

Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα Ι

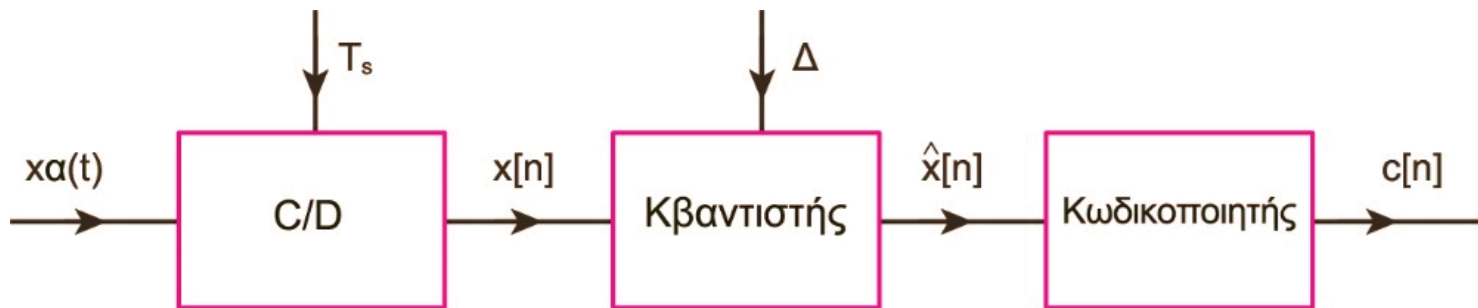
Διάλεξη 9: Μετατροπή Σήματος από
Αναλογική Μορφή σε Ψηφιακή

Μετατροπή Αναλογικού Σήματος σε Ψηφιακό

- Είδη Δειγματοληψίας:
 - Ιδανική δειγματοληψία
 - Πρακτική δειγματοληψία
 - Δειγματοληψία επίπεδης κορυφής
- Κβαντισμός
 - Ομοιόμορφος και Ανομοιόμορφος Κβαντισμός
 - Παράμετροι Κβαντισμού
- Κωδικοποίηση
- Ανακατασκευή Αναλογικού Σήματος από Ψηφιακό

Μετατροπή Αναλογικού Σήματος σε Ψηφιακό

Τα περισσότερα σήματα διακριτού χρόνου (ΣΔΧ) παράγονται από σήματα συνεχούς χρόνου (ΣΣΧ), με επεξεργασία των τριών ακόλουθων σταδίων:



Μετατροπέας Analog/Digital

- **Δειγματοληψία** (sampling): Continuous to Discrete Conversion. Παράγει το $x[n] = x_a(nT_s)$, όπου T_s : περίοδος δειγματοληψίας (sampling period).
- **Κβαντισμός** (quantization): αντιστοιχίζει το συνεχές πλάτος $x_a(nT_s)$ σε διακριτό σύνολο τιμών $\hat{x}[n]$. Χαρακτηριστικά: Δ : διάστημα κβαντισμού και μήκος λέξης (bits).
- **Κωδικοποίηση** (coding): Παράγει ακολουθία $c[n]$ δυαδικών κωδικών λέξεων, που μεταδίδονται στο κανάλι επικοινωνίας.

Δειγματοληψία

Δειγματοληψία (Sampling)

Δειγματοληψία (sampling) είναι η διαδικασία μετατροπής ενός σήματος συνεχούς χρόνου και συνεχούς πλάτους (αναλογικό σήμα) σε σήμα διακριτού χρόνου (ΣΔΧ).

Ένα αναλογικό σήμα $x_a(t)$ με πεπερασμένο εύρος ζώνης συχνοτήτων $X_a(\Omega)$ και μέγιστη συχνότητα Ω_{max} , υπόκειται σε δειγματοληψία με ρυθμό $f_s = 1/T_s$ (δείγματα/sec). Ως αποτέλεσμα παράγεται το **σήμα διακριτού χρόνου** $x_a[n]$:

$$x_a[n] \triangleq x_a(nT_s) = x_a(t)|_{t=nT_s}$$

Η τιμή της περιόδου δειγματοληψίας T_s προσδιορίζεται από το **κριτήριο Nyquist ή Θεώρημα Δειγματοληψίας** (sampling theorem). Σύμφωνα με αυτό, αν το αναλογικό σήμα $x_a(t)$ έχει ένα αυστηρά περιορισμένο εύρος ζώνης συχνοτήτων [δηλ. ισχύει: $X_a(\Omega) = 0$ για $|\Omega| > \Omega_{max}$], τότε το $x_a(t)$ μπορεί να ανακτηθεί πλήρως από τα δείγματα του $x_a(nT_s)$, αν για τη συχνότητα δειγματοληψίας f_s ισχύει η σχέση:

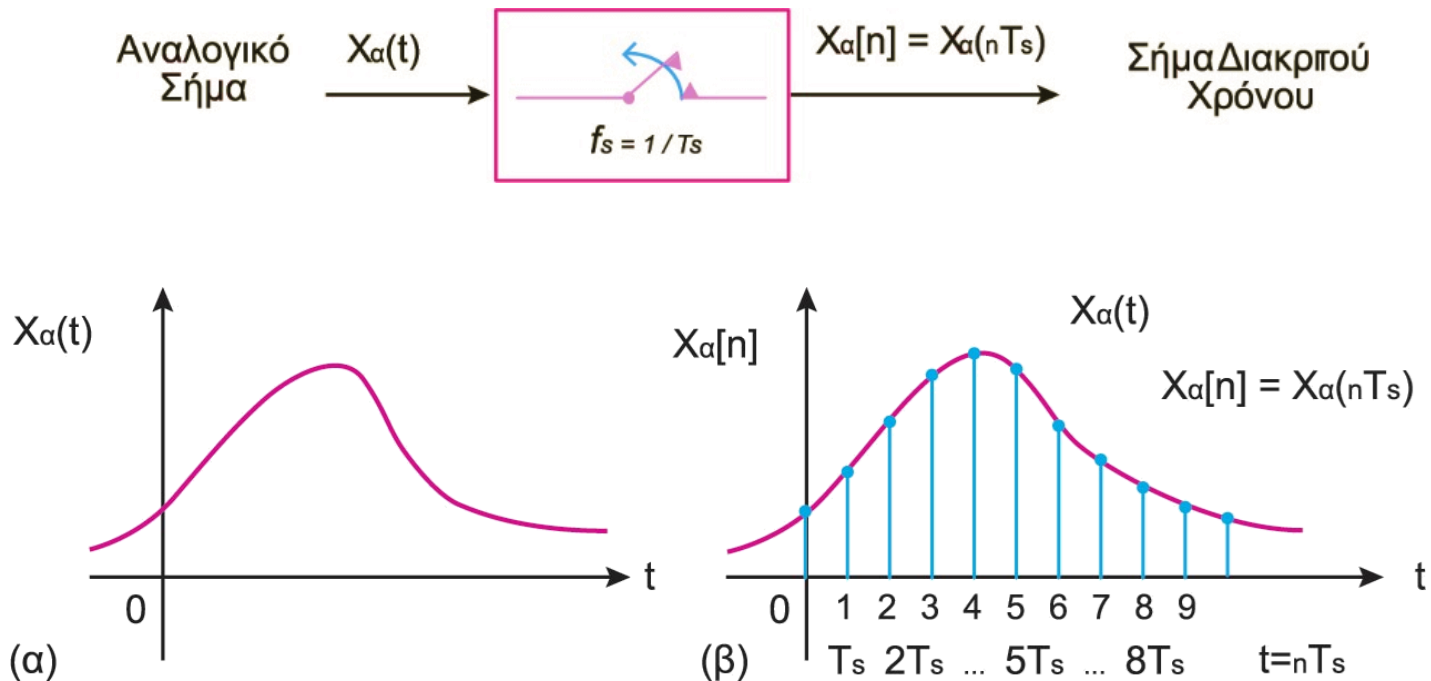
$$f_s \geq 2f_{max} \text{ ή ισοδύναμα } \Omega_s \geq 2\Omega_{max}$$

όπου f_{max} είναι η μέγιστη συχνότητα του σήματος συνεχούς χρόνου $x_a(t)$.

Ο ρυθμός **Nyquist** ορίζεται από τη σχέση: $f_n = 2 f_{max}$

Δειγματοληψία

Στην πράξη η δειγματοληψία μπορεί να υλοποιηθεί από το διαδοχικό άνοιγμα και κλείσιμο ενός ιδανικού διακόπτη ανά χρονικό διάστημα T_s . Τα δείγματα του σήματος λαμβάνονται κατά τις στιγμές που ο διακόπτης είναι κλειστός, ενώ τις στιγμές που ο διακόπτης είναι ανοικτός δεν προκύπτουν δείγματα.



(α) Αναλογικό σήμα $x_a(t)$, (β) σήμα διακριτού χρόνου $x_a[n]$.

Σχέση μεταξύ αναλογικής και ψηφιακής συχνότητας

Η αντιστοίχιση ανάμεσα στη **συνεχή συχνότητα** Ω (rad/sec) του σήματος συνεχούς χρόνου $x_a(t)$ και στη **διακριτή συχνότητα** ω (rad) του σήματος διακριτού χρόνου $x_a[n] = x_a(nT_s)$, δίνεται από τη σχέση:

$$\omega = \Omega T_s, \quad (rad/sec) \times (sec) = (rad)$$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές της διακριτής συχνότητας ω προκύπτουν ως δείγματα της συνεχούς συχνότητας Ω , που λαμβάνονται ανά χρονικό διάστημα ίσο με την περίοδο δειγματοληψίας T_s .

Είδη Δειγματοληψίας

- Ιδανική δειγματοληψία
- Πρακτική δειγματοληψία
- Δειγματοληψία επίπεδης κορυφής

Ιδανική Δειγματοληψία

Ιδανική Δειγματοληψία

Ιδανική δειγματοληψία είναι η διαδικασία παραγωγής δειγμάτων $x_s(nT_s)$ ενός ΣΣΧ $x_a(t)$, στιγμιαία και με ομοιόμορφο τρόπο, δηλ. ένα δείγμα κάθε T_s , μέσω του πολλαπλασιασμού του $x_a(t)$ με μία συνάρτηση δειγματοληψίας $\delta_{T_s}(t)$:

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$$

Το ιδανικά δειγματοληπτημένο σήμα $x_s(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$x_s(t) = x_a(t) \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

Η διαδικασία ονομάζεται ιδανική επειδή βασίζεται στη συνάρτηση $\delta(t)$, η οποία έχει σημαντική θεωρητική αξία, αλλά δεν μπορεί να υλοποιηθεί στην πράξη.

