4. Ελαχιστοποίηση λογικών συναρτήσεων με τη μέθοδο του χάρτη Karnaugh και μερικώς καθορισμένες συναρτήσεις

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
& Μηχανικών Υπολογιστών
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

Ελαχιστοποίηση λογικών συναρτήσεων

Μια λογική συνάρτηση μπορεί να περιγραφεί με έναν και μοναδικό πίνακα αλήθειας, ενώ μπορεί να έχει πολλές διαφορετικές, αλλά ισοδύναμες, αλγεβρικές εκφράσεις.

Συνεπώς, μπορούμε να συνθέσουμε πολλά διαφορετικά λογικά κυκλώματα που υλοποιούν την ίδια λογική συνάρτηση, καθένα από τα οποία περιλαμβάνει διαφορετικούς τύπους πυλών και διαφορετικές διασυνδέσεις μεταξύ τους.

Η πολυπλοκότητα και το κόστος των λογικών κυκλωμάτων που υλοποιούν μια λογική συνάρτηση σχετίζεται άμεσα με την πολυπλοκότητα της αλγεβρικής έκφρασης της συνάρτησης αυτής.

Ελαχιστοποίηση λογικών συναρτήσεων

Κάποια λογικά κυκλώματα που υλοποιούν μια συνάρτηση είναι απλούστερα από άλλα και στόχος κατά τη σύνθεση ενός λογικού κυκλώματος είναι η μείωση του κόστους υλοποίησης.

Το κόστος υλοποίησης συνδέεται με το πλήθος των λογικών πυλών που χρησιμοποιούνται, καθώς και με το πλήθος των εισόδων των πυλών.

Επομένως, η οικονομικότερη υλοποίηση είναι η απλούστερη δυνατή, δηλαδή αυτή που συνίσταται από το μικρότερο δυνατό πλήθος πυλών με μικρότερο δυνατό πλήθος εισόδων ανά πύλη.

Κάθε υλοποίηση προκύπτει από μια αλγεβρική έκφραση της λογικής συνάρτησης και επομένως, η επιλογή της απλούστερης υλοποίησης αντιστοιχεί στην επιλογή της απλούστερης αλγεβρικής έκφρασης.

Γι’ αυτό είναι κρίσιμο, κατά τη διαδικασία της σύνθεσης, να επιδιώκεται ο προσδιορισμός της απλούστερης δυνατής αλγεβρικής έκφρασης της συνάρτησης.

Ελαχιστοποίηση λογικών συναρτήσεων

Η απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων με τη χρήση αλγεβρικών μετασχηματισμών (δηλαδή των αξιωμάτων και των θεωρημάτων της άλγεβρας Boole) δεν οδηγεί πάντοτε με βεβαιότητα στην ελάχιστη δυνατή αλγεβρική έκφραση, λόγω του ότι οι αλγεβρικοί μετασχηματισμοί δεν μπορούν να συστήσουν συστηματική μεθοδολογία απλοποίησης.

Μια συστηματική γραφική μέθοδος για την ελαχιστοποίηση λογικών συναρτήσεων είναι η μέθοδος του χάρτη Karnaugh (Karnaugh map).

Η μέθοδος αυτή μας δίνει τη βέλτιστη απλοποίηση (ελαχιστοποίηση) μιας λογικής συνάρτησης σε επίπεδο βασικών λογικών πράξεων (AND, OR και NOT), που αντιστοιχεί σε υλοποίηση του κυκλώματος με τις αντίστοιχες βασικές πύλες.

Περαιτέρω ελαχιστοποίηση της συνάρτησης μπορεί να επιτευχθεί με αλγεβρικούς μετασχηματισμούς και χρήση παράγωγων λογικών πυλών (NAND, NOR, XOR, XNOR) και μπορεί να οδηγήσει σε απλούστερο κύκλωμα.

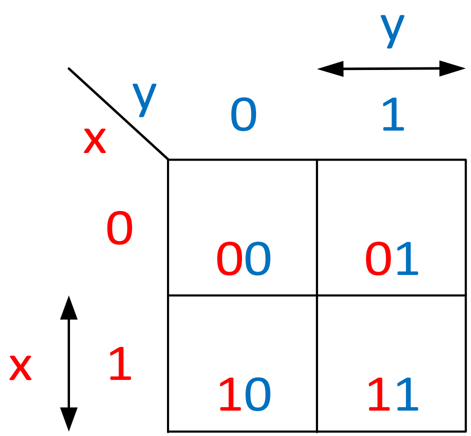
Χάρτης Karnaugh

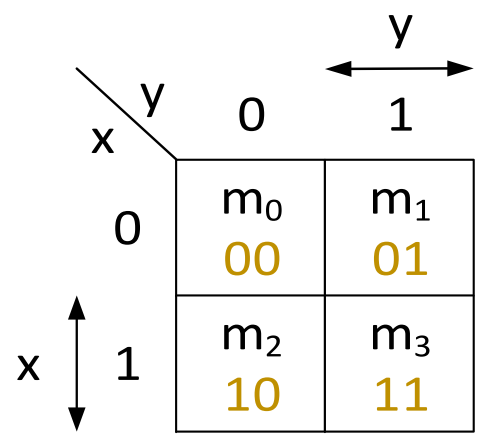
Ο χάρτης Karnaugh μιας λογικής συνάρτησης αποτελεί απεικόνιση του πίνακα αλήθειας της συνάρτησης και είναι ισοδύναμος με αυτόν, δηλαδή από τον πίνακα αλήθειας μπορούμε να συμπληρώσουμε το χάρτη Karnaugh και αντιστρόφως.

Ο χάρτης Karnaugh αποτελείται από τετράγωνα, σε διάταξη γραμμών και στηλών, καθένα από τα οποία αντιστοιχεί σε ένα συνδυασμό τιμών των μεταβλητών του πίνακα αλήθειας και συνεπώς, σε ένα ελαχιστόρο της λογικής συνάρτησης.

Σε κάθε τετράγωνο του χάρτη Karnaugh μεταφέρουμε την τιμή που έχει η λογική συνάρτηση στον αντίστοιχο συνδυασμό τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών στον πίνακα αλήθειας.

Χάρτης Karnaugh συνάρτησης 2 μεταβλητών





Η πρώτη γραμμή αντιστοιχεί στη συμπληρωματική τιμή της μεταβλητής **x** και η δεύτερη στην κανονική μορφή αυτής. Αντίστοιχα, η πρώτη στήλη του πίνακα αντιστοιχεί στη συμπληρωματική τιμή της μεταβλητής **y** και η δεύτερη στην κανονική μορφή αυτής.

Οι περιοχές του πίνακα στις οποίες κάθε μεταβλητή λαμβάνει λογική τιμή 1, υποδεικνύονται με βέλη συνδυαζόμενα με το όνομα της μεταβλητής.

Χάρτης Karnaugh συνάρτησης 2 μεταβλητών

Οι τιμές (0 ή 1) που λαμβάνει μια λογική συνάρτηση για κάθε συνδυασμό τιμών των μεταβλητών του πίνακα αλήθειας, που αντιστοιχούν στους ελαχιστόρους που συμμετέχουν στη συνάρτηση, μεταφέρονται στα αντίστοιχα τετράγωνα του χάρτη Karnaugh.

Συνήθως, μεταφέρονται από τον πίνακα αλήθειας μόνο οι τιμές 1 της λογικής συνάρτησης και τα τετράγωνα του χάρτη που αντιστοιχούν στην τιμή 0 της συνάρτησης, αφήνονται κενά.

x y	F	
0 0	0	
0 1	**1**	m_1
1 0	0	
1 1	**1**	m_3

x \ y	0	1
0	0	**1**
1	0	**1**

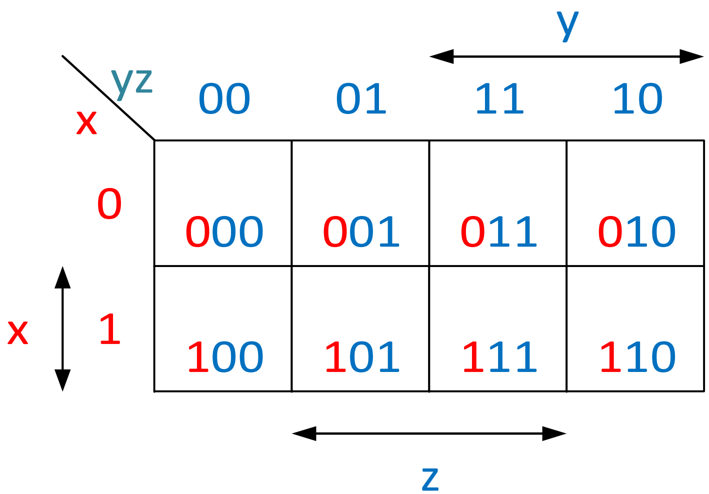
$F = \Sigma(1,3) = x'y + xy$

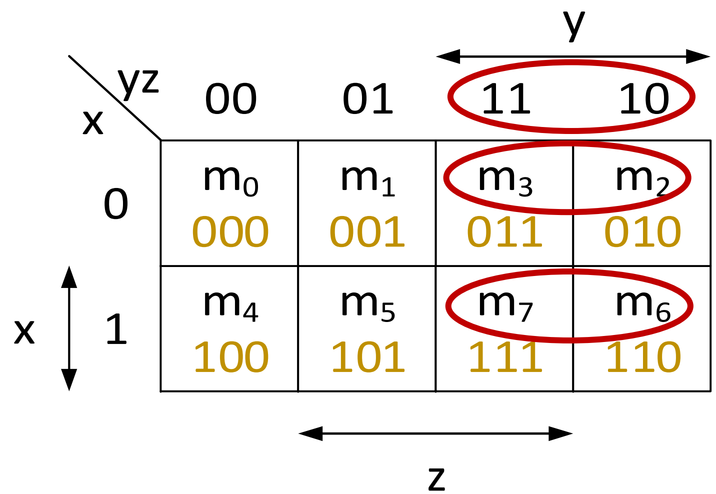
x y	F	
0 0	0	
0 1	**1**	m_1
1 0	**1**	m_2
1 1	**1**	m_3

x \ y	0	1
0		**1**
1	**1**	**1**

$F = \Sigma(1,2,3) = x'y + xy' + xy$

Χάρτης Karnaugh συνάρτησης 3 μεταβλητών





Ο χάρτης Karnaugh μιας συνάρτησης 3 μεταβλητών, αποτελείται από 8 τετράγωνα, αφού 3 μεταβλητές συνιστούν 8 ελαχιστόρους.

Οι λογικές τιμές των μεταβλητών **y** και **z**, στις οποίες αντιστοιχούν οι στήλες του χάρτη, διατάσσονται σύμφωνα με τον κώδικα Gray, στον οποίο 2 διαδοχικοί αριθμοί διαφέρουν μόνο σε 1 δυαδικό ψηφίο.

Έτσι, κατά τη μετάβαση από μία στήλη του χάρτη Karnaugh στη γειτονική της, παρουσιάζεται αλλαγή τιμής μόνο στη μία από τις δύο μεταβλητές.

Χάρτης Karnaugh συνάρτησης 3 μεταβλητών

Ο πίνακας αλήθειας και ο χάρτης Karnaugh της λογικής συνάρτησης F(x, y, z) = Σ(0, 1, 4, 5).

x y z	**F**	
0 0 0	**1**	m_0
0 0 1	**1**	m_1
0 1 0	0	
0 1 1	0	
1 0 0	**1**	m_4
1 0 1	**1**	m_5
1 1 0	0	
1 1 1	0	

x \ yz	00	01	11	10
0	**1**	**1**	0	0
1	**1**	**1**	0	0

Χάρτης Karnaugh συνάρτησης 4 μεταβλητών

Ο χάρτης Karnaugh μιας συνάρτησης 4 μεταβλητών, αποτελείται από 16 τετράγωνα, αφού 4 μεταβλητές συνιστούν 16 ελαχιστόρους.

Οι λογικές τιμές των μεταβλητών **x** και **y**, στις οποίες αντιστοιχούν οι γραμμές του χάρτη, καθώς και οι λογικές τιμές των μεταβλητών **z** και **w**, στις οποίες αντιστοιχούν οι στήλες του χάρτη, διατάσσονται σύμφωνα με τον κώδικα Gray.

z

xy \ zw	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

x y w

z

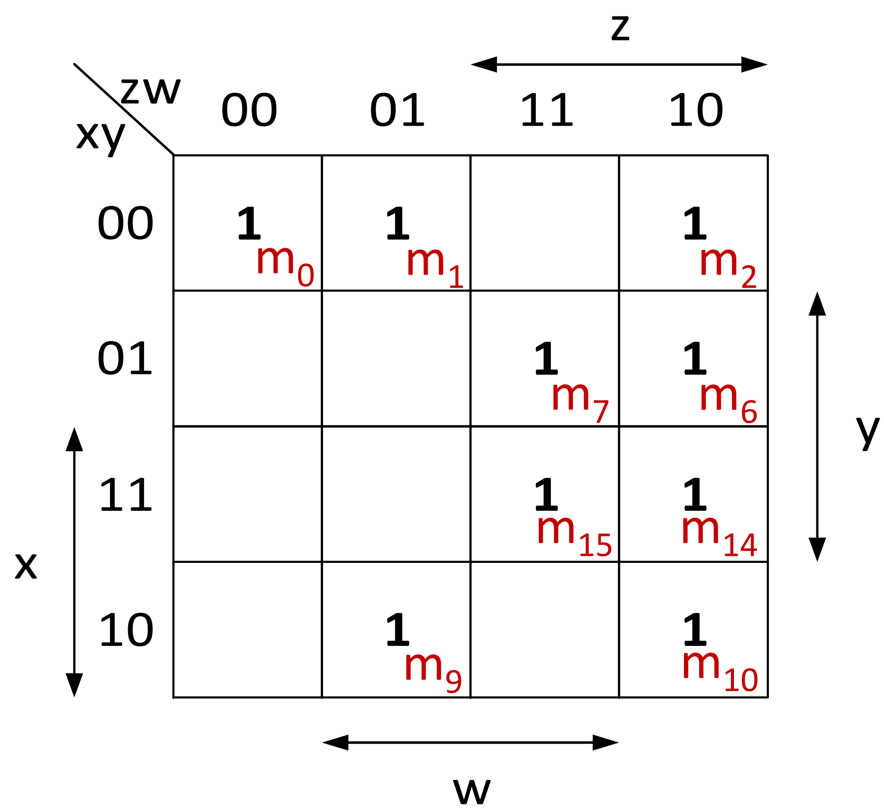
xy \ zw	00	01	11	10
00	m_0 0000	m_1 0001	m_3 0011	m_2 0010
01	m_4 0100	m_5 0101	m_7 0111	m_6 0110
11	m_{12} 1100	m_{13} 1101	m_{15} 1111	m_{14} 1110
10	m_8 1000	m_9 1001	m_{11} 1011	m_{10} 1010

x y w

Χάρτης Karnaugh συνάρτησης 4 μεταβλητών

Χάρτης Karnaugh της λογικής συνάρτησης

$F(x,y,z,w) = \Sigma(0, 1, 2, 6, 7, 9, 10, 14, 15)$



Χάρτης Karnaugh συνάρτησης 5 μεταβλητών

Για την περιγραφή μιας λογικής συνάρτησης 5 μεταβλητών, έστω F(x, y, z, w, v), χρησιμοποιούνται 2 χάρτες Karnaugh 4 μεταβλητών, στον πρώτο από τους οποίους σε μία από τις 5 μεταβλητές (π.χ. στη μεταβλητή x) τίθεται η λογική τιμή 0, ενώ στον δεύτερο χάρτη τίθεται στην ίδια μεταβλητή η τιμή 1, και αναπτύσσουμε 2 χάρτες με τις υπόλοιπες τέσσερις μεταβλητές.

