

Στοιχεία «Θεωρίας Πληροφορίας»

Διάλεξη 04: Συνελικτικοί Κώδικες

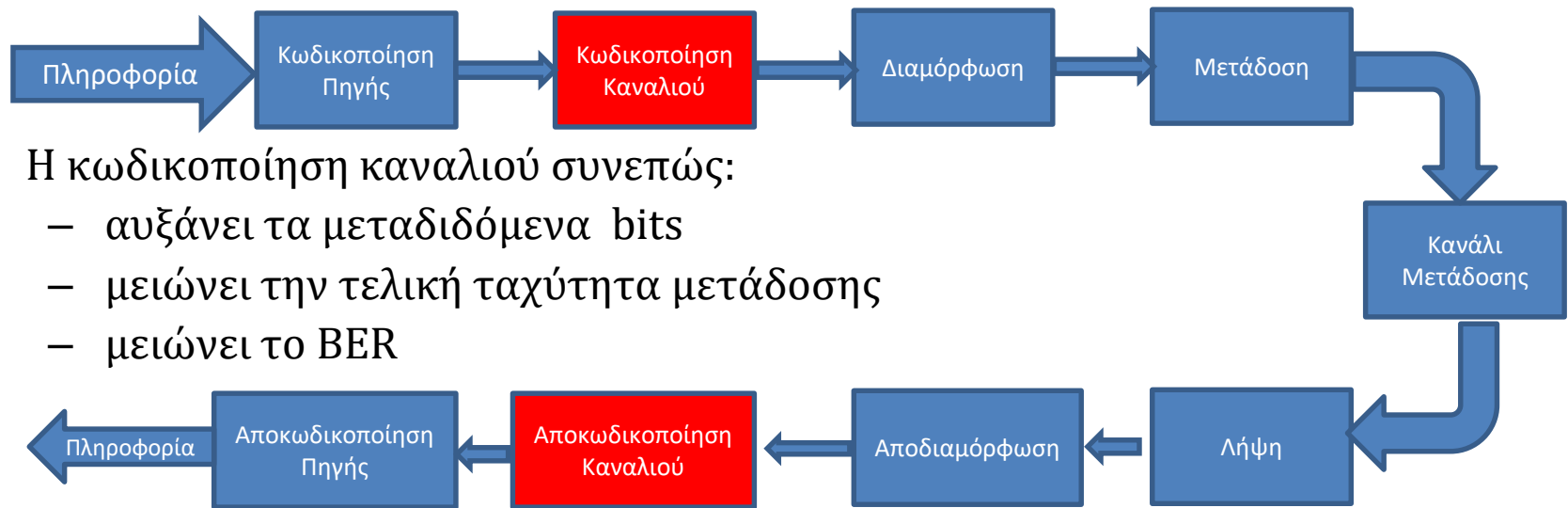
Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Αναπληρωτής Καθηγητής

Ατζέντα

- Κώδικες: Εισαγωγή
- Συνελικτικοί κώδικες
 - Ιστορική αναδρομή
 - Μαθηματικό υπόβαθρο
 - Αναπαράσταση συνελικτικών κωδίκων
 - Διαγράμματα Trellis
 - Διαγράμματα καταστάσεων
 - Παράδειγμα συνελικτικού κώδικα
 - Κωδικοποίηση
 - Αποκωδικοποίηση
 - Viterbi
- Κώδικες turbo
- Το θεώρημα Χωρητικότητας καναλιού (Όριο Shannon)

Κωδικοποίηση Καναλιού: Εισαγωγή

- Η κωδικοποίηση καναλιού είναι μια διαδικασία σύμφωνα με την οποία έξτρα bits (bits ισοτιμίας) προστίθενται στο σήμα πληροφορίας, με σκοπό ο δέκτης να μπορεί να εντοπίσει και να διορθώσει λάθη στη μετάδοση.



- Η κωδικοποίηση καναλιού συνεπώς:
 - αυξάνει τα μεταδιδόμενα bits
 - μειώνει την τελική ταχύτητα μετάδοσης
 - μειώνει το BER
- Μία από τις βασικότερες οικογένειες κωδίκων είναι οι FEC (Forward Error Correction). Η βασική ιδέα των τεχνικών FEC είναι η μετάδοση ικανού πλήθους έξτρα δεδομένων, έτσι ώστε ο δέκτης να είναι σε θέση να εντοπίσει και να διορθώσει λάθη μετάδοσης, χωρίς την επαναμετάδοση δεδομένων.

Κωδικοποίηση Καναλιού: Κατηγορίες

- Οι κυριότερες κατηγορίες FEC κωδικών είναι:
 - Κώδικες Block,
 - Κυκλικοί κώδικες,
 - Συνελικτικοί κώδικες,
 - και Turbo κώδικες.



Κωδικοποίηση καναλιού

Συνελικτικοί κώδικες



- Οι συνελικτικοί κώδικες διαφέρουν από τους
- block κώδικες στο γεγονός πως διαθέτουν στοιχεία μνήμης. Αυτό σημαίνει πως η έξοδος τους δεν εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα είσοδο, αλλά και από τις προηγούμενες καταστάσεις.
- Οι συνελικτικοί κώδικες χαρακτηρίζονται από 3 παραμέτρους (n, k, m) , όπου:
 - n είναι το πλήθος των bits εξόδου
 - k είναι το πλήθος των bits εισόδου
 - m είναι το πλήθος των στοιχείων μνήμης

- Ρυθμός κώδικα

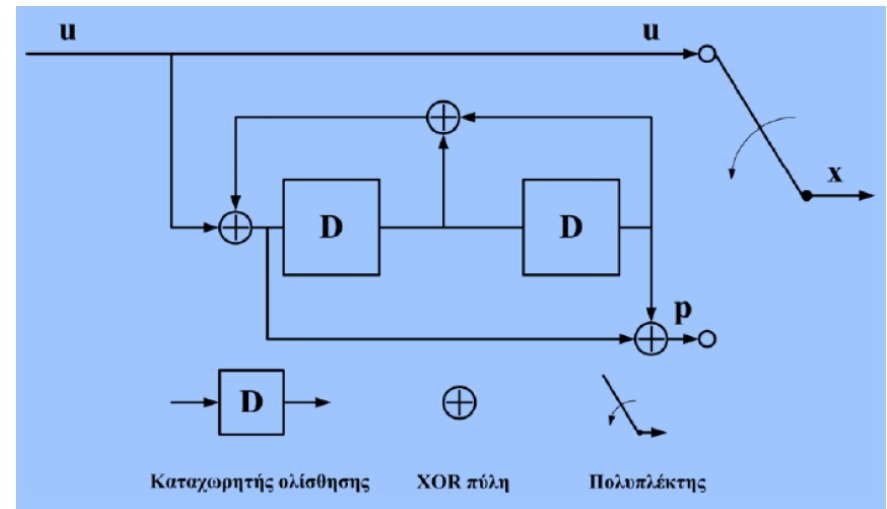
$$R = \frac{k}{n}$$

- Μήκος περιορισμού - constrain length (πλήθος bits της μνήμης που επηρεάζουν την παραγωγή των n bits εξόδου)