Ο μετασχηματισμός Fourier $X_s(\Omega)$ του σήματος $x_s(t)$ το οποίο έχει προκύψει από την ιδανική δειγματοληψία, δίνεται από τη σχέση:

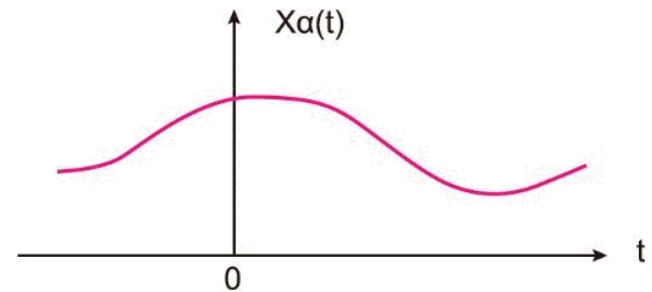
$$X_s(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - k\Omega_s)$$

όπου $X_a(\Omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x_a(t)$.

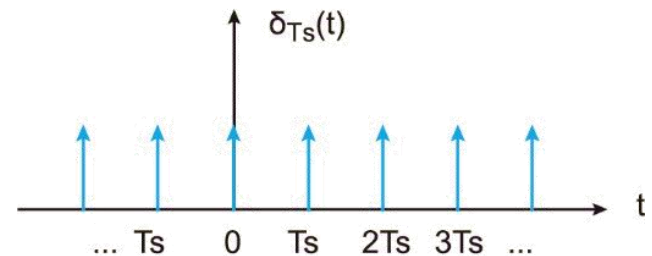
Ιδανική Δειγματοληψία

Παρατηρούμε ότι το φάσμα $X_s(\Omega)$ του ιδανικά δειγματοληπτημένου σήματος $x_s(t)$, προκύπτει ως άθροισμα επαναλήψεων του φάσματος $X_a(\Omega)$ του αρχικού σήματος $x_a(t)$, σε θέσεις που είναι ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας Ω_s .

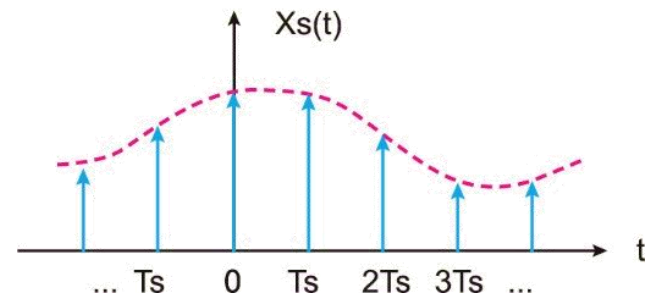
(α) Σήμα συνεχούς χρόνου $x_a(t)$,



(β) Συνάρτηση δειγματοληψίας
 $\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$,



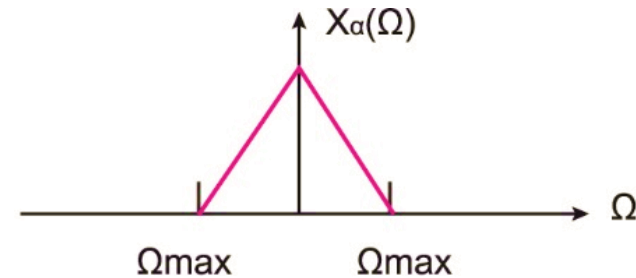
(γ) Ιδανικά δειγματοληπτημένο σήμα
 $x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT_s) \delta(t - nT_s)$



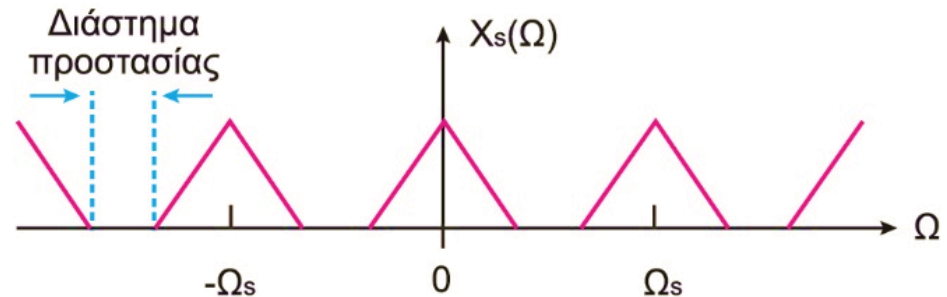
Η συχνότητα δειγματοληψίας είναι: $\Omega_s = 2\pi/T_s$

Ιδανική Δειγματοληψία (Πεδίο Συχνότητας)

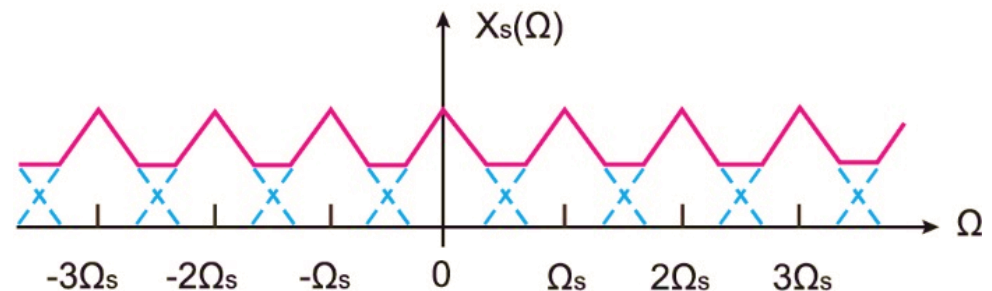
(α) Φάσμα αναλογικού σήματος $x_a(t)$ με $X_a(f) = 0$ για $|f| > f_x$



(β) Φάσμα $X(f)$ δειγματοληπτημένου σήματος όταν $f_s \geq 2f_x$



(γ) Φάσμα $X(f)$ δειγματοληπτημένου σήματος όταν $f_s < 2f_x$



⇒ Φαινόμενο επικάλυψης
([aliasing effect](#))

Ιδανική Δειγματοληψία (Πεδίο Συχνότητας)

Περίπτωση (α): $\Omega_s \geq 2 \Omega_{max}$

- Το φάσμα $X_s(\Omega)$ [σχήμα (β)] σχηματίζεται από διαδοχικές επαναλήψεις του $X_a(\Omega)$, που βρίσκονται σε ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας Ω_s . Δεν υπάρχει επικάλυψη (overlapping) μεταξύ των επαναλήψεων.
- **Διάστημα προστασίας:** Η απόσταση $\Omega_s - \Omega_{max}$ ανάμεσα σε δύο διαδοχικές επαναλήψεις του $X_a(\Omega)$.
- Η απουσία επικάλυψης μεταξύ των επαναλήψεων του φάσματος $X_a(\Omega)$ εξασφαλίζει την ανάκτηση του φάσματος $X_a(\Omega)$ από το $X_s(\Omega)$, άρα και του αρχικού σήματος $x_a(t)$ από το ιδανικά δειγματοληπτημένο σήμα $x_s(t)$.
- Η ανάκτηση γίνεται με βαθυπερατό φίλτρο με **συχνότητα αποκοπής Ω_c** , όπου:
$$\Omega_{max} < \Omega_c < \Omega_s$$
- **Συχνότητα Nyquist:** $\Omega_N = 2\Omega_{max}$ **Κριτήριο Nyquist:** $\Omega_s \geq \Omega_N$ ή $\Omega_s \geq 2 \Omega_{max}$
- Το κριτήριο Nyquist εγγυάται ότι το σήμα $x_s(t)$ περιέχει όλη την πληροφορία του αρχικού σήματος $x_a(t)$ και το αρχικό σήμα μπορεί να ανακτηθεί πλήρως από το ιδανικά δειγματοληπτημένο.

Ιδανική Δειγματοληψία (Πεδίο Συχνότητας)

Περίπτωση (β): $\Omega_s < 2 \Omega_{max}$

- Στην περίπτωση αυτή προκύπτει επικάλυψη μεταξύ των διαδοχικών φασματικών επαναλήψεων του φάσματος $X_\alpha(\Omega)$ [σχήμα (γ)].
- Η ανάκτηση του αρχικού σήματος $x_\alpha(t)$ από το σήμα $x_s(t)$ είναι αδύνατη.
- **Φαινόμενο αλλοίωσης** (aliasing effect): η επικάλυψη των διαδοχικών φασματικών επαναλήψεων. Προκαλεί μόνιμη και μη-αντιστρεπτή παραμόρφωση του σήματος.
- Αν επιχειρήσουμε φιλτράρισμα με βαθυπερατό φίλτρο με σκοπό την ανάκτηση του $x_\alpha(t)$, τότε θα προκύψουν συχνότητες οι οποίες δεν υπήρχαν στο αρχικό σήμα.

Ιδανική Δειγματοληψία (Πεδίο Συχνότητας)

- Η παραπάνω μελέτη έγινε με την παραδοχή ότι το σήμα $x_\alpha(t)$ είναι ένα σήμα χαμηλών συχνοτήτων, δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση $X_\alpha(\Omega) = 0$, για $|\Omega| > \Omega_{max}$.
- Αν το σήμα $x_\alpha(t)$ ένα φασματικά απεριόριστο, δηλαδή περιέχει συχνότητες οποιασδήποτε υψηλής τιμής, τότε το φαινόμενο της αλλοίωσης θα υπάρχει για οποιαδήποτε (οσοδήποτε μεγάλη) τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας.
- Πρακτικά, σε περιπτώσεις τέτοιων σημάτων αρχικά φιλτράρουμε το σήμα με ένα βαθυπερατό φίλτρο και κατόπιν προχωρούμε στη δειγματοληψία.
- Αυτό βέβαια έχει ως αποτέλεσμα την οριστική απώλεια των υψηλών συχνοτήτων του σήματος.

Φυσική Δειγματοληψία

Φυσική Δειγματοληψία (Πεδίο Χρόνου)

Το δειγματοληπτημένο σήμα $x_{ns}(t)$ προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του σήματος $x_\alpha(t)$ με μία περιοδική ακολουθία ορθογώνιων παλμών $x_p(t)$ με περίοδο T_s :

$$x_{ns}(t) = x_\alpha(t) x_p(t)$$

Κάθε ορθογώνιος παλμός $x_p(t)$ έχει χρονική διάρκεια τ και πλάτος ίσο με τη μονάδα.

Ονομάζεται φυσική επειδή η κορυφή κάθε παλμού στο $x_{ns}(t)$ διατηρεί το σχήμα του αντίστοιχου με αυτού αναλογικού τμήματος κατά τη διάρκεια του παλμού $x_p(t)$.