x = 0

yz \ wv	00	01	11	10
00	m_0 0000	m_1 0001	m_3 0011	m_2 0010
01	m_4 0100	m_5 0101	m_7 0111	m_6 0110
11	m_{12} 1100	m_{13} 1101	m_{15} 1111	m_{14} 1110
10	m_8 1000	m_9 1001	m_{11} 1011	m_{10} 1010

w: στήλες 11, 10 · z: γραμμές 01, 11 · y: γραμμές 11, 10 · v: στήλες 01, 11

x = 1

yz \ wv	00	01	11	10
00	m_{16} 0000	m_{17} 0001	m_{19} 0011	m_{18} 0010
01	m_{20} 0100	m_{21} 0101	m_{23} 0111	m_{22} 0110
11	m_{28} 1100	m_{29} 1101	m_{31} 1111	m_{30} 1110
10	m_{24} 1000	m_{25} 1001	m_{27} 1011	m_{26} 1010

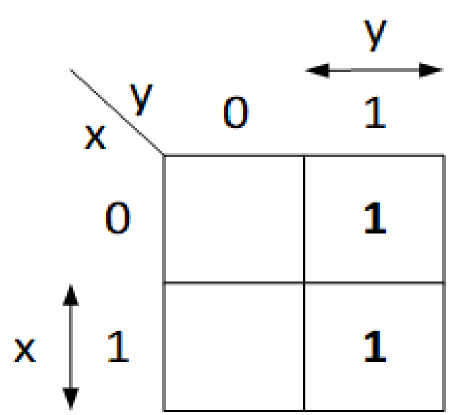
w: στήλες 11, 10 · z: γραμμές 01, 11 · y: γραμμές 11, 10 · v: στήλες 01, 11

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη (τετράγωνα με κοινή πλευρά), διαφέρουν κατά μία μεταβλητή, η οποία συμμετέχει με την κανονική της μορφή στον ελαχιστόρο που αντιστοιχεί στο ένα τετράγωνο και με τη συμπληρωματική της μορφή στον ελαχιστόρο που αντιστοιχεί στο άλλο τετράγωνο.

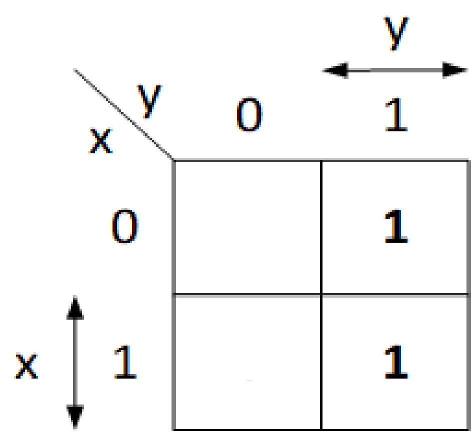
Για παράδειγμα, οι ελαχιστόροι $m_1 = x'y$ και $m_3 = xy$, που αντιστοιχούν σε τετράγωνα με κοινή πλευρά, διαφέρουν στο ότι η μεταβλητή x συμμετέχει στον ελαχιστόρο m_1 με τη συμπληρωματική της μορφή και στον ελαχιστόρο m_3 με την κανονική της μορφή.

x y	F	
0 0	0	
0 1	**1**	m_1
1 0	0	
1 1	**1**	m_3



Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

x y	F	
0 0	0	
0 1	**1**	m_1
1 0	0	
1 1	**1**	m_3



Εφαρμόζοντας το αξίωμα επιμεριστικότητας και το αξίωμα για το συμπλήρωμα, το λογικό άθροισμα των ελαχιστόρων $m_1 = x'y$, $m_3 = xy$ είναι:

$$m_1 + m_3 = x'y + xy = y(x' + x) = y.$$

Συμπεραίνουμε ότι κατά τη λογική άθροιση ελαχιστόρων που αντιστοιχούν σε γειτονικά τετράγωνα, δηλαδή σε ζεύγος τετραγώνων, απαλείφεται η μεταβλητή κατά την οποία αυτοί διαφέρουν.

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Δεν αποτελούν ζεύγη τα τετράγωνα που είναι διαγώνια μεταξύ τους, αφού στην περίπτωση αυτή αλλάζουν κατάσταση 2 μεταβλητές.

Στην περίπτωση που όλα τα τετράγωνα του χάρτη περιέχουν τιμή 1, τότε η λογική συνάρτηση ισούται με 1, ενώ, εάν όλα τα τετράγωνα περιέχουν τιμή 0, τότε η λογική συνάρτηση ισούται με 0.

Επομένως για την ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης 2 μεταβλητών, αρχικά μεταφέρουμε στον χάρτη Karnaugh τις τιμές της συνάρτησης (σημειώνουμε 1 στα τετράγωνα για τα οποία η συνάρτηση λαμβάνει τιμή 1 και αφήνουμε κενά τα υπόλοιπα για τα οποία η συνάρτηση έχει τιμή 0).

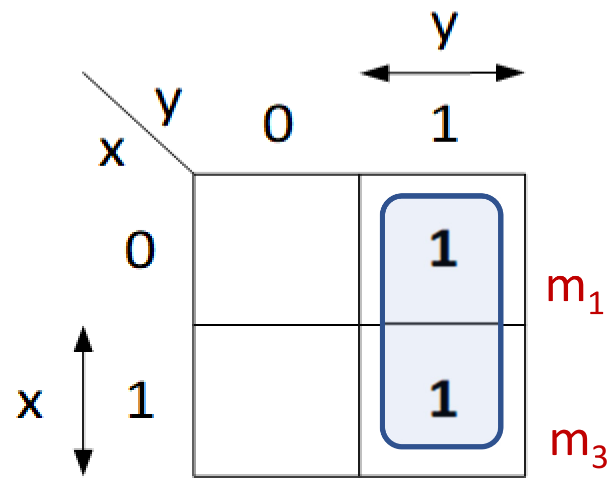
Επιλέγουμε στο χάρτη ζεύγη γειτονικών τετραγώνων με τιμή 1.

Εξάγουμε την ελαχιστοποιημένη συνάρτηση σε πρότυπη μορφή αθροίσματος γινομένων, λαμβάνοντας υπόψη ότι κάθε ζεύγος γειτονικών κυψελών οδηγεί στην απαλοιφή μιας μεταβλητής.

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 1:

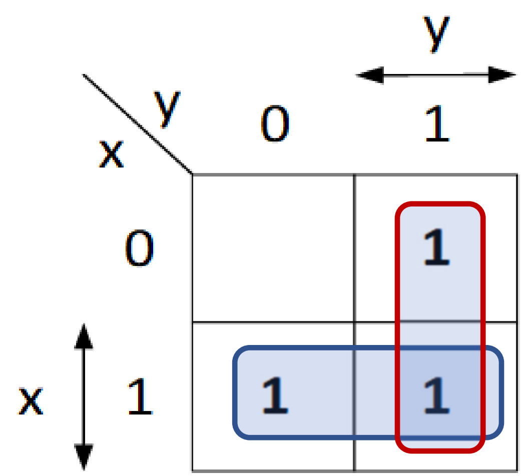
$F(x, y) = m_1 + m_3 = x'y + xy$



Επιλέγουμε στον χάρτη Karnaugh ζεύγη γειτονικών τετραγώνων που περιέχουν τιμή 1 και εξάγουμε την ελαχιστοποιημένη μορφή της συνάρτησης σε πρότυπη μορφή αθροίσματος γινομένων, λαμβάνοντας υπόψη ότι κάθε ζεύγος γειτονικών τετραγώνων οδηγεί στην απαλοιφή μιας μεταβλητής και, συγκεκριμένα, αυτής που στο ένα τετράγωνο είναι σε κανονική μορφή και στο γειτονικό τετράγωνο είναι σε συμπληρωματική μορφή. Επομένως: $F(x, y) = y$.

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 2: $F(x, y) = x'y + xy' + xy = \Sigma(1, 2, 3)$



Από το ζεύγος των τετραγώνων που αντιστοιχούν στους ελαχιστόρους m_2 και m_3 προκύπτει ότι το άθροισμα ελαχιστόρων $m_2 + m_3 = xy' + xy$ απλοποιείται στη μεταβλητή x.

Από το ζεύγος των τετραγώνων που αντιστοιχούν στους ελαχιστόρους m_1 και m_3 προκύπτει ότι το άθροισμα ελαχιστόρων $m_1 + m_3 = x'y + xy$ απλοποιείται στη μεταβλητή y. Επομένως: $F(x, y) = x + y$.

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Σε κάθε ομάδα (ζεύγος) μπορεί να ανήκουν τετράγωνα που περιλαμβάνουν μονάδα και ανήκουν και σε άλλη ομάδα, αφού σύμφωνα με το θεώρημα Θ1 της άλγεβρας Boole, ισχύει ότι A + A = A.

Η επιλογή αυτή ακολουθείται όταν η συμπερίληψη τετραγώνων που περιέχουν μονάδες σε περισσότερες από μία ομάδες, οδηγεί σε απαλοιφή περισσότερων μεταβλητών (δηλαδή, εκτενέστερη απλοποίηση).

Δεν ομαδοποιούνται τετράγωνα που περιέχουν μονάδες, τα οποία ανήκουν όλα σε άλλες ομάδες.

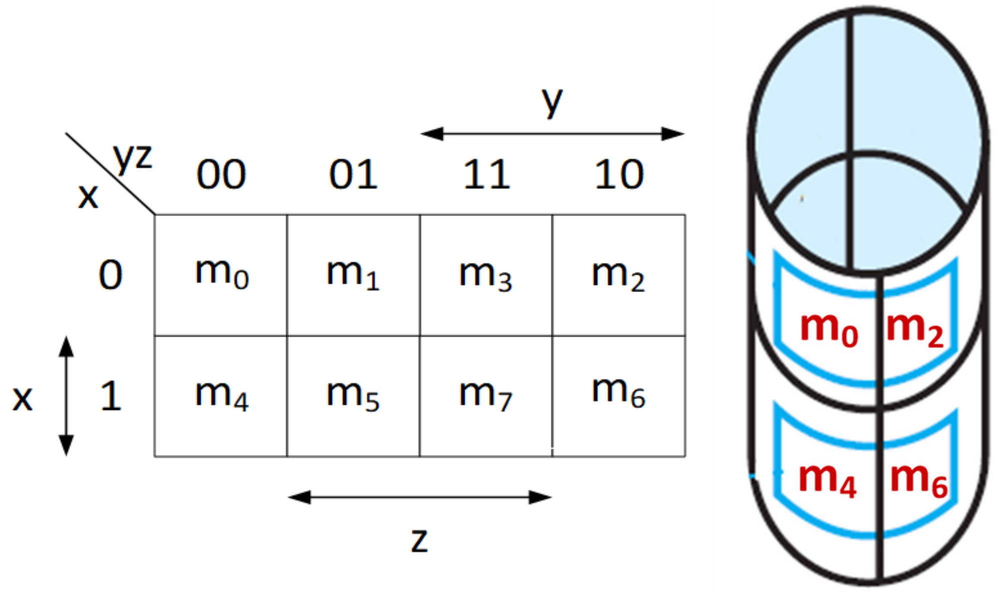
Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Στον χάρτη Karnaugh 3 μεταβλητών, για τους ελαχιστόρους που αντιστοιχούν σε 2 γειτονικά τετράγωνα (τετράγωνα με κοινή πλευρά), ισχύει ότι και στον χάρτη 2 μεταβλητών.

Εκτός των γειτονικών τετραγώνων, συναντώνται και άλλα ζεύγη τετραγώνων, των οποίων οι αντίστοιχοι ελαχιστόροι διαφέρουν κατά μία μόνο μεταβλητή.

Τέτοια ζεύγη τετραγώνων είναι εκείνα που αντιστοιχούν στους m_0, m_2 και στους m_4, m_6.

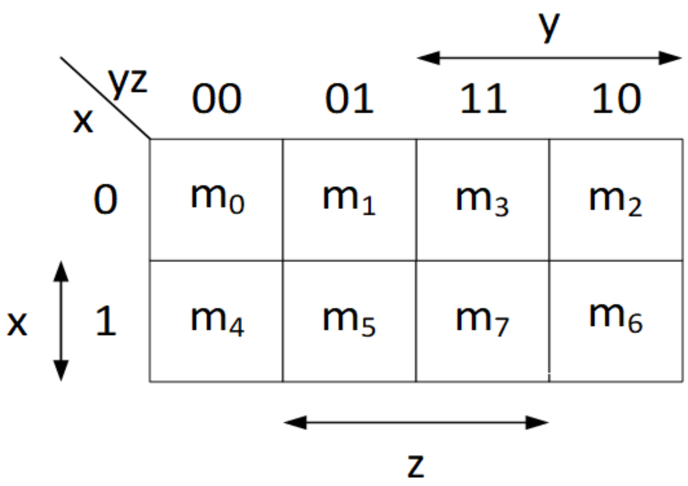
Τα τετράγωνα καθενός από τα ζεύγη αυτά λαμβάνονται ως γειτονικά, εάν θεωρήσουμε ότι η αριστερή και η δεξιά πλευρά του χάρτη εφάπτονται, σχηματίζοντας κύλινδρο.



Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Τα λογικά γινόμενα που αντιστοιχούν σε γειτονικά ζεύγη τετραγώνων διαφέρουν κατά μία μόνο μεταβλητή, συνεπώς, το άθροισμα των ελαχιστόρων που αντιστοιχούν σε μία τέτοια τετράδα τετραγώνων έχει αποτέλεσμα έναν όρο μιας μόνο μεταβλητής.

