3. Δυαδική λογική, λογικές πύλες και άλγεβρα Boole, λογικές συναρτήσεις και λογικά κυκλώματα

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
& Μηχανικών Υπολογιστών
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

Μαθηματική λογική

Στη μαθηματική λογική χρησιμοποιούμε τον όρο λογική πρόταση, δηλαδή μια έκφραση με αυτοτελές νόημα, που επιδέχεται έναν μόνο χαρακτηρισμό, αληθής (true) ή ψευδής (false), αποκλείοντας κάθε άλλη περίπτωση.

Οι χαρακτηρισμοί αληθής (true) και ψευδής (false) αναφέρονται ως τιμές αλήθειας ή λογικές τιμές της λογικής πρότασης.

Για παράδειγμα, η πρόταση «ο αριθμός 3 είναι περιττός» λαμβάνει τιμή «αληθής», ενώ η πρόταση «ο αριθμός 6 είναι περιττός» λαμβάνει τιμή «ψευδής».

Επειδή οι απλές λογικές προτάσεις δεν αρκούν πάντα για να εκφράσουμε αυτό που θέλουμε, μπορούμε να συνδέσουμε μεταξύ τους δύο ή περισσότερες προτάσεις, χρησιμοποιώντας λογικούς συνδέσμους, δημιουργώντας έτσι σύνθετες προτάσεις.

Μαθηματική λογική

Βασικοί λογικοί σύνδεσμοι είναι οι εκφράσεις: και, είτε, ή, όχι (δεν).

Οι διάφοροι τρόποι (συνδυασμοί) με τους οποίους μπορούμε να συνδέσουμε απλές λογικές προτάσεις για να δημιουργήσουμε μια σύνθετη πρόταση, αποτελούν τις λογικές πράξεις μεταξύ των λογικών προτάσεων.

Η λογική τιμή μιας σύνθετης πρότασης καθορίζεται από τις τιμές των απλών προτάσεων που την αποτελούν και, φυσικά, και από τον τρόπο που συνδυάζονται αυτές για να σχηματίσουν τη σύνθετη πρόταση.

Στη μαθηματική λογική, οι λογικές τιμές των σύνθετων προτάσεων συνήθως προσδιορίζονται μέσω του πίνακα λογικών τιμών ή πίνακα αλήθειας, ο οποίος περιλαμβάνει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των λογικών τιμών των προτάσεων που συνιστούν τη σύνθετη πρόταση, καθώς και τις λογικές τιμές που λαμβάνει η σύνθετη πρόταση για κάθε συνδυασμό.

Μαθηματική λογική και λογικές πράξεις

Σύζευξη δύο λογικών προτάσεων, έστω p και q, αποκαλούμε τη λογική πρόταση «p και q» ή «p ∧ q», η οποία είναι αληθής μόνο στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις είναι αληθείς και ψευδής σε κάθε άλλη περίπτωση.

Αυτό σημαίνει ότι για να είναι ψευδής η σύζευξη δύο, ή και περισσοτέρων, προτάσεων αρκεί να είναι ψευδής μία μόνο από τις λογικές προτάσεις, χωρίς να μας ενδιαφέρει η λογική τιμή των υπόλοιπων προτάσεων.

Πίνακας αλήθειας της λογικής πράξης σύζευξης (και)		
p	**q**	**p Λ q**
False	False	False
False	True	False
True	False	False
True	True	True

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

Μαθηματική λογική και λογικές πράξεις

Διάζευξη δύο λογικών προτάσεων, έστω p και q, αποκαλούμε τη λογική πρόταση «p είτε q» ή «p V q», η οποία είναι ψευδής μόνο στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις είναι ψευδείς και αληθής σε κάθε άλλη περίπτωση.

Αυτό σημαίνει ότι για να είναι αληθής η διάζευξη δύο ή περισσότερων προτάσεων αρκεί να είναι αληθής μία μόνο από τις λογικές προτάσεις, χωρίς να μας ενδιαφέρει η λογική τιμή των υπόλοιπων προτάσεων

Πίνακας αλήθειας της λογικής πράξης διάζευξης (είτε)		
p	**q**	**p V q**
False	False	False
False	True	True
True	False	True
True	True	True

Μαθηματική λογική και λογικές πράξεις

Αποκλειστική διάζευξη δύο λογικών προτάσεων, έστω p και q, αποκαλούμε τη λογική πρόταση «p ή q» ή «p $\underline{\vee}$ q», η οποία είναι ψευδής στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις έχουν την ίδια τιμή αληθείας και αληθής στην περίπτωση που οι δύο προτάσεις έχουν διαφορετικές τιμές αληθείας.

Αυτό σημαίνει ότι για να είναι αληθής η αποκλειστική διάζευξη δύο προτάσεων πρέπει να είναι αληθής μόνο μία από τις λογικές προτάσεις.

Πίνακας αλήθειας της λογικής πράξης αποκλειστικής διάζευξης (ή)		
p	**q**	**p $\underline{\vee}$ q**
False	False	False
False	True	True
True	False	True
True	True	False

Μαθηματική λογική και λογικές πράξεις

Άρνηση μιας λογικής πρότασης p αποκαλούμε την πρόταση «όχι p» ή «p′», η οποία είναι αληθής στην περίπτωση που η p είναι ψευδής και ψευδής στην περίπτωση που η p είναι αληθής.

Οι τιμές αληθείας των λογικών προτάσεων p και p′ είναι πάντα αντίθετες. Η άρνηση διαφέρει από τις άλλες λογικές πράξεις στο ότι είναι μια μονομελής πράξη.

Πίνακας αλήθειας της λογικής πράξης άρνησης (όχι)	
p	**p′**
False	True
True	False

Δυαδική λογική

Η δυαδική λογική διέπεται από τη μαθηματική λογική και αποτελεί μια περίπτωση εφαρμογής της.

Στη δυαδική λογική συμμετέχουν οι δυαδικές μεταβλητές, δηλαδή μεταβλητές που μπορούν να πάρουν δύο μόνο διακριτές τιμές, καθώς και οι λογικές πράξεις.

Στα ψηφιακά συστήματα οι δύο δυνατές τιμές των δυαδικών μεταβλητών είναι «λογικό 1» και «λογικό 0» ή απλά 1 και 0, οι οποίες είναι αντίστοιχες των λογικών τιμών «αληθής» και «ψευδής».

Οι λογικές πράξεις που χρησιμοποιούμε στη δυαδική λογική περιλαμβάνουν τη σύζευξη (και, AND), τη διάζευξη (είτε, OR), την αποκλειστική διάζευξη (ή, Exclusive OR ή XOR) και την άρνηση (όχι, NOT).

Δίτιμη άλγεβρα Boole

Η δίτιμη άλγεβρα Boole πραγματεύεται δυαδικές μεταβλητές και λογικές πράξεις, οι οποίες υλοποιούνται με ηλεκτρονικά κυκλώματα που ονομάζονται λογικές πύλες, τα κύρια στοιχεία των οποίων είναι τα τρανζίστορ.

Κάθε δυαδική μεταβλητή μπορεί να πάρει μία από δύο μόνο διαφορετικές τιμές, 0 ή 1.

Οι βασικές λογικές πράξεις της δίτιμης άλγεβρας Boole είναι οι πράξεις AND, OR και NOT, οι οποίες είναι αντίστοιχες με τις λογικές πράξεις που προαναφέρθηκαν.

Η δίτιμη άλγεβρα Boole αναφέρεται και ως άλγεβρα των διακοπτών, αφού υπάρχει αντιστοιχία των βασικών λογικών πράξεων με απλά ηλεκτρικά κυκλώματα διακοπτών.

Δίτιμη άλγεβρα Boole και κυκλώματα διακοπτών

Το απλούστερο δυαδικό στοιχείο είναι ένας διακόπτης s, που έχει 2 καταστάσεις, ανοιχτός (OFF) και κλειστός (ON).

Μπορούμε να θέσουμε s = 0 για την κατάσταση OFF και s = 1 για την κατάσταση ON.

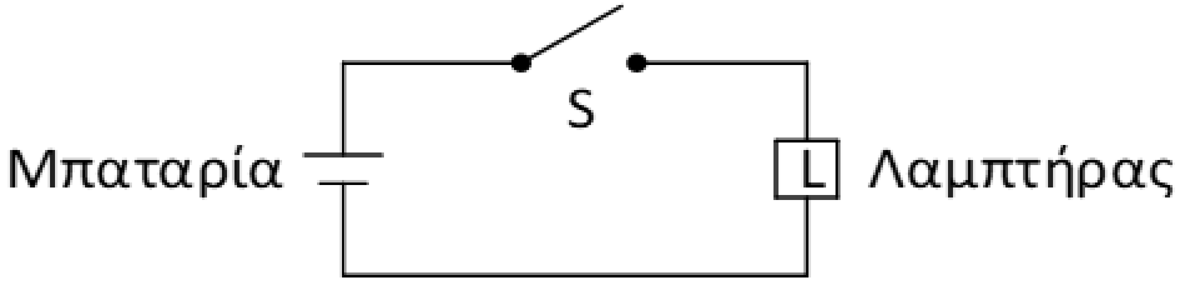
Επομένως, μια δυαδική μεταβλητή μπορεί να αντιστοιχιστεί με έναν διακόπτη δύο καταστάσεων.

Δίτιμη άλγεβρα Boole και κυκλώματα διακοπτών

Το παρακάτω κύκλωμα περιλαμβάνει μια μπαταρία, έναν διακόπτη s και ένα λαμπτήρα L.

Για να ανάψει ο λαμπτήρας (L = 1), πρέπει να διέλθει από αυτόν ηλεκτρικό ρεύμα και για να συμβεί αυτό πρέπει ο διακόπτης να είναι κλειστός (s = 1).

Εάν ο διακόπτης είναι ανοικτός (s = 0), ο λαμπτήρας δεν ανάβει (L = 0).



Δίτιμη άλγεβρα Boole και κυκλώματα διακοπτών

Η εξάρτηση της λειτουργίας του λαμπτήρα L από την κατάσταση του διακόπτη s περιγράφεται μέσω μιας λογικής έκφρασης: $L(s) = s$

Αυτή η λογική έκφραση αναφέρεται ως λογική συνάρτηση και περιγράφει την κατάσταση του λαμπτήρα L (έξοδος ή μεταβλητή εξόδου) ως συνάρτηση της κατάστασης του διακόπτη s (είσοδος ή μεταβλητή εισόδου).

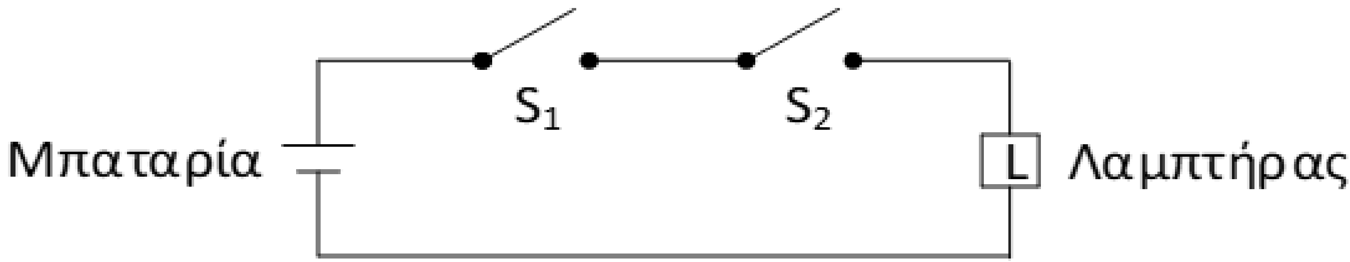
Η λογική συνάρτηση περιγράφεται από έναν πίνακα αλήθειας:

s	L(s)
0	0
1	1

Δίτιμη άλγεβρα Boole και κυκλώματα διακοπτών

Κατά τη σειριακή σύνδεση δύο διακοπτών, ο λαμπτήρας ανάβει ($L = 1$) μόνο όταν και οι δύο διακόπτες είναι κλειστοί, δηλαδή όταν: $s_1 = 1$ ΚΑΙ $s_2 = 1$.

