac{3}{2}\cos(2\pi n) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}n\right) + \frac{3}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$$

Άσκηση 8 (συνέχεια)

Η συχνότητα του σήματος αυτού μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\omega = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \Omega T_s = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2\pi f \frac{1}{f_s} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow f = \frac{f_s}{3} \Rightarrow f = \frac{150}{3} = 50\ Hz$$

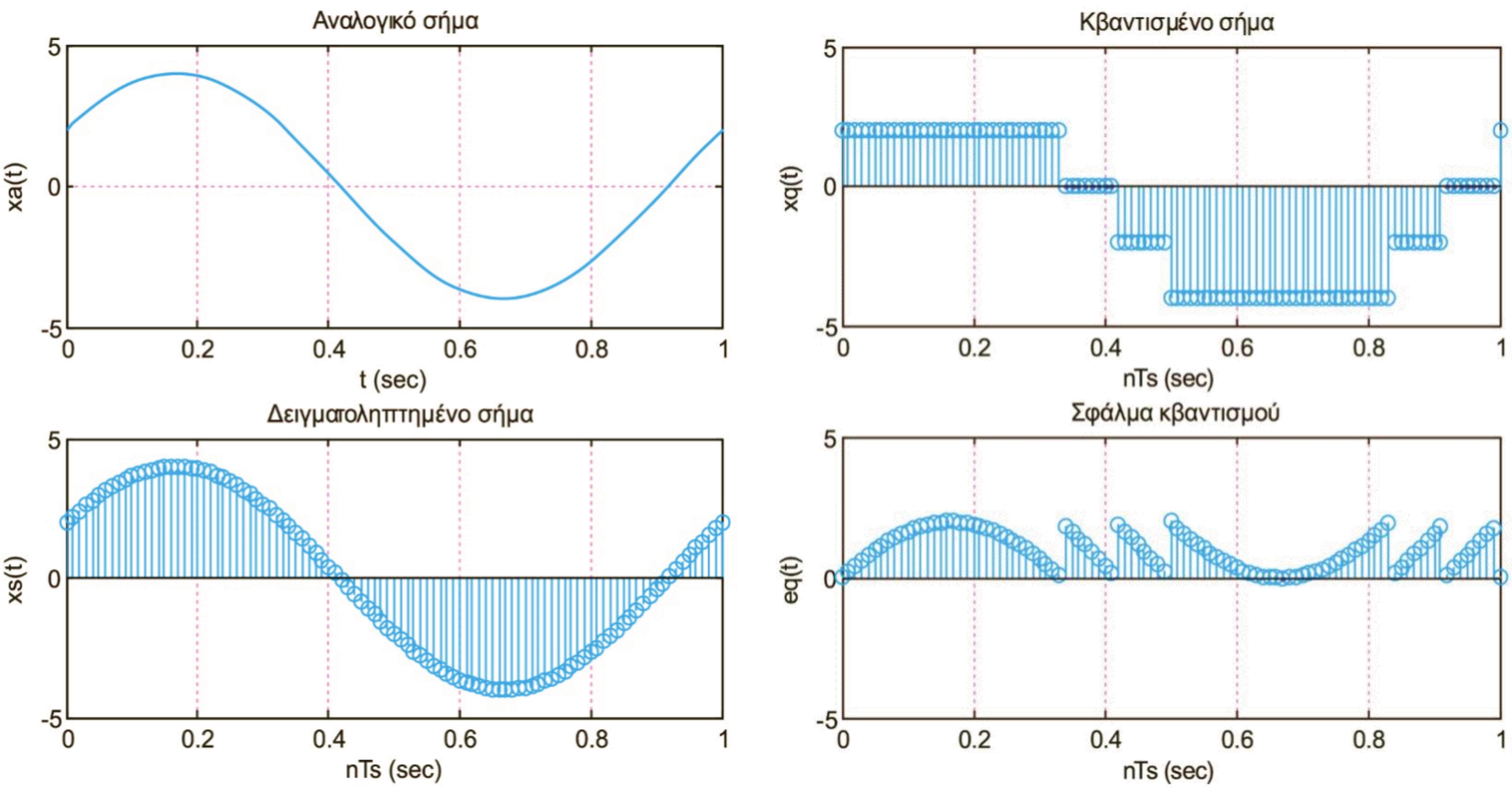
(δ) Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι το αναλογικό σήμα λαμβάνει μέγιστη τιμή +1 Volt (όταν κάθε τριγωνομετρικός όρος λάβει τιμή +1) και ελάχιστη τιμή -4 Volts (όταν κάθε τριγωνομετρικός όρος λάβει τιμή -1). Επομένως, η δυναμική περιοχή του αναλογικού σήματος είναι 5 Volts και το βήμα κβαντισμού Δ υπολογίζεται σε:

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{2^L - 1} = \frac{1-(-4)}{2^8 - 1} = \frac{5}{255} = 19{,}61\ mV$$

Συνήθως οι κβαντιστές λειτουργούν θεωρώντας ότι οι τιμές πλάτους του σήματος είναι συμμετρικές, δηλαδή $\pm 5\ V, \pm 10V,$ κλπ. Στην περίπτωση του παραπάνω σήματος που το πλάτος του σήματος κυμαίνεται από +1 Volt έως -4 Volts πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κβαντιστή $\pm 5\ V$. Άρα το βήμα κβαντισμού για μετατροπέα 8 bits είναι:

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{2^L - 1} = \frac{10}{2^8 - 1} = \frac{10}{255} = 39{,}22\ mV$$

Μετατροπή Αναλογικού Σήματος σε Ψηφιακό



(α) Αναλογικό σήμα $x_a(t)$, (β) Δειγματοληπτημένο σήμα $x_s(t)$,
(γ) Κβαντισμένο σήμα $x_q(t)$ σε 4 στάθμες, (δ) Σφάλμα κβαντισμού $e_q(t) = x_a(t) - x_q(t)$

Ανακατασκευή Αναλογικού Σήματος από Ψηφιακό

Ανακατασκευή Αναλογικού Σήματος από Ψηφιακό

Ένα αναλογικό σήμα που έχει δειγματοληπτηθεί σύμφωνα με το κριτήριο Nyquist (δηλ. $f_s \geq 2f_x$), μπορεί να **ανακτηθεί** από τα δείγματά του, με τα βήματα:

(1) Τα δείγματα $x[n]$ μετατρέπονται σε μία συνάρτηση $x_r(t)$ μέσω της σχέσης:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, \delta(t - n\, T_s)$$

(2) Η συνάρτηση $x_r(t)$ περνάει από ένα ιδανικό LPF με κρουστική απόκριση:

$$h_{LPF}(t) = \frac{\sin(\pi t T_s)}{\pi t T_s} = \mathrm{sinc}(t T_s)$$

και μετασχηματισμό Fourier:

$$H_{LPF}(\Omega) = \begin{cases} T_s, & -\Omega_s/2 < \Omega < \Omega_s/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Το ανακατασκευασμένο αναλογικό σήμα στην έξοδο του φίλτρου δίνεται από:

$$\hat{x}_\alpha(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_r(nT_s)\, h_{LPF}(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_r(nT_s)\ \mathrm{sinc}((t - nT_s)/T_s)$$

και ο μετασχηματισμός Fourier του ανακατασκευασμένου σήματος είναι:

$$\hat{X}_\alpha(\Omega) = X_r(\Omega)\, H_{LPF}(\Omega)$$

Ανακατασκευή Αναλογικού Σήματος από Ψηφιακό

Σε πραγματικές συνθήκες είναι πιθανό η ακριβής ανακατασκευή του αρχικού σήματος επειδή:

- Το αρχικό σήμα δεν ήταν πεπερασμένου εύρους ζώνης, οπότε δεν ήταν εφικτός ο προσδιορισμός της συχνότητας Nyquist άρα και της ελάχιστης τιμής της συχνότητας δειγματοληψίας, ώστε να μην προκαλείται το φαινόμενο της αλλοίωσης.
- Ο ρυθμός δειγματοληψίας δεν ήταν σταθερός σε όλη τη διάρκεια της δειγματοληψίας και κάποιες διακυμάνσεις στη χρονική απόσταση ανάμεσα σε διαδοχικά δείγματα μπορεί να εμφανίστηκαν.
- Το φίλτρο ανακατασκευής που χρησιμοποιήθηκε είναι ένα πραγματικό φίλτρο και όχι ένα ιδανικό όπως απαιτεί η θεωρητική ανάλυση.

Ωστόσο ο σημαντικότερος λόγος για την μη-ακριβή ανακατασκευή του αρχικού σήματος οφείλεται στον κβαντισμό των δειγμάτων του σήματος.

Γνωρίζουμε ότι η διαδικασία κβαντισμού εισάγει πάντα θόρυβο κβαντισμού, ο οποίος δεν είναι εφικτό να αφαιρεθεί.

Ανακατασκευή Αναλογικού Σήματος από Ψηφιακό

(α) Αναλογικό σήμα $x_a(t)$

(β) Δειγματοληπτημένο σήμα $x_s(t)$

(γ) Ανακατασκευασμένο σήμα $\hat{x}_\alpha(t)$ με παρεμβολή μηδενικής τάξης