Στην περίπτωση που περιέχονται μονάδες και στα 8 τετράγωνα του χάρτη, η λογική συνάρτηση ισούται με 1, αφού συμμετέχουν σε αυτήν όλοι οι ελαχιστόροι.



Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Συμπερασματικά, για να ελαχιστοποιήσουμε μια λογική συνάρτηση 3 μεταβλητών μορφής αθροίσματος γινομένων:

α) σχηματίζουμε το χάρτη Karnaugh,

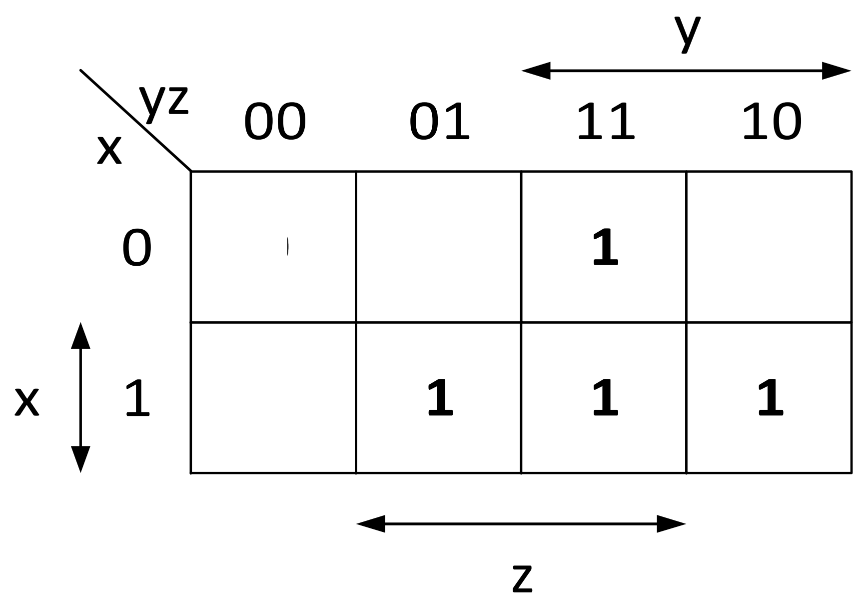
β) επιλέγουμε στο χάρτη ζεύγη γειτονικών τετραγώνων που περιέχουν μονάδες και, εάν υπάρχουν γειτονικά ζεύγη που περιέχουν μονάδες, επιλέγουμε την τετράδα τετραγώνων που αυτά σχηματίζουν,

γ) εξάγουμε την ελαχιστοποιημένη συνάρτηση σε μορφή αθροίσματος γινομένων, λαμβάνοντας υπόψη ότι κάθε ζεύγος γειτονικών τετραγώνων οδηγεί στην απαλοιφή μιας μεταβλητής και ότι κάθε τετράδα που αποτελείται από γειτονικά ζεύγη οδηγεί σε όρο μιας μεταβλητής.

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 1: $F(x, y, z) = \Sigma(3, 5, 6, 7) = x'yz + xy'z + xyz' + xyz$

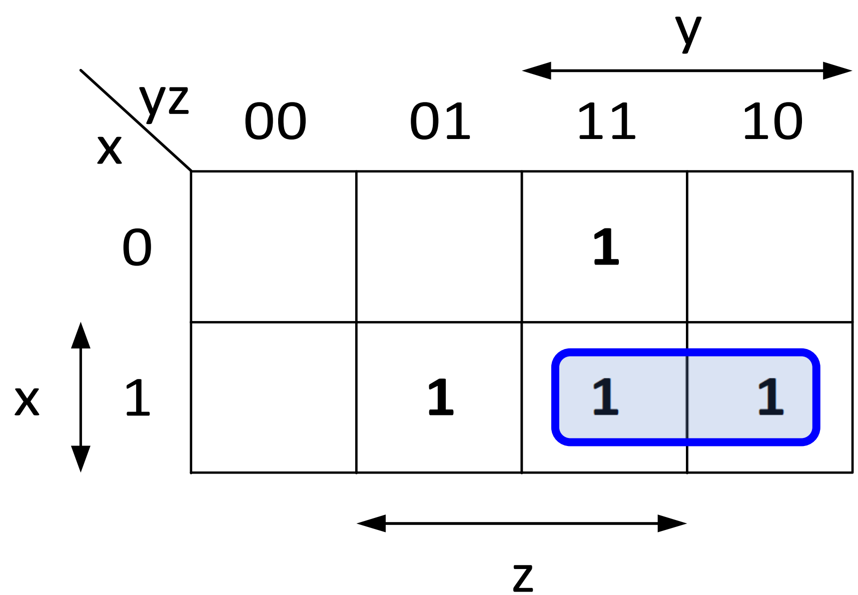
x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**



Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 1: $F(x, y, z) = \Sigma(3, 5, 6, 7) = x'yz + xy'z + xyz' + xyz$

x	**y**	**z**	**F(x, y, z)**
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

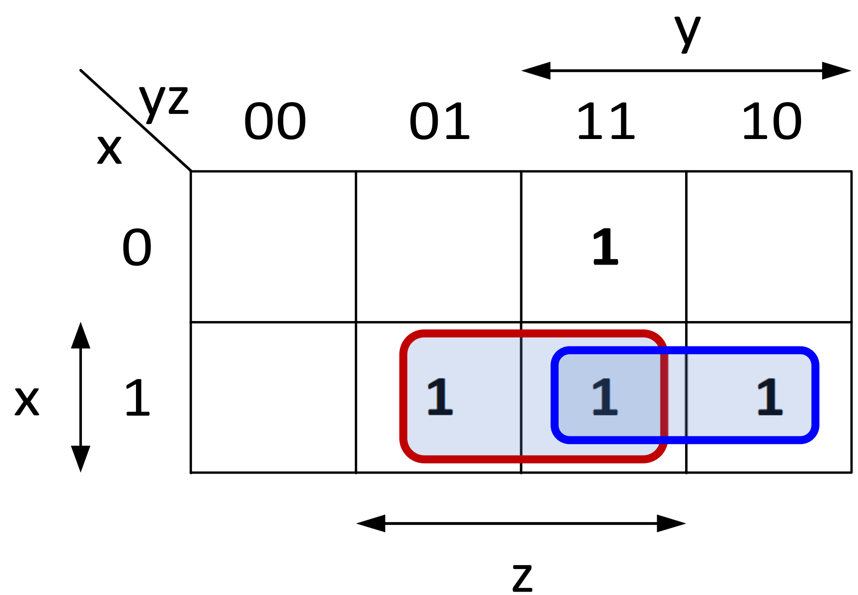


$F = xy +$

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 1: $F(x, y, z) = \Sigma(3, 5, 6, 7) = x'yz + xy'z + xyz' + xyz$

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

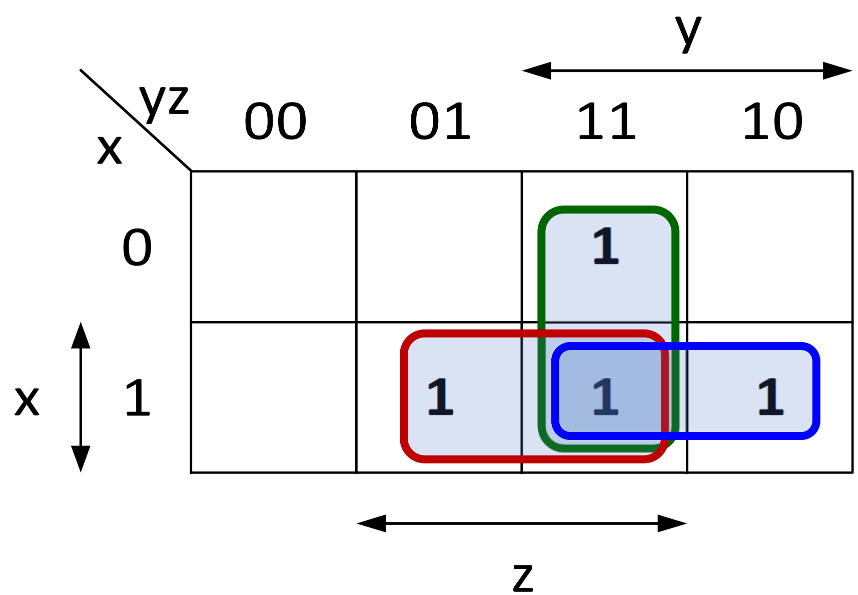


$F = xy + xz +$

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 1: $F(x, y, z) = \Sigma(3, 5, 6, 7) = x'yz + xy'z + xyz' + xyz$

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**



$F = xy + xz + yz$

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 2: $F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 5, 7)$

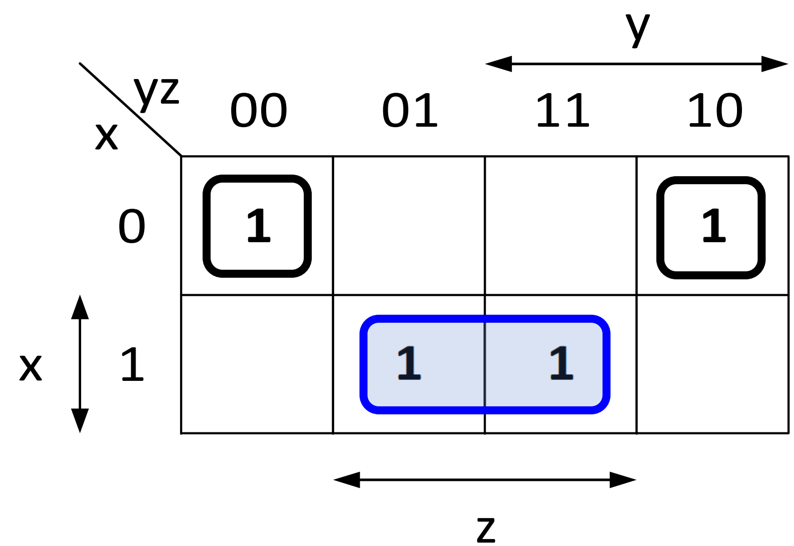
y

x \ yz	00	01	11	10
0	**1**			**1**
x 1		**1**	**1**	

z

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

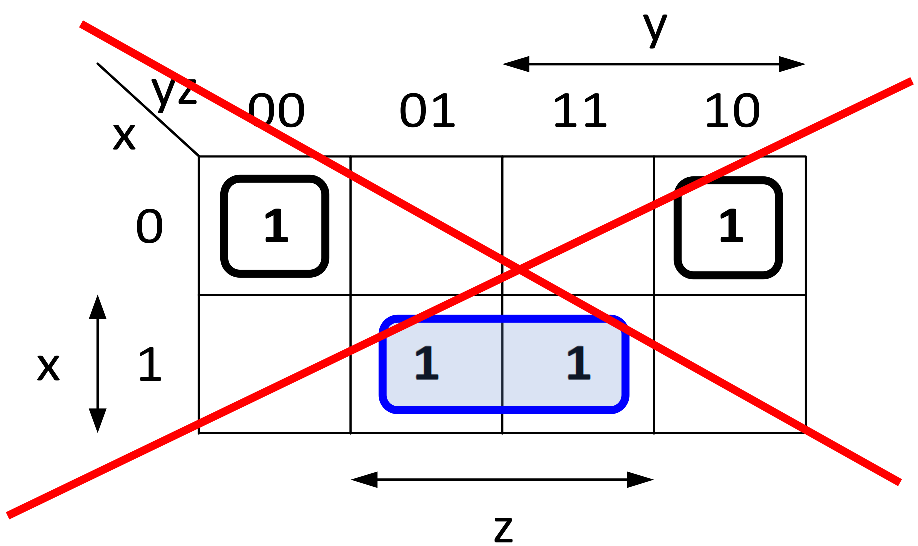
Παράδειγμα 2: F(x, y, z) = Σ(0, 2, 5, 7)



F = xz + x′y′z′ + x′yz′

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 2: $F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 5, 7)$

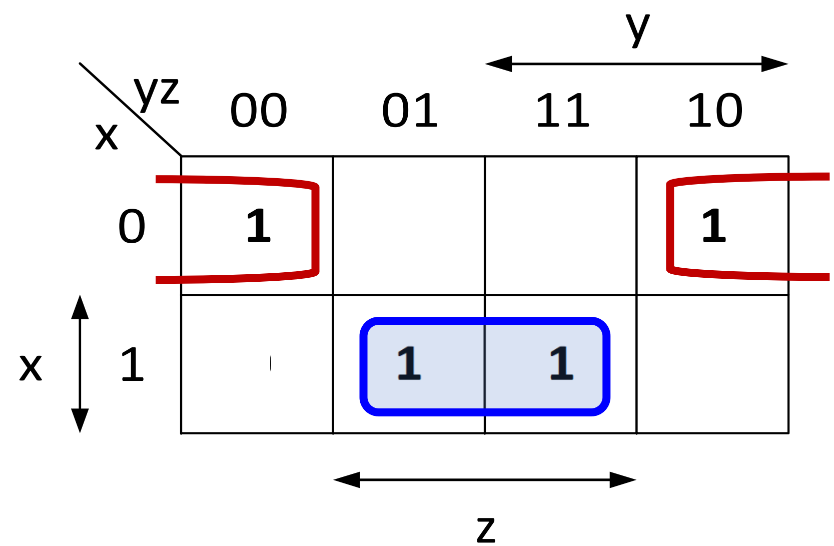


$F = xz + x'y'z' + x'yz'$

Οι ελαχιστόροι που αντιστοιχούν στα τετράγωνα της πρώτης σειράς που περιέχουν μονάδες διαφέρουν κατά μία μόνο μεταβλητή.

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 2: F(x, y, z) = Σ(0, 2, 5, 7)



F = xz + x′z′

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Το πλήθος των μονάδων που ομαδοποιούνται αποτελεί δύναμη του 2:

$2^0 = 1$, δεν έχουμε ομαδοποίηση τετραγώνων και απαλοιφή μεταβλητής και ο αντίστοιχος ελαχιστόρος παραμένει ως είχε.

$2^1 = 2$, ένα ζεύγος τετραγώνων που περιέχουν μονάδες και οδηγεί στην απαλοιφή μιας μεταβλητής.

$2^2 = 4$, μια τετράδα τετραγώνων που περιέχουν μονάδες και οδηγεί στην απαλοιφή 2 μεταβλητών.

$2^3 = 8$, μια οκτάδα τετραγώνων που περιέχουν μονάδες και οδηγεί στην απαλοιφή 3 μεταβλητών, κ.ο.κ.