Εάν τουλάχιστον ένας διακόπτης είναι ανοικτός ($s_i = 0$), ο λαμπτήρας δεν ανάβει ($L = 0$).



Η συμπεριφορά αυτή εκφράζεται με τη λογική συνάρτηση:

$$L(s_1, s_2) = s_1 \textbf{ AND } s_2 = s_1 \cdot s_2$$

Δίτιμη άλγεβρα Boole και κυκλώματα διακοπτών

Το σύμβολο « · » ονομάζεται τελεστής της λογικής πράξης AND (ή τελεστής λογικού γινόμενου) και το αντίστοιχο κύκλωμα διακοπτών υλοποιεί τη λογική πράξη AND.

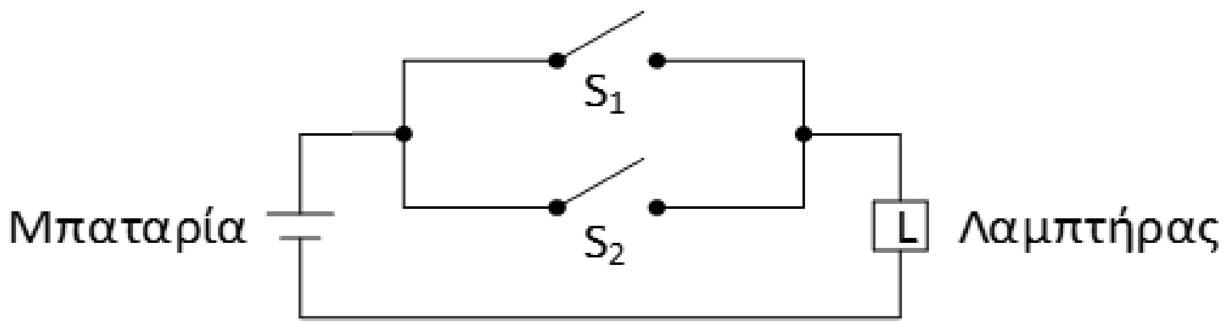
Ο πίνακας αλήθειας της λογικής πράξης AND είναι:

Πίνακας αλήθειας λογικής πράξης AND		
s_1	s_2	$s_1 \cdot s_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Δίτιμη άλγεβρα Boole και κυκλώματα διακοπτών

Κατά την παράλληλη σύνδεση των δύο διακοπτών, ο λαμπτήρας ανάβει ($L = 1$), εάν είναι κλειστός είτε ο διακόπτης s_1, είτε ο διακόπτης s_2, είτε και οι δύο διακόπτες ($s_i = 1$), δηλαδή όταν $s_1 = 1$ ΕΙΤΕ $s_2 = 1$.

Εάν και οι δύο διακόπτες είναι ανοικτοί ($s_i = 0$), ο λαμπτήρας δεν ανάβει ($L = 0$).



Η συμπεριφορά αυτή εκφράζεται με τη λογική συνάρτηση:

$$L(s_1, s_2) = s_1 \textbf{ OR } s_2 = s_1 + s_2$$

Δίτιμη άλγεβρα Boole και κυκλώματα διακοπτών

Το σύμβολο «**+**» ονομάζεται τελεστής της λογικής πράξης OR (ή τελεστής του λογικού αθροίσματος) και το αντίστοιχο κύκλωμα διακοπτών υλοποιεί τη λογική πράξη OR.

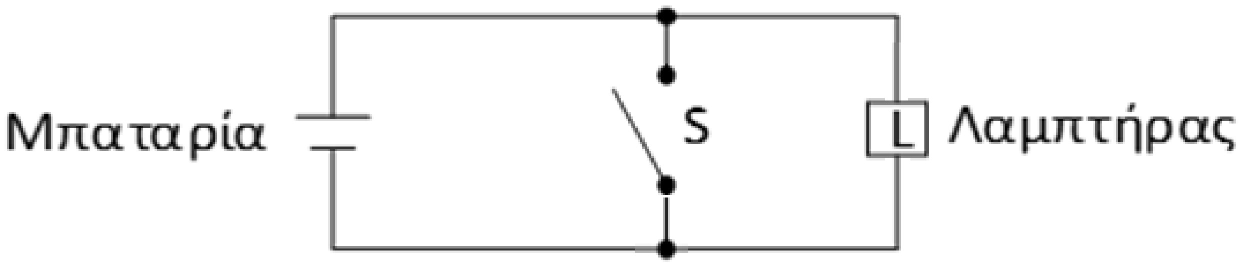
Ο πίνακας αλήθειας της λογικής πράξης OR είναι:

Πίνακας αλήθειας λογικής πράξης OR		
s_1	s_2	$s_1 + s_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Δίτιμη άλγεβρα Boole και κυκλώματα διακοπτών

Με σύνδεση ενός διακόπτη παράλληλα με τον λαμπτήρα, ο λαμπτήρας δεν ανάβει ($L = 0$) όταν ο διακόπτης είναι κλειστός ($s = 1$), αφού τότε το ρεύμα θα διέλθει εξ’ ολοκλήρου από τον διακόπτη (που δεν έχει αντίσταση) και όχι από τον λαμπτήρα (που έχει αντίσταση και βραχυκυκλώνεται από τον κλειστό διακόπτη).

Αντιθέτως, όταν ο διακόπτης είναι ανοικτός ($s = 0$), το ρεύμα διέρχεται από τον λαμπτήρα και αυτός ανάβει ($L = 1$).



Η συμπεριφορά αυτή εκφράζεται με τη λογική συνάρτηση:

$$L(s) = \textbf{NOT}(s) = s'$$

Δίτιμη άλγεβρα Boole και κυκλώματα διακοπτών

Το σύμβολο « ′ » ονομάζεται τελεστής της λογικής πράξης NOT (ή τελεστής της λογικής άρνησης ή τελεστής αντιστροφής ή συμπλήρωμα).

Ο πίνακας αλήθειας της λογικής πράξης NOT είναι:

Πίνακας αλήθειας λογικής πράξης NOT	
s	**s′**
0	1
1	0

Επέκταση βασικών λογικών πράξεων

Οι λογικές πράξεις AND και OR μπορούν να επεκταθούν για n μεταβλητές.

Ειδικότερα, η πράξη AND μεταξύ των μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots, x_n$ έχει ως αποτέλεσμα τη λογική τιμή 1 μόνο όταν όλες οι μεταβλητές λαμβάνουν λογική τιμή 1.

Παρομοίως, η πράξη OR μεταξύ των μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots, x_n$ έχει ως αποτέλεσμα τη λογική τιμή 1, όταν τουλάχιστον μία από τις μεταβλητές λαμβάνει τιμή 1.

x_1	x_2	x_3	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$x_1 + x_2 + x_3$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Δίτιμη άλγεβρα Boole και λογικές συναρτήσεις

Οι λογικές συναρτήσεις περιγράφονται συνήθως από αλγεβρικές εκφράσεις που περιλαμβάνουν δυαδικές μεταβλητές, τις σταθερές τιμές 0 και 1, τους τελεστές των τριών βασικών λογικών πράξεων, παρενθέσεις και αγκύλες.

Οι αλγεβρικές εκφράσεις είναι σύνθεση λογικών πράξεων μεταξύ των δυαδικών μεταβλητών και των σταθερών τιμών.

Κάθε λογική συνάρτηση λαμβάνει τιμή 0 ή 1, ανάλογα με τις λογικές τιμές των δυαδικών μεταβλητών που συμμετέχουν σε αυτήν.

Οι πιθανές τιμές που μπορεί να λάβει μια λογική συνάρτηση προσδιορίζονται με τον υπολογισμό της τιμής της αλγεβρικής έκφρασης που την περιγράφει, για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών και αποτυπώνονται στον πίνακα αλήθειας της λογικής συνάρτησης.

Δίτιμη άλγεβρα Boole και λογικές συναρτήσεις

Εκτός, λοιπόν από την περιγραφή μιας λογικής συνάρτησης μέσω αλγεβρικής έκφρασης, μια λογική συνάρτηση περιγράφεται μέσω του πίνακα αλήθειας που περιλαμβάνει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς τιμών των μεταβλητών που συμμετέχουν στη συνάρτηση, καθώς και την τιμή της συνάρτησης αυτής για κάθε συνδυασμό.

Το πλήθος των δυνατών συνδυασμών n μεταβλητών που συμμετέχουν σε μία συνάρτηση είναι 2^n και προκύπτουν εύκολα, εάν γράψουμε κατά σειρά τους δυαδικούς αριθμούς από 0 έως 2^{n-1} και αντιστοιχίσουμε κάθε δυαδικό ψηφίο σε μία από τις μεταβλητές.

Δίτιμη άλγεβρα Boole και λογικές συναρτήσεις

Παράδειγμα: Η λογική συνάρτηση F(x,y,z) που περιγράφεται από την αλγεβρική έκφραση $F(x,y,z) = x' \cdot y + x \cdot z$, περιλαμβάνει 3 δυαδικές μεταβλητές και λαμβάνει λογική τιμή 1, όταν η μεταβλητή x και η μεταβλητή y έχουν τιμή 0 και 1, αντίστοιχα, ή όταν οι μεταβλητές x και z έχουν τιμή 1, ενώ λαμβάνει λογική τιμή 0 για τους υπόλοιπους δυνατούς συνδυασμούς των μεταβλητών που συμμετέχουν σε αυτήν.

Ο πίνακας αλήθειας της F(x,y,z) περιλαμβάνει 8 (2^3) γραμμές και 4 στήλες (μία στήλη για κάθε μεταβλητή και μία στήλη για τη συνάρτηση).

Μειονέκτημα της περιγραφής μιας λογικής συνάρτησης μέσω πίνακα αλήθειας είναι ότι το μέγεθος του πίνακα αυξάνεται εκθετικά με το πλήθος των μεταβλητών (π.χ. 16 μεταβλητές, 2^{16} γραμμές).

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Δίτιμη άλγεβρα Boole και λογικές συναρτήσεις

Η λογική πράξη NOT εκτελείται σε μία μεταβλητή, αλλά μπορεί να εφαρμοστεί και σε μία λογική συνάρτηση.

Για παράδειγμα, εάν εφαρμοστεί η λογική πράξη NOT στη λογική συνάρτηση $F(x,y,z) = x' \cdot y + x \cdot z$, δηλαδή $F'(x,y,z) = (x' \cdot y + x \cdot z)'$, η συνάρτηση $F'(x,y,z)$ που προκύπτει αναφέρεται ως συμπληρωματική συνάρτηση της $F(x,y,z)$.

Μια λογική συνάρτηση F' ονομάζεται συμπληρωματική συνάρτηση μιας συνάρτησης F, όταν λαμβάνει λογική τιμή 1 ή 0, για τους συνδυασμούς τιμών των μεταβλητών για τους οποίους η συνάρτηση F λαμβάνει τιμή 0 ή 1, αντίστοιχα.

Ο τιμές στον πίνακα αλήθειας της συμπληρωματικής συνάρτησης F', προκύπτουν εύκολα από εκείνες της συνάρτησης F για κάθε συνδυασμό τιμών των μεταβλητών.