$$L = k(m - 1)$$

Συνελικτικοί κώδικες

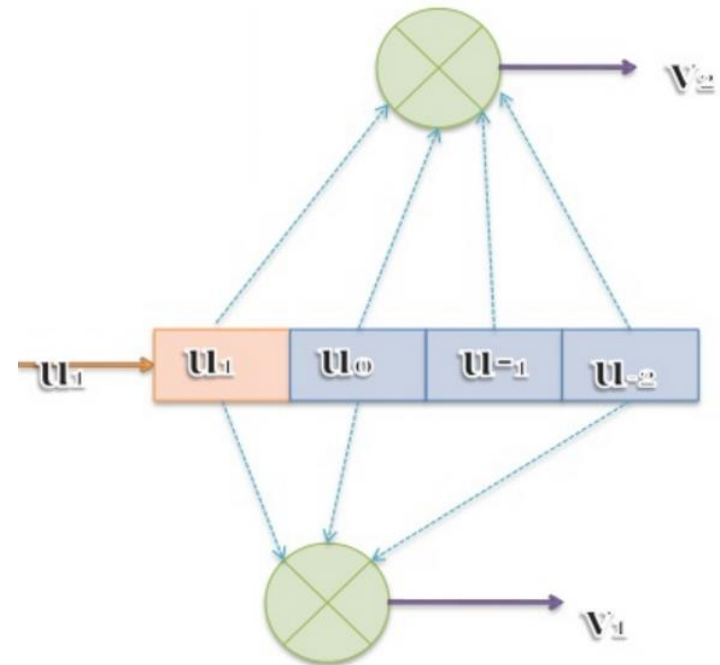
- Οι συνελικτικοί κώδικες ανήκουν στην κατηγορία των κωδίκων trellis (trellis codes). Οι κώδικες αυτοί κωδικοποιούν τα δεδομένα συνεχώς.
- Κωδικοποιητής για έναν συνελικτικό κώδικα:
 - Δυαδικός συνελικτικός κωδικοποιητής ρυθμού $R = \frac{1}{2}$ και τάξη μνήμης $m = 2$



- Μηχανή πεπερασμένων καταστάσεων (ακολουθιακό λογικό κύκλωμα μνήμης m).

Συνελικτικός Κώδικας: Παράδειγμα (1/2)

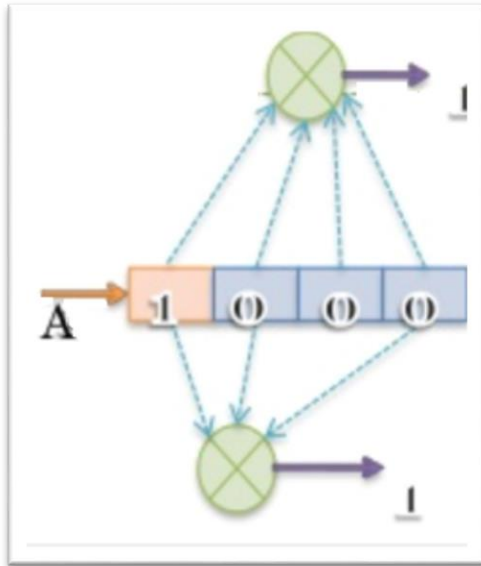
- Συνελικτικός κώδικας (2,1,4)
 - Bits εξόδου: $n = 2$
 - Bits εισόδου: $k = 1$
 - Θέσεις μνήμης: $m = 4$
 - Μήκος περιορισμού: $L = 1(4-1)=3$



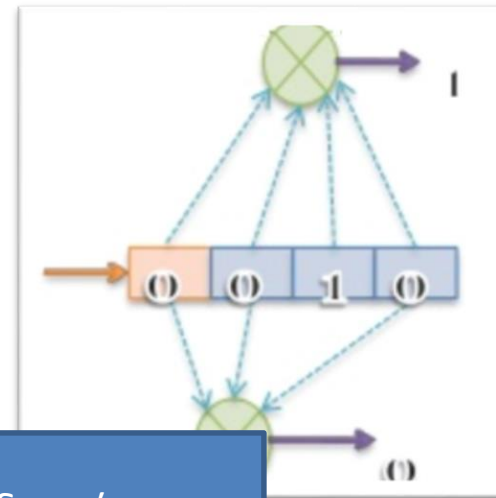
- Το πλήθος των bits των θέσεων μνήμης u_0, u_{-1}, u_{-2} καθορίζει τις 2^L διαφορετικές καταστάσεις του κώδικα

Συνελικτικός Κώδικας: Παράδειγμα (2/2)

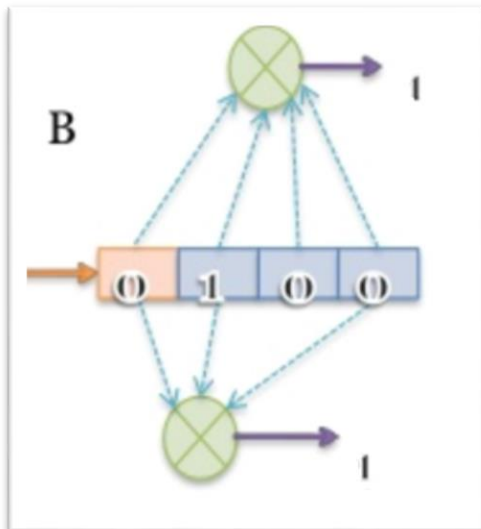
- Bits εισόδου: 1



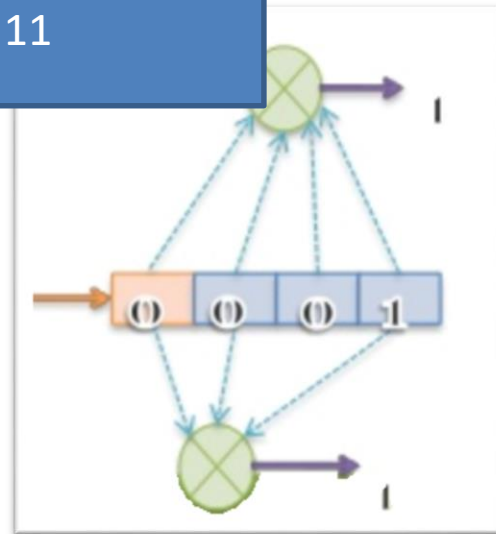
A	
t	0
Κατάσταση εισόδου	000
Είσοδος	0
Έξοδος	11



C	
t	2
Κατάσταση εισόδου	010
Είσοδος	0
Έξοδος	10



B	
t	1
Κατάσταση εισόδου	100
Είσοδος	0
Έξοδος	11



D	
t	3
Κατάσταση εισόδου	101
Είσοδος	0
Έξοδος	11

Συνεπώς η έξοδος είναι
11 11 10 11

Συνελικτικοί Κώδικες: Κωδικοποίηση

- Τροφοδοτώντας ως είσοδο το bit 1 στον κωδικοποιητή, παράγεται η «έξοδος παρόρμησης» (impulse response).
- Στο προηγούμενο παράδειγμα, η έξοδος παρόρμησης ήταν
11 11 10 11
- Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο του κωδικοποιητή για είσοδο 0: 00 00 00 00
- Η έξοδος του κωδικοποιητή μπορεί να υπολογιστεί συνελίσνοντας την είσοδο u με την έξοδο παρόρμησης g
$$v = u * g$$
- Χρησιμοποιώντας την αρχή της γραμμικής υπέρθεσης, η κωδικοποιημένη έξοδος μπορεί να προκύψει από τις εξόδους παρόρμησης

Κωδικοποίηση: Παράδειγμα

- Έστω είσοδος 1011

Είσοδος

1
0
1
1

1011

Έξοδοι παρόρμησης

11 11 10 11
00 00 00 00
11 11 10 11
11 11 10 11

11 11 01 11 01 01 11

- Συνεπώς η τελική έξοδος είναι 11110111010111

Κωδικοποίηση: Παράδειγμα

- Για τον κωδικοποιητή (2,1,4), προκύπτει ο παρακάτω πίνακας

Time	Bit εισόδου	Bit εξόδου	Κατάσταση κωδικοποιητή
0	1	11	000
1	0	11	100
2	1	01	010
3	1	11	101
4	0	01	110
5	0	01	011
6	0	11	001