Επειδή το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της παλμοσειράς $x_p(t)$, είναι:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega_s t}, \text{ όπου: } \Omega_s = 2\pi/T_s \text{ και } c_n = \frac{\tau}{T_s} \frac{\sin(n\Omega_s \tau/2)}{n\Omega_s \tau/2}$$

το δειγματοληπτημένο σήμα $x_{ns}(t)$ μπορεί να γραφεί:

$$x_{ns}(t) = x_\alpha(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega_s t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n x_\alpha(t) e^{jn\Omega_s t}$$

Φυσική Δειγματοληψία (Πεδίο Συχνότητας)

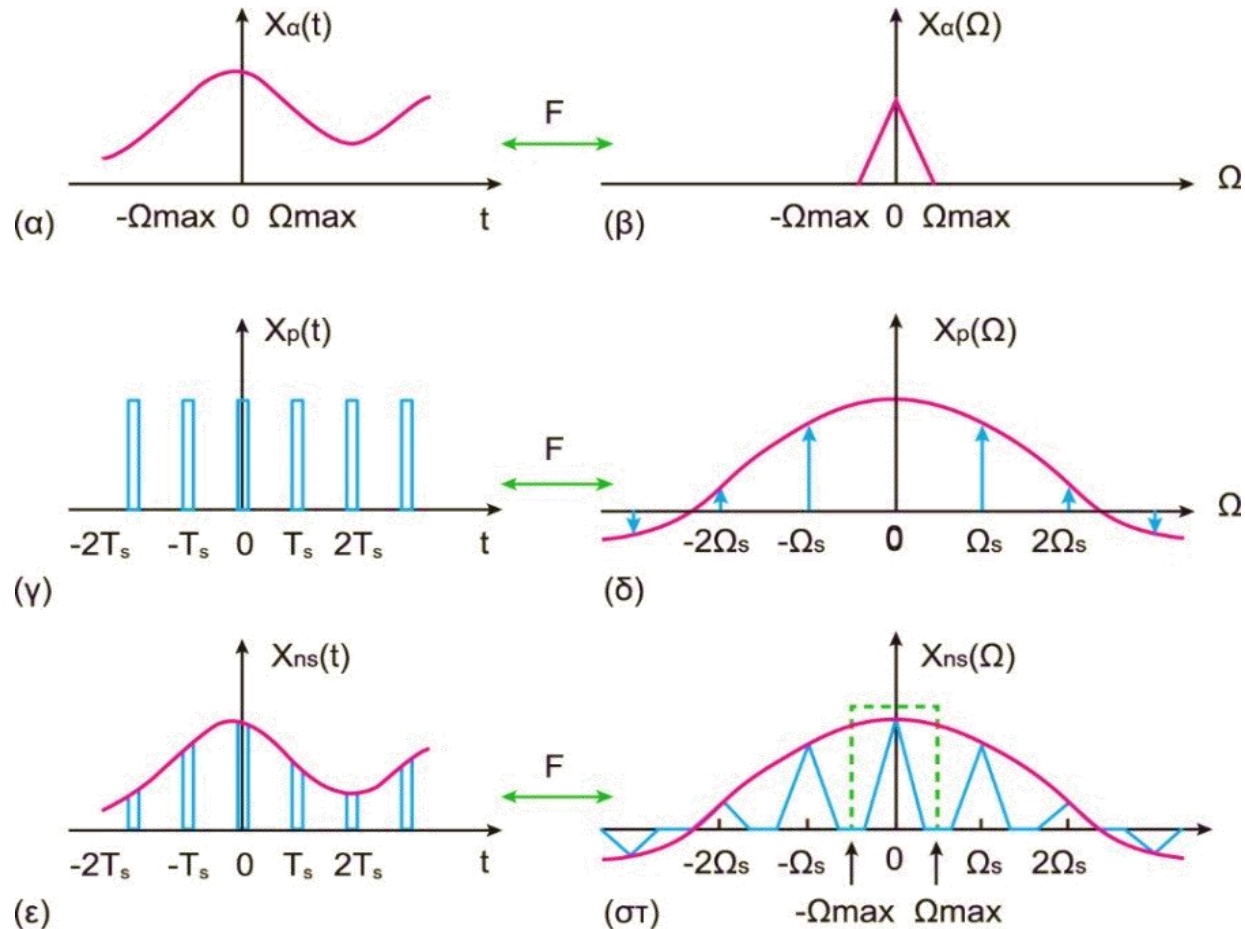
Με βάση την ιδιότητα της ολίσθησης συχνότητας του μετασχηματισμού Fourier, προκύπτει ότι το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος $x_{ns}(t)$ είναι:

$$X_{ns}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n X_{\alpha}(\Omega - n\Omega_s)$$

Άρα, και στη φυσική δειγματοληψία, το φάσμα $X_{ns}(\Omega)$ προκύπτει ως μία σταθμισμένη εκδοχή του φάσματος $X_{\alpha}(\Omega)$ του αρχικού σήματος $x_{\alpha}(t)$, κεντραρισμένη σε ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας Ω_s (βλ. επόμενη διαφάνεια).

Το θεώρημα δειγματοληψίας (Nyquist) μπορεί να εφαρμοστεί και στη φυσική δειγματοληψία. Αν ισχύει $\Omega_s \geq 2\Omega_{max}$, τότε το $x_{\alpha}(t)$ μπορεί να ανακτηθεί από το $x_{ns}(t)$ με φιλτράρισμα χαμηλών συχνοτήτων.

Φυσική Δειγματοληψία (Χρόνος – Συχνότητα)



(α) Σήμα $x_\alpha(t)$, (β) Φάσμα $X_\alpha(\Omega)$, (γ) Παλμοσειρά $x_p(t)$,
 (δ) Φάσμα παλμοσειράς $X_p(\Omega)$, (ε) Φυσικά δειγματοληπτημένο σήμα $x_{ns}(t)$,
 (στ) Φάσμα φυσικά δειγματοληπτημένου σήματος $X_{ns}(\Omega)$.

Δειγματοληψία Επίπεδης Κορυφής

Δειγματοληψία Επίπεδης Κορυφής

Είναι η απλούστερη και δημοφιλέστερη πρακτική μέθοδος δειγματοληψίας, που παράγει ένα δειγματολαμβανόμενο σήμα με **οριζόντια κορυφή**.

Ονομάζεται επίσης και **διαμόρφωση πλάτους παλμών** (Pulse Amplitude Modulation - PAM), επειδή τα πλάτη των ορθογωνίων παλμών μεταβάλλονται ανάλογα με τις στιγμιαίες τιμές δειγματοληψίας του αναλογικού σήματος πληροφορίας.

Το σήμα PAM $x_s(t)$ περιγράφεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} x_s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) p(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) p(t) * \delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) \delta(t - nT_s) * p(t) = x_s(t) * p(t) \end{aligned}$$

όπου $x_s(t)$ είναι το ιδανικά δειγματοληπτημένο σήμα.

Δειγματοληψίας Επίπεδης Κορυφής (Πεδίο Συχνότητας)

Το φάσμα του PAM σήματος $x_S(t)$ είναι:

$$X_{PAM}(\Omega) = X_S(\Omega) P(\Omega) = \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{\alpha}(\Omega - n\Omega_S) P(\Omega)$$

Η PAM διαμόρφωση είναι ισοδύναμη με τη διέλευση ιδανικά δειγματοληπτημένου σήματος από φίλτρο με απόκριση συχνότητας $H(\Omega) = P(\Omega)$.

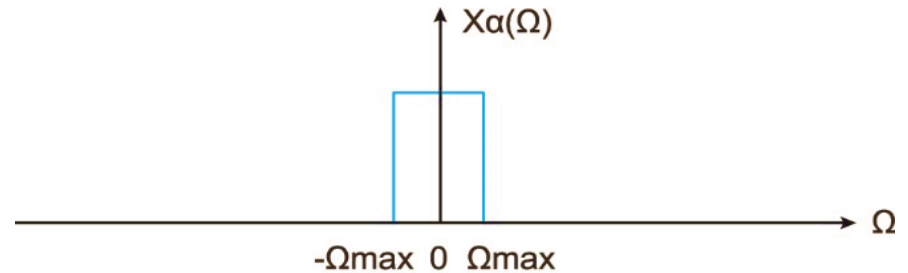
Η συνάρτηση $P(\Omega)$ λειτουργεί σαν βαθυπερατό φίλτρο και εξασθενεί τις υψηλές συχνότητες του σήματος. Όσο μεγαλύτερη η διάρκεια τ του παλμού, τόσο ισχυρότερη είναι η εξασθένιση των υψηλών συχνοτήτων.

Η εξασθένιση υψηλών συχνοτήτων μπορεί να αγνοηθεί αν ισχύει $\tau/T_S \leq 0,1$

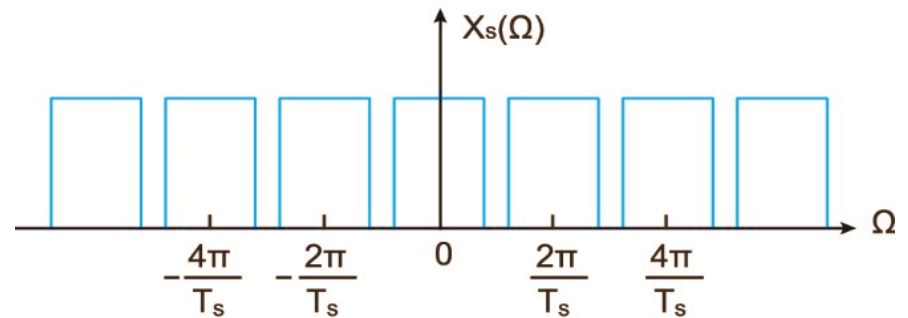
Το θεώρημα δειγματοληψίας (Nyquist) μπορεί να εφαρμοστεί και στη δειγματοληψία επίπεδης κορυφής. Αν $\Omega_S \geq 2\Omega_{max}$, τότε το $x_{\alpha}(t)$ μπορεί να ανακτηθεί από το $x_{PAM}(t)$ με φιλτράρισμα χαμηλών συχνοτήτων.

Δειγματοληψίας Επίπεδης Κορυφής (Πεδίο Συχνότητας)

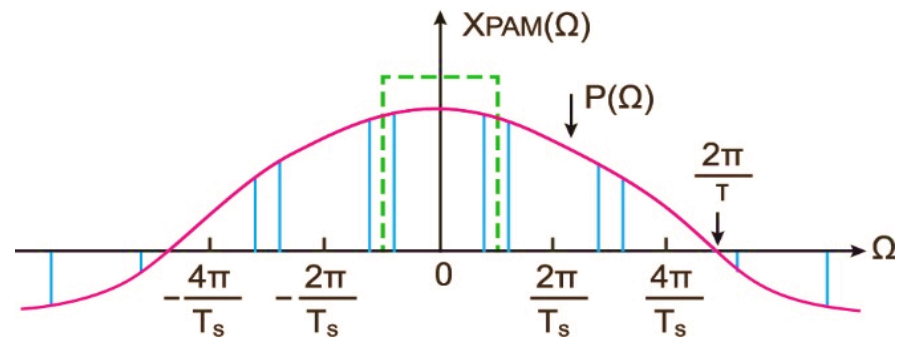
(α) Φάσμα $X_{\alpha}(\Omega)$



(β) Φάσμα ιδανικά δειγματοληπτημένου σήματος $X_S(\Omega)$



(γ) Φάσμα σήματος PAM $X_{PAM}(\Omega)$



Άσκηση 1

Αν ο ρυθμός Nyquist για το σήμα $x_a(t)$ είναι Ω_s , να βρεθεί ο ρυθμός Nyquist για τα σήματα:

$$(\alpha) y_a(t) = \frac{dx_a(t)}{dt}$$

$$(\beta) y_a(t) = x_a(t) \cos(\Omega_0 t)$$

Απάντηση: (α) Για να υπολογίσουμε τον DTFT της $y_a(t)$ χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της παραγωγίσις του DTFT, από την οποία προκύπτει ότι:

$$Y_a(j\Omega) = j\Omega X_a(j\Omega)$$

Παρατηρούμε ότι δεν προκύπτει κάποια αλλαγή στο πεδίο της συχνότητας, επομένως και η συχνότητα Nyquist παραμένει σταθερή.