Λογικές πύλες

Κάθε λογική πράξη υλοποιείται σε επίπεδο ηλεκτρονικού κυκλώματος με τρανζίστορ, οπότε προκύπτει ένα στοιχείο κυκλώματος που ονομάζεται λογική πύλη (logic gate).

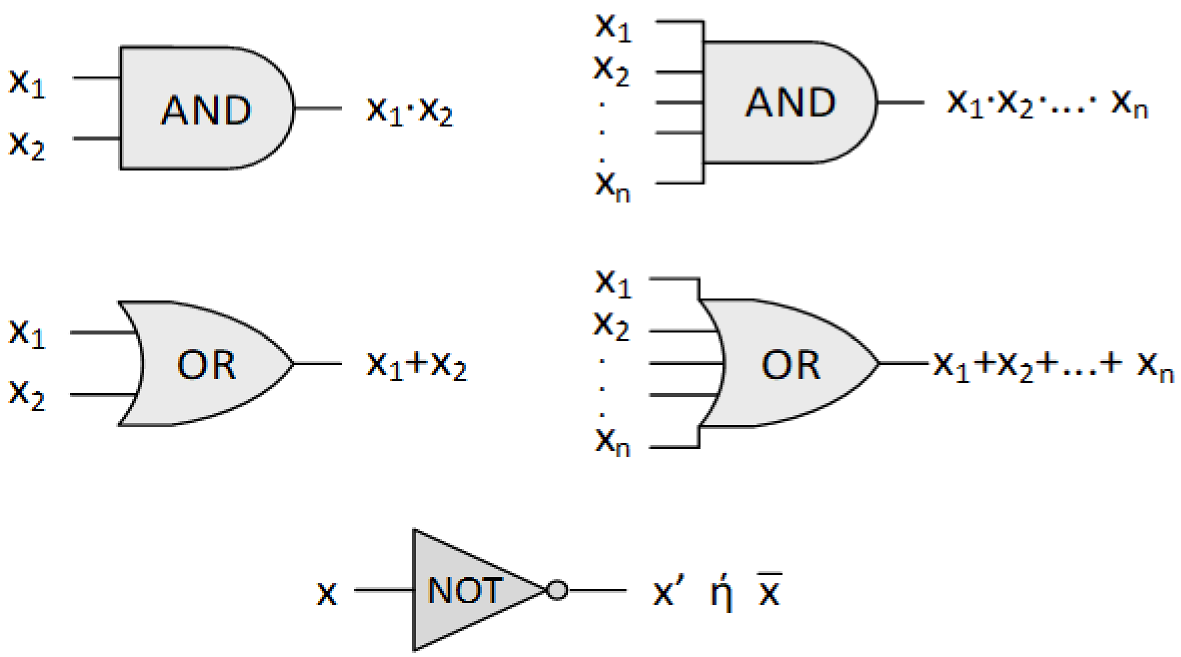
Μια λογική πύλη μπορεί να έχει μία ή περισσότερες εισόδους και μόνο μια έξοδο, που είναι συνάρτηση των εισόδων της.

Οι είσοδοι αντιστοιχούν στις μεταβλητές της λογικής πράξης, ενώ η τιμή της εξόδου προκύπτει από τη λογική πράξη που επιτελεί η πύλη μεταξύ των τρεχουσών τιμών των μεταβλητών.

Οι λογικές πύλες ανταποκρίνονται στη χαμηλή και την υψηλή στάθμη των δυαδικών σημάτων, οι οποίες εκφράζονται με τις λογικές τιμές 0 και 1, αντίστοιχα.

Λογικές πύλες

Τα σύμβολα των λογικών πυλών AND και OR με δύο και περισσότερες εισόδους, καθώς και το σύμβολο της λογικής πύλης NOT (που αναφέρεται και ως αντιστροφέας) είναι τα παρακάτω:



Υλοποίηση λογικών πυλών

Για την υλοποίηση λογικών πυλών χρησιμοποιούνται τρανζίστορ, τα οποία είναι ηλεκτρονικά στοιχεία που λειτουργούν ως διακόπτες, με δύο επιτρεπτές καταστάσεις λειτουργίας αντίστοιχες με τις λογικές τιμές 0, 1.

Η αποδοτικότερη τεχνολογία υλοποίησης βασίζεται στη χρήση τρανζίστορ επίδρασης πεδίου μετάλλου-οξειδίου-ημιαγωγού (metal-oxide-semiconductor field-effect transistors, MOSFETs), τα οποία διακρίνονται σε τρανζίστορ διαύλου αρνητικού φορτίου (nMOS) και τρανζίστορ διαύλου θετικού φορτίου (pMOS), ανάλογα με την πολικότητα των φορέων φορτίου που συμμετέχουν στη λειτουργία τους.

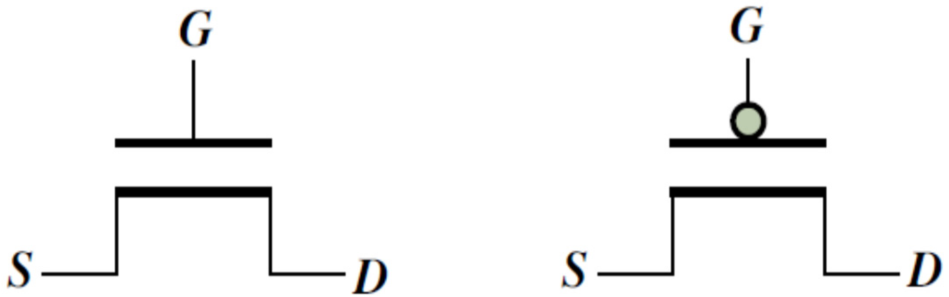
Η συμπληρωματική τεχνολογία μετάλλου-οξειδίου-ημιαγωγού (complementary metal-oxide-semiconductor, CMOS) βασίζεται στη συνδυασμένη χρήση των δύο τύπων MOSFETs.

Σε σχέση με άλλες τεχνολογίες υλοποίησης, η τεχνολογία CMOS παρουσιάζει μεγαλύτερη δυνατότητα ενσωμάτωσης μεγάλου αριθμού πυλών σε ένα κύκλωμα και χαμηλή κατανάλωση ενέργειας.

Υλοποίηση λογικών πυλών

Το τρανζίστορ nMOS συμπεριφέρεται ως κλειστός διακόπτης, όταν στον ακροδέκτη της πύλης του (G) εφαρμόζεται υψηλή στάθμη τάσης (λογική τιμή 1), ενώ όταν εφαρμόζεται χαμηλή στάθμη τάσης (λογική τιμή 0) συμπεριφέρεται ως ανοιχτός διακόπτης.

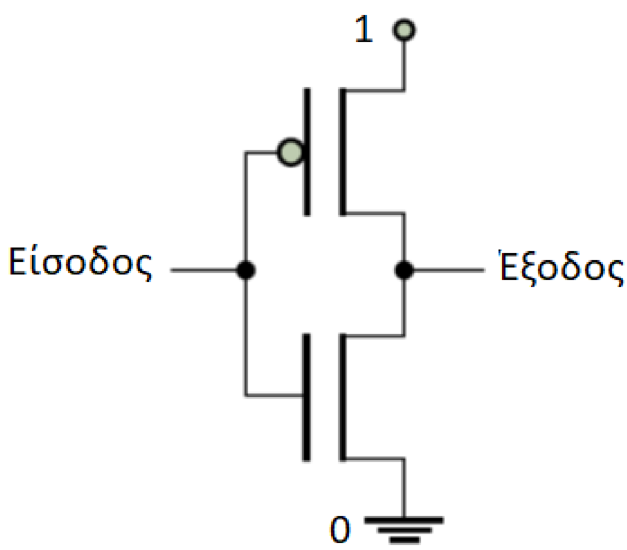
Το τρανζίστορ pMOS λειτουργεί αντίθετα.



nMOS pMOS

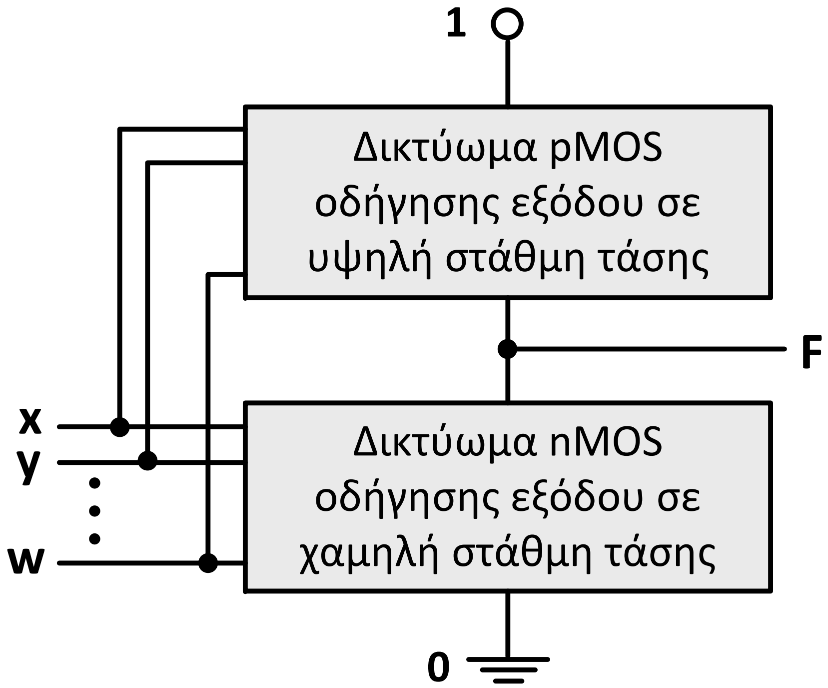
Υλοποίηση λογικών πυλών

Ο αντιστροφέας (πύλη NOT) υλοποιείται εύκολα με συνδυασμένη χρήση ενός τρανζίστορ nMOS και ενός τρανζίστορ pMOS.



Η βάση για την υλοποίηση άλλων λογικών πυλών είναι μια δομή που περιλαμβάνει δικτύωμα από τρανζίστορ nMOS για την οδήγηση της εξόδου του κυκλώματος σε χαμηλή στάθμη τάσης και δικτύωμα από τρανζίστορ pMOS για την οδήγηση της εξόδου σε υψηλή στάθμη τάσης.

Υλοποίηση λογικών πυλών

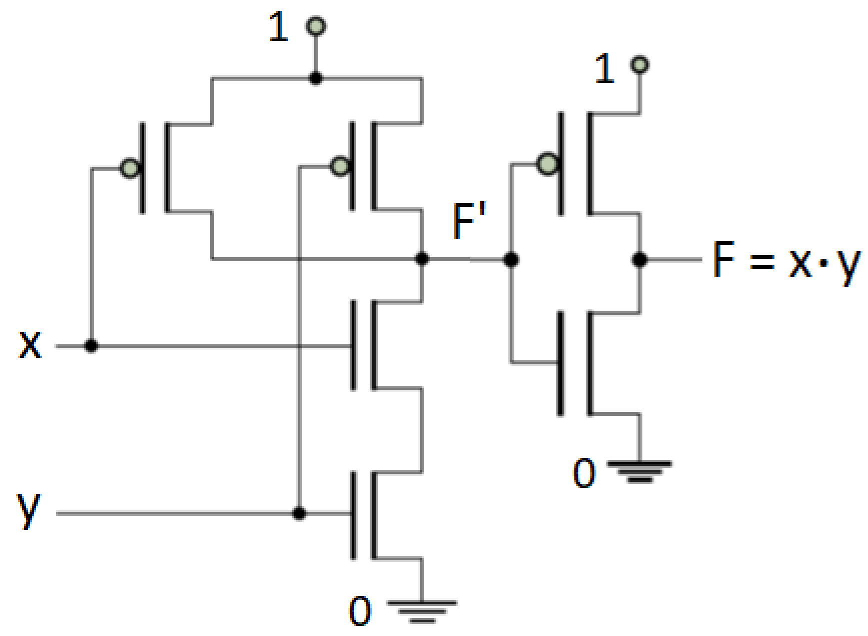


Τα δύο δικτυώματα δομούνται έτσι ώστε να δημιουργείται διαδρομή κλειστών διακοπτών στο δικτύωμα nMOS για τους συνδυασμούς τιμών των εισόδων, για τους οποίους η λογική συνάρτηση της πύλης λαμβάνει τιμή 0, ή στο δικτύωμα pMOS για τους συνδυασμούς τιμών των εισόδων, για τους οποίους η συνάρτηση λαμβάνει τιμή 1.