Κωδικοποίηση: Παράδειγμα

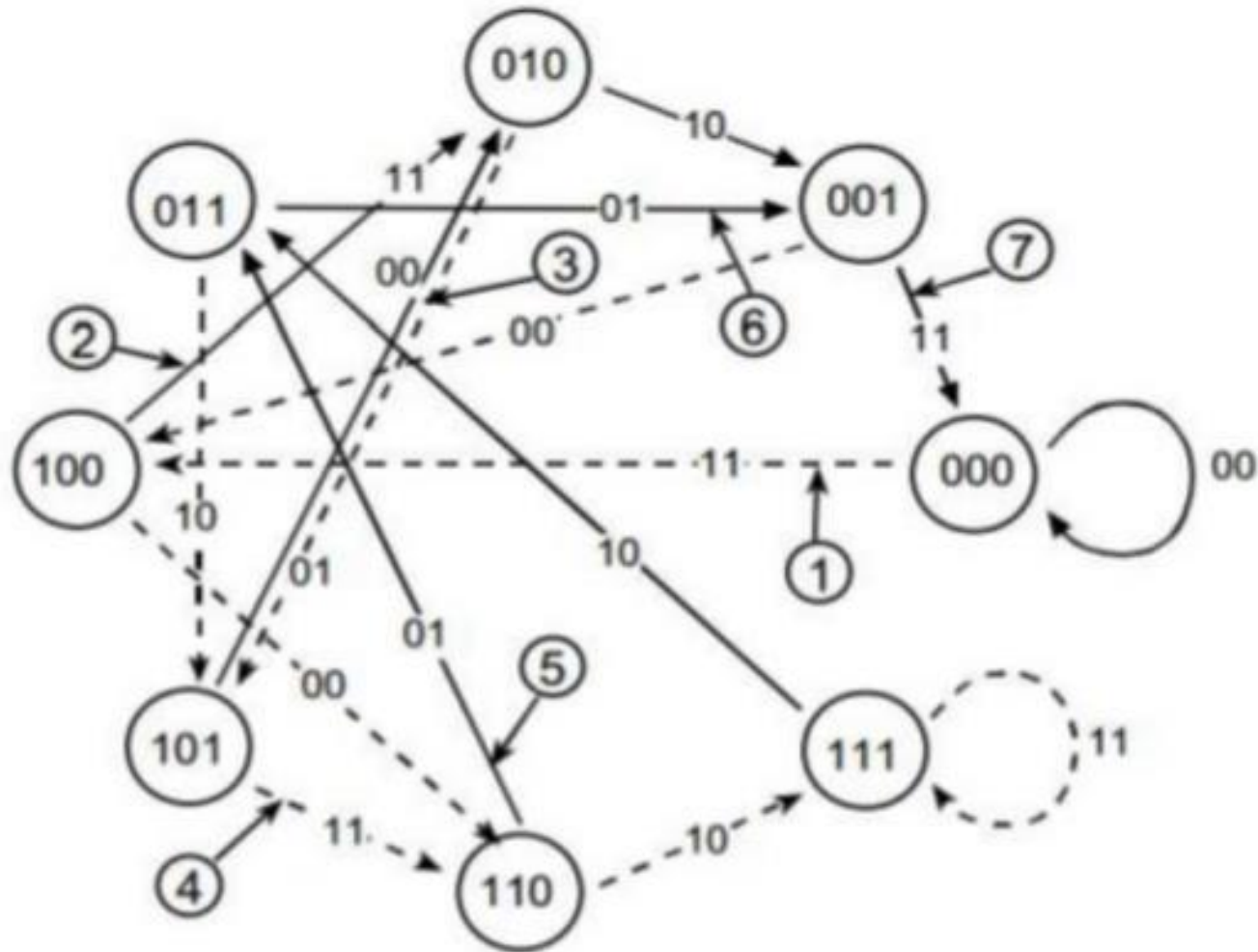
- Για τον κωδικοποιητή (2,1,4), προκύπτει ο παρακάτω πίνακας αναζήτησης

Είσοδος	Κατάσταση Εισόδου			Bit Εξόδου		Κατάσταση Εξόδου		
I_1	s_1	s_2	s_3	O_1	O_2	s_1	s_2	s_3
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1

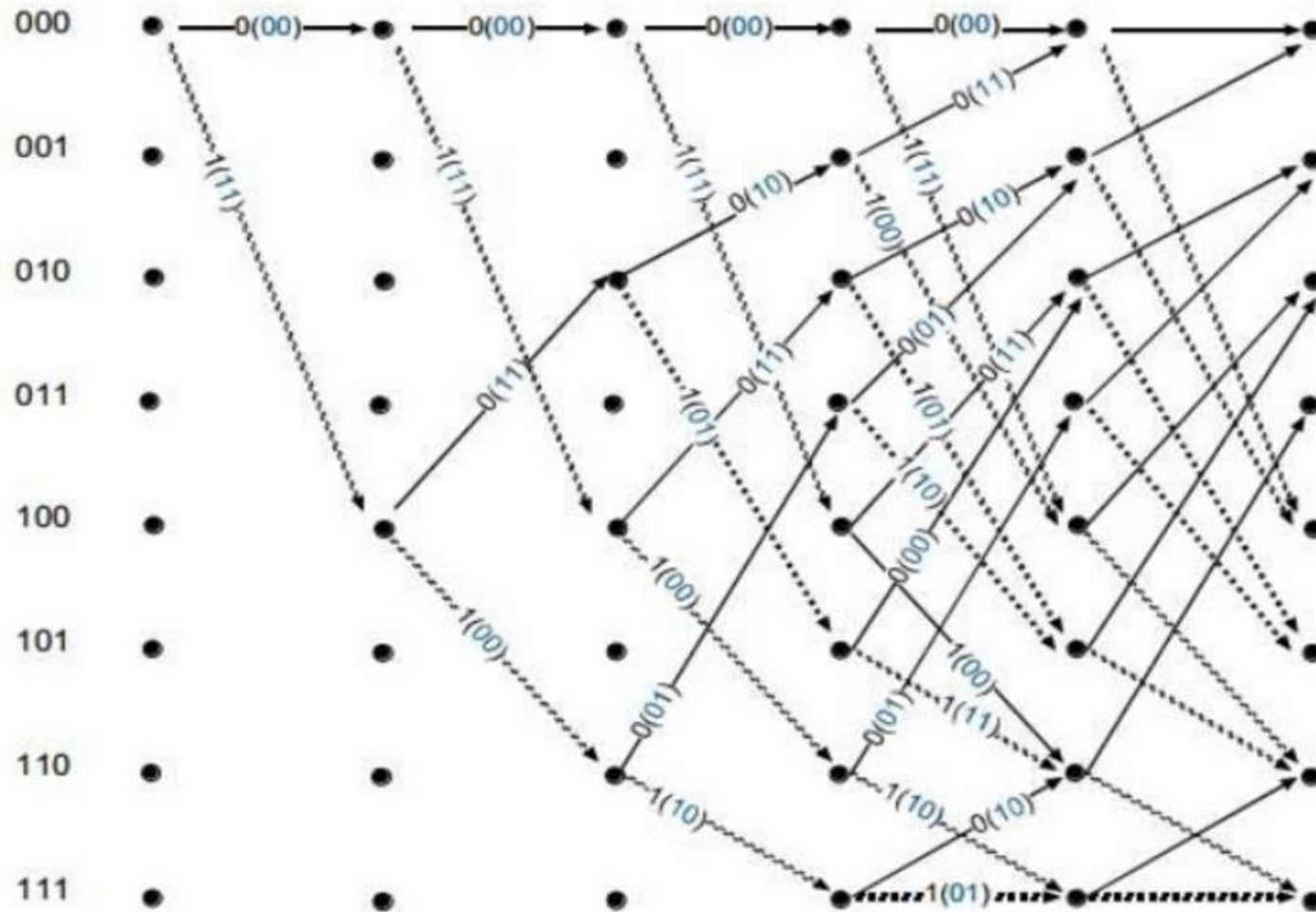
Τρόποι Αναπαράστασης Συνελικτικού Κωδικοποιητή

- Υπάρχουν τρεις γραφικοί τρόποι αναπαράστασης ενός συνελικτικού κωδικοποιητή:
 - Διάγραμμα καταστάσεων
 - Δένδρο
 - Διάγραμμα Trellis