Επομένως, ο εκθέτης του 2, υποδεικνύει το πλήθος των μεταβλητών που απαλείφονται.

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 3: $F(x, y, z) = \Sigma(1, 3, 5, 7)$

x \ yz	00	01	11	10
0		**1**	**1**	
1		**1**	**1**	

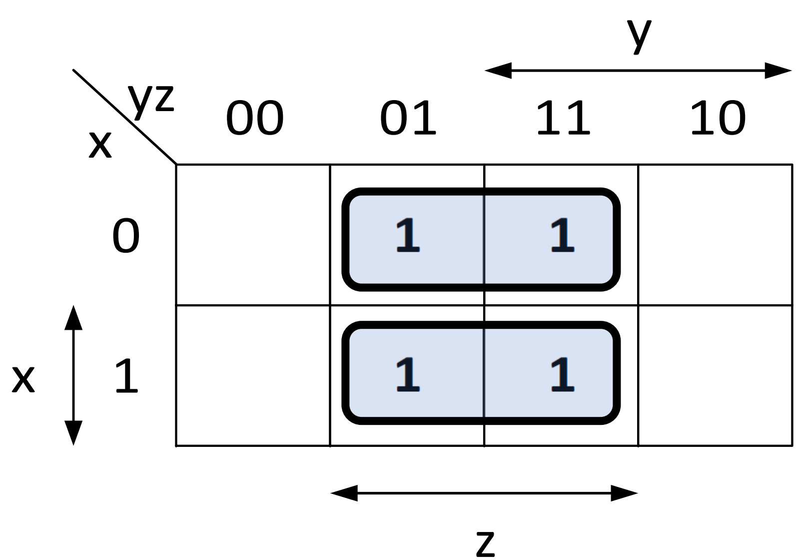
y (στήλες 11, 10)

z (στήλες 01, 11)

x (γραμμή 1)

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

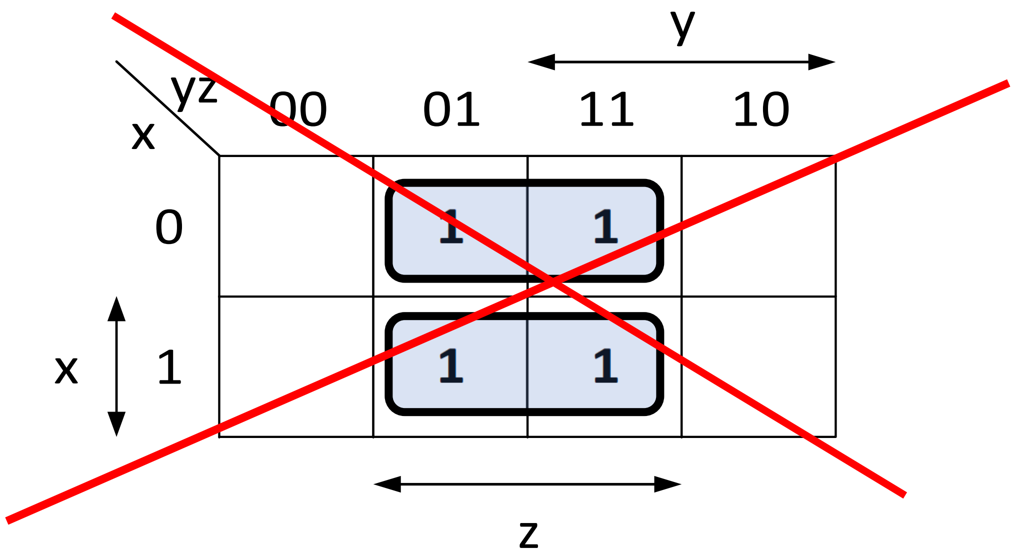
Παράδειγμα 3: $F(x, y, z) = \Sigma(1, 3, 5, 7)$



$F = x'z + xz$

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 3: $F(x, y, z) = \Sigma(1, 3, 5, 7)$

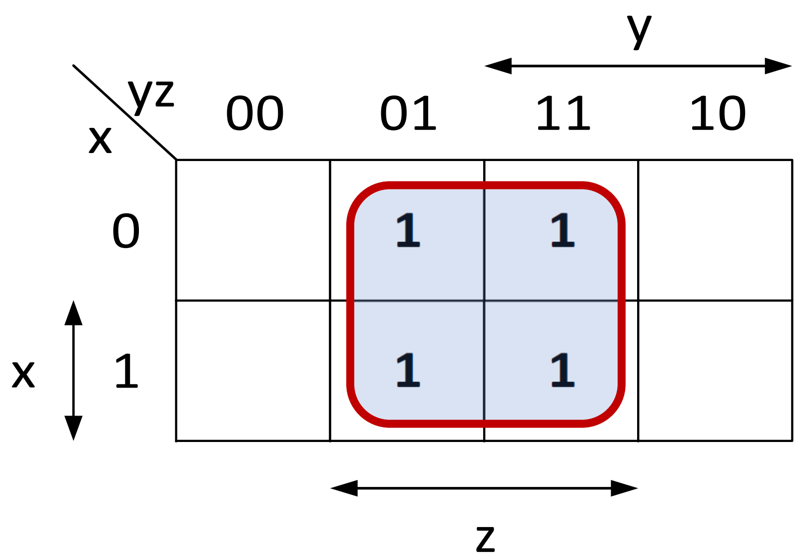


$F = x'z + xz$

Τα λογικά γινόμενα που αντιστοιχούν στα δύο ζεύγη τετραγώνων που περιέχουν μονάδες διαφέρουν σε μία μόνο μεταβλητή και σχηματίζουν τετράδα που οδηγεί συνολικά στην απαλοιφή 2 μεταβλητών

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

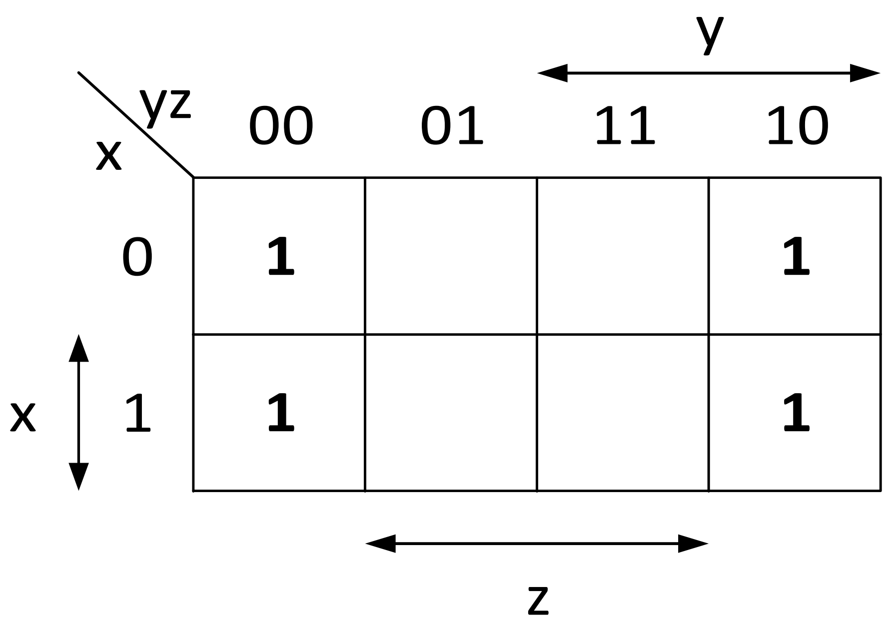
Παράδειγμα 3: F(x, y, z) = Σ(1, 3, 5, 7)



F = z

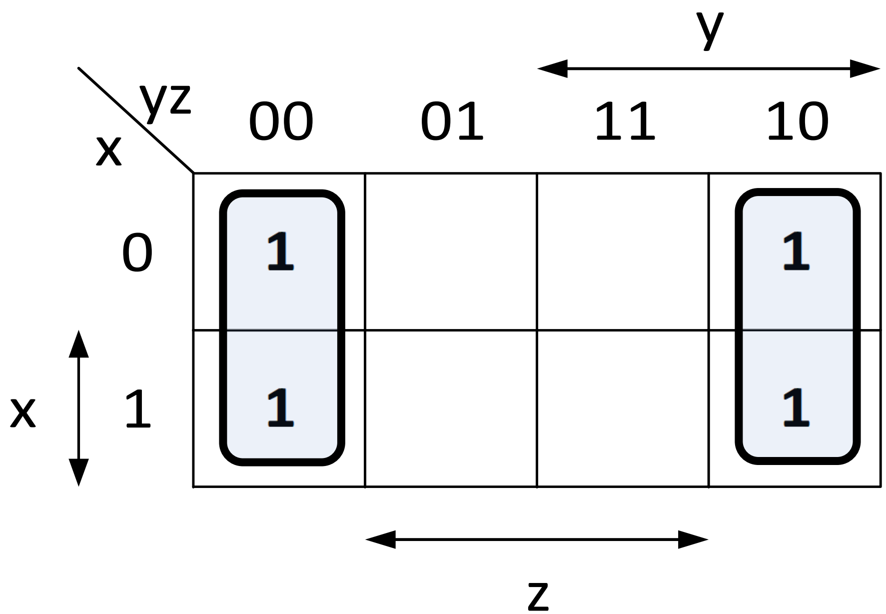
Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 4: $F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 4, 6)$



Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

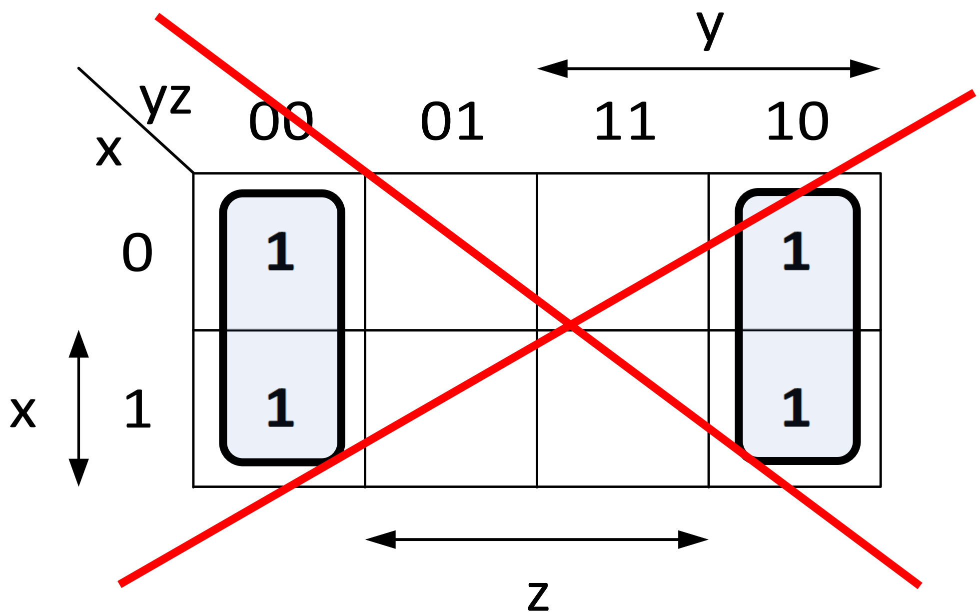
Παράδειγμα 4: F(x, y, z) = Σ(0, 2, 4, 6)



F = y’z’ + yz’

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 4: F(x, y, z) = Σ(0, 2, 4, 6)

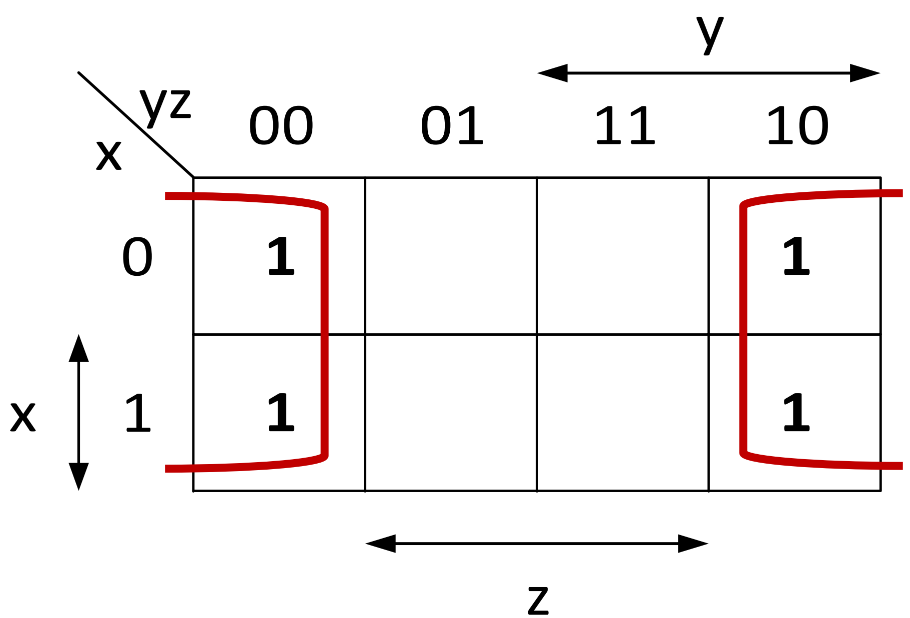


F = y’z’ + yz’

Τα λογικά γινόμενα που αντιστοιχούν στα δύο ζεύγη τετραγώνων που περιέχουν μονάδες διαφέρουν σε μία μόνο μεταβλητή και σχηματίζουν τετράδα που οδηγεί συνολικά στην απαλοιφή 2 μεταβλητών

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

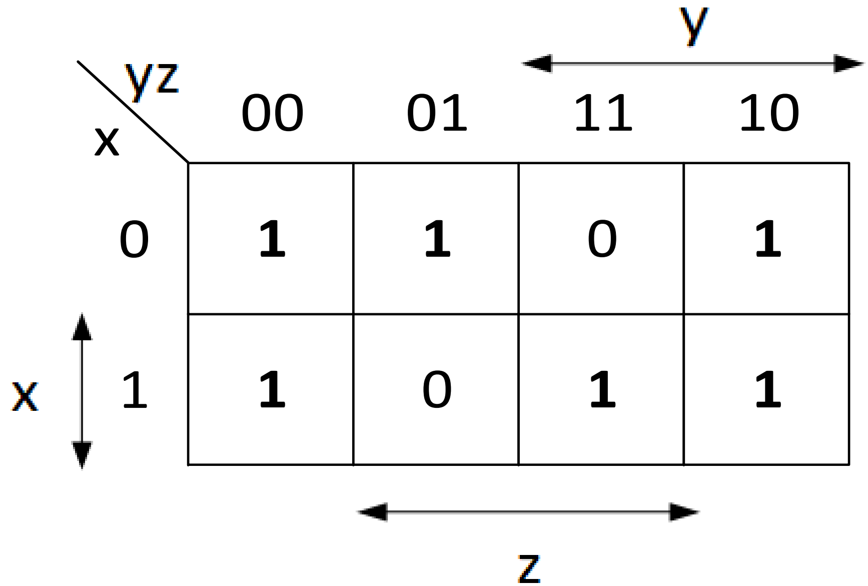
Παράδειγμα 4: F(x, y, z) = Σ(0, 2, 4, 6)