Υλοποίηση λογικών πυλών

Πύλη AND 2 εισόδων
τεχνολογίας CMOS

Πίνακας αλήθειας λογικής πράξης AND			
x	y	F'	F = x ·y
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1



Παράγωγες λογικές πύλες

Όπως προαναφέρθηκε, η λογική πράξη NOT μπορεί να εφαρμοστεί σε μια μεταβλητή, αλλά και σε μία λογική συνάρτηση.

Επίσης, αναφέρθηκε ότι οι λογικές συναρτήσεις προκύπτουν με σύνθεση λογικών πράξεων.

Εκτός από τις 3 βασικές λογικές πύλες, υπάρχουν και άλλες πύλες, οι οποίες συντίθενται από τις βασικές και για το λόγο αυτό ονομάζονται παράγωγες λογικές πύλες και είναι οι λογικές πύλες XOR, NAND, NOR και XNOR.

Η λογική πύλη XOR (αποκλειστικού ή, Exclusive OR) υλοποιεί τη λογική πράξη της αποκλειστικής διάζευξης, σύμφωνα με την οποία, για να έχει η λογική πράξη XOR μεταξύ 2 μεταβλητών, ως αποτέλεσμα λογική τιμή 1, πρέπει μία μόνο μεταβλητή να έχει τιμή 1.

Η συμπεριφορά αυτή, εκφράζεται με τη λογική συνάρτηση:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \text{ XOR } x_2 = x_1 \oplus x_2, \quad \oplus\text{: τελεστής πράξης XOR}$$

Παράγωγες λογικές πύλες

Πίνακας αλήθειας της λογικής πράξης XOR:

Πίνακας αλήθειας λογικής πράξης XOR δύο μεταβλητών		
x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Για περισσότερες από δύο εισόδους, η έξοδος μιας πύλης XOR λαμβάνει λογική τιμή 1, όταν περιττός αριθμός εισόδων λαμβάνει τιμή 1, και λογική τιμή 0, όταν άρτιος αριθμός εισόδων λαμβάνει τιμή 1.

Παράγωγες λογικές πύλες

Η λογική πράξη XOR μπορεί να υλοποιηθεί με τη σύνθεση των λογικών πράξεων AND, OR και NOT, σύμφωνα με τη λογική έκφραση:

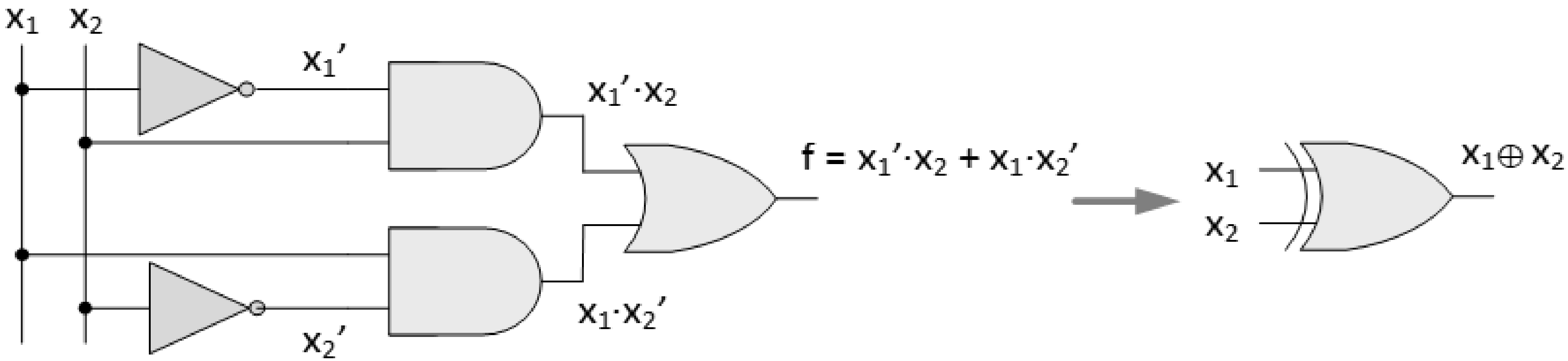
$$x_1 \oplus x_2 = x'_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x'_2$$

Η απόδειξη της ισχύος αυτής της λογικής σχέσης μπορεί να γίνει με τη χρήση διαδοχικών πινάκων αλήθειας.

x_1	x_2	x_1'	x_2'	$x_1' \cdot x_2$	$x_1 \cdot x_2'$	$x_1' \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2'$	$x_1 \oplus x_2$
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0

Παράγωγες λογικές πύλες

Λογικό κύκλωμα με βασικές λογικές πύλες, που υλοποιεί τη λογική πράξη XOR, και σύμβολο της λογικής πύλης XOR:

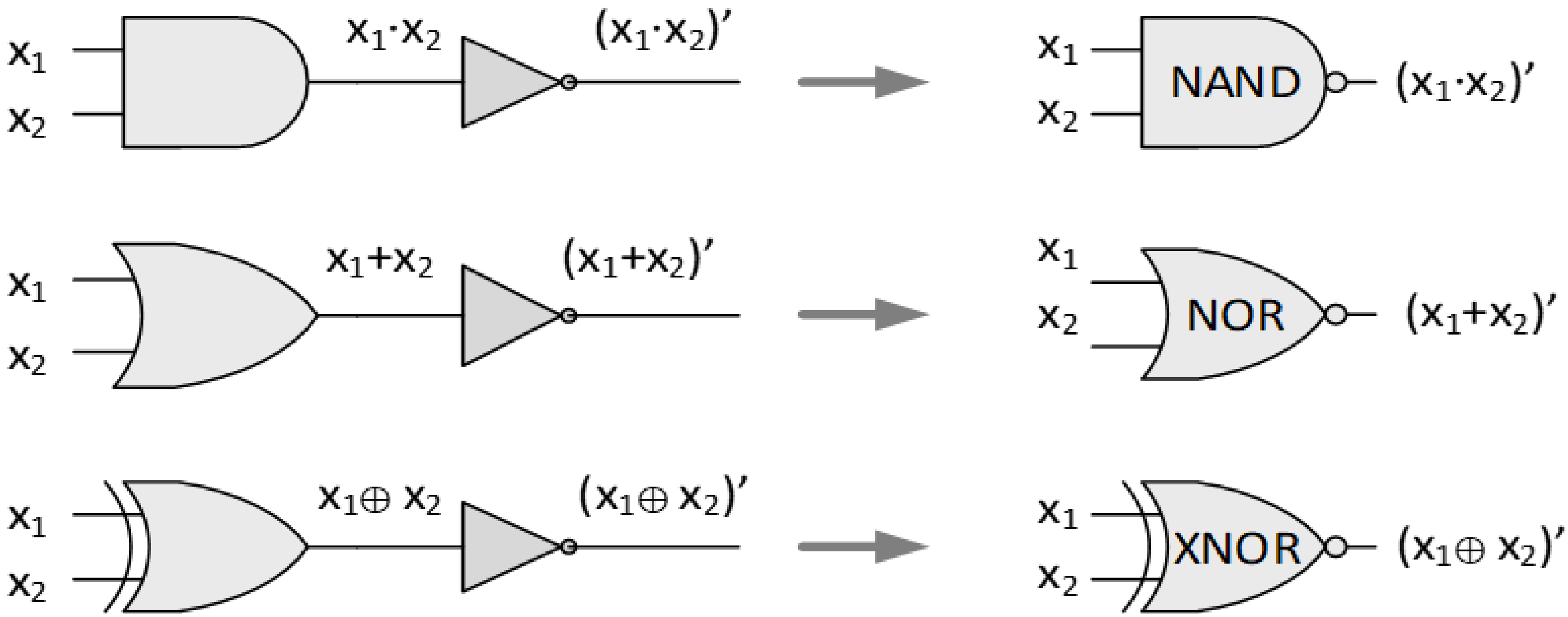


Παράγωγες λογικές πύλες

Από τον πίνακα αλήθειας της λογικής πύλης XOR 2 εισόδων, συμπεραίνουμε επίσης ότι η πύλη αυτή έχει τη δυνατότητα αναγνώρισης της διαφορετικότητας των τιμών των εισόδων, αφού η έξοδός λαμβάνει τιμή 1, μόνο όταν οι είσοδοί της λαμβάνουν διαφορετικές λογικές τιμές, ενώ λαμβάνει τιμή 0 όταν οι είσοδοί της λαμβάνουν την ίδια τιμή.

Οι άλλες τρεις παράγωγες λογικές πύλες, NAND, NOR και XNOR, προκύπτουν από τη σύνθεση των λογικών πυλών AND, OR και XOR με τη λογική πύλη NOT και, συγκεκριμένα, με τη σύνδεση μιας λογικής πύλης NOT στην έξοδο κάθε μιας λογικής πύλης AND, OR και XOR, αντίστοιχα.

Παράγωγες λογικές πύλες



Παράγωγες λογικές πύλες

Συγκεντρωτικός πίνακες αλήθειας για όλες τις λογικές πράξεις (βασικές και παράγωγες) μεταξύ δύο μεταβλητών:

Πίνακες αλήθειας δύο μεταβλητών							
x	y	$x \cdot y$	$(x \cdot y)'$	$x+y$	$(x+y)'$	$x \oplus y$	$(x \oplus y)'$
0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	1

Παράγωγες λογικές πύλες

Η πύλη NAND 2 εισόδων παράγει ως έξοδο το συμπλήρωμα της εξόδου της πύλης AND, δηλαδή, η έξοδός της λαμβάνει τιμή 1, όταν τουλάχιστον μία από τις 2 εισόδους της λαμβάνει τιμή 0, διαφορετικά η έξοδός της ισούται με 0.

Η πύλη NOR 2 εισόδων παράγει ως έξοδο το συμπλήρωμα της εξόδου της πύλης OR, δηλαδή, η έξοδος της πύλης NOR λαμβάνει τιμή 0, όταν τουλάχιστον μία από τις 2 εισόδους της λαμβάνει λογική τιμή 1, ενώ όταν και οι δύο είσοδοί της λαμβάνουν τιμή 0, η έξοδος της πύλης λαμβάνει τιμή 1.

Η πύλη XNOR 2 εισόδων παράγει ως έξοδο το συμπλήρωμα της εξόδου της πύλης XOR, δηλαδή, η έξοδος της πύλης XNOR ισούται με 1, όταν και οι δύο είσοδοί της λαμβάνουν την ίδια τιμή, ενώ όταν οι δύο είσοδοί της λαμβάνουν διαφορετική τιμή, η έξοδος της πύλης ισούται με 0.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η πύλη XNOR 2 εισόδων αναγνωρίζει την ομοιότητα των τιμών των εισόδων της και για το λόγο αυτό η λογική πράξη που επιτελεί αναφέρεται ως πράξη ισοδυναμίας.