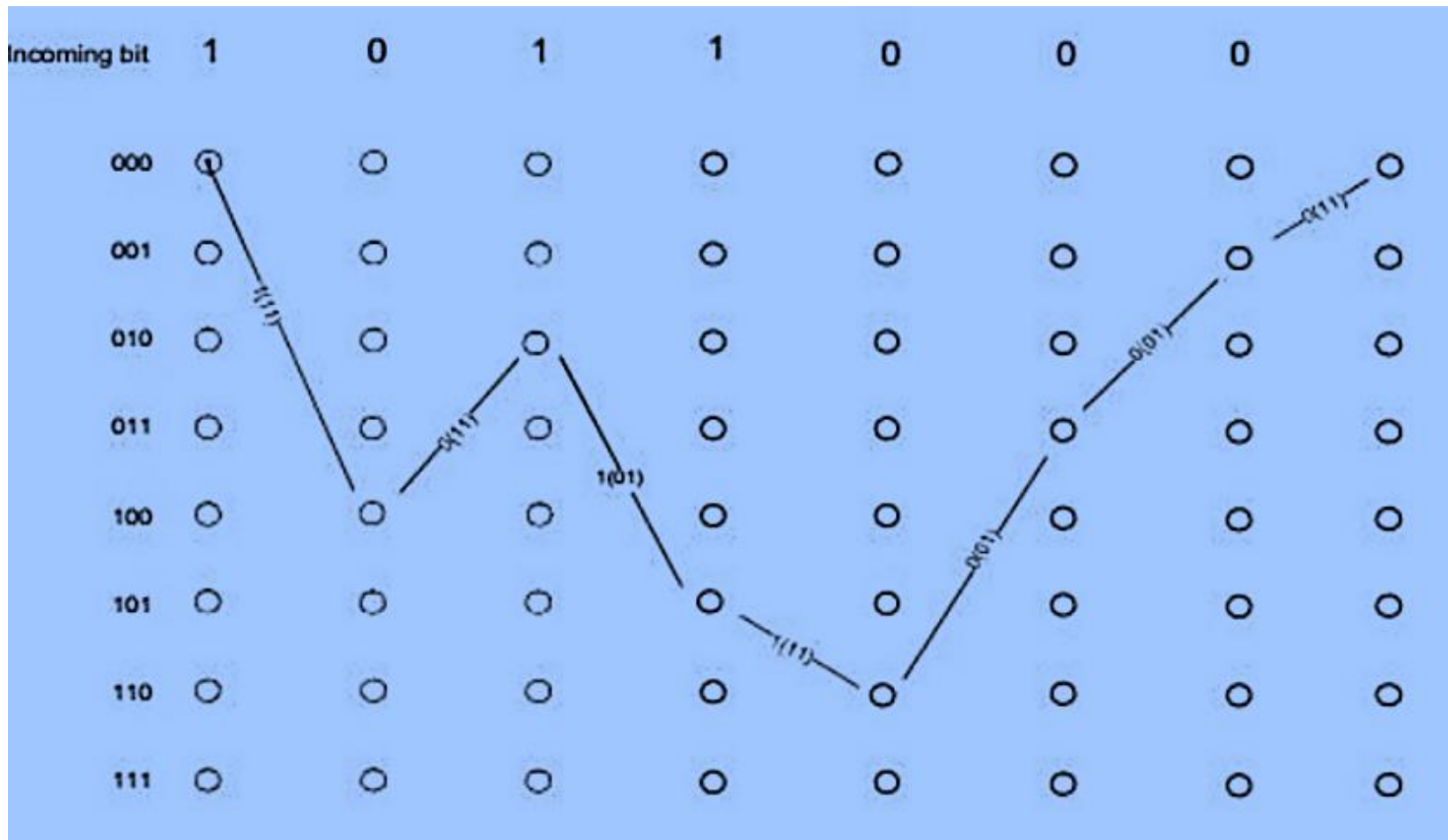
Αναπαράσταση: Διάγραμμα Καταστάσεων



Αναπαράσταση: Διάγραμμα Trellis



Διάγραμμα Trellis: Παράδειγμα Κωδικοποίησης

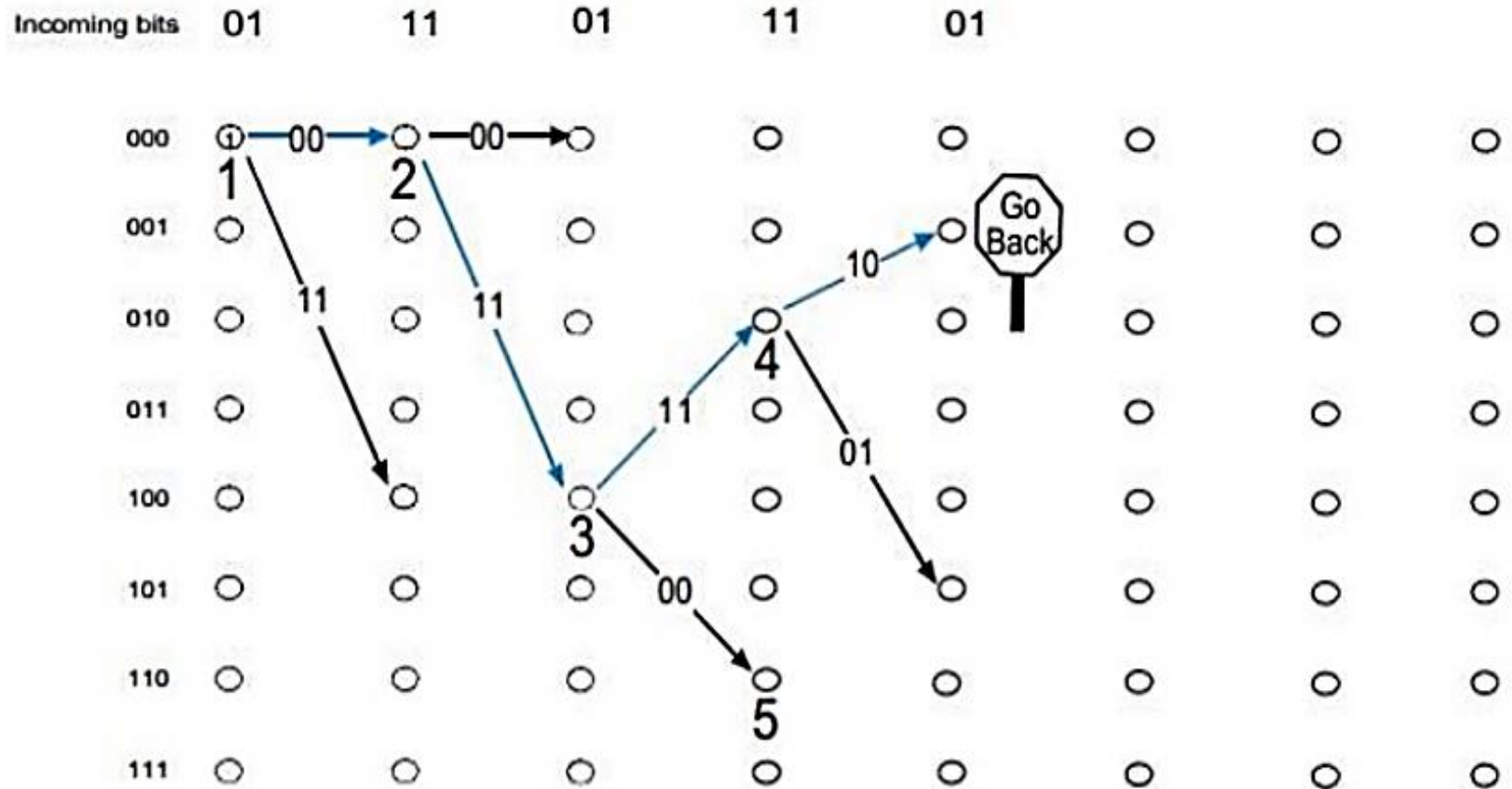


- Έξοδος: 11011111010111

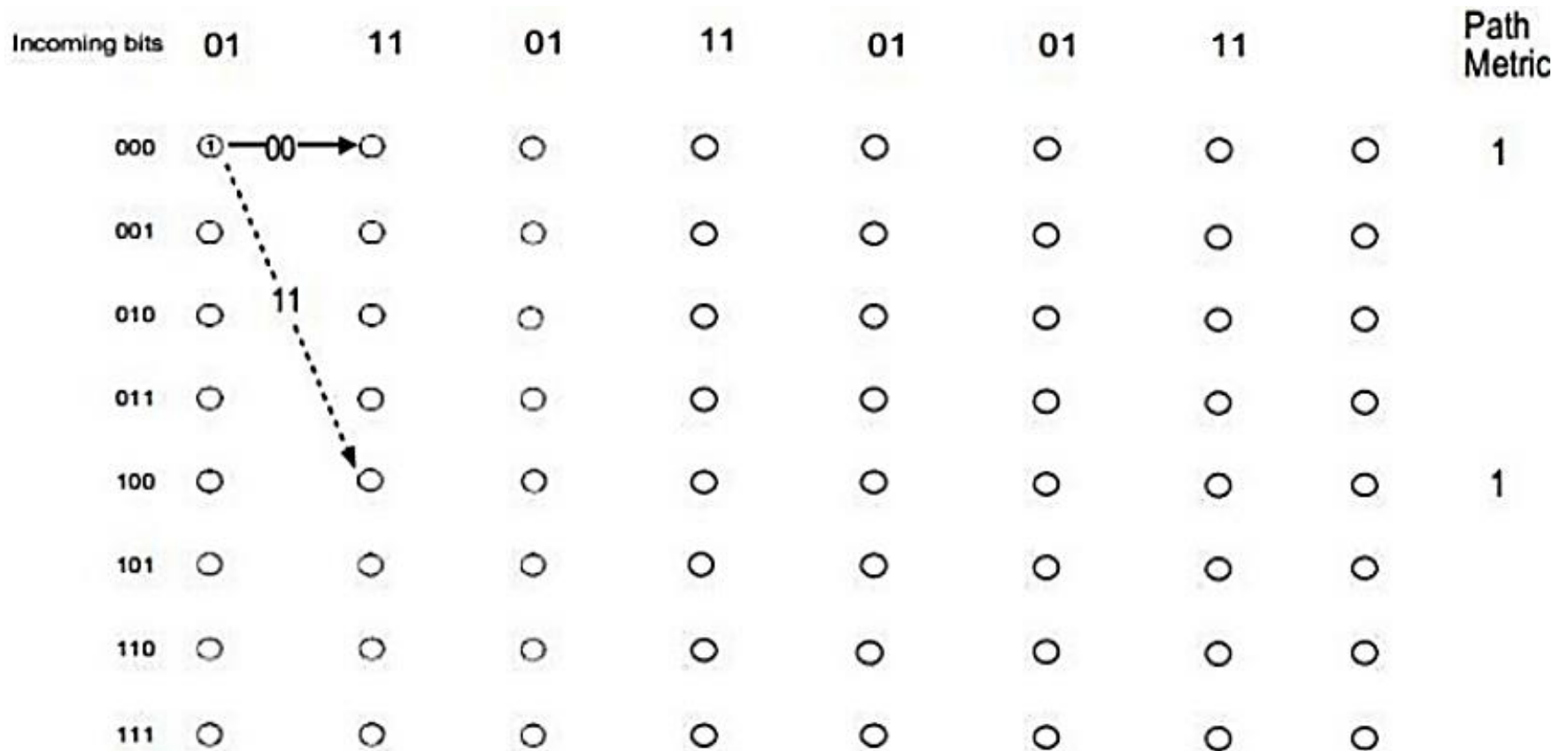
Συνελικτικοί Κώδικες: Αποκωδικοποίηση

- Υπάρχουν 2 βασικές μέθοδοι αποκωδικοποίησης στους συνελικτικούς κώδικες
 - Ακολουθιακή αποκωδικοποίηση → **Αλγόριθμος Fano**
 - Επιτρέπει τόσο εμπρός όσο και πίσω κίνηση στο διάγραμμα Trellis
 - Για παράδειγμα, εάν αντί για κώδικα 11 11 01 11 01 01 11 ο δέκτης λάβει 01 11 01 11 01 01 11, ο αλγόριθμος θα κινηθεί μέχρι να συναντήσει «νόμιμες» εξόδους, όσο πιο κοντά την αρχική γίνεται.
- Αποκωδικοποίηση μέγιστης πιθανοφάνειας → **Αλγόριθμος Viterbi**
 - Ο αποκωδικοποιητής Viterbi ελέγχει ολόκληρη την λαμβανόμενη ακολουθία συγκεκριμένου μήκους
 - Υπολογίζει ένα μετρικό για τη διαδρομή και αποφασίζει βάση αυτού
 - Η διαδρομή με την μεγαλύτερη τιμή μετρικού επιλέγεται και αυτή με την χαμηλότερη τιμή απορρίπτεται
 - Ως μετρικό συνήθως χρησιμοποιείται η απόσταση Hamming