F = z′

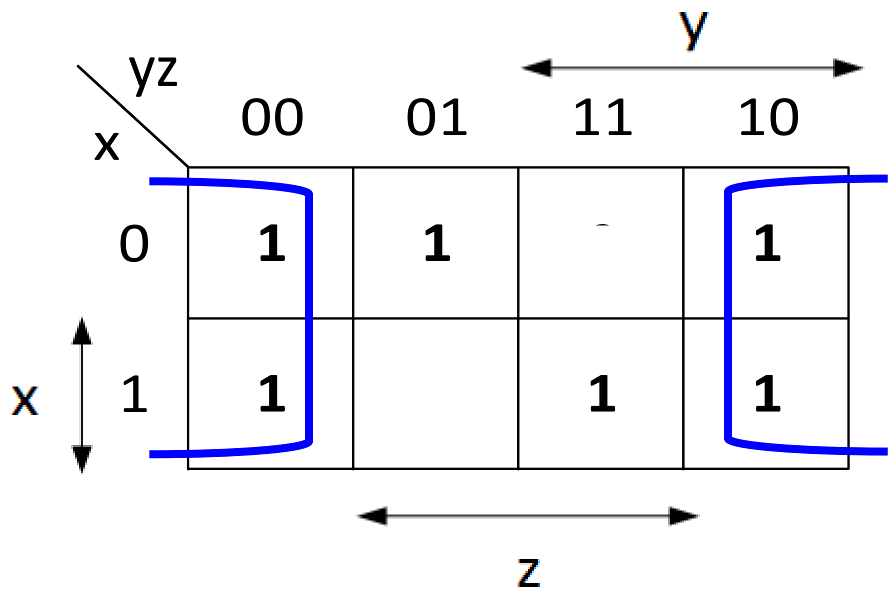
Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 5: F(x, y, z) = Σ(0, 1, 2, 4, 6, 7)



Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

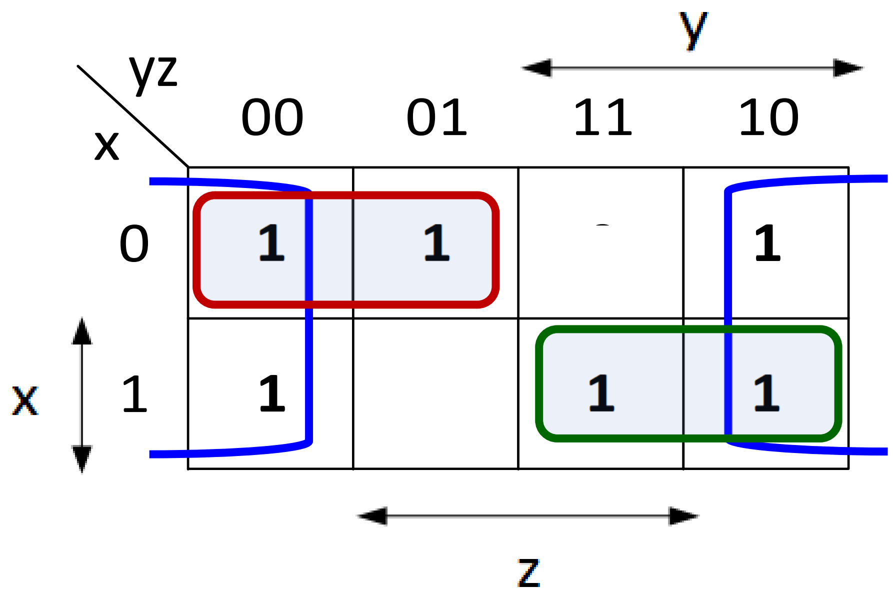
Παράδειγμα 5: F(x, y, z) = Σ(0, 1, 2, 4, 6, 7)



F = z' +

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 5: $F(x, y, z) = \Sigma(0, 1, 2, 4, 6, 7)$



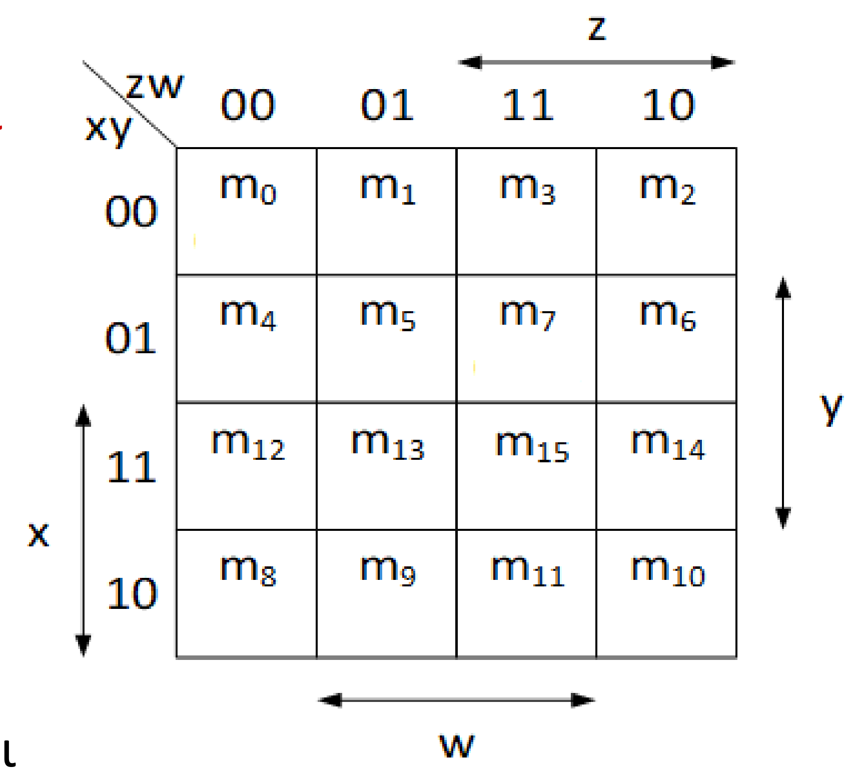
$F = z' + x'y' + xy$

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Στον χάρτη Karnaugh 4 μεταβλητών, το άθροισμα των ελαχιστόρων που αντιστοιχούν σε δύο γειτονικά τετράγωνα έχει ως αποτέλεσμα λογικό γινόμενο 3 μεταβλητών.

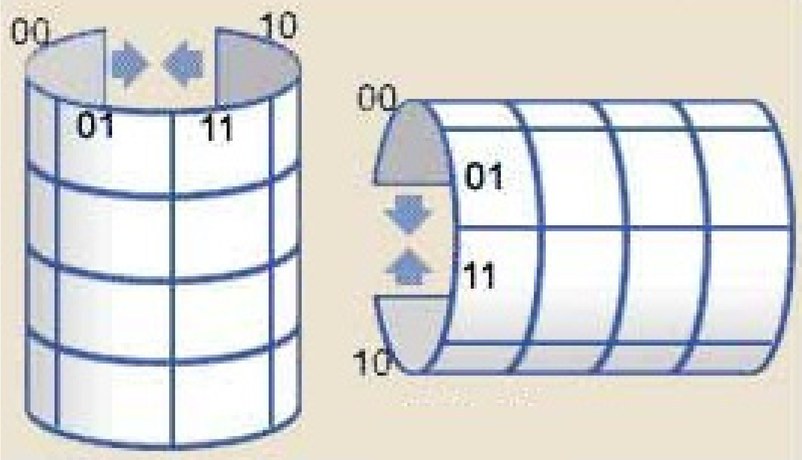
Τα λογικά γινόμενα που αντιστοιχούν σε γειτονικά ζεύγη τετραγώνων (τετράδα τετραγώνων) διαφέρουν κατά 2 μόνο μεταβλητές, με αποτέλεσμα το λογικό άθροισμα των γινομένων αυτών να απλοποιείται σε ένα γινόμενο 2 μεταβλητών.

Το άθροισμα των ελαχιστόρων που αντιστοιχούν σε μία οκτάδα τετραγώνων που σχηματίζεται από 2 τετράδες με τα παραπάνω χαρακτηριστικά, απλοποιείται σε έναν όρο μιας μεταβλητής.



Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Οι ακραίες στήλες περιλαμβάνουν γειτονικά μεταξύ τους τετράγωνα, αφού οι ελαχιστόροι που αντιστοιχούν σε αυτά διαφέρουν κατά μία μόνο μεταβλητή. Το ίδιο συμβαίνει και με τις ακραίες γραμμές του χάρτη.



Τα τετράγωνα που βρίσκονται στις 4 γωνίες του χάρτη σχηματίζουν μία τετράδα τετραγώνων που αντιστοιχεί σε λογικό γινόμενο δύο μεταβλητών.

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 1: F(x, y, z, w) = Σ(0, 2, 8, 10)

xy \ zw	00	01	11	10
00	**1**			**1**
01				
11				
10	**1**			**1**

Τα τετράγωνα που βρίσκονται στις 4 γωνίες του χάρτη σχηματίζουν μία τετράδα τετραγώνων που αντιστοιχεί σε λογικό γινόμενο δύο μεταβλητών.

$$F(x, y, z, w) = x'y'z'w' + x'y'zw' + xy'z'w' + xy'zw' = x'y'w'(z' + z) + xy'w'(z' + z)$$
$$= x'y'w' + xy'w' = (x' + x)y'w' = y'w'$$

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 1: F(x, y, z, w) = Σ(0, 2, 8, 10)

xy \ zw	00	01	11	10
00	**1**			**1**
01				
11				
10	**1**			**1**

F(x, y, z, w) = y’w’

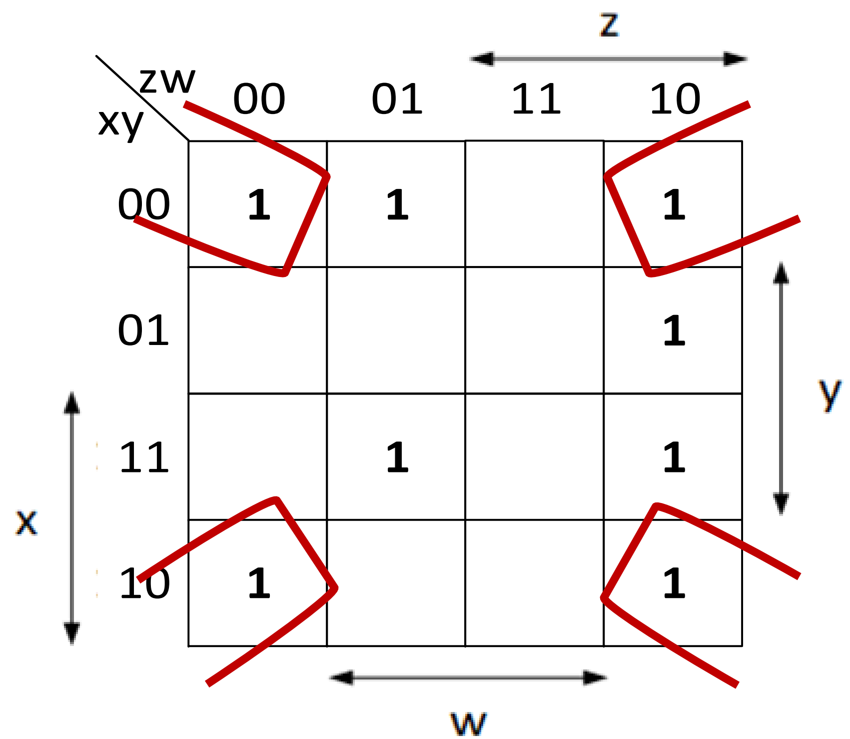
Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 2: $F(x,y,z,w) = \Sigma(0, 1, 2, 6, 8, 10, 13, 14)$

xy \ zw	00	01	11	10
00	**1**	**1**		**1**
01				**1**
11		**1**		**1**
10	**1**			**1**

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

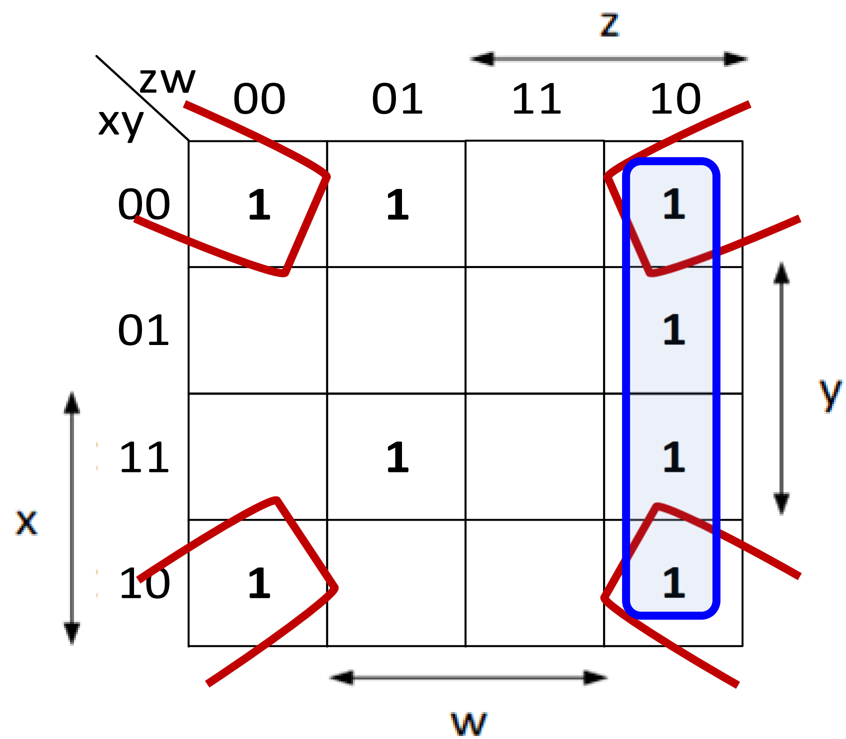
Παράδειγμα 2: $F(x,y,z,w) = \Sigma(0, 1, 2, 6, 8, 10, 13, 14)$