Επέκταση λογικών πυλών

Συγκεντρωτικός πίνακες αλήθειας για όλες τις λογικές πράξεις (βασικές και παράγωγες) μεταξύ 3 μεταβλητών:

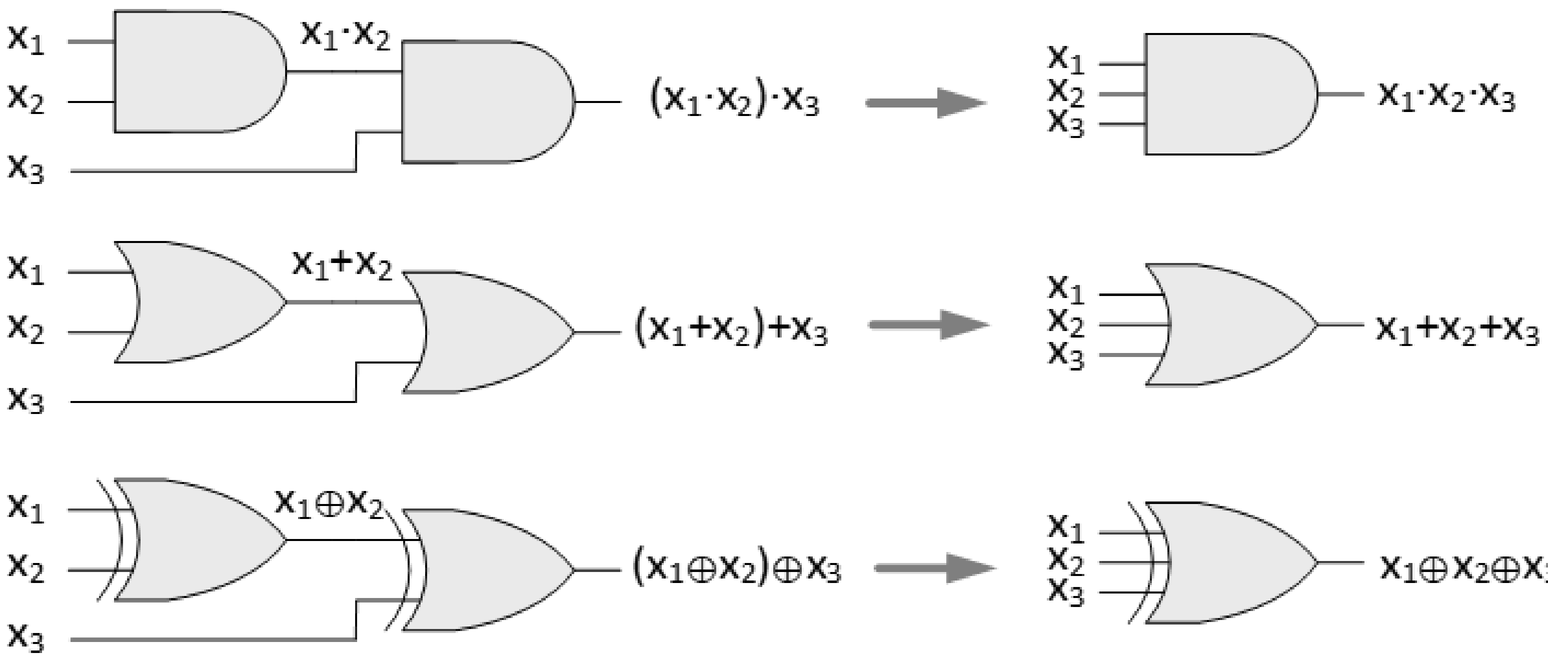
Πίνακες αλήθειας τριών μεταβλητών								
x	y	z	x•y•z	(x•y•z)’	x+y+z	(x+y+z)’	x⊕y⊕z	(x⊕y⊕z)’
0	0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0	1	0

XOR: Περιττή συνάρτηση

XNOR: Άρτια συνάρτηση

Επέκταση λογικών πυλών

Οι λογικές πύλες AND, OR και XOR τριών ή περισσότερων εισόδων μπορούν να υλοποιηθούν με διαδοχική σύνδεση πυλών AND, OR και XOR 2 εισόδων.



Επέκταση λογικών πυλών

Η επέκταση πυλών AND, OR και XOR 2 εισόδων σε πύλες 3 ή περισσότερων εισόδων με διαδοχική σύνδεση πυλών 2 εισόδων, είναι εφικτή διότι στις αντίστοιχες λογικές πράξεις ισχύουν η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα, όπως θα δούμε στις ιδιότητες της άλγεβρας Boole.

Αυτό όμως δεν είναι εφικτό για πύλες NAND και NOR, αφού για τις αντίστοιχες λογικές πράξεις δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα Για παράδειγμα, οι εκφράσεις $(x \cdot y \cdot z)'$ και $[(x \cdot y)' \cdot z]'$ δεν είναι ισοδύναμες.

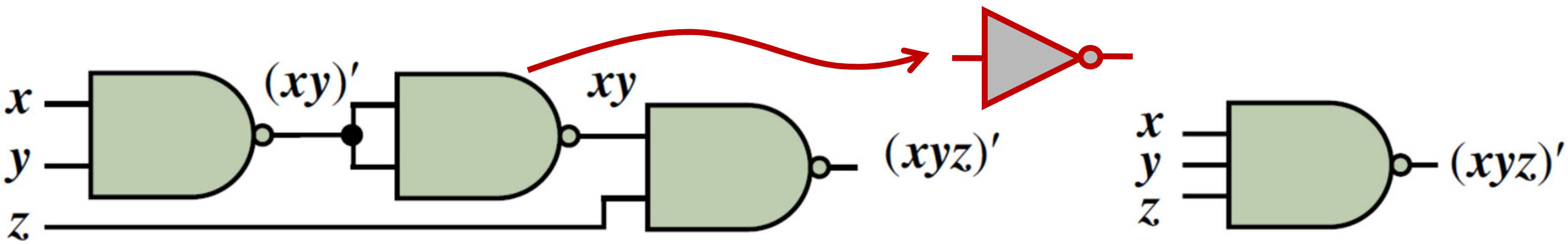
x	y	z	$(x \cdot y \cdot z)'$	$[(x \cdot y)' \cdot z]'$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

Επίσης, δεν είναι εφικτή η υλοποίηση πυλών XNOR 3 ή περισσότερων εισόδων με διαδοχική σύνδεση πυλών XNOR 2 εισόδων.

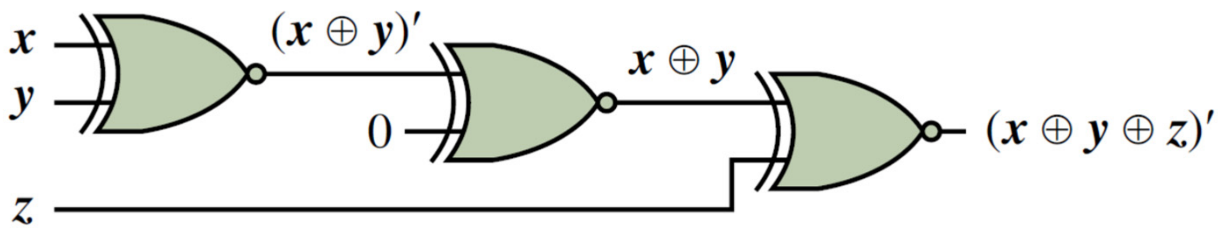
Επέκταση λογικών πυλών

Για την υλοποίηση μιας πύλης NAND 3 εισόδων, απαιτούνται 3 πύλες NAND 2 εισόδων, αφού $(x \cdot y \cdot z)' = \{ [(x \cdot y)']' \cdot z \}'$.

Όταν θέτουμε στις δύο εισόδους μιας πύλης NAND την ίδια μεταβλητή εισόδου, τότε η πύλη λειτουργεί ως αντιστροφέας, αφού $(A \cdot A)' = A'$.



Ομοίως υλοποιείται μια πύλη NOR 3 εισόδων με 3 πύλες NOR 2 εισόδων και με παρόμοιο τρόπο υλοποιούνται οι πύλες XNOR με περισσότερες από 2 εισόδους. Ισχύει ότι $(A \oplus 0)' = A'$.



Σύνθεση λογικών κυκλωμάτων με λογικές πύλες

Ένα λογικό κύκλωμα αποτελείται από γραμμές διασύνδεσης λογικών πυλών που αντιστοιχούν στις διαδρομές των δυαδικών σημάτων και από λογικές πύλες που επιτελούν τις λογικές πράξεις μεταξύ των σημάτων, οι οποίες δηλώνονται στη λογική συνάρτηση.

Για τη σύνθεση (σχεδίαση) ενός λογικού κυκλώματος, δίνεται μία λογική συνάρτηση και σχεδιάζεται το λογικό κύκλωμα που την υλοποιεί.

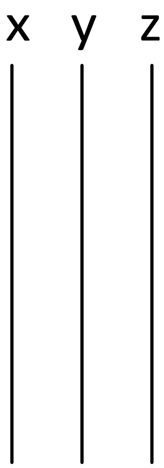
Ξεκινώντας από τις μεταβλητές της συνάρτησης που είναι οι είσοδοι του λογικού κυκλώματος, σχεδιάζουμε το λογικό κύκλωμα συνδέοντας κατάλληλα τις λογικές πύλες που απαιτούνται για την υλοποίηση των αλγεβρικών (λογικών) εκφράσεων που περιλαμβάνονται στη συνάρτηση.

Η σύνθεση γίνεται με συγκεκριμένη σειρά, ξεκινώντας από τις εκφράσεις σε παρένθεση και εφαρμόζοντας την προτεραιότητα των λογικών πράξεων, που είναι κατά σειρά NOT, AND, OR.