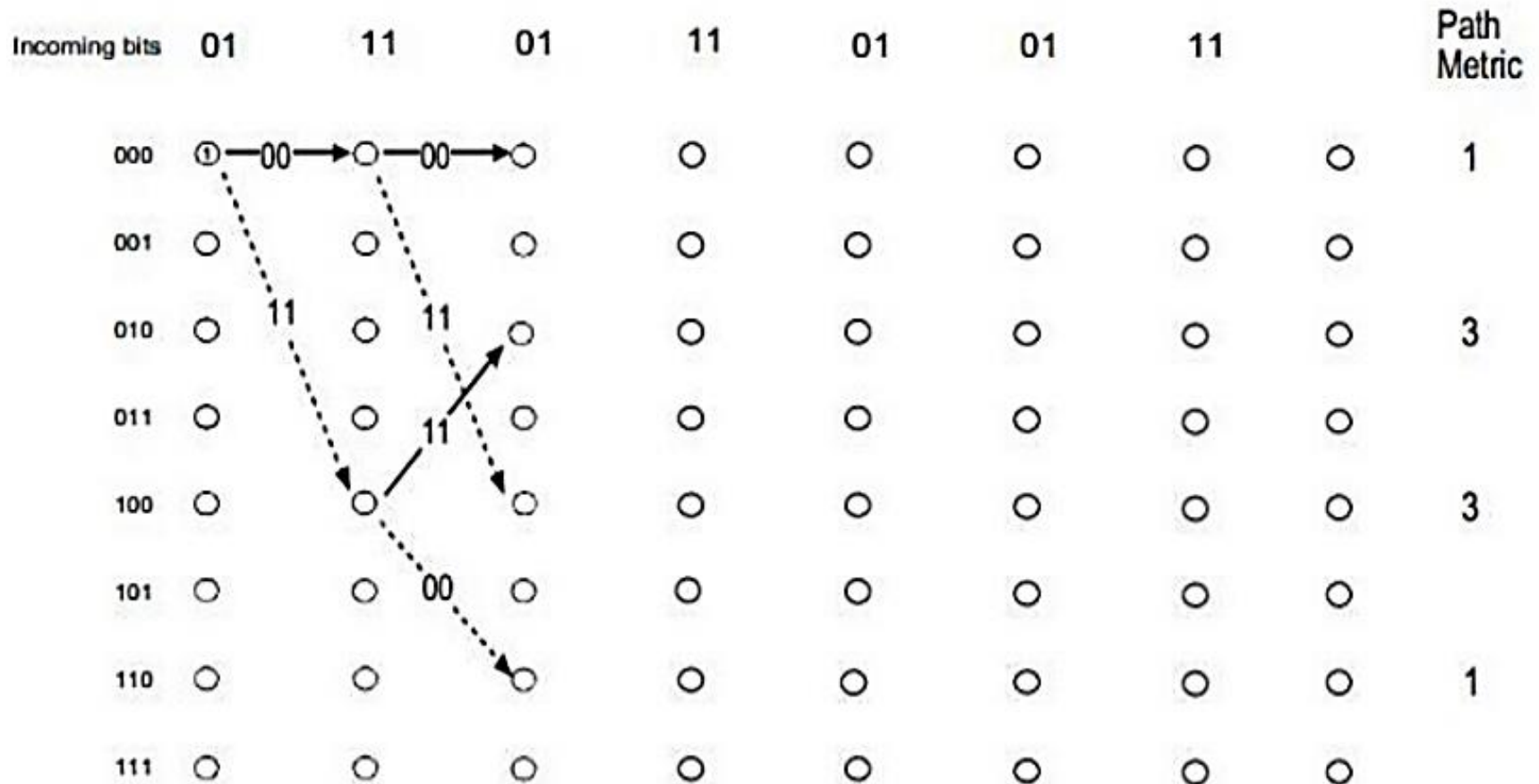
Αποκωδικοποίηση Fano



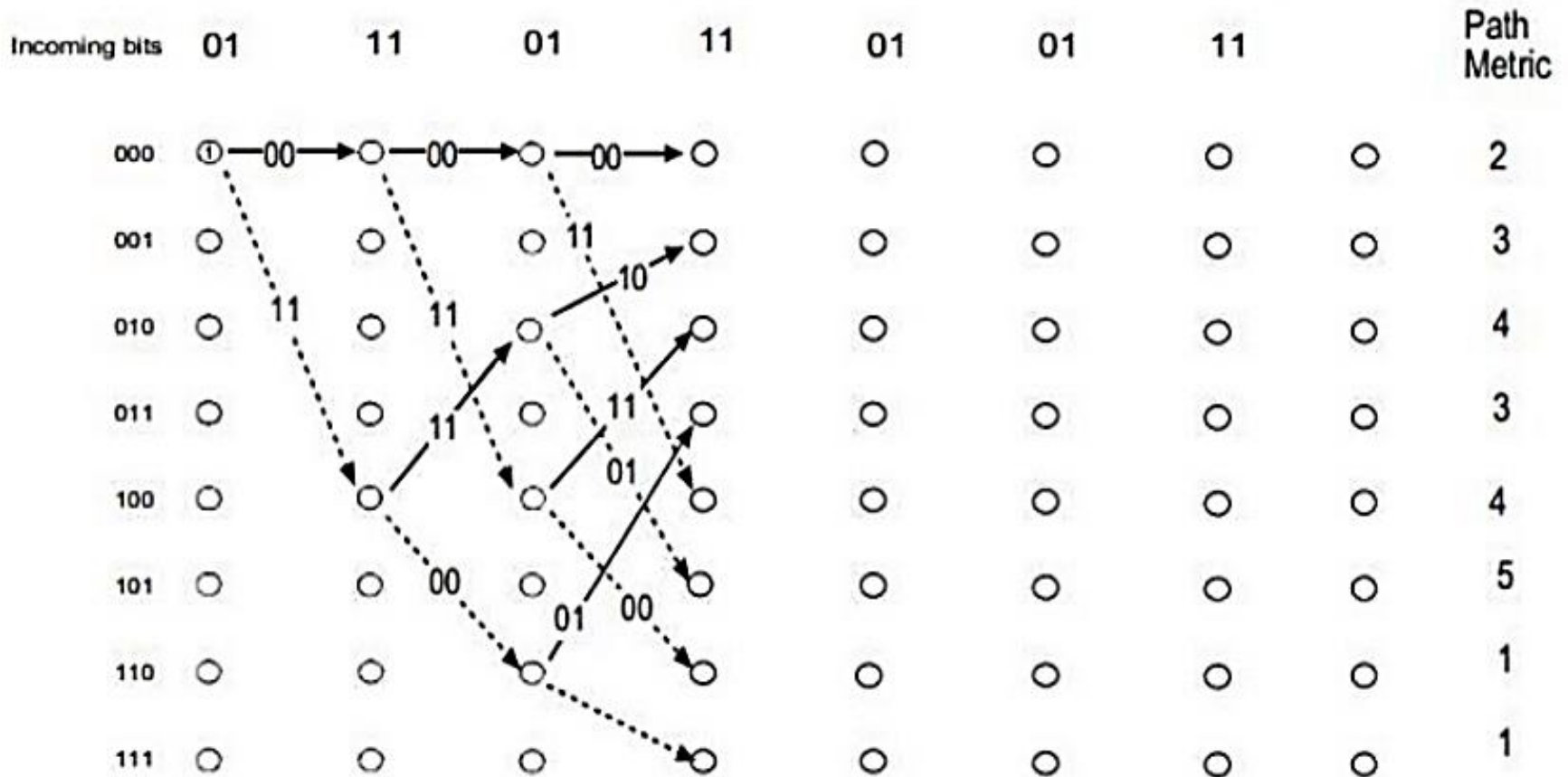
Αποκωδικοποίηση Viterbi (1/4)



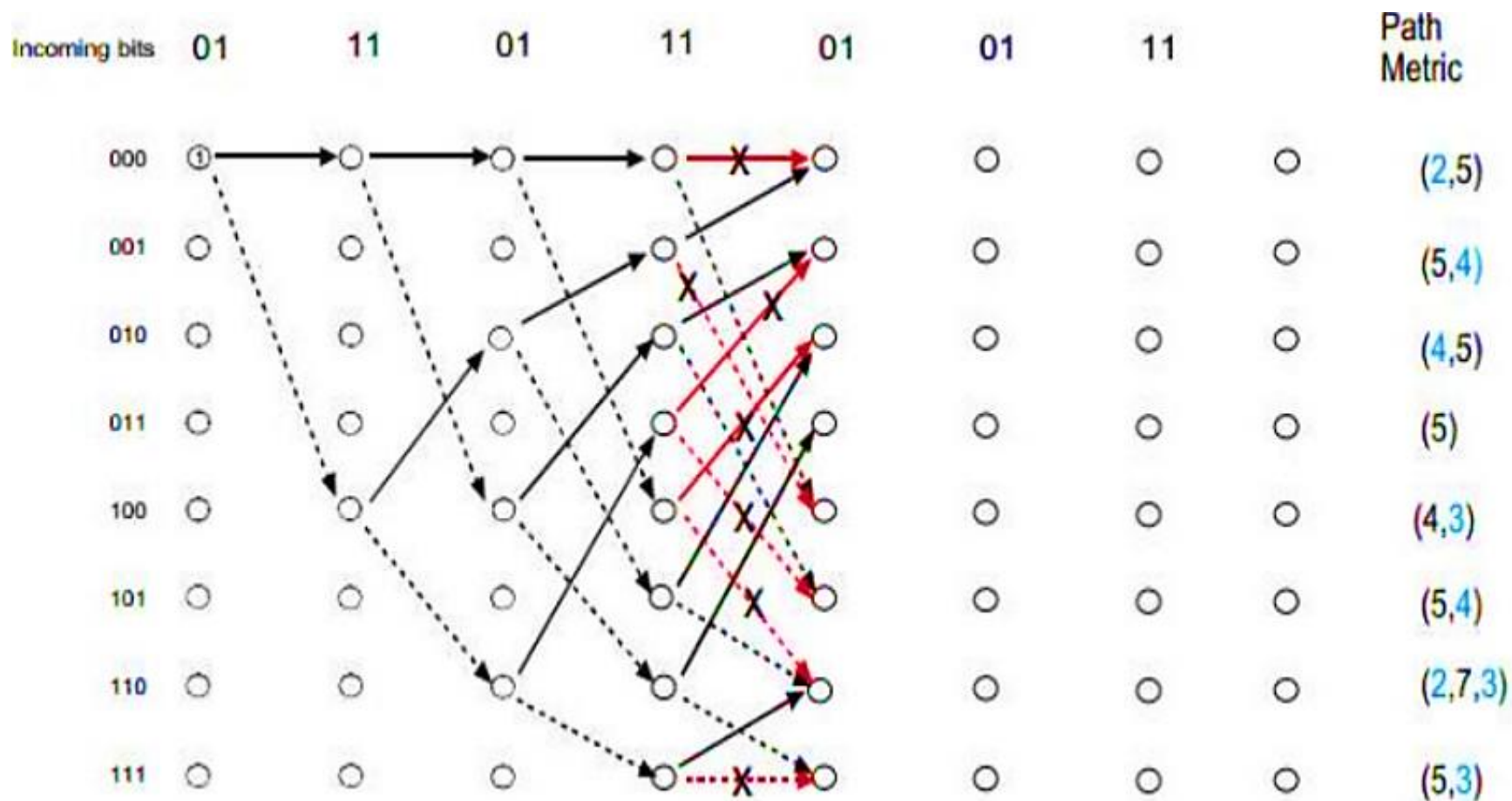
Αποκωδικοποίηση Viterbi (2/4)