(β) Η δοθείσα πράξη υποδηλώνει διαμόρφωση και μάλιστα διαμόρφωση πλάτους. Είναι γνωστό ότι κατά τη διαμόρφωση ενός σήματος $x_a(t)$ με έναν όρο $\cos(\Omega_0 t)$, προκύπτει μετατόπιση του φάσματος του σήματος $x_a(t)$ κατά συχνότητα $\pm\Omega_0$. Επομένως, η συχνότητα Nyquist του $y_a(t) = x_a(t) \cos(\Omega_0 t)$ θα είναι $\omega_x + 2\Omega_0$.

Άσκηση 2

Να βρεθεί ο ρυθμός Nyquist του σήματος $x_a(t) = 5 \cos 1000\pi t \cos 4000\pi t$

Απάντηση: Από την τριγωνομετρική ιδιότητα $\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A + B) +$

Άσκηση 3

Να βρεθεί ο ρυθμός Nyquist για το σήμα:

$$x_a(t) = \frac{\sin 200\pi t}{\pi t}$$

Απάντηση: Από την ανάλυση κατά Fourier γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\frac{\sin at}{\pi t} \xleftrightarrow{F} P_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

Το $x_a(t)$ είναι ένα σήμα με μέγιστη συχνότητα $f_{max} = 100 \text{ Hz}$.

Άρα ο ρυθμός Nyquist είναι 200 Hz , και το διάστημα Nyquist είναι $1/200 \text{ sec}$.

Άσκηση 4

Να βρεθεί ο ρυθμός Nyquist για το σήμα:

$$x_a(t) = \left(\frac{\sin 200\pi t}{\pi t} \right)^2$$

Απάντηση: Από το θεώρημα της συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier:

$$x_1(t) x_2(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) X_2(\omega)$$

και σε συνδυασμό με την προηγούμενη άσκηση, βρίσκουμε ότι το σήμα $x_a(t)$ είναι και αυτό οριοθετημένης ζώνης και ότι το εύρος ζώνης του είναι διπλάσιο από αυτό του σήματος της προηγούμενης άσκησης, δηλ. είναι 200 Hz.

Έτσι, ο ρυθμός Nyquist είναι 400 Hz, και το διάστημα Nyquist είναι 1/400 sec.

Άσκηση 5

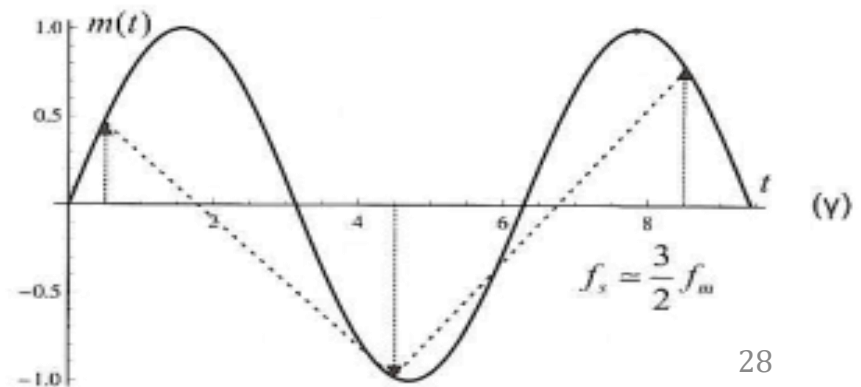
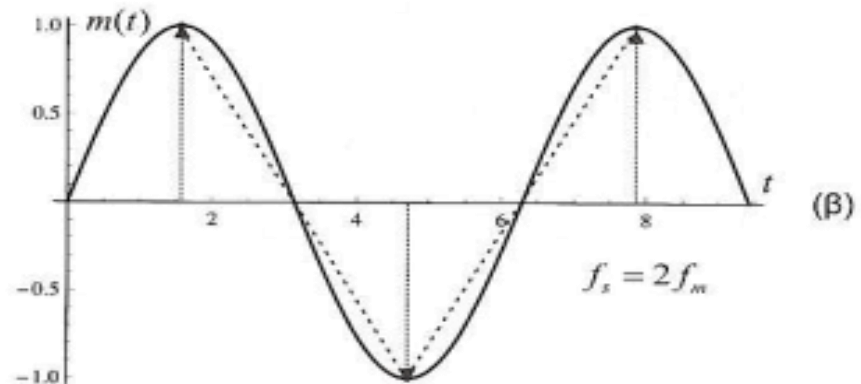
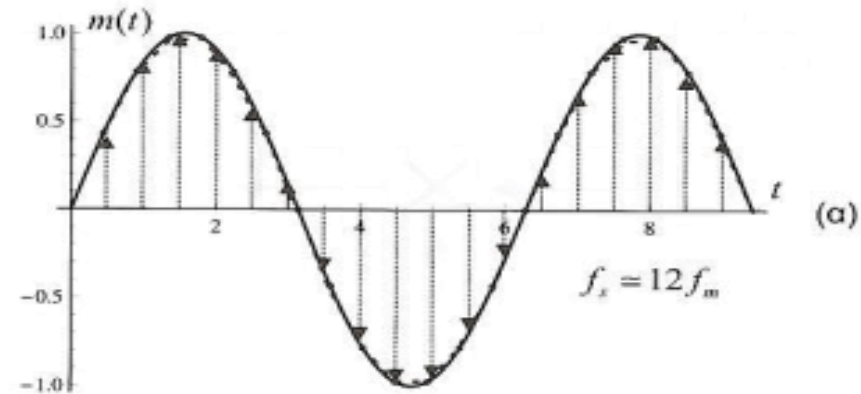
Ένα ημιτονοειδές σήμα $m(t)$ με συχνότητα f_m δειγματοληπτείται με συχνότητα:

(α) $f_s = 12f_m$

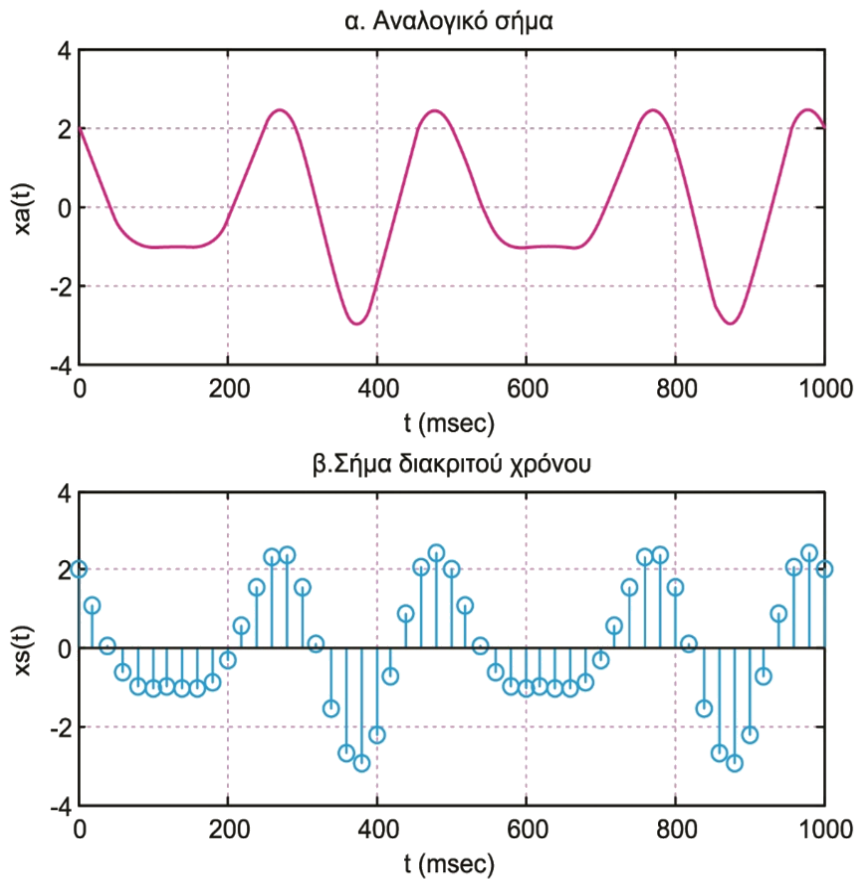
(β) $f_s = 2f_m$

(γ) $f_s = \frac{3}{2}f_m$

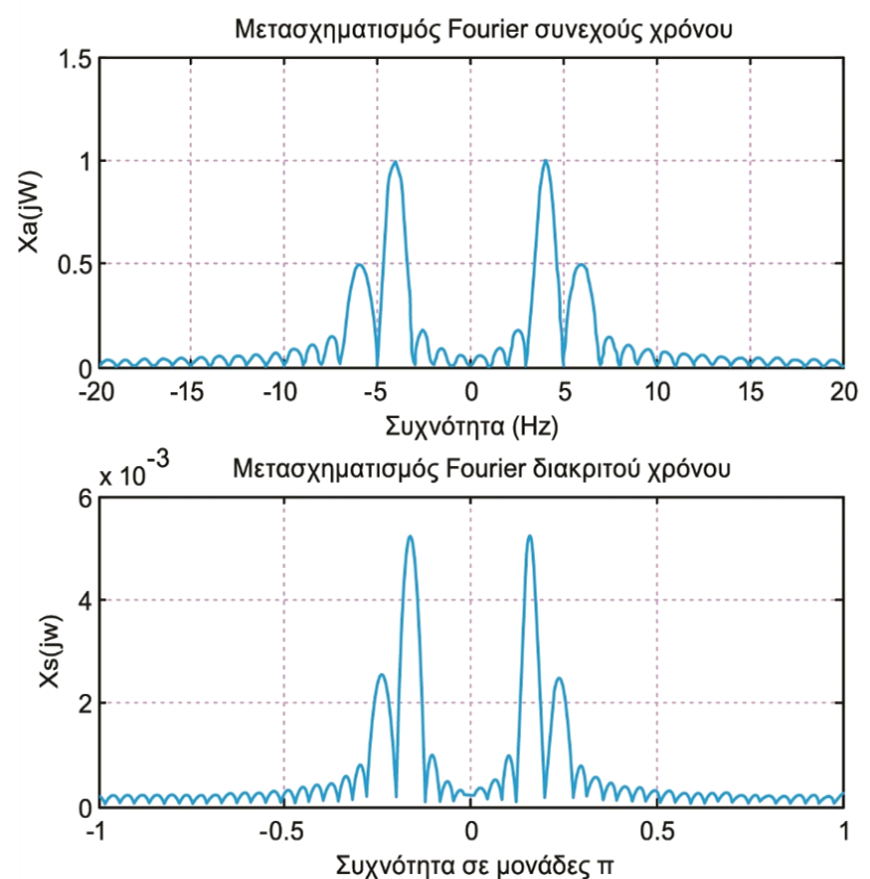
Να σχολιάσετε τις περιπτώσεις που ικανοποιείται ή όχι η συνθήκη Nyquist.