Σύνθεση λογικών κυκλωμάτων με λογικές πύλες

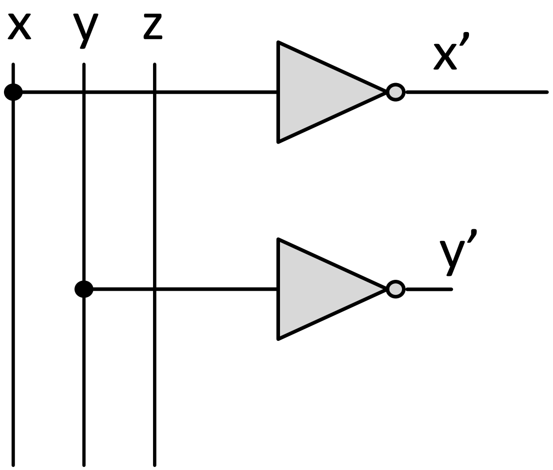
Παράδειγμα: σύνθεση λογικού κυκλώματος που υλοποιεί τη συνάρτηση:

$$f(x, y, z) = (x' + y' \cdot z) \cdot z$$



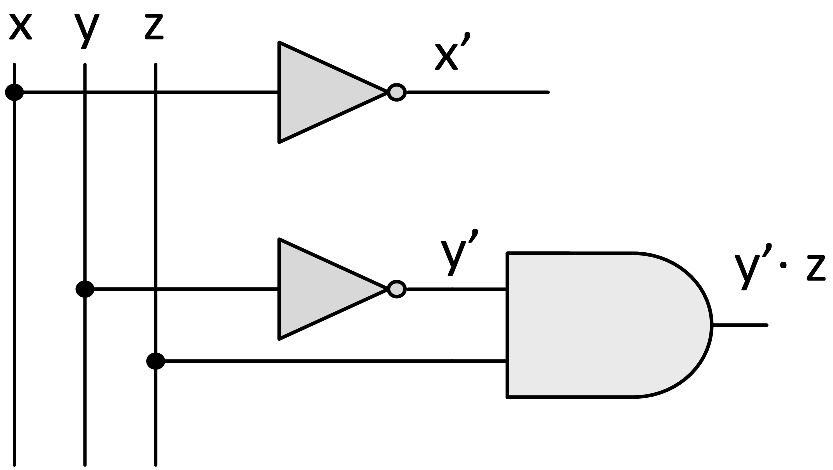
Σύνθεση λογικών κυκλωμάτων με λογικές πύλες

$f(x, y, z) = (x' + y' \cdot z) \cdot z$



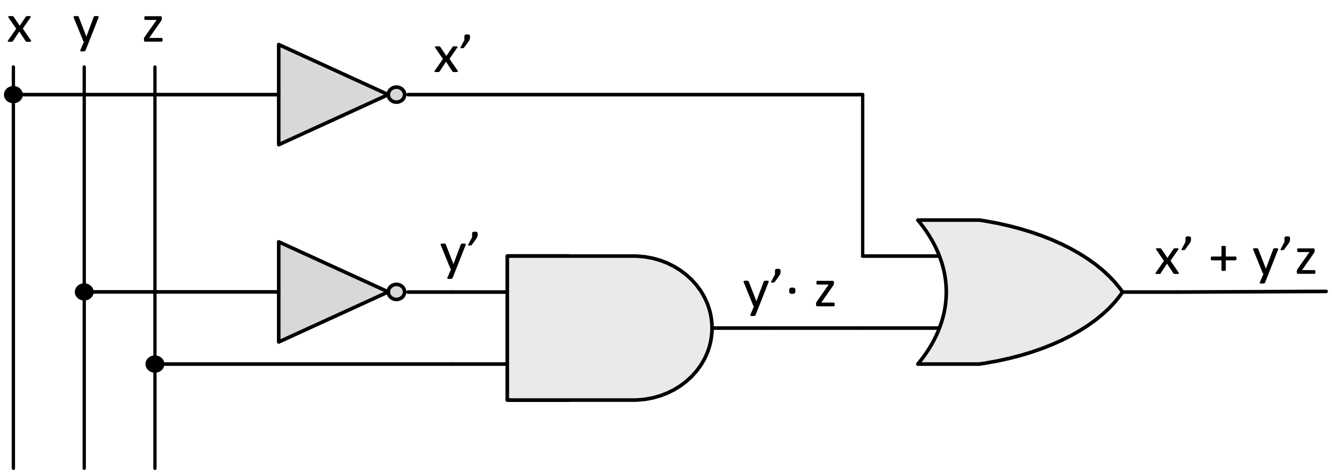
Σύνθεση λογικών κυκλωμάτων με λογικές πύλες

$f(x, y, z) = (x' + y' \cdot z) \cdot z$



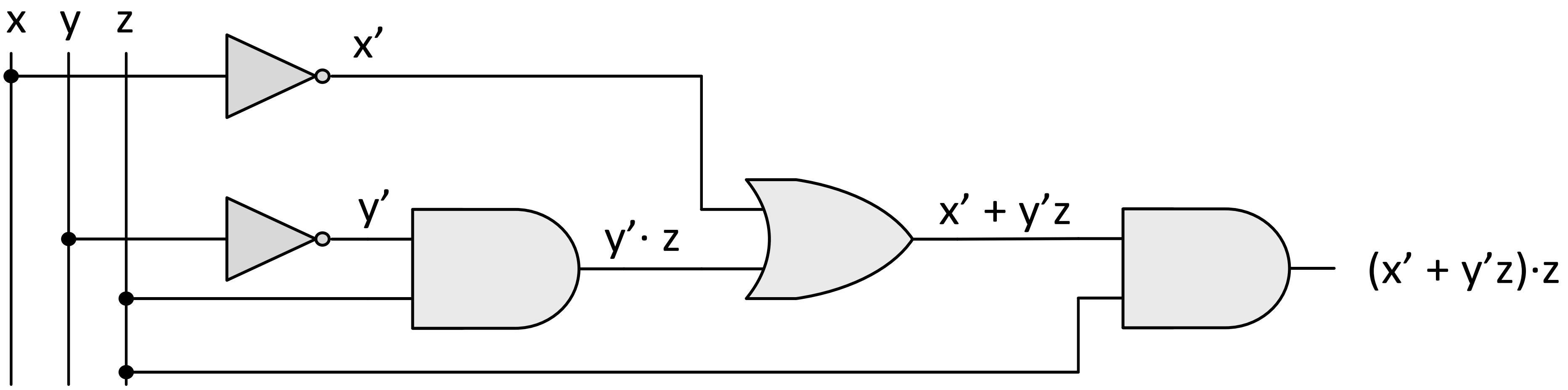
Σύνθεση λογικών κυκλωμάτων με λογικές πύλες

$$f(x, y, z) = (x' + y' \cdot z) \cdot z$$



Σύνθεση λογικών κυκλωμάτων με λογικές πύλες

$$f(x, y, z) = (x' + y' \cdot z) \cdot z$$



Άλγεβρα Boole

Για τη σχεδίαση και την ανάλυση των ψηφιακών συστημάτων είναι απαραίτητη η χρήση ενός αλγεβρικού συστήματος, οι μεταβλητές του οποίου λαμβάνουν μόνο τις λογικές τιμές 0 και 1.

Οι βάσεις για το σύστημα αυτό τέθηκαν το 1854 από τον George Boole, που ανέπτυξε ένα αλγεβρικό σύστημα για τη συστηματική αντιμετώπιση της λογικής.

Τα αξιώματα της άλγεβρας αυτής διατυπώθηκαν το 1904 από τον Edward Huntington και το 1938, ο Claude Elwood Shannon εισήγαγε τη δίτιμη άλγεβρα Boole, για να εκφράσει τις ιδιότητες ηλεκτρικών κυκλωμάτων διακοπτών με 2 καταστάσεις και μας επιτρέπει να εκφράσουμε και τη σχέση μεταξύ των εισόδων και των εξόδων ενός ψηφιακού κυκλώματος.

Η δίτιμη άλγεβρα Boole πραγματεύεται λογικές πράξεις (λογική αντιστροφή NOT, λογικό γινόμενο AND, λογικό άθροισμα OR) μεταξύ δυαδικών μεταβλητών.

Αξιώματα άλγεβρας Boole

Α1. Κλειστότητα ως προς τους τρεις τελεστές, αφού σύμφωνα με τους ορισμούς των τριών λογικών πράξεων το αποτέλεσμά τους δεν μπορεί να είναι διαφορετικό από 0 ή 1, δηλαδή, εάν $x, y \in A = \{0, 1\}$, τότε $x \cdot y \in A$, $x + y \in A$ και $x', y' \in A$.

Α2. Αντιμεταθετικότητα: η διάταξη των στοιχείων κατά την εκτέλεση των λογικών πράξεων AND και OR δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα, δηλαδή, εάν $x, y \in A$, τότε $x \cdot y = y \cdot x$ και $x + y = y + x$.

Α3. Επιμεριστικότητα: το λογικό γινόμενο επιμερίζεται στο λογικό άθροισμα και το λογικό άθροισμα επιμερίζεται στο λογικό γινόμενο, δηλαδή, εάν $x, y, z \in A$, τότε $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ και $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$.

Α4. Ουδέτερα στοιχεία: για τις λογικές πράξεις AND και OR τα ουδέτερα στοιχεία είναι 1 και 0, αντίστοιχα, δηλαδή, εάν $x \in A$, τότε $x \cdot 1 = x$ και $x + 0 = x$.

Αξιώματα άλγεβρας Boole

A5. Συμπλήρωμα: από τον ορισμό της λογικής αντιστροφής προκύπτει ότι, εάν $x \in A$, τότε $x \cdot x' = 0$ και $x + x' = 1$, όπου το στοιχείο x' αναφέρεται ως συμπλήρωμα του στοιχείου ή της μεταβλητής x. Το συμπλήρωμα συμβολίζεται και ως   .

Σε κάθε ζεύγος αξιωμάτων το ένα τμήμα μπορεί να προκύψει από το άλλο, με αμοιβαία εναλλαγή των λογικών πράξεων AND, OR και των στοιχείων 0 και 1 (αρχή δυϊσμού).

Συνεπώς, κάθε αλγεβρική έκφραση η οποία μπορεί να παραχθεί από τα αξιώματα εξακολουθεί να ισχύει, εάν εναλλάξουμε τους τελεστές και τα ουδέτερα στοιχεία.

Θεωρήματα άλγεβρας Boole

Θ1. Οι λογικές πράξεις μιας μεταβλητής με τον εαυτό της έχουν αποτέλεσμα τη μεταβλητή αυτή, δηλαδή $x \cdot x = x$, $x + x = x$.

Θ2. Οι λογικές πράξεις μιας μεταβλητής με το αντίστοιχο ουδέτερο στοιχείο έχουν αποτέλεσμα το ουδέτερο στοιχείο, δηλαδή $x \cdot 0 = 0$, $x + 1 = 1$.

Θ3. Θεώρημα διπλής άρνησης: το συμπλήρωμα του συμπληρώματος μιας μεταβλητής ισούται με τη μεταβλητή αυτή, δηλαδή $(x')' = x$.

Θ4. Προσεταιριστική ιδιότητα λογικού αθροίσματος και λογικού γινομένου: $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

Θ5. Θεώρημα De Morgan: το συμπλήρωμα του αποτελέσματος μιας λογικής πράξης AND ή OR ανάμεσα σε δύο μεταβλητές λαμβάνεται, εάν συμπληρώσουμε κάθε μεταβλητή και εναλλάξουμε τους τελεστές, δηλαδή $(x + y)' = x' \cdot y'$, $(x \cdot y)' = x' + y'$.

Θεωρήματα άλγεβρας Boole

Θ6. Θεώρημα απορρόφησης: κατά το λογικό άθροισμα μιας μεταβλητής με το λογικό γινόμενο της μεταβλητής αυτής με άλλη μεταβλητή, το λογικό γινόμενο απορροφάται, δηλαδή $x + x \cdot y = x$. Αντίστοιχα ισχύει και η απορρόφηση του λογικού αθροίσματος, δηλαδή $x \cdot (x + y) = x$.

Ειδική περίπτωση: $x + x' \cdot y = x + y$, $x \cdot (x' + y) = x \cdot y$.

Θ7. Θεώρημα ομοφωνίας: αποτελεί ειδική περίπτωση του θεωρήματος απορρόφησης, που εκφράζεται αλγεβρικά με τις παρακάτω σχέσεις

$$x \cdot y + x' \cdot z + y \cdot z = x \cdot y + x' \cdot z \quad \text{και}$$

$$(x + y) \cdot (x' + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot (x' + z).$$

Τα προαναφερθέντα θεωρήματα που αναφέρθηκαν δεν είναι μοναδικά, ωστόσο είναι τα πιο βασικά και πολύ χρήσιμα για το χειρισμό αλγεβρικών εκφράσεων.