Αποκωδικοποίηση Viterbi (3/4)



Αποκωδικοποίηση Viterbi (4/4)



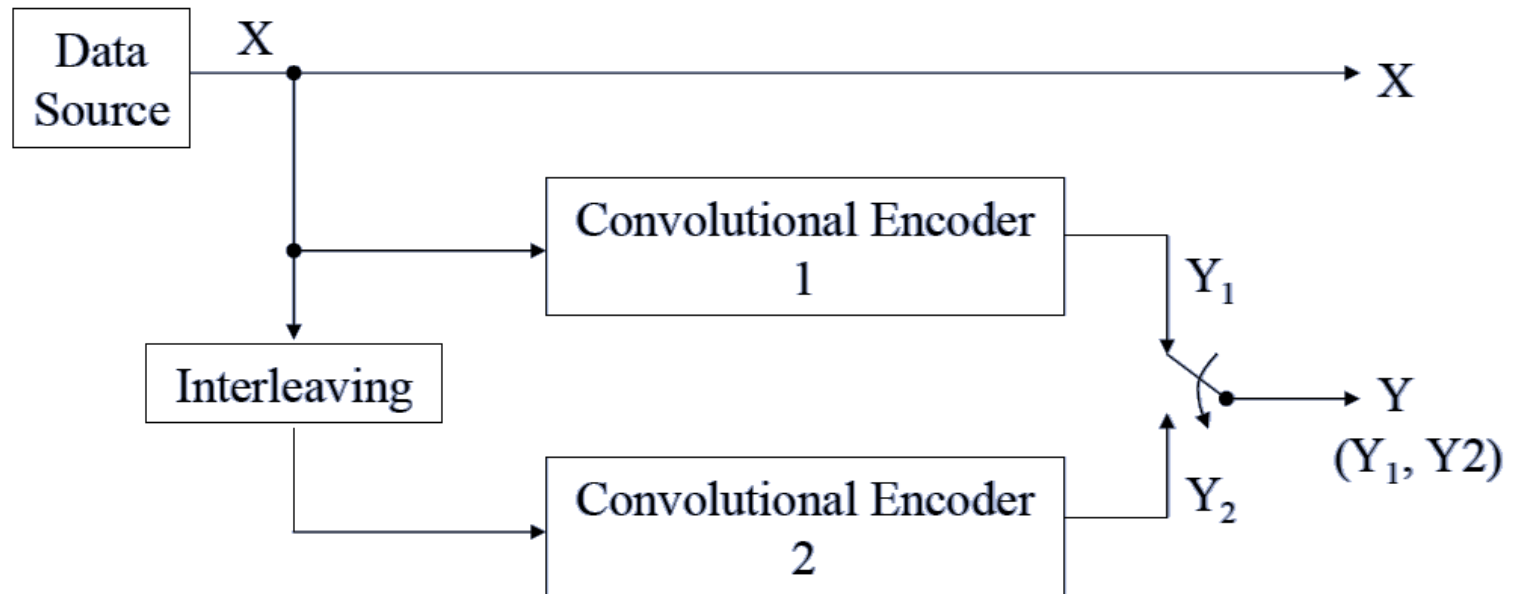
Συστηματικοί Συνελικτικοί Κώδικες

- Ένας κώδικας ονομάζεται συστηματικός (recursive systematic convolutional code, RSC) **όταν η μη κωδικοποιημένη ακολουθία δεδομένων αποτελεί μέρος της κωδικής λέξης και μεταδίδεται μαζί με τα bit ισοτιμίας – ελέγχου.**
- Ο κώδικας αποκαλείται συστηματικός και στην περίπτωση όπου οι κωδικές λέξεις αποτελούνται αποκλειστικά **από πληροφορία ισοτιμίας ή ακόμα και όταν μερικά bit της κωδικής λέξης δεν μεταδίδονται και παραλείπονται με στόχο την αύξηση του ρυθμού του κώδικα.**

Κώδικες Turbo

- Η ιδέα για τους κώδικες turbo διατυπώθηκε για πρώτη φορά το 1993 από τον C. Berrou.
- Σήμερα, οι κώδικες Turbo θεωρούνται οι περισσότερο αποδοτικοί κώδικες FEC.
- Οι Turbo κώδικες είναι σχήματα που χρησιμοποιούν και συνδυάζουν γνωστούς κώδικες όπως συνελικτικούς ή block.
- Η απόδοση των Turbo κωδικών είναι κοντά στο όριο του Shannon Limit.
- Οι Turbo κώδικες συνήθως χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές χαμηλής ισχύος όπως δορυφορικές επικοινωνίες.