$F = y'w' +$

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

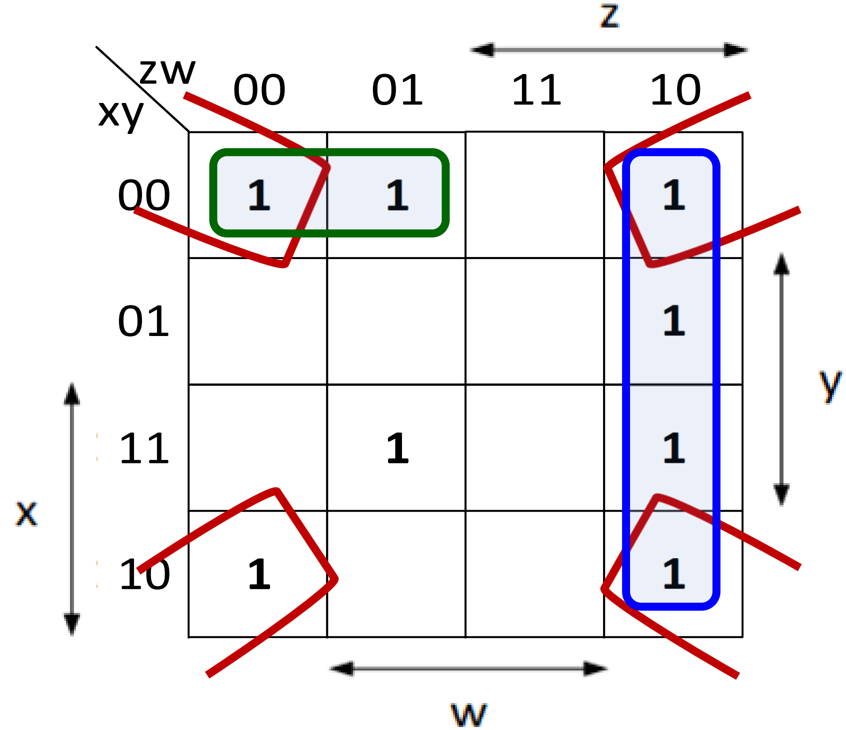
Παράδειγμα 2: F(x,y,z,w) = Σ(0, 1, 2, 6, 8, 10, 13, 14)



$F = y'w' + zw' +$

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

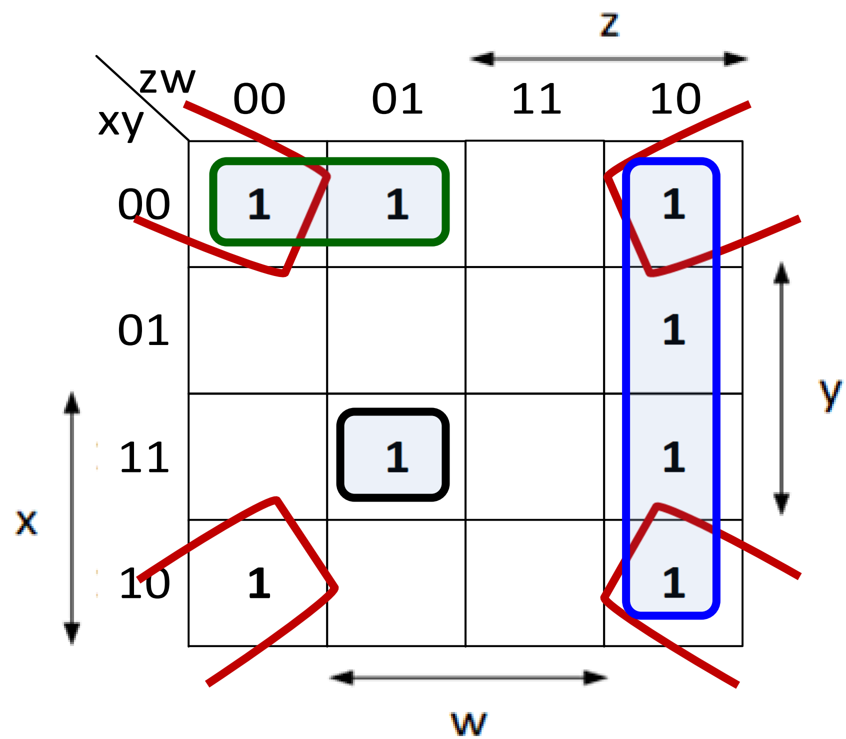
Παράδειγμα 2: F(x,y,z,w) = Σ(0, 1, 2, 6, 8, 10, 13, 14)



F = y'w' + zw' + x'y'z' +

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 2: $F(x,y,z,w) = \Sigma(0, 1, 2, 6, 8, 10, 13, 14)$



$F = y'w' + zw' + x'y'z' + xyz'w$

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 3: F(x,y,z,w) = Σ(0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15)

xy \ zw	00	01	11	10
00	**1**	**1**	**1**	**1**
01	**1**		**1**	**1**
11	**1**		**1**	**1**
10	**1**		**1**	**1**

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

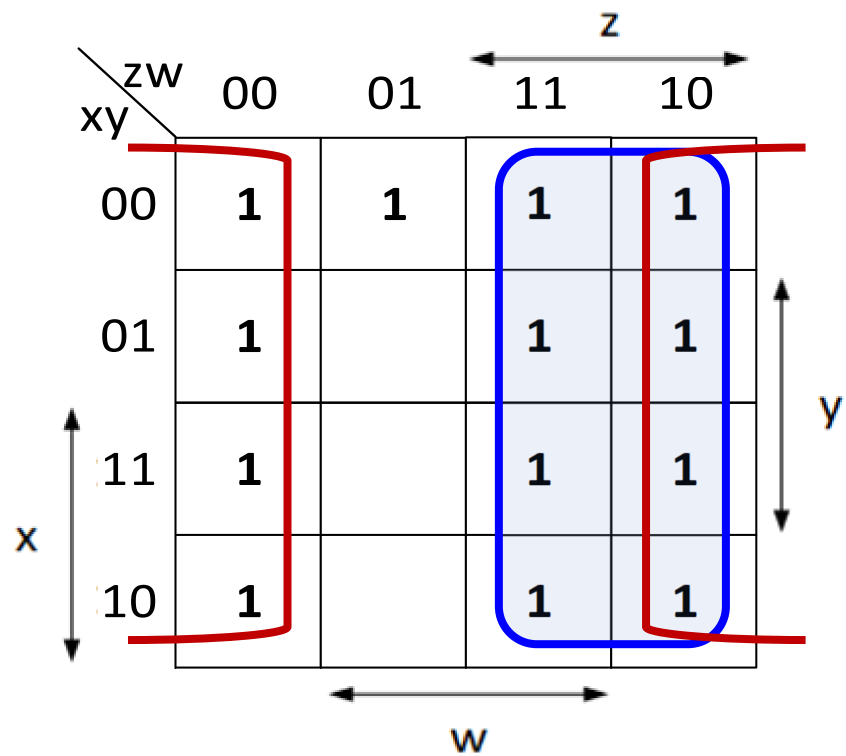
Παράδειγμα 3: F(x,y,z,w) = Σ(0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15)

xy \ zw	00	01	11	10
00	**1**	**1**	**1**	**1**
01	**1**		**1**	**1**
11	**1**		**1**	**1**
10	**1**		**1**	**1**

F = z +

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

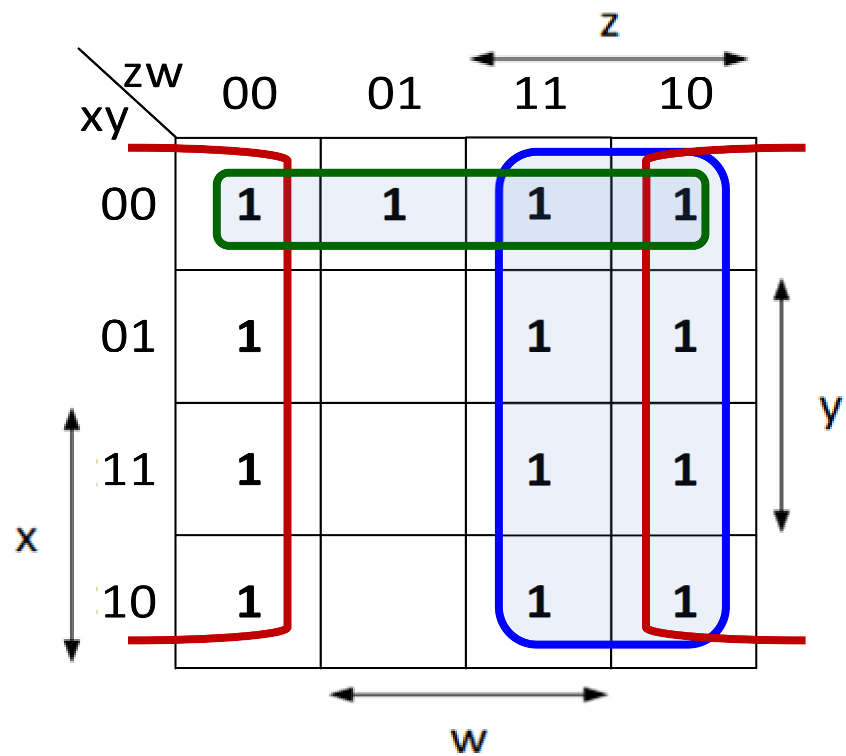
Παράδειγμα 3: $F(x,y,z,w) = \Sigma(0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15)$



$F = z + w' +$

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 3: $F(x,y,z,w) = \Sigma(0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15)$



$F = z + w' + x'y'$

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 4: $F(x,y,z,w) = \Sigma(7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$

	xy \ zw	00	01	11	10	
	00					
	01			1		y
x	11	1	1	1	1	y
x	10		1	1	1	
			w	w		

z: 11, 10

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

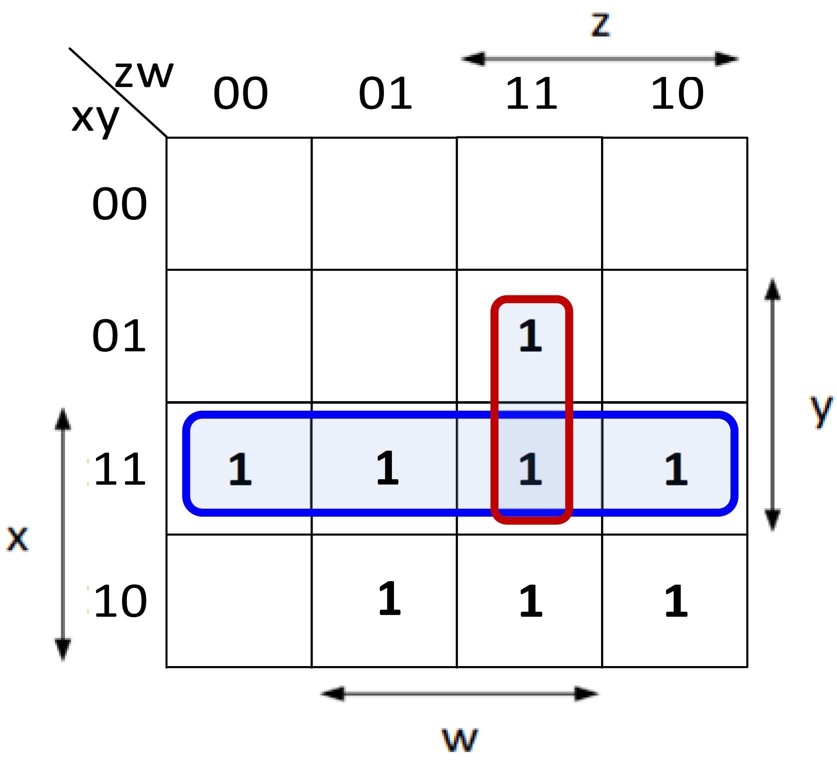
Παράδειγμα 4: F(x,y,z,w) = Σ(7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)

xy \ zw	00	01	11	10
00				
01			1	
11	1	1	1	1
10		1	1	1

F = yzw +

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

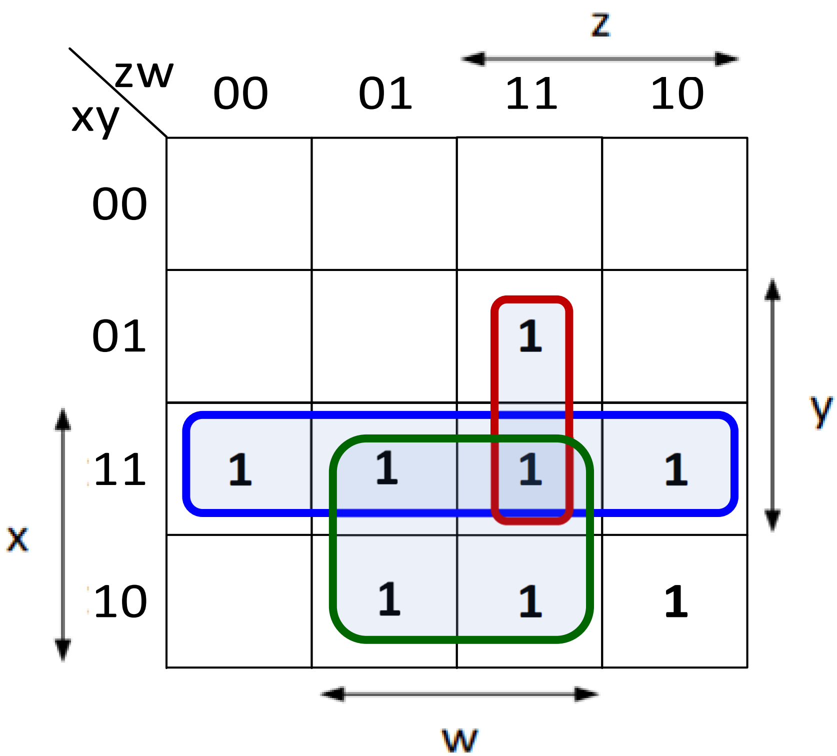
Παράδειγμα 4: F(x,y,z,w) = Σ(7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)



F = yzw + xy +

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

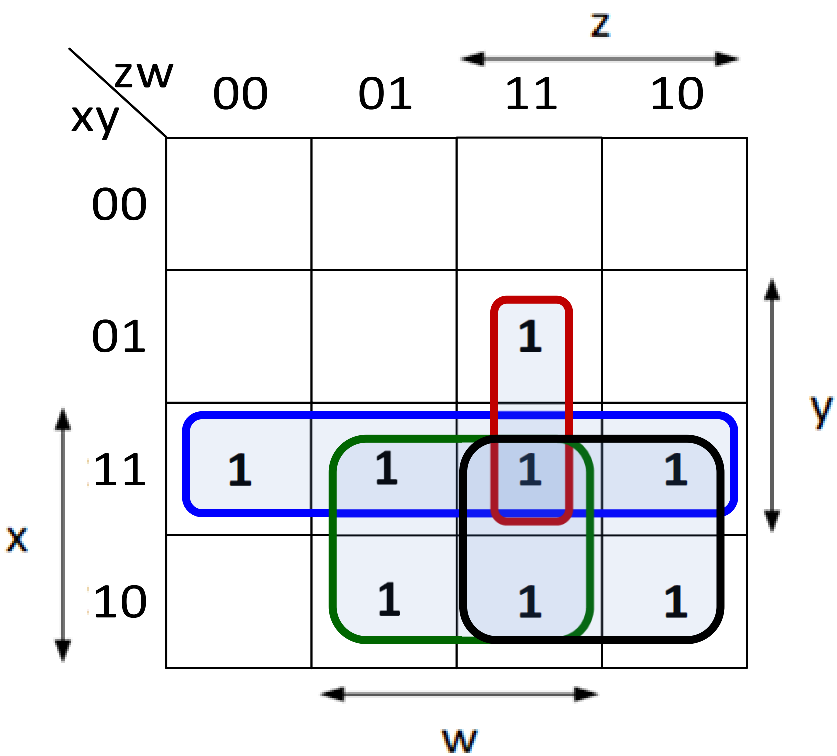
Παράδειγμα 4: F(x,y,z,w) = Σ(7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)



F = yzw + xy + xw +

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα 4: F(x,y,z,w) = Σ(7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)



F = yzw + xy + xw + xz

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Όπως προαναφέρθηκε, για την περιγραφή συναρτήσεων 5 μεταβλητών χρησιμοποιούνται δύο χάρτες Karnaugh 4 μεταβλητών.