Αξιώματα και θεωρήματα άλγεβρας Boole

A1	$0 \cdot 0 = 0$	$1 + 1 = 1$
	$1 \cdot 1 = 1$	$0 + 0 = 0$
	$0 \cdot 1 = 0$	$1 + 0 = 1$
	Εάν $x = 0$, τότε $x' = 1$	Εάν $x = 1$, τότε $x' = 0$
A2	$x \cdot y = y \cdot x$	$x + y = y + x$
A3	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
A4	$x \cdot 1 = x$	$x + 0 = x$
A5	$x \cdot x' = 0$	$x + x' = 1$
Θ1	$x \cdot x = x$	$x + x = x$
Θ2	$x \cdot 0 = 0$	$x + 1 = 1$
Θ3	$(x')' = x$	
Θ4	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	$x + (y + z) = (x + y) + z$
Θ5	$(x \cdot y)' = x' + y'$	$(x + y)' = x' \cdot y'$
Θ6	$x + x \cdot y = x$	$x \cdot (x + y) = x$
	$x + x' \cdot y = x + y$	$x \cdot (x' + y) = x \cdot y$
Θ7	$x \cdot y + x' \cdot z + y \cdot z = x \cdot y + x' \cdot z$	$(x + y) \cdot (x' + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot (x' + z)$

Αρχή του δυϊσμού: Κάθε αλγεβρική έκφραση της άλγεβρας Boole εξακολουθεί να ισχύει εάν εναλλάξουμε τους τελεστές (**+** σε · και · σε **+**) και τα ουδέτερα στοιχεία (0 σε 1 και 1 σε 0).

Απόδειξη θεωρημάτων άλγεβρας Boole

Για την απόδειξη των θεωρημάτων χρησιμοποιούνται τα αξιώματα ή/και τα αποδεδειγμένα θεωρήματα και ξεκινώντας από το ένα μέλος της εξίσωσης καταλήγουμε στο άλλο, ή και από τα δύο μέλη καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Εναλλακτικά, ανάγουμε ένα θεώρημα σε αξίωμα.

Επίσης, μπορούμε να καταστρώσουμε τους πίνακες αλήθειας για τα δύο μέλη της εξίσωσης ενός θεωρήματος, αφού δύο αλγεβρικές εκφράσεις που έχουν τον ίδιο πίνακα αλήθειας είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη θεωρημάτων άλγεβρας Boole

Παράδειγμα 1: απόδειξη της δεύτερης εξίσωσης του Θ2 με τη χρήση των αξιωμάτων της άλγεβρας Boole.

$x + 1 = 1 \cdot (x + 1)$	[αξίωμα Α4 για τα ουδέτερα στοιχεία]
$= (x + x') \cdot (x + 1)$	[αξίωμα Α5 για το συμπλήρωμα]
$= x + x' \cdot 1$	[αξίωμα Α3, επιμεριστικότητα]
$= x + x'$	[αξίωμα Α4 για τα ουδέτερα στοιχεία]
$= 1$	[αξίωμα Α5 για το συμπλήρωμα]

Παράδειγμα 2: απόδειξη της πρώτης εξίσωσης του Θ6.

$x + x \cdot y = x \cdot 1 + x \cdot y$	[αξίωμα Α4 για τα ουδέτερα στοιχεία]
$= x \cdot (1 + y)$	[αξίωμα Α3, επιμεριστικότητα]
$= x \cdot 1$	[θεώρημα Θ2]
$= x$	[αξίωμα Α4 για τα ουδέτερα στοιχεία]

Απόδειξη θεωρημάτων άλγεβρας Boole

Παράδειγμα 3: απόδειξη της δεύτερης εξίσωσης του Θ5 (θεώρημα De Morgan) με χρήση των πινάκων αλήθειας των δύο μελών τη εξίσωσης:

$$(x + y)' = x' \cdot y'$$

x	y	x'	y'	$x + y$	$(x + y)'$	$x' \cdot y'$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Αλγεβρικοί μετασχηματισμοί

Οι αλγεβρικοί μετασχηματισμοί που βασίζονται στα αξιώματα και θεωρήματα της άλγεβρας Boole, εκτελούνται για την απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων, έτσι ώστε αυτές να μπορούν να υλοποιηθούν με το μικρότερο δυνατό αριθμό λογικών πυλών.

Όπως σε κάθε αλγεβρικό σύστημα, έτσι και στην άλγεβρα Boole είναι καθορισμένη μια προτεραιότητα τελεστών, ώστε να επιτυγχάνεται ορθός χειρισμός των αλγεβρικών εκφράσεων.

Πρώτη προτεραιότητα, αποτελεί ο υπολογισμός των εκφράσεων που βρίσκονται εντός παρενθέσεων.

Ακολουθεί ο υπολογισμός των συμπληρωμάτων (τελεστής ′), στη συνέχεια ο υπολογισμός των λογικών γινομένων (τελεστής ·) και στο τέλος διενεργείται ο υπολογισμός των λογικών αθροισμάτων (τελεστής +).

Αλγεβρικοί μετασχηματισμοί

Παράδειγμα 1: Να απλοποιηθεί η αλγεβρική έκφραση $x \cdot y + x' \cdot z + y \cdot z$

$$
\begin{aligned}
x \cdot y + x' \cdot z + y \cdot z &= x \cdot y + x' \cdot z + 1 \cdot y \cdot z \\
&= x \cdot y + x' \cdot z + (x + x') \cdot y \cdot z \\
&= x \cdot y + x' \cdot z + x \cdot y \cdot z + x' \cdot y \cdot z \\
&= x \cdot y \cdot 1 + x \cdot y \cdot z + x' \cdot z \cdot 1 + x' \cdot z \cdot y \\
&= x \cdot y \cdot (1 + z) + x' \cdot z \cdot (1 + y) \\
&= x \cdot y \cdot 1 + x' \cdot z \cdot 1 \\
&= x \cdot y + x' \cdot z
\end{aligned}
$$

Αρχικά, αξιοποιώντας το αξίωμα για το συμπλήρωμα ($x + x' = 1$), έγινε προσπάθεια δημιουργίας λογικών γινομένων, τέτοιων ώστε στη συνέχεια να είναι δυνατή η εφαρμογή του αξιώματος της επιμεριστικότητας (παραγοντοποίηση) που θα οδηγήσει σε μείωση των λογικών γινομένων.

Αλγεβρικοί μετασχηματισμοί

Στη συνέχεια του μαθήματος, για λόγους απλότητας, όπως συμβαίνει και στη διατύπωση του πολλαπλασιασμού της κοινής άλγεβρας, ο τελεστής · θα παραλείπεται εντός των αλγεβρικών εκφράσεων, αλλά θα υπονοείται.

Παράδειγμα 2: Να απλοποιηθεί η αλγεβρική έκφραση $x'y + xz + yz + yzw'$

$$
\begin{aligned}
x'y + xz + yz + yzw' &= x'y + xz + yz1 + yzw' \\
&= x'y + xz + yz(1 + w') \\
&= x'y + xz + yz \\
&= x'y + xz + (x + x')yz \\
&= x'y + xz + xyz + x'yz \\
&= x'y\cdot 1 + xz\cdot 1 + xyz + x'yz \\
&= x'y(1 + z) + xz(1 + y) \\
&= x'y + xz
\end{aligned}
$$

Αλγεβρικοί μετασχηματισμοί

Παράδειγμα 3: Να απλοποιηθεί η αλγεβρική έκφραση xy + xy’ + x’y

$$
\begin{aligned}
xy + xy' + x'y &= xy + xy' + x'y + xy \\
&= x(y + y') + (x + x')y \\
&= x1 + y1 = x + y
\end{aligned}
$$

Αρχικά προσθέσαμε το λογικό γινόμενο xy (που περιλαμβάνεται στην αρχική έκφραση), αφού σύμφωνα με το θεώρημα Θ1, η ενέργεια αυτή δεν αλλοιώνει την αρχική έκφραση.

Στόχος ήταν η δημιουργία ενός συνδυασμού λογικών γινομένων, που μας δίνει δυνατότητα εφαρμογής του αξιώματος της επιμεριστικότητας, ώστε να καταλήξουμε σε απλοποιημένη μορφή της αρχικής έκφρασης.

Οι επιλογές που ακολουθήθηκαν στα παραδείγματα απλοποίησης λογικών εκφράσεων, αποτελούν χρήσιμες πρακτικές απλοποίησης, ωστόσο δεν συνιστούν μεθοδολογία απλοποίησης. Με συστηματική μεθοδολογία απλοποίησης θα ασχοληθούμε στην επόμενη ενότητα (χάρτης Karnaugh).

Λογικές συναρτήσεις

Αφού όπως διαπιστώσαμε μια λογική έκφραση μπορεί να απλοποιηθεί σε μία ισοδύναμη λογική έκφραση, γίνεται προφανές ότι μια λογική συνάρτηση μπορεί να περιγραφεί με διαφορετικές αλγεβρικές εκφράσεις.

Οι ισοδύναμες διαφορετικές αυτές λογικές εκφράσεις παράγουν τον ίδιο πίνακα αλήθειας, συνεπώς μια λογική συνάρτηση μπορεί να περιγραφεί με έναν και μοναδικό πίνακα αλήθειας.

Δύο ή περισσότερες αλγεβρικές εκφράσεις που παράγουν τον ίδιο πίνακα αλήθειας, είναι ισοδύναμες και αντιστοιχούν στην ίδια λογική συνάρτηση.

Όπως προαναφέρθηκε, μειονέκτημα της περιγραφής μιας λογικής συνάρτησης μέσω πίνακα αλήθειας είναι ότι το μέγεθος του πίνακα αυξάνεται εκθετικά με το πλήθος των δυαδικών μεταβλητών, αφού ο πίνακας αλήθειας μιας συνάρτησης n μεταβλητών έχει 2^n γραμμές.

Για παράδειγμα, στην περίπτωση συνάρτησης 16 μεταβλητών, απαιτείται πίνακας αλήθειας με περισσότερες από 65.5 χιλιάδες (2^{16}) γραμμές.

Λογικές συναρτήσεις

Παράδειγμα: Να διαπιστωθεί μέσω πινάκων αλήθειας, αλλά και μέσω αλγεβρικών μετασχηματισμών, ότι οι λογικές συναρτήσεις $F(A, B, C) = AC' + B + AB'C'$ και $G(A, B, C) = B + AC'$, είναι ισοδύναμες.

Αφού οι δύο συναρτήσεις δίνονται σε μορφή αθροίσματος γινομένων, για ευκολία κατά τη συμπλήρωση των πινάκων αλήθειας, χρησιμοποιούμε το θεώρημα Θ2 ($x + 1 = 1$), σύμφωνα με το οποίο όταν οποιοδήποτε όρος (λογικό γινόμενο) ενός λογικού αθροίσματος λαμβάνει τιμή 1, η συνάρτηση λαμβάνει τιμή 1, ανεξάρτητα από τι τιμές που λαμβάνουν οι άλλοι όροι.

Επομένως, για να συμπληρώσουμε τον πίνακα αλήθειας μιας λογικής συνάρτησης, προσδιορίζουμε τους συνδυασμούς τιμών των μεταβλητών για τους οποίους κάθε όρος του λογικού αθροίσματος λαμβάνει την τιμή 1. Για τους συνδυασμούς αυτούς, η λογική συνάρτηση λαμβάνει τιμή 1, ενώ για τους υπόλοιπους λαμβάνει τιμή 0.

Λογικές συναρτήσεις

Μεταβλητές				F = AC′ + B + AB′C′					G = B + AC′		
A	B	C		AC′	B	AB′C′	F		B	AC′	G
0	0	0		0	0	0	0		0	0	0
0	0	1		0	0	0	0		0	0	0
0	1	0		0	1	0	**1**		1	0	**1**
0	1	1		0	1	0	**1**		1	0	**1**
1	0	0		1	0	1	**1**		0	1	**1**
1	0	1		0	0	0	0		0	0	0
1	1	0		1	1	0	**1**		1	1	**1**
1	1	1		0	1	0	**1**		1	0	**1**

Οι δύο συναρτήσεις (F, G) παράγουν τον ίδιο πίνακα αλήθειας, συνεπώς είναι ισοδύναμες.