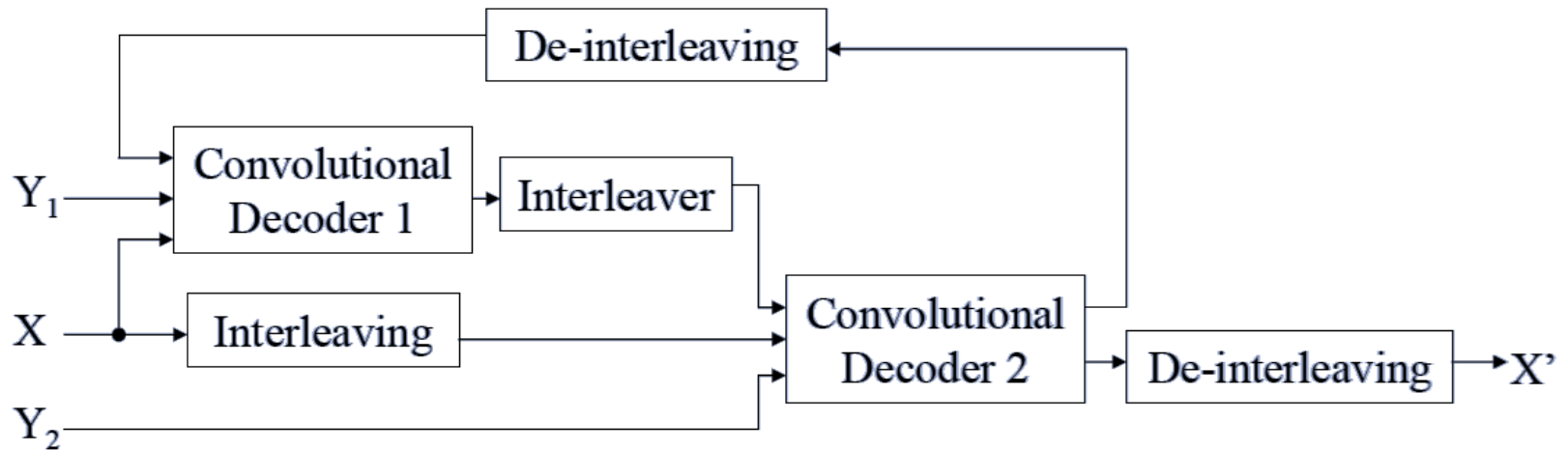
Κωδικοποιητής Turbo



X: Information

Y_i : Redundancy Information

Αποκωδικοποιητής Turbo

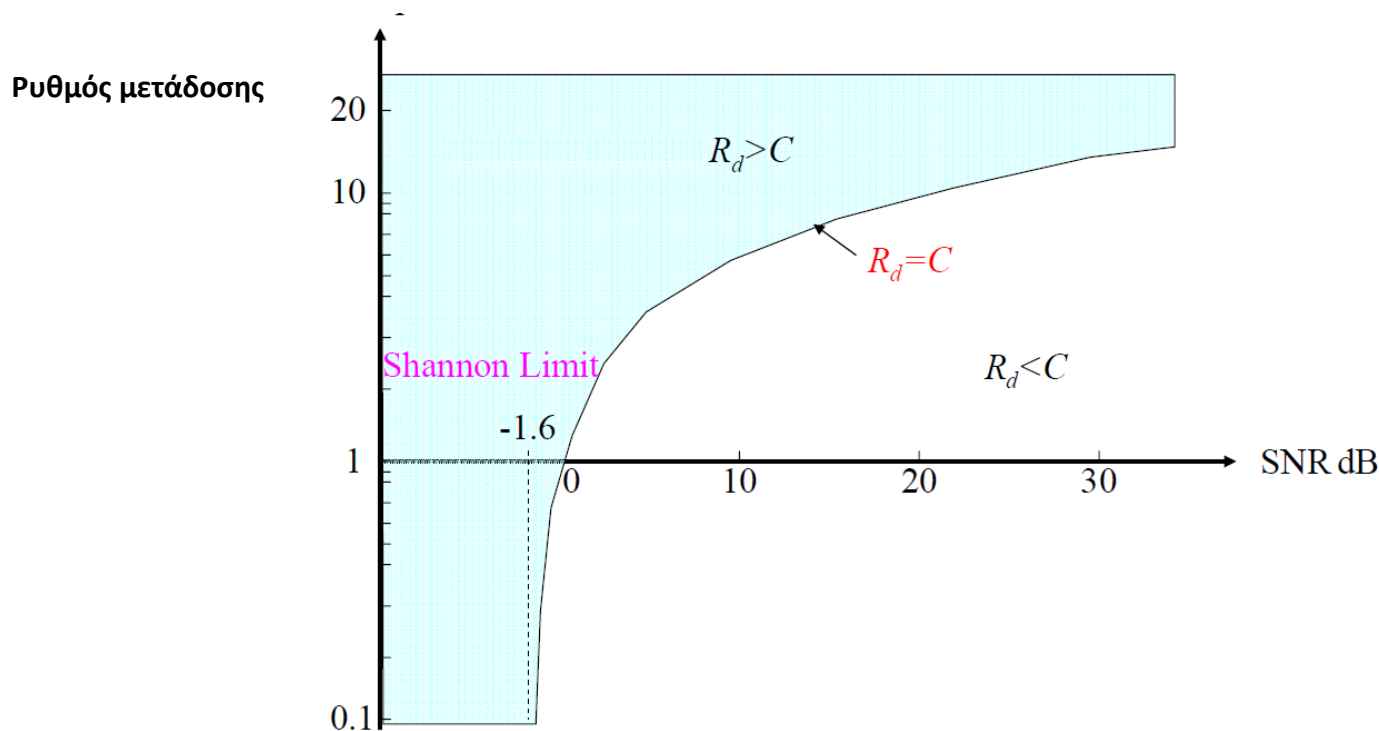


X' : Decoded Information

Θεώρημα Χωρητικότητας Πληροφορίας (Όριο Shannon)

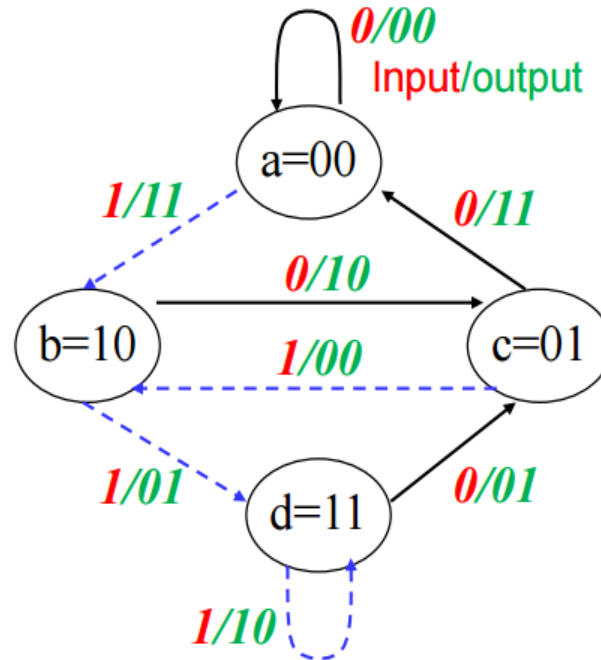
- Εάν C η χωρητικότητα ενός καναλιού με εύρος ζώνης B , τότε για μία μετάδοση με σηματοθορυβικό λόγο $\frac{S}{N}$ ισχύει η σχέση:

$$C = B \log \left(1 + \frac{S}{N} \right) \text{ bits/sec}$$



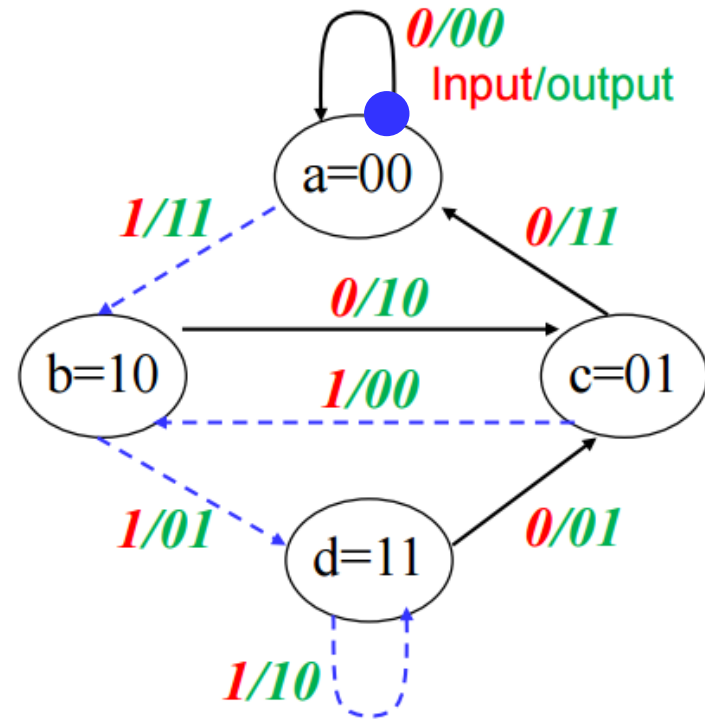
Άσκηση 1

- Θεωρείστε τον παρακάτω συνελικτικό κώδικα:



- Να υπολογίσετε την έξοδο του κώδικα για είσοδο 001001001111010010

Λύση



- Είσοδος: **001001001111010010**
- Έξοδος: **000011101111101111011010010010111110**

Άσκηση 2

- Θεωρείστε συνελικτικό κώδικα με εξόδους παρόρμησης $im(000) = 00000000$ και $im(111) = 11010111$. Να υπολογίσετε την έξοδο του κώδικα για είσοδο 01100.

Λύση

0				
	1			
		1		
			0	
				0
0	1	1	0	0

00	00	00	00				
	11	01	01	11			
		11	01	01	11		
			00	00	00	00	
				00	00	00	00
01	00	00	11	00	11	00	00