Δειγματοληψία χωρίς αλλοίωση

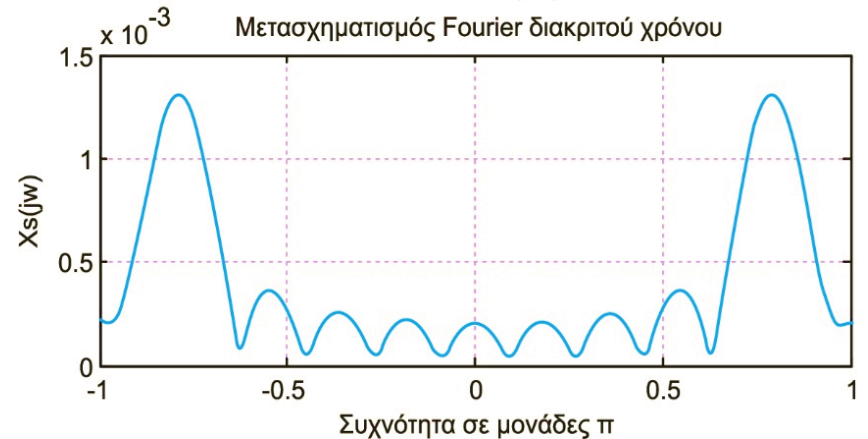
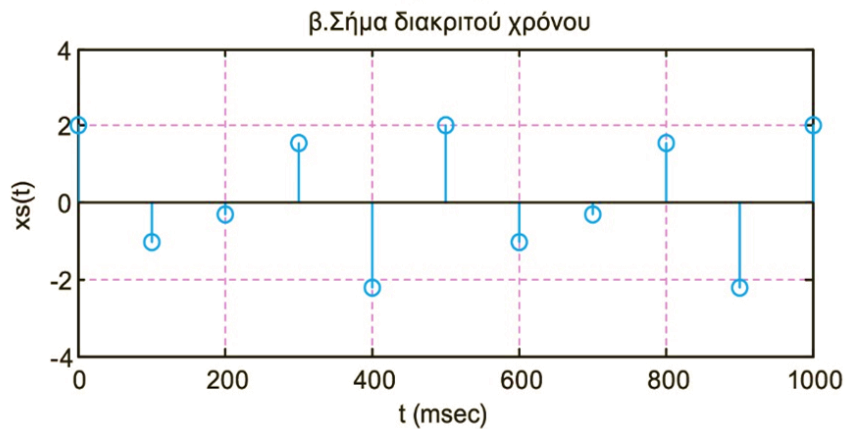
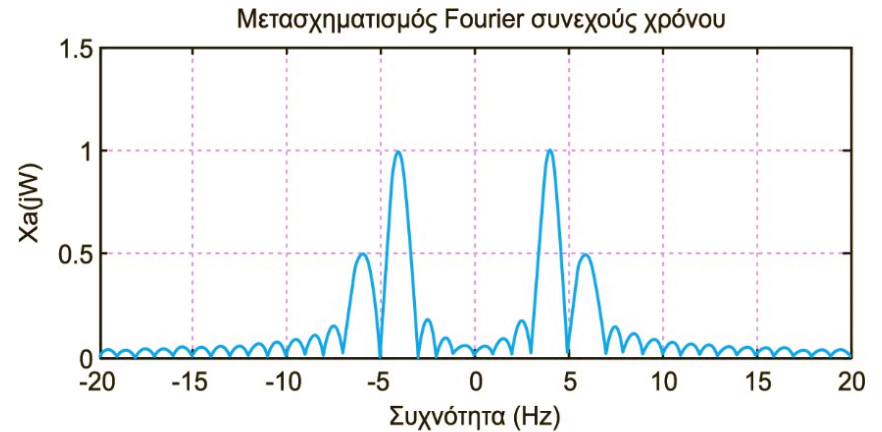
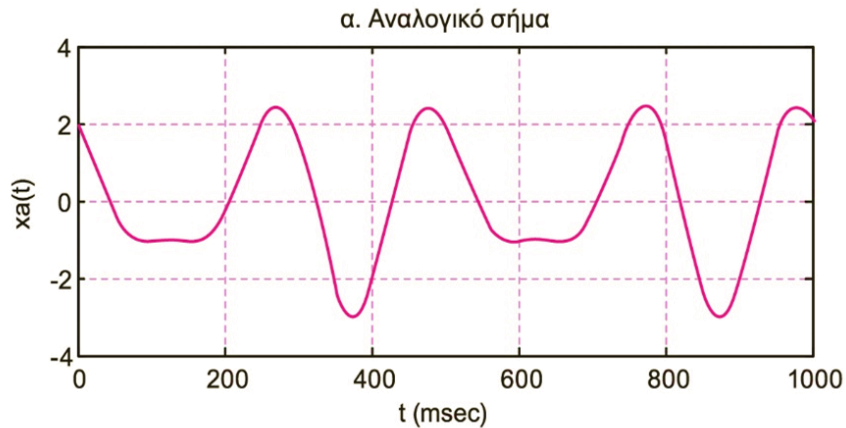


(α) Αναλογικό σήμα $x_a(t)$,
 (β) Δειγματοληπτημένο σήμα $x_s(t)$
 με $T_s = 0.02 \text{ sec/sample}$



(α) FT $X_a(\Omega)$ του αναλογικού σήματος $x_a(t)$,
 (β) FT $X_s(e^{j\omega})$ του δειγματοληπτημένου
 σήματος $x_s(t)$

Δειγματοληψία με αλλοίωση



(α) Αναλογικό σήμα $x_a(t)$,
 (β) Δειγματοληπτημένο σήμα $x_s(t)$
 με $T_s = 0.1 \text{ sec/sample}$

(α) FT $X_a(\Omega)$ του αναλογικού σήματος $x_a(t)$,
 (β) FT $X_s(e^{j\omega})$ του δειγματοληπτημένου
 σήματος $x_s(t)$

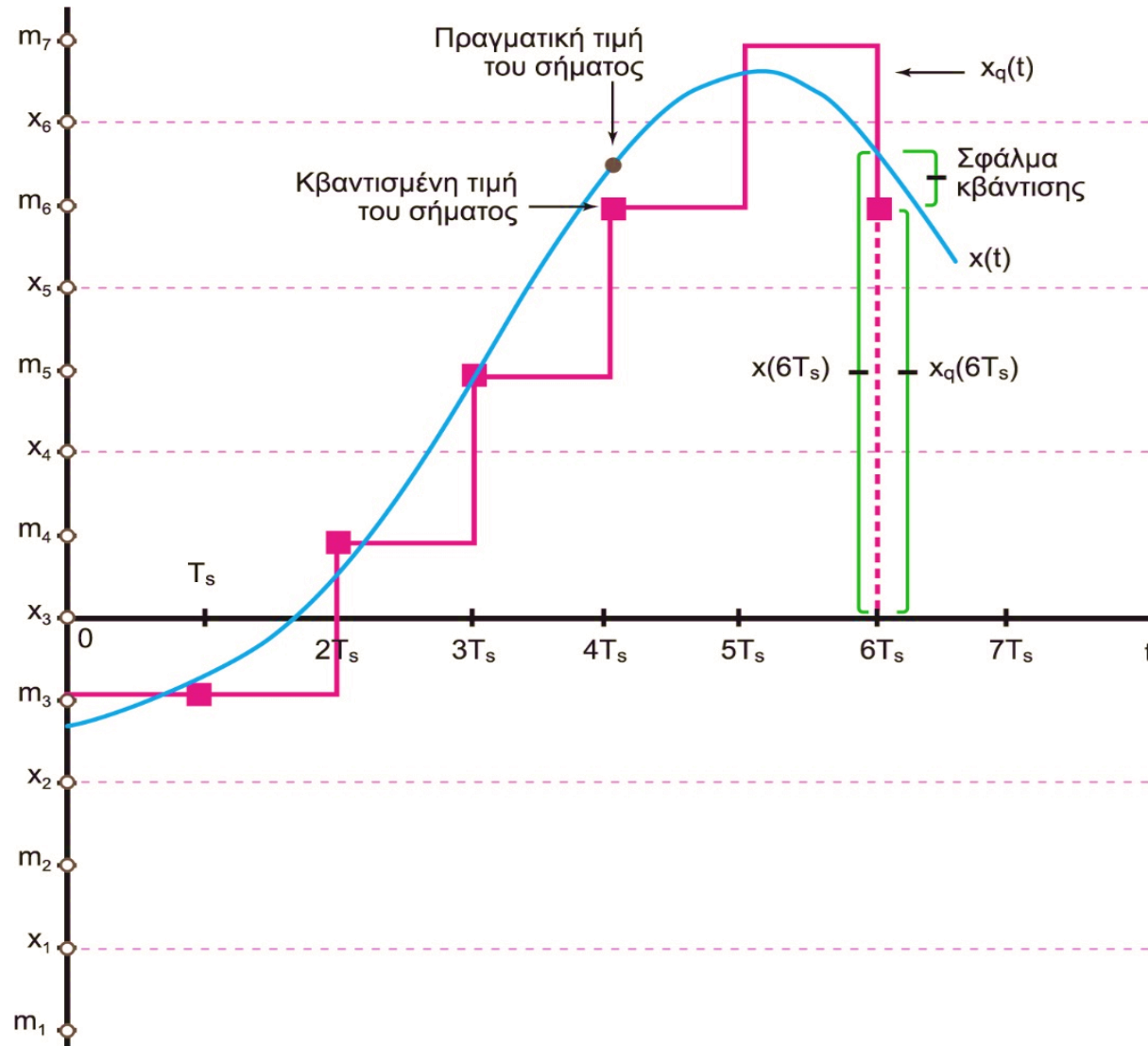
Κβαντισμός

Κβαντισμός

Κβαντισμός είναι μία μη-γραμμική και μη-αντιστρέψιμη διαδικασία, η οποία μετασχηματίζει μία ακολουθία εισόδου $x(n)$ συνεχούς πλάτους για την οποία ισχύει $x(n) \in (-m_p, m_p)$, σε ακολουθία **διακριτού πλάτους** $m(n) = Q[x(n)]$.