Λογικές συναρτήσεις

Διενεργούμε αλγεβρικούς μετασχηματισμούς στη συνάρτηση F, εφαρμόζοντας αξιώματα και θεωρήματα της άλγεβρας Boole και καταλήγουμε στην G:

$$
\begin{aligned}
F(A, B, C) &= AC' + B + AB'C' \\
&= AC'(1 + B') + B \\
&= AC'1 + B \\
&= AC' + B = B + AC' = G(A, B, C)
\end{aligned}
$$

Επισημαίνεται ότι υπάρχουν και άλλες λογικές συναρτήσεις που έχουν τον ίδιο πίνακα αλήθειας με τις F και G, όπως οι:

$$K(A, B, C) = A'BC' + A'BC + AB'C' + ABC' + ABC$$

$$L(A, B, C) = B + AB'C'$$

Λογικές συναρτήσεις

Για να εξάγουμε την αλγεβρική έκφραση μιας συνάρτησης από τον πίνακα αλήθειας, εντοπίζουμε τους συνδυασμούς τιμών των μεταβλητών, για τους οποίους η συνάρτηση λαμβάνει τιμή 1.

Στη συνέχεια εκφράζουμε κάθε συνδυασμό ως λογικό γινόμενο των μεταβλητών με τιμή 1 και των συμπληρωμάτων των μεταβλητών με τιμή 0 και αθροίζουμε τα λογικά γινόμενα.

Ακολουθώντας τη διαδικασία αυτή για τον πίνακα αλήθειας της συνάρτησης $F(x,y,z) = x'y + xz$, προκύπτει η συνάρτηση $F(x,y,z) = x'yz' + x'yz + xy'z + xyz$, η οποία είναι ισοδύναμη με την αρχική συνάρτηση, δηλαδή την $F(x,y,z) = x'y + xz$.

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Συμπληρωματική λογική συνάρτηση

Μια λογική συνάρτηση F′ ονομάζεται συμπληρωματική συνάρτηση της συνάρτησης F, όταν λαμβάνει λογική τιμή 1 ή 0, για τους συνδυασμούς τιμών των μεταβλητών για τους οποίους η F λαμβάνει τιμή 0 ή 1, αντίστοιχα.

Ο τιμές στον πίνακα αλήθειας της συμπληρωματικής συνάρτησης της $F(x,y,z) = x'y + xz$, προκύπτουν από εκείνες της συνάρτησης F(x,y,z) για κάθε συνδυασμό τιμών των μεταβλητών.

Για να εξαγάγουμε την αλγεβρική έκφραση της F′ από τον πίνακα αλήθειας, ενεργούμε με τον τρόπο που ενεργήσαμε για την εξαγωγή της έκφρασης της F.

x	y	z	F(x, y, z)	F′(x, y, z)
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

$F'(x,y,z) = x'y'z' + x'y'z + xy'z' + xyz'$

Γενικευμένη μορφή θεωρήματος De Morgan

Η συμπληρωματική συνάρτηση F′ προκύπτει από τη συνάρτηση F, ως εξής:

$$\mathbf{F'(x_1, x_2, \ldots, x_n, +, \cdot, 0, 1) = F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \cdot, +, 1, 0)}$$

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)' = x'_1 \cdot x'_2 \cdot x'_3 \cdot \ldots \cdot x'_n$$

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n)' = x'_1 + x'_2 + x'_3 + \ldots + x'_n$$

Αυτό σημαίνει ότι κατά την εξαγωγή της F′, στη θέση κάθε μεταβλητής τίθεται το συμπλήρωμά της, οι τελεστές + και · εναλλάσσονται και οι σταθερές τιμές 0 και 1, επίσης εναλλάσσονται.

Αυτό ισοδυναμεί με την εφαρμογή αρχικά της αρχής του δυϊσμού και στη συνέχεια με την αντικατάσταση κάθε μεταβλητής με το συμπλήρωμά της.

Επισημαίνεται ότι, κατά την παραγωγή της συμπληρωματικής συνάρτησης, θα πρέπει να τηρείται η προτεραιότητα των πράξεων.

Γενικευμένη μορφή θεωρήματος De Morgan

Εάν κατά τον υπολογισμό του συμπληρώματος της συνάρτησης $F(x,y,z) = x + yz$ εφαρμόσουμε τη γενικευμένη μορφή του θεωρήματος De Morgan, συμπληρώνοντας τις μεταβλητές και εναλλάσσοντας τους τελεστές, χωρίς όμως, να τηρήσουμε την ορθή προτεραιότητα πράξεων, θα καταλήξουμε στη συνάρτηση $F'(x,y,z) = x'y' + z'$, που είναι εσφαλμένη.

Ακολουθώντας την ορθή προτεραιότητα πράξεων (παρενθέσεις, συμπληρώματα, λογικά γινόμενα, λογικά αθροίσματα), καταλήγουμε στη σωστή συμπληρωματική συνάρτηση:

$$F'(x,y,z) = (x + yz)' = x'(yz)' = x'(y' + z') = x'y' + x'z'$$

Γενικευμένη μορφή θεωρήματος De Morgan

Παράδειγμα 1: Να προσδιοριστούν οι συμπληρωματικές συναρτήσεις των λογικών συναρτήσεων: $F = x'yz' + x'y'z$ και $G = x(y'z' + yz)$.

$$
\begin{aligned}
F'(x,y,z) &= (x'yz' + x'y'z)' \\
&= (x'yz')'(x'y'z)' \\
&= (x + y' + z)(x + y + z')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G'(x,y,z) &= [x(y'z' + yz)]' \\
&= x' + (y'z' + yz)' \\
&= x' + (y'z')'(yz)' \\
&= x' + (y + z)(y' + z') \\
&= x' + yy' + yz' + y'z + zz' \\
&= x' + yz' + y'z
\end{aligned}
$$

Γενικευμένη μορφή θεωρήματος De Morgan

Παράδειγμα 2: Να αποδείξετε ότι η συμπληρωματική συνάρτηση της συνάρτησης $F(A,B,C,D) = (AC' + A'B')[(B' + C')D' + D]$ περιγράφεται από την αλγεβρική έκφραση $A'B + AC$.

$$
\begin{aligned}
F'(A,B,C,D) &= \{(AC' + A'B')[(B' + C')D' + D]\}' \\
&= [(AC' + A'B')]' + [(B' + C')D' + D]' \\
&= (AC')'(A'B')' + [(B' + C')D']'D' \\
&= (A' + C)(A + B) + [(B' + C')' + D]D' \\
&= (A' + C)(A + B) + (BC + D)D' \\
&= A'A + A'B + AC + BC + BCD' + DD' \\
&= A'B + AC + BC + BCD' \\
&= A'B + AC + BC(1 + D') \\
&= A'B + AC + BC \\
&= A'B + AC
\end{aligned}
$$

Γενικευμένη μορφή θεωρήματος De Morgan

$F(A,B,C,D) = (AC' + A'B')[(B' + C')D' + D]$

$F'(A,B,C,D) = A'B + AC$

A	B	C	D		F	F′
0	0	0	0		1	0
0	0	0	1		1	0
0	0	1	0		1	0
0	0	1	1		1	0
0	1	0	0		0	1
0	1	0	1		0	1
0	1	1	0		0	1
0	1	1	1		0	1
1	0	0	0		1	0
1	0	0	1		1	0
1	0	1	0		0	1
1	0	1	1		0	1
1	1	0	0		1	0
1	1	0	1		1	0
1	1	1	0		0	1
1	1	1	1		0	1

Ελαχιστόροι και μεγιστόροι λογικής συνάρτησης

Ένα λογικό γινόμενο, στο οποίο συμμετέχουν όλες οι μεταβλητές μιας συνάρτησης (στην κανονική μορφή τους ή στη μορφή συμπληρώματος) μία φορά, αναφέρεται ως ελαχιστόρος (minterm), ενώ ένα λογικό άθροισμα μεταβλητών με τα ίδια χαρακτηριστικά αναφέρεται ως μεγιστόρος (maxterm).

Για παράδειγμα, όταν πρόκειται για τρεις μεταβλητές x, y και z, το λογικό γινόμενο xy′z και το λογικό άθροισμα x′ + y + z′ είναι ένας ελαχιστόρος και ένας μεγιστόρος, αντίστοιχα.

Κατά τη δημιουργία του πίνακα αλήθειας μιας λογικής συνάρτησης με n μεταβλητές, γράφουμε κατά σειρά τους δυαδικούς αριθμούς από 0 έως 2^{n-1} και αντιστοιχίζουμε κάθε δυαδικό ψηφίο σε μία από τις μεταβλητές.

Ελαχιστόροι και μεγιστόροι λογικής συνάρτησης

Έτσι, για 3 μεταβλητές, όταν $x = y = z = 0$, σχηματίζεται ο μικρότερος δυαδικός αριθμός (0) και όταν $x = y = z = 1$ ο μεγαλύτερος δυνατός δυαδικός αριθμός (7).

Υπάρχει λοιπόν αντιστοιχία μεταξύ των 8 δυνατών συνδυασμών τιμών των 3 μεταβλητών και των 8 ελαχιστόρων.

Όταν η τιμή μιας μεταβλητής είναι 0, τότε στον αντίστοιχο ελαχιστόρο συμμετέχει το συμπλήρωμα της μεταβλητής αυτής, ενώ όταν η τιμή της μεταβλητής είναι 1, τότε στον αντίστοιχο ελαχιστόρο συμμετέχει η μεταβλητή αυτή με την κανονική μορφή της.

Ελαχιστόροι και μεγιστόροι λογικής συνάρτησης

Οι ελαχιστόροι ονομάζονται ως m_0 έως m_7 (ο δείκτης συμπίπτει με το δεκαδικό αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε ελαχιστόρο).

Οι μεγιστόροι (M_0 έως M_7) είναι τα συμπληρώματα των αντίστοιχων ελαχιστόρων και προκύπτουν από τους ελαχιστόρους με εφαρμογή του θεωρήματος De Morgan.

Για n μεταβλητές, σχηματίζονται 2^n ελαχιστόροι και 2^n μεγιστόροι.

x	y	z	Ελαχιστόροι		Μεγιστόροι	
0	0	0	x′y′z′	m_0	x + y + z	M_0
0	0	1	x′y′z	m_1	x + y + z′	M_1
0	1	0	x′y z′	m_2	x + y′ + z	M_2
0	1	1	x′y z	m_3	x + y′ + z′	M_3
1	0	0	x y′z′	m_4	x′ + y + z	M_4
1	0	1	x y′z	m_5	x′ + y + z′	M_5
1	1	0	x y z′	m_6	x′ + y ′+ z	M_6
1	1	1	x y z	m_7	x′ + y′ + z′	M_7

Κανονικές μορφές λογικής συνάρτησης

Για να εξάγουμε την αλγεβρική έκφραση μιας συνάρτησης από τον πίνακα αλήθειας, εντοπίζουμε τους συνδυασμούς τιμών των μεταβλητών για τους οποίους η συνάρτηση λαμβάνει τιμή 1, εκφράζουμε κάθε συνδυασμό ως λογικό γινόμενο των μεταβλητών με τιμή 1 και των συμπληρωμάτων των μεταβλητών με τιμή 0 και αθροίζουμε τα λογικά γινόμενα που προκύπτουν.

Στην ουσία, με τον τρόπο