Για τον πρώτο χάρτη, σε μία από τις πέντε μεταβλητές τίθεται η λογική τιμή 0, ενώ για το δεύτερο χάρτη τίθεται στην ίδια μεταβλητή η λογική τιμή 1.

Για την ελαχιστοποίηση λογικών συναρτήσεων 5 μεταβλητών ακολουθούνται οι ίδιες αρχές με εκείνες που αναφέρθηκαν για τις συναρτήσεις 4 μεταβλητών.

Το νέο στοιχείο είναι ότι κάθε τετράγωνο του πρώτου χάρτη θεωρείται γειτονικό του αντίστοιχου τετραγώνου του δεύτερου χάρτη, αφού τα τετράγωνα αυτά διαφέρουν μόνο κατά τη μεταβλητή που λαμβάνει λογική τιμή 0 στον πρώτο χάρτη και λογική τιμή 1 στον δεύτερο χάρτη.

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα: F(x,y,z,w,v) = Σ(1, 3, 9, 11, 13, 15, 24, 25, 27, 28, 29, 31)

x = 0

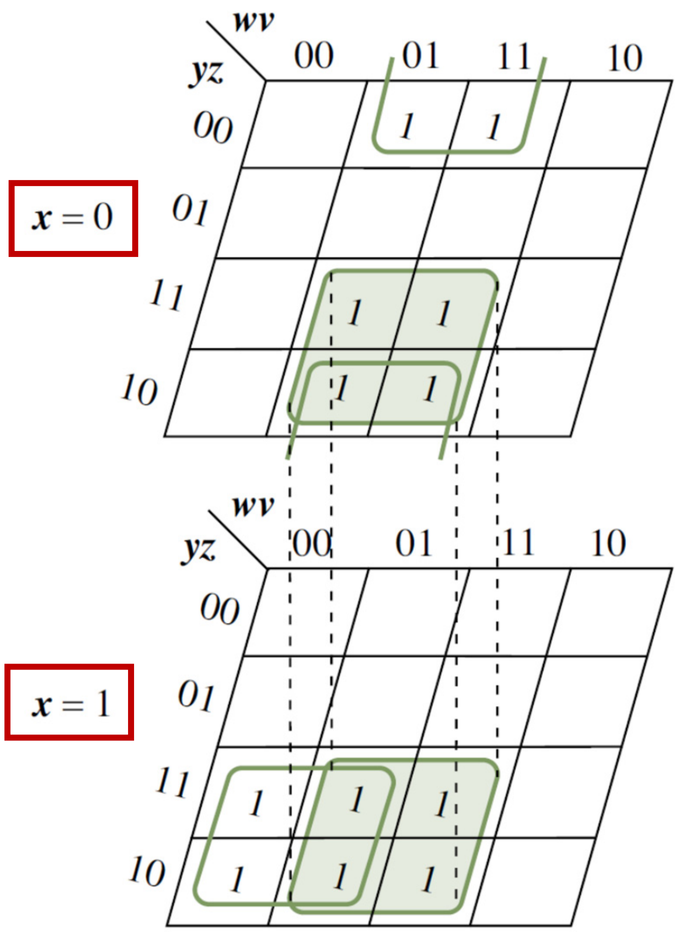
yz \ wv	00	01	11	10
00	m_0	m_1 **1**	m_3 **1**	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13} **1**	m_{15} **1**	m_{14}
10	m_8	m_9 **1**	m_{11} **1**	m_{10}

x = 1

yz \ wv	00	01	11	10
00	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}
01	m_{20}	m_{21}	m_{23}	m_{22}
11	m_{28} **1**	m_{29} **1**	m_{31} **1**	m_{30}
10	m_{24} **1**	m_{25} **1**	m_{27} **1**	m_{26}

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Παράδειγμα: F(x,y,z,w,v) = Σ(1, 3, 9, 11, 13, 15, 24, 25, 27, 28, 29, 31)



F = x′z′v + yv + xyw′

Βασικές οδηγίες για τη μέθοδο του χάρτη Karnaugh

Κάθε τετράγωνο του χάρτη Karnaugh που περιέχει μονάδα αντιστοιχεί σε έναν ελαχιστόρο της λογικής συνάρτησης.

Για κάθε τετράγωνο ενός χάρτη Karnaugh n μεταβλητών υπάρχουν n γειτονικά τετράγωνα και κάθε ζεύγος τετραγώνων αντιστοιχεί σε ελαχιστόρους που διαφέρουν κατά μία μόνο μεταβλητή.

Κατά την ελαχιστοποίηση μιας λογικής συνάρτησης, ο αριθμός των τετραγώνων που ομαδοποιείται είναι πάντα δύναμη του 2.

Η δημιουργία ζεύγους γειτονικών τετραγώνων που περιέχουν μονάδες οδηγεί στην απαλοιφή μιας μεταβλητής, η δημιουργία τετράδας τετραγώνων οδηγεί στην απαλοιφή δύο μεταβλητών και γενικότερα η ομαδοποίηση 2^n τετραγώνων οδηγεί στην απαλοιφή n μεταβλητών.

Βασικές οδηγίες για τη μέθοδο του χάρτη Karnaugh

Επιδιώκεται η δημιουργία ομάδων με το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος τετραγώνων που περιέχουν μονάδες, έτσι ώστε η μορφή της συνάρτησης που θα προκύψει να περιλαμβάνει λογικά γινόμενα με όσο το δυνατόν λιγότερες μεταβλητές.

Επιδιώκεται η δημιουργία του μικρότερου δυνατού πλήθους ομάδων τετραγώνων, έτσι ώστε η μορφή της συνάρτησης που θα προκύψει να περιλαμβάνει όσο το δυνατόν λιγότερα λογικά γινόμενα.

Κάθε τετράγωνο που περιέχει μονάδα και αντιστοιχεί σε έναν ελαχιστόρο της συνάρτησης θα πρέπει να περιλαμβάνεται σε μία τουλάχιστον ομάδα.

Κάθε τετράγωνο που περιέχει μονάδα μπορεί να περιλαμβάνεται σε περισσότερες από μία ομάδες, εάν αυτό εξυπηρετεί τους στόχους του μικρότερου δυνατού πλήθους λογικών γινομένων και του μικρότερου δυνατού πλήθους μεταβλητών ανά λογικό γινόμενο.

Βασικές οδηγίες για τη μέθοδο του χάρτη Karnaugh

Ωστόσο, θα πρέπει να επιλέγονται ομάδες τετραγώνων με τις λιγότερες δυνατές επικαλύψεις.

Η ομαδοποίηση των τετραγώνων του χάρτη που περιέχουν μονάδες είναι προτιμότερο να ξεκινά με τα «μοναχικά» τετράγωνα (δηλαδή εκείνα που παρουσιάζουν περιορισμένη γειτνίαση με άλλα τετράγωνα που περιέχουν μονάδες).

Στη συνέχεια, η ομαδοποίηση επεκτείνεται στις περιοχές του χάρτη όπου υπάρχει συγκέντρωση τετραγώνων που περιέχουν μονάδες.

Υλοποίηση ελαχιστοποιημένων συναρτήσεων

Η ελαχιστοποιημένη μορφή μιας συνάρτησης που προκύπτει από κατάλληλη ομαδοποίηση των τετραγώνων του χάρτη Karnaugh που περιέχουν μονάδες, εξάγεται σε μορφή αθροίσματος γινομένων.

Έτσι, μπορούν εύκολα να προκύψουν λογικά κυκλώματα αποτελούμενα από δύο επίπεδα πυλών σε διάταξη AND-OR ή μόνο από πύλες NAND, που υλοποιούν την ελαχιστοποιημένη μορφή της συνάρτησης.

Υλοποίηση ελαχιστοποιημένων συναρτήσεων

Τα τετράγωνα του χάρτη που περιγράφει μια λογική συνάρτηση, τα οποία δεν περιέχουν μονάδες, αντιστοιχούν στους ελαχιστόρους που δεν περιλαμβάνονται στη συνάρτηση.

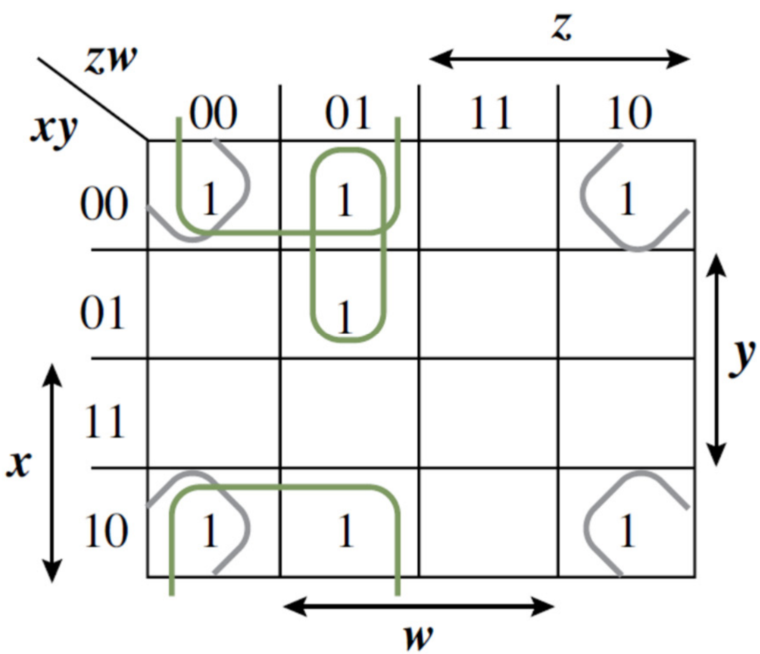
Το άθροισμα των ελαχιστόρων αυτών συνιστά τη συμπληρωματική συνάρτηση.

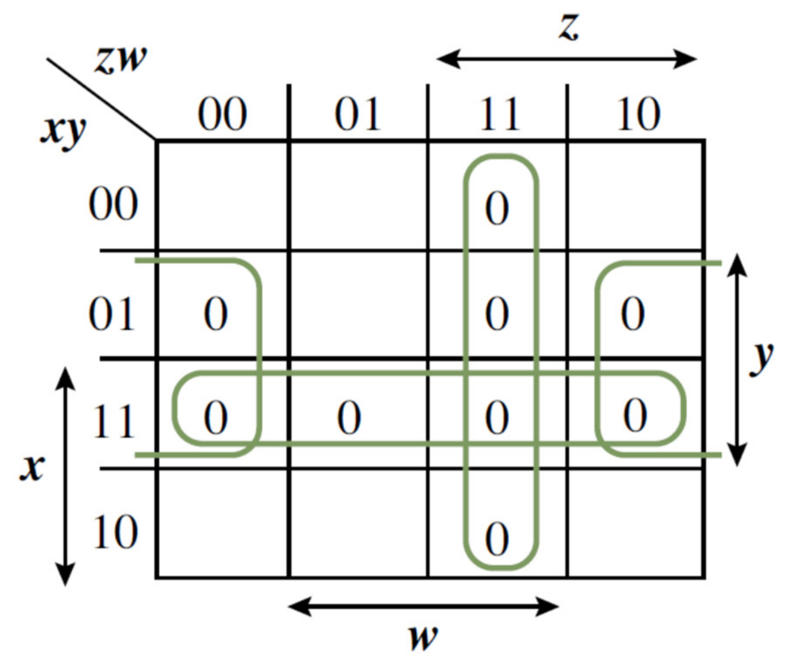
Εάν, λοιπόν, τοποθετήσουμε μηδενικά στα άδεια τετράγωνα του χάρτη και τα ομαδοποιήσουμε με βάση τη διαδικασία που παρουσιάστηκε προηγουμένως, μπορούμε να καταλήξουμε στην ελαχιστοποιημένη μορφή της συμπληρωματικής συνάρτησης, σε μορφή αθροίσματος γινομένων.

Στη συνέχεια, εάν εφαρμόσουμε σε αυτήν το θεώρημα De Morgan, μπορούμε να εξαγάγουμε την ελαχιστοποιημένη αρχική συνάρτηση σε μορφή γινομένου αθροισμάτων, ώστε να προκύψουν λογικά κυκλώματα με δύο επίπεδα πυλών, σε διάταξη OR-AND ή μόνο με πύλες NOR.