- **L επίπεδα απόφασης (ζώνες)** $x_1, x_2 \dots, x_L$ διαιρούν την περιοχή τιμών πλάτους της $x(t)$ σε L διαστήματα $I_k = [x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, L$.
- Για μία είσοδο $x(t)$ που κείται μέσα στο I_k , εκχωρείται μία στάθμη $m(k) \in I_k$.
- Το πλάτος του σήματος (δυναμική περιοχή) δίνεται από τη σχέση:
 $|x_{max}(n)| = 2 m_p$

Ομοιόμορφος Κβαντισμός



Παράμετροι Κβαντισμού

- Πλήθος επιπέδων: $L = 2^{B+1}$ όπου B το μήκος (σε bits) κάθε στάθμης $m[n]$. Ισχύει η σχέση: $B = \log_2(L) - 1$
- Βήμα κβαντισμού: $\Delta = x_{k+1} - x_k$. Για ισαπέχουσες στάθμες (ομοιόμορφη κβάντιση), ισχύει: $\Delta = |x_{max}(n)| / 2^B$
- Σφάλμα (θόρυβος) κβαντισμού: $e[n] = m[n] - x[n]$ και ισχύει $-\frac{\Delta}{2} < e(n) < \frac{\Delta}{2}$
- Μέσο τετραγωνικό σφάλμα κβαντισμού ή ισχύς θορύβου κβαντισμού:

$$E[(x[n] - m[n])^2] = \sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12}$$

Επίσης ισχύει: $\sigma_e^2 = m_p^2 / 3L^2$

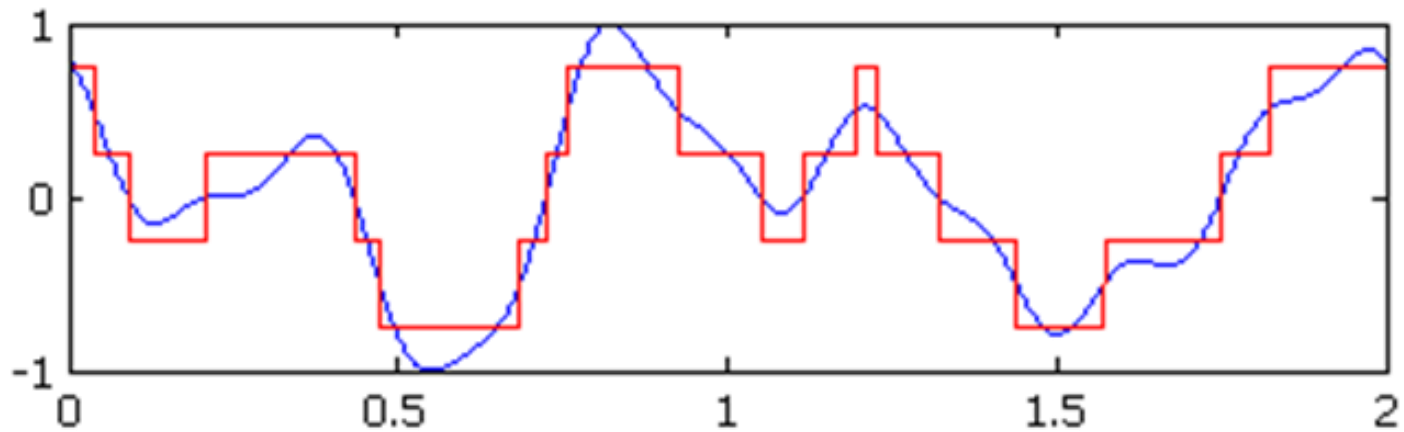
- Λόγος σήματος προς θόρυβο (σε dB) Signal to Noise Ratio (SNR):

$$SNR = 10 \log \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = 6,02 B + 10,81 - 20 \log \frac{|x_{max}(n)|}{\sigma_x}$$

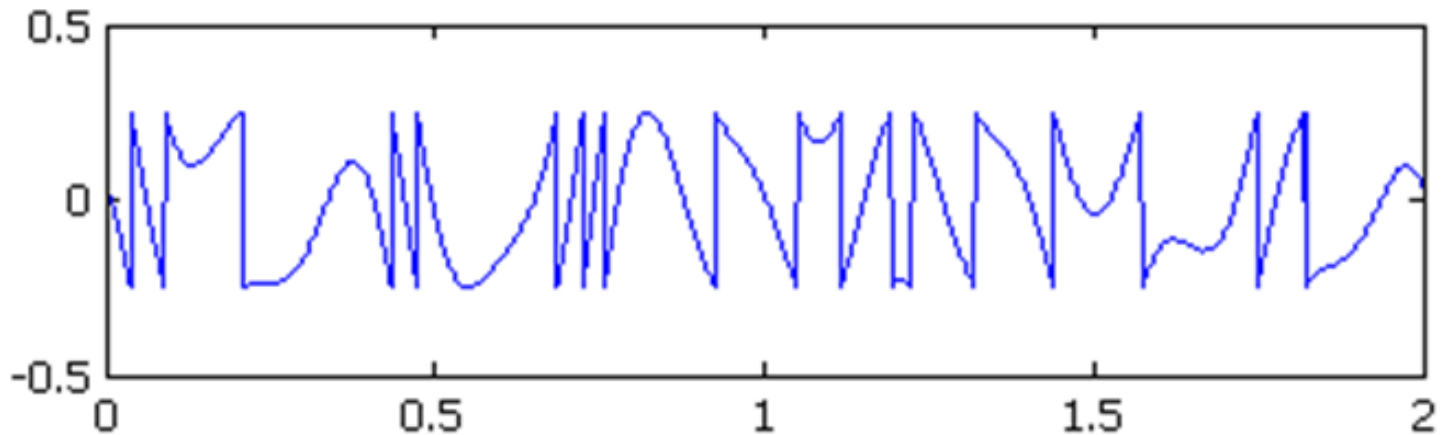
- Επομένως ο SNR αυξάνεται (βελτιώνεται) κατά **~6dB** για **κάθε επιπλέον bit** που προστίθεται στην περιγραφή της τιμής της στάθμης.

Ομοιόμορφος Κβαντισμός

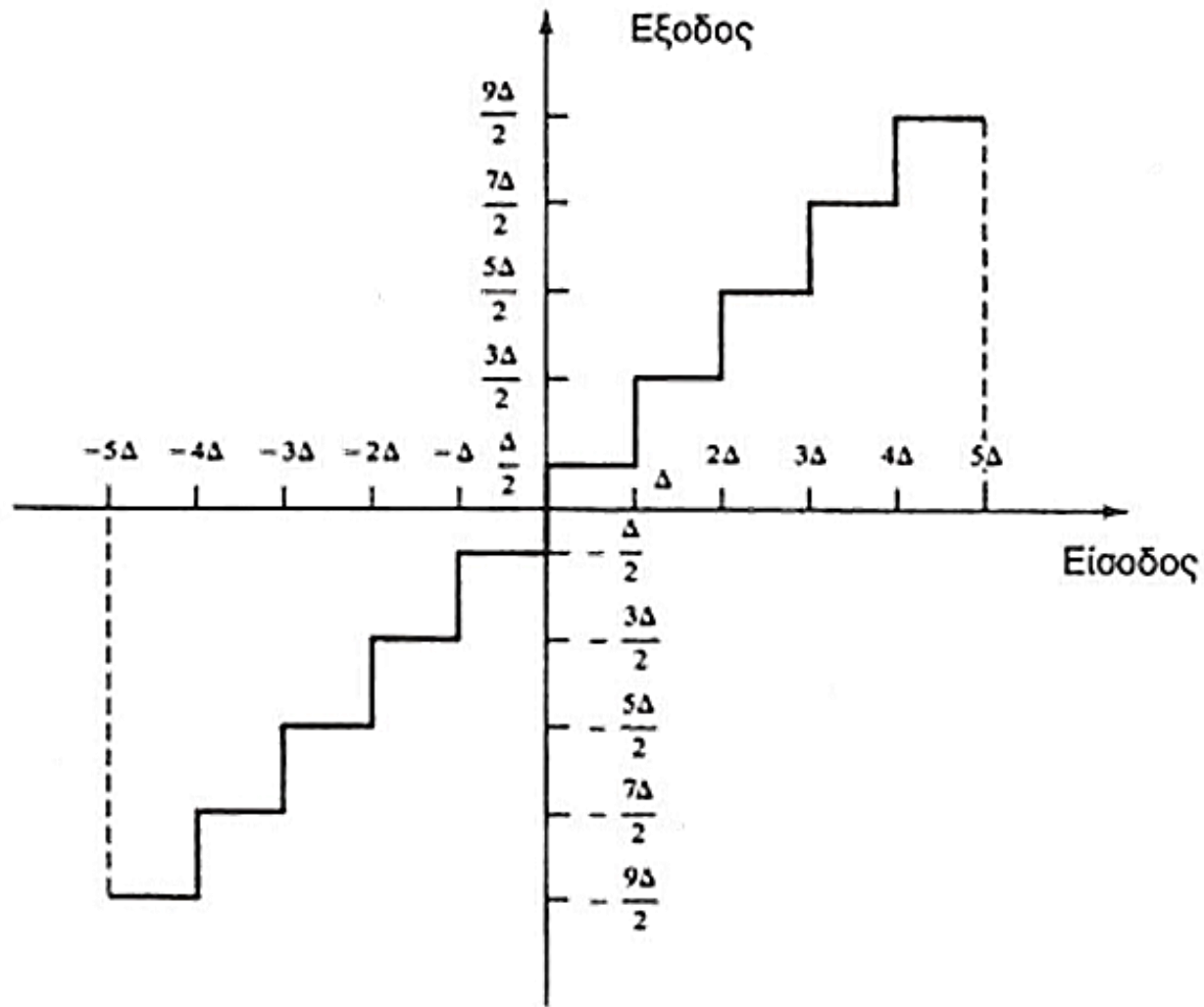
Γνήσιο σήμα και κβαντισμένο σήμα



Θόρυβος κβαντισμού



Ομοιόμορφος Κβαντισμός

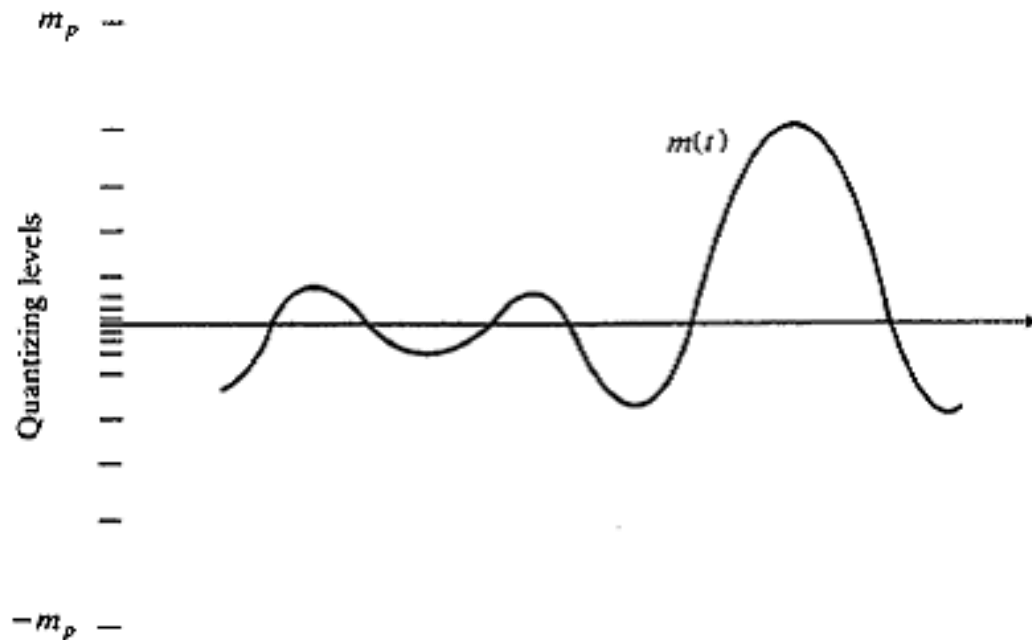


Χαρακτηριστική εισόδου – εξόδου ομοιόμορφου κβαντιστή

Ανομοιόμορφος Κβαντισμός

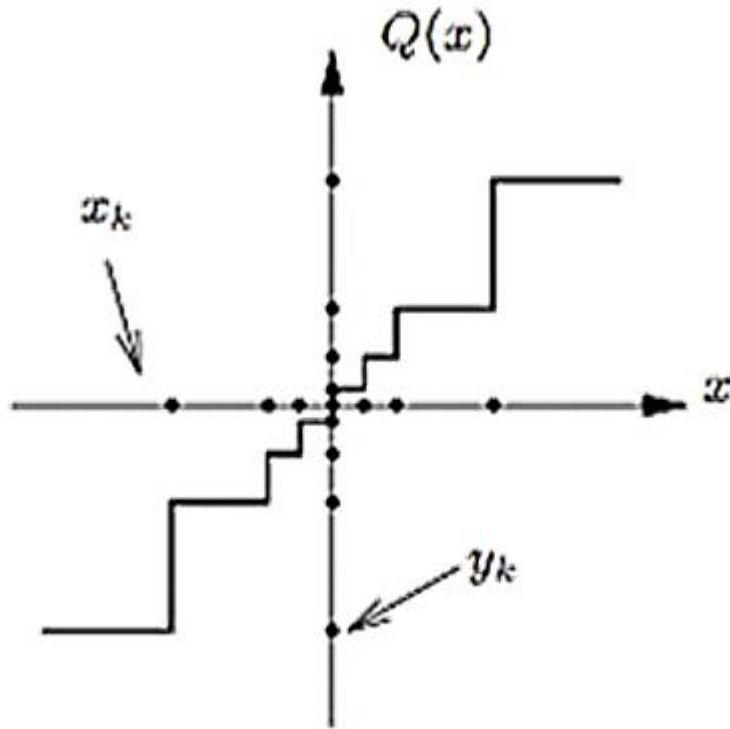
Η ομοιόμορφη κβάντιση είναι **ακατάλληλη** στην επικοινωνία φωνής, επειδή στη φωνή τα μικρά πλάτη είναι περισσότερα και τα μεγάλα πλάτη είναι σχετικά σπάνια.

Η **ανομοιόμορφη κβάντιση** χρησιμοποιεί μικρά βήματα κβαντισμού για μικρά πλάτη σήματος και μεγάλα βήματα κβαντισμού για μεγάλα πλάτη σήματος.

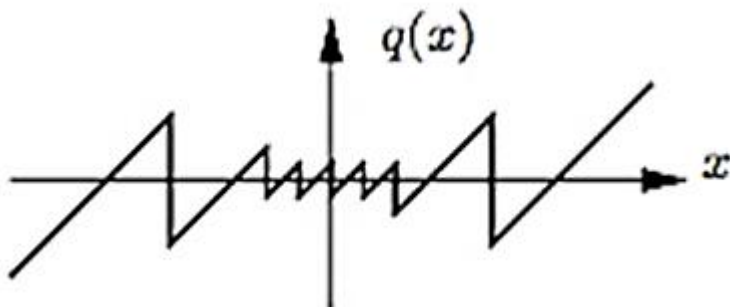


Μπορούμε να επιτύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα αν πρώτα **συμπίεσουμε** τα δείγματα του σήματος και έπειτα χρησιμοποιήσουμε ομοιόμορφη κβάντιση.

Ανομοιόμορφος Κβαντισμός



Χαρακτηριστική εισόδου – εξόδου
ανομοιόμορφου κβαντιστή



Θόρυβος κβαντισμού
ανομοιόμορφου κβαντιστή

Πρότυπα Ανομοιόμορφου Κβαντισμού

- Οι αλγόριθμοι συμπίεσης ([companding algorithms](#)) μειώνουν τη δυναμική περιοχή ενός σήματος και ως εκ' τούτου και το σφάλμα (θόρυβο) κβαντισμού.
- Ο δέκτης χρησιμοποιεί μία αντίστροφη διαδικασία (διαστολή - expanding) για να αποκαταστήσει τα δείγματα του σήματος στη σωστή σχετική τους στάθμη.
- Συμπίεση κανόνα «μ» (ΗΠΑ, Ιαπωνία) [μ-law](#):

$$y = \frac{\ln(1 + \mu |m/m_p|)}{\ln(1 + \mu)} \operatorname{sgn}(m) \quad \text{όταν} \quad \left| \frac{m}{m_p} \right| \leq 1$$

όπου $\mu > 0$ και $\operatorname{sgn}()$ είναι η συνάρτηση προσήμου.

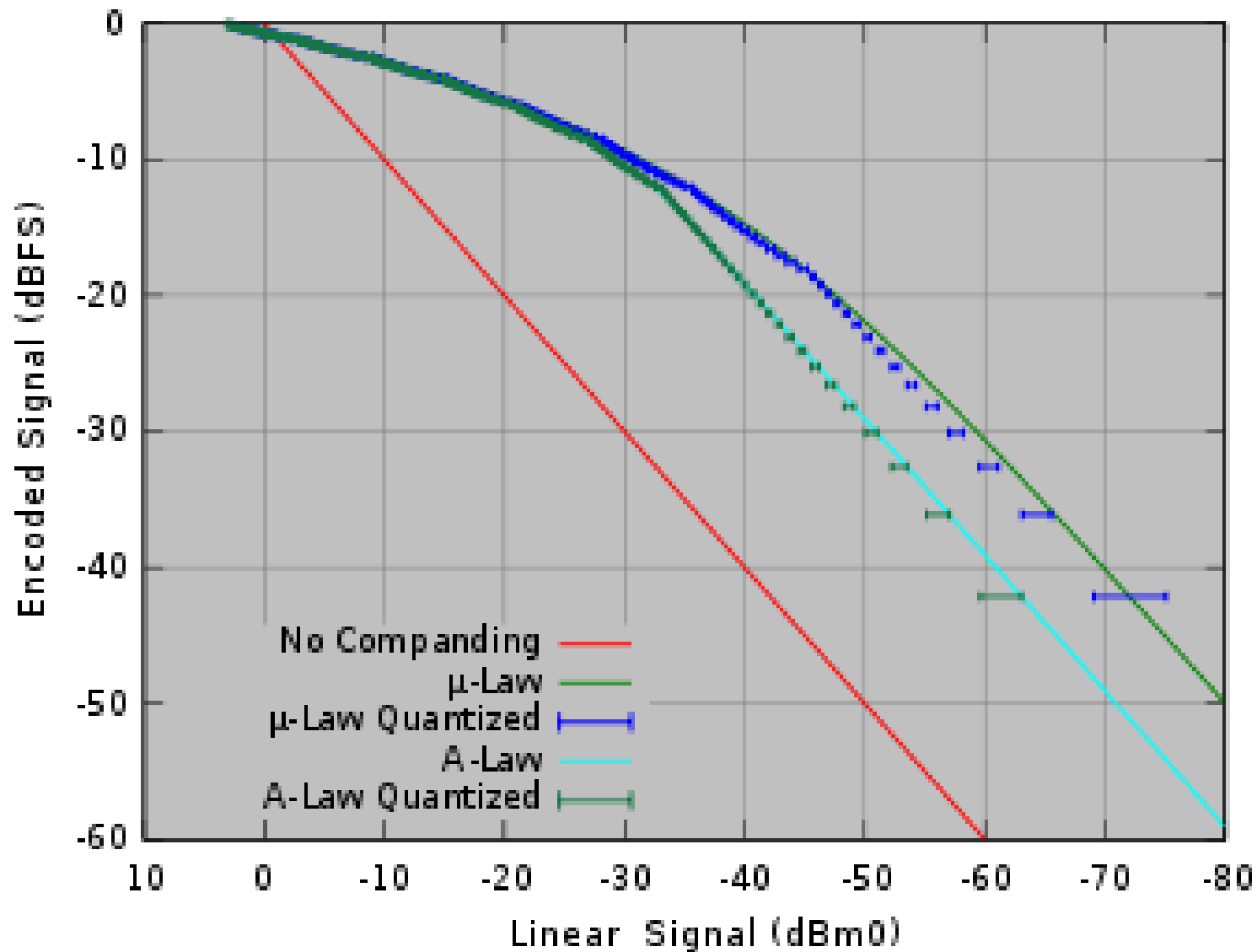
Πρότυπα Ανομοιόμορφου Κβαντισμού

- Συμπίεση κανόνα A (Ευρώπη) [A-law](#) :

$$y = \begin{cases} \frac{A}{1 + \ln A} \left(\frac{m}{m_p} \right) & \text{όταν } \left| \frac{m}{m_p} \right| \leq 1 \\ \frac{(1 + \ln A |m/m_p|)}{(1 + \ln A)} \operatorname{sgn}(m) & \text{όταν } \frac{1}{A} \leq \left| \frac{m}{m_p} \right| \leq 1 \end{cases}$$

- Για $\mu = 255$ και $A = 87,6$ οι δύο κανόνες δίνουν σταθερό λόγο σήματος προς θόρυβο κβαντισμού για ισχύ σήματος εισόδου σε μία δυναμική περιοχή 40 dB.
- Η συμπίεση κανόνα-μ έχει το πλεονέκτημα ότι παρέχει μία ελαφρώς μεγαλύτερη δυναμική περιοχή από την συμπίεση κανόνα-A, και μειονέκτημα την αναλογικά χειρότερη παραμόρφωση για σήματα μικρού πλάτους.

Πρότυπα Ανομοιόμορφου Κβαντισμού



Κωδικοποίηση

Κωδικοποίηση

- Κάθε κβαντισμένη στάθμη $m[n]$ αναπαρίσταται με μία κωδική λέξη.
- Αν L είναι το πλήθος των σταθμών κβάντισης, τότε κάθε δείγμα περιγράφεται με $\log_2 L = B + 1$ ψηφία (bits), όπου το B είναι ακέραιος αριθμός.
- Ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας στην έξοδο του κωδικοποιητή:
$$R = f_s \log_2 L = f_s (B + 1) \text{ (bits/s)}, \text{ όπου } f_s \text{ η συχνότητα δειγματοληψίας}$$

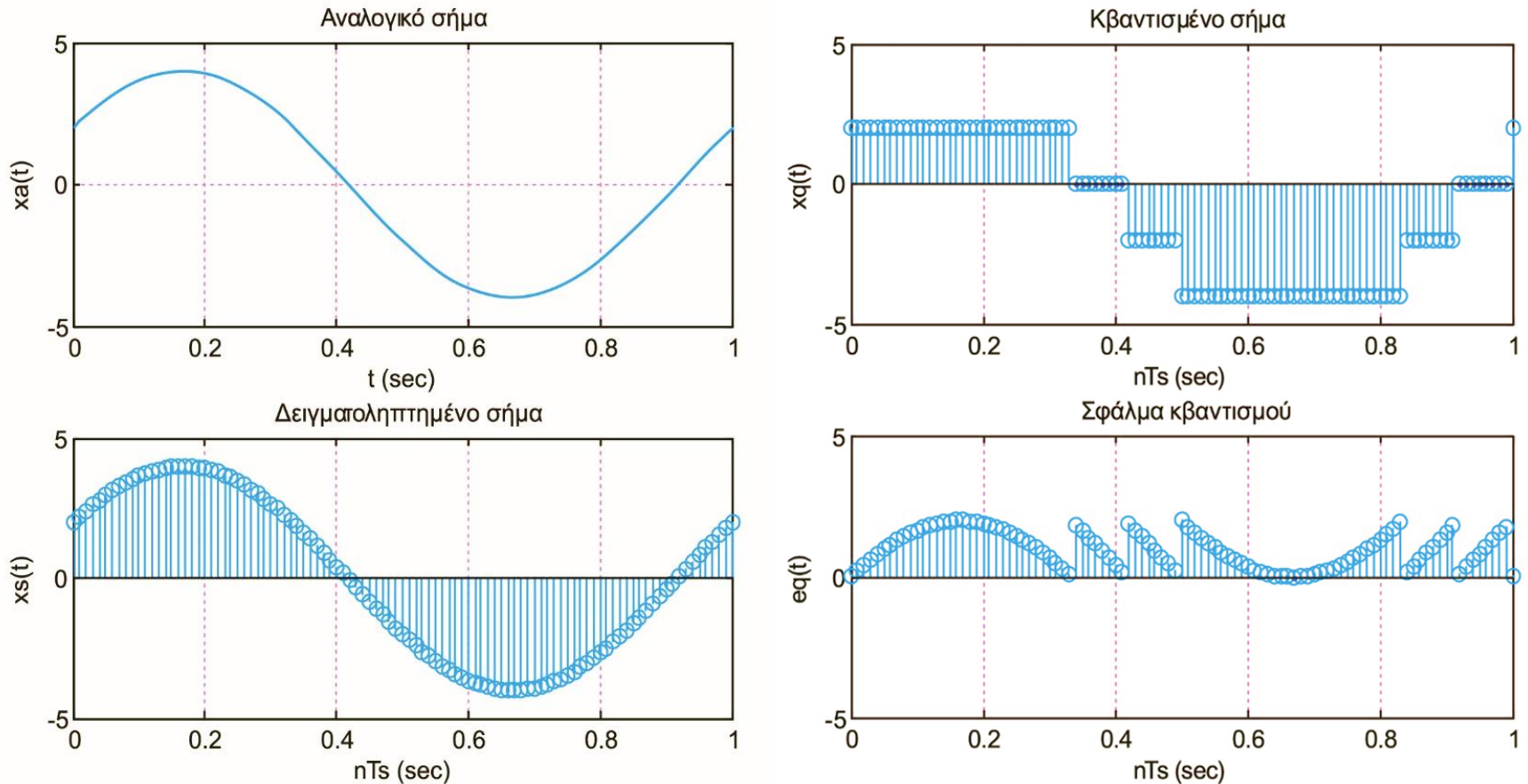
Κωδικοποίηση

Τα περισσότερα συστήματα ΨΕΣ χρησιμοποιούν την παράσταση αριθμών με το συμπλήρωμα του 2 ([two's complement](#)).

Στο σύστημα αυτό, με κωδική λέξη $c = [b_0, b_1, \dots, b_B]$ μήκους $B+1$ bits:

- Το περισσότερο σημαντικό ψηφίο είναι το **ψηφίο προσήμου**
- Τα υπόλοιπα ψηφία αντιστοιχούν στην αριθμητική τιμή δυαδικών ακεραίων ή κλασμάτων.
- Θεωρώντας δυαδικά κλάσματα, η κωδική λέξη $b_0, b_1, b_2, \dots, b_B$ έχει την τιμή:
$$x = (-1)b_0 + b_1 2^{-1} + b_2 2^{-2} + \dots + b_B 2^{-B}$$

Μετατροπή Αναλογικού Σήματος σε Ψηφιακό



(α) Αναλογικό σήμα $x_a(t)$, (β) Δειγματοληπτημένο σήμα $x_s(t)$,
(γ) Κβαντισμένο σήμα $x_q(t)$ σε 4 στάθμες, (δ) Σφάλμα κβαντισμού $e_q(t) = x_a(t) - x_q(t)$

Ανακατασκευή Αναλογικού Σήματος από Ψηφιακό

Ανακατασκευή Αναλογικού Σήματος από Ψηφιακό

Ένα αναλογικό σήμα που έχει δειγματοληπτηθεί σύμφωνα με το κριτήριο Nyquist (δηλ. $f_s \geq 2f_x$), μπορεί να ανακτηθεί από τα δείγματά του, με τα βήματα:

(1) Τα δείγματα $x[n]$ μετατρέπονται σε μία συνάρτηση $x_r(t)$ μέσω της σχέσης:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - n T_s)$$

(2) Η συνάρτηση $x_r(t)$ περνάει από ένα ιδανικό LPF με κρουστική απόκριση:

$$h_{LPF}(t) = \frac{\sin(\pi t T_s)}{\pi t T_s} = \text{sinc}(t T_s)$$

και μετασχηματισμό Fourier:

$$H_{LPF}(\Omega) = \begin{cases} T_s, & -\Omega_s/2 < \Omega < \Omega_s/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Το ανακατασκευασμένο αναλογικό σήμα στην έξοδο του φίλτρου δίνεται από:

$$\hat{x}_\alpha(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_r(n T_s) h_{LPF}(t - n T_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_r(n T_s) \text{sinc}((t - n T_s)/T_s)$$

και ο μετασχηματισμός Fourier του ανακατασκευασμένου σήματος είναι:

$$\hat{X}_\alpha(\Omega) = X_r(\Omega) H_{LPF}(\Omega)$$

Ανακατασκευή Αναλογικού Σήματος από Ψηφιακό

Σε πραγματικές συνθήκες είναι πιθανό η ακριβής ανακατασκευή του αρχικού σήματος επειδή:

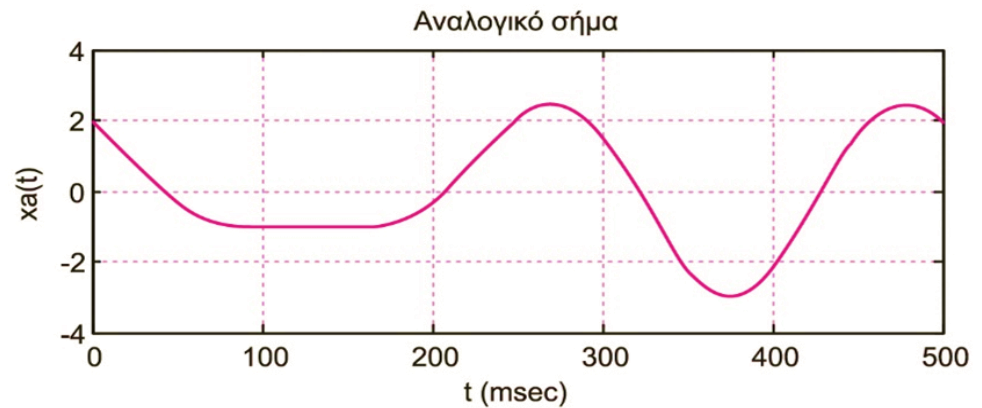
- Το αρχικό σήμα δεν ήταν πεπερασμένου εύρους ζώνης, οπότε δεν ήταν εφικτός ο προσδιορισμός της συχνότητας Nyquist άρα και της ελάχιστης τιμής της συχνότητας δειγματοληψίας, ώστε να μην προκαλείται το φαινόμενο της αλλοίωσης.
- Ο ρυθμός δειγματοληψίας δεν ήταν σταθερός σε όλη τη διάρκεια της δειγματοληψίας και κάποιες διακυμάνσεις στη χρονική απόσταση ανάμεσα σε διαδοχικά δείγματα μπορεί να εμφανίστηκαν.
- Το φίλτρο ανακατασκευής που χρησιμοποιήθηκε είναι ένα πραγματικό φίλτρο και όχι ένα ιδανικό όπως απαιτεί η θεωρητική ανάλυση.

Ωστόσο ο σημαντικότερος λόγος για την μη-ακριβή ανακατασκευή του αρχικού σήματος οφείλεται στον κβαντισμό των δειγμάτων του σήματος.

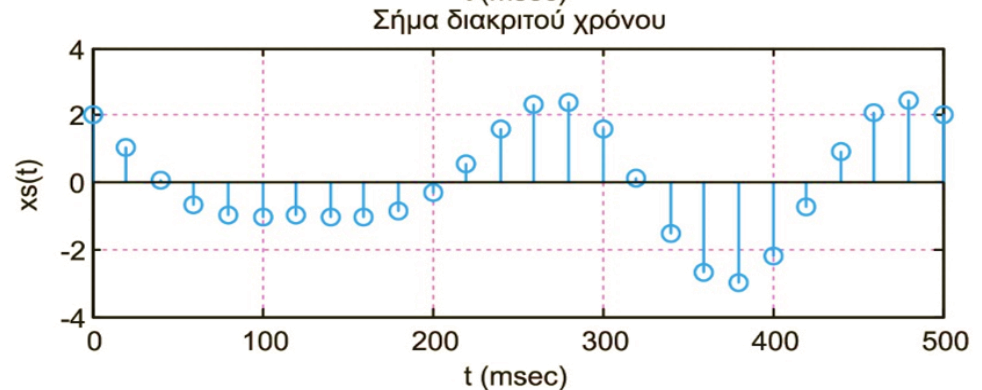
Γνωρίζουμε ότι η διαδικασία κβαντισμού εισάγει πάντα θόρυβο κβαντισμού, ο οποίος δεν είναι εφικτό να αφαιρεθεί.

Ανακατασκευή Αναλογικού Σήματος από Ψηφιακό

(α) Αναλογικό σήμα $x_a(t)$



(β) Δειγματοληπτημένο σήμα $x_s(t)$



(γ) Ανακατασκευασμένο σήμα $\hat{x}_a(t)$ με παρεμβολή μηδενικής τάξης