Υλοποίηση ελαχιστοποιημένων συναρτήσεων

Παράδειγμα: F(x,y,z,w) = Σ(0, 1, 2, 5, 8, 9, 10)





F(x,y,z,w) = y′z′ + y′w′ + x′z′w

F′(x,y,z,w) = xy + zw + yw′

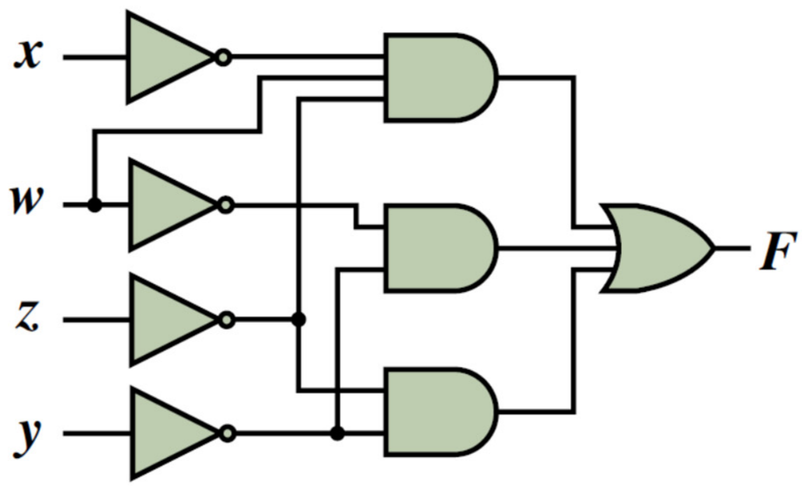
Υλοποίηση ελαχιστοποιημένων συναρτήσεων

Παράδειγμα: F(x,y,z,w) = Σ(0, 1, 2, 5, 8, 9, 10)

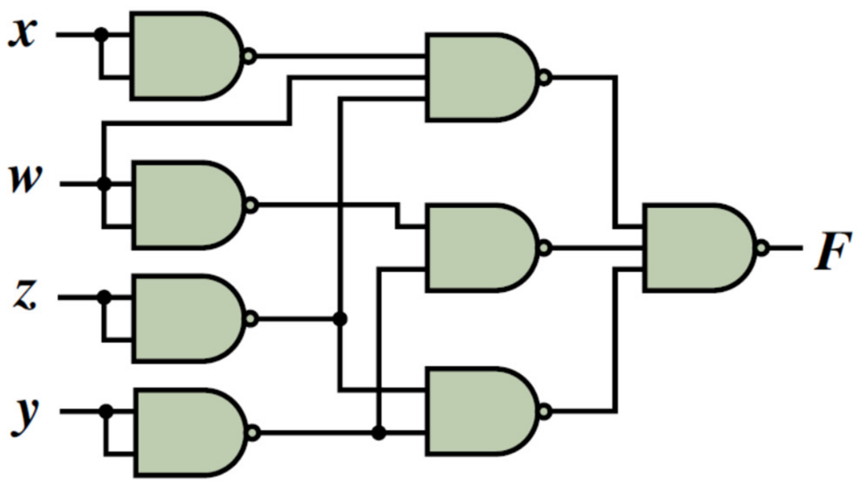
F(x,y,z,w) = y′z′ + y′w′ + x′z′w

Θεώρημα διπλής άρνησης & θεώρημα De Morgan

$\Rightarrow$ F(x,y,z,w) = [(y′z′)′(y′w′)′(x′z′w)′]′



Υλοποίηση AND-OR



Υλοποίηση NAND-NAND

Υλοποίηση ελαχιστοποιημένων συναρτήσεων

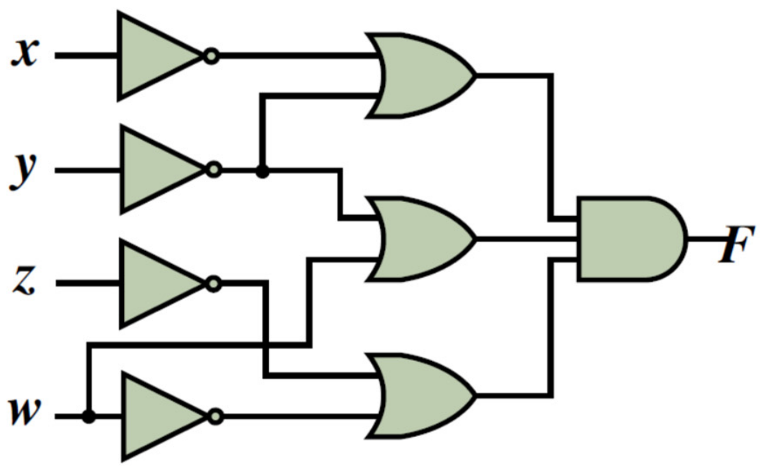
Παράδειγμα: $F(x,y,z,w) = \Sigma(0, 1, 2, 5, 8, 9, 10)$

$$F(x,y,z,w) = (xy + zw + yw')'$$

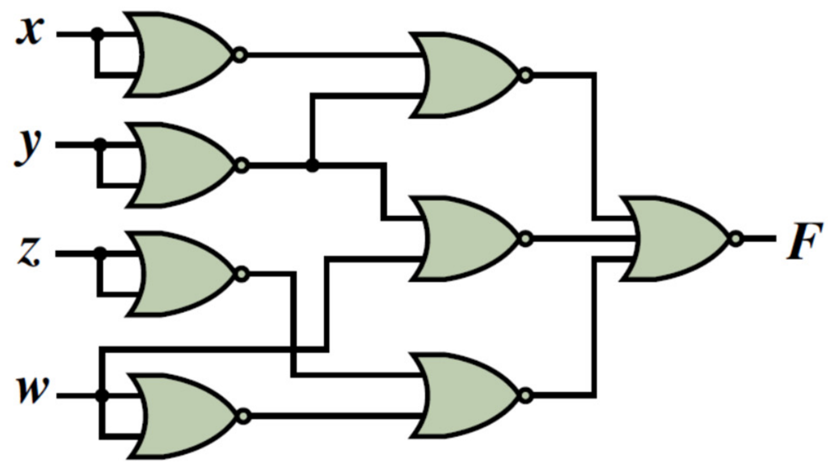
Θεώρημα De Morgan $\Rightarrow$ $F(x,y,z,w) = (x' + y')(z' + w')(y' + w)$

Θεώρημα διπλής άρνησης & θεώρημα De Morgan $\Rightarrow$

$$F(x,y,z,w) = [(x' + y')' + (z' + w')' + (y' + w)']'$$



Υλοποίηση OR-AND



Υλοποίηση NOR-NOR

Μερικώς καθορισμένες λογικές συναρτήσεις

Σε αρκετές περιπτώσεις λογικών κυκλωμάτων υπάρχουν συνδυασμοί εισόδων οι οποίοι δεν μπορούν να συμβούν ή δεν είναι επιτρεπτοί.

Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι 3 μεταβλητές x, y και z αντιστοιχούν στους ισάριθμους λαμπτήρες (κόκκινο, πορτοκαλί, πράσινο) ενός φαναριού κυκλοφορίας και ότι η καθεμία από αυτές λαμβάνει λογική τιμή 0 ή 1, όταν ο αντίστοιχος λαμπτήρας είναι σβηστός ή ανοιχτός, αντίστοιχα.

Οι επιτρεπτοί συνδυασμοί τιμών που μπορούν να λάβουν οι μεταβλητές αυτές είναι εκείνοι στους οποίους μόνο μία μεταβλητή έχει λογική τιμή 1 και οι υπόλοιπες δύο έχουν λογική τιμή 0, αφού για την ορθή λειτουργία του φαναριού, μόνο ένας λαμπτήρας μπορεί να είναι ανοιχτός.

Οι συνδυασμοί, δηλαδή, τιμών των μεταβλητών (x,y,z) = 000, 011, 101, 110 111 δεν επιτρέπονται ή δε χρησιμοποιούνται και αναφέρονται ως αδιάφορες λογικές συνθήκες (don’t care logic conditions).

Μερικώς καθορισμένες λογικές συναρτήσεις

Ένα λογικό κύκλωμα με εισόδους τις μεταβλητές x, y και z μπορεί να σχεδιαστεί αγνοώντας τις καταστάσεις αυτές.

Οι ελαχιστόροι που αντιστοιχούν στις αδιάφορες λογικές συνθήκες, αναφέρονται ως αδιάφοροι όροι (don’t care terms) και μια λογική συνάρτηση που περιλαμβάνει αδιάφορους όρους αναφέρεται ως μερικώς καθορισμένη (incompletely specified).

Οι αδιάφοροι όροι μπορούν να χρησιμοποιηθούν, ώστε να προκύψουν λογικά κυκλώματα με μικρότερο αριθμό πυλών.

Η λογική τιμή των συναρτήσεων που αντιστοιχεί στους αδιάφορους όρους μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι 0 ή 1, ανάλογα με το ποια από τις δύο λογικές τιμές είναι κατάλληλη για ευρύτερη απλοποίηση της λογικής συνάρτησης.

Μερικώς καθορισμένες λογικές συναρτήσεις

Στον πίνακα αλήθειας ή στο χάρτη Karnaugh που περιγράφουν μια λογική συνάρτηση, για να διακρίνουμε έναν αδιάφορο όρο από τις τιμές της συνάρτησης που αντιστοιχούν σε επιτρεπτούς συνδυασμούς εισόδων, χρησιμοποιούμε το σύμβολο ×.

Κατά την ομαδοποίηση γειτονικών τετραγώνων του χάρτη Karnaugh, μπορούμε να επιλέξουμε να χρησιμοποιήσουμε για κάθε αδιάφορο όρο (×) λογική τιμή 0 ή 1, ανάλογα με το ποια από τις δύο τιμές του μπορεί να μας οδηγήσει στην απλούστερη μορφή της συνάρτησης.

Στην έκφραση μιας λογικής συνάρτησης που περιλαμβάνει αδιάφορους όρους, θα πρέπει να περιλαμβάνονται και οι αδιάφοροι όροι.

Στο προαναφερόμενο παράδειγμα, η συνάρτηση που δηλώνει ότι τα οχήματα πρέπει να σταματήσουν (κόκκινο, πορτοκαλί) $F(x,y,z) = \Sigma(2, 4) + d(0, 3, 5, 6, 7)$ περιλαμβάνει τους ελαχιστόρους m_2, m_4 και ως αδιάφορους όρους τα λογικά γινόμενα $x'y'z'$, $x'yz$, $xy'z$, xyz', xyz.

Μερικώς καθορισμένες λογικές συναρτήσεις

Παράδειγμα: $F(x,y,z) = \Sigma(2, 4) + d(0, 3, 5, 6, 7)$

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	×
0	0	1	0
0	1	0	**1**
0	1	1	×
1	0	0	**1**
1	0	1	×
1	1	0	×
1	1	1	×

x \ yz	00	01	11	10
0	×		×	1
1	1	×	×	×

Μερικώς καθορισμένες λογικές συναρτήσεις

Παράδειγμα: $F(x,y,z) = \Sigma(2, 4) + d(0, 3, 5, 6, 7)$

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	×
0	0	1	0
0	1	0	**1**
0	1	1	×
1	0	0	**1**
1	0	1	×
1	1	0	×
1	1	1	×

y

x \ yz	00	01	11	10
0	×		×	$\boxed{1}$
x 1	$\boxed{1}$	×	×	×

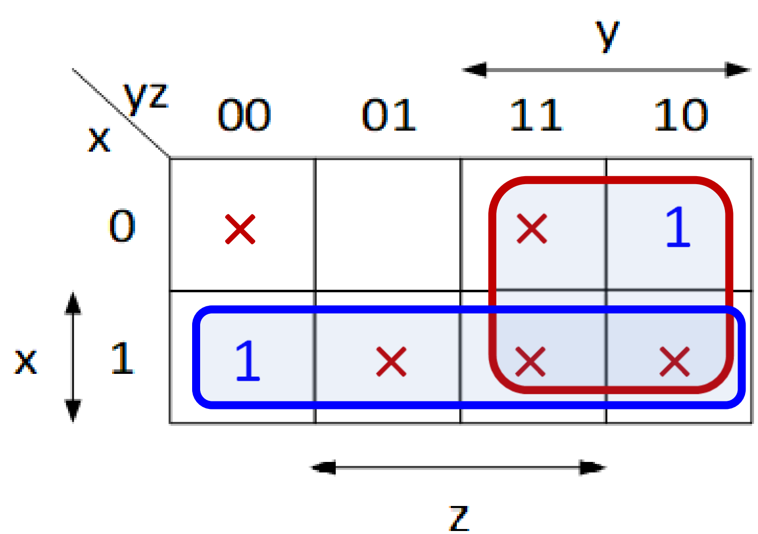
z

$F(x,y,z) = xy'z' + x'yz'$

Μερικώς καθορισμένες λογικές συναρτήσεις

Παράδειγμα: $F(x,y,z) = \Sigma(2, 4) + d(0, 3, 5, 6, 7)$

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	×
0	0	1	0
0	1	0	**1**
0	1	1	×
1	0	0	**1**
1	0	1	×
1	1	0	×
1	1	1	×



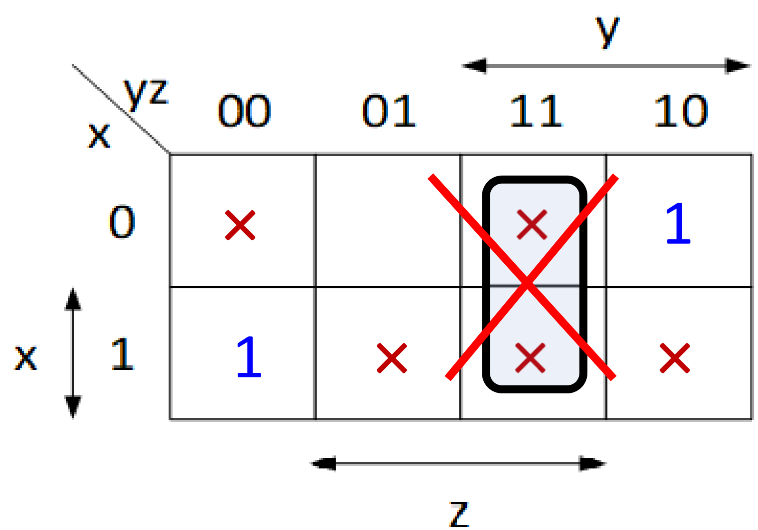
$F(x,y,z) = x + y$

Η αξιοποίηση των αδιάφορων όρων οδηγεί σε απλούστερη μορφή της λογικής συνάρτησης και επομένως σε οικονομικότερη υλοποίηση

Μερικώς καθορισμένες λογικές συναρτήσεις

Παράδειγμα: $F(x,y,z) = \Sigma(2, 4) + d(0, 3, 5, 6, 7)$

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	×
0	0	1	0
0	1	0	**1**
0	1	1	×
1	0	0	**1**
1	0	1	×
1	1	0	×
1	1	1	×



Δεν σχηματίζουμε ομάδες μόνο με αδιάφορους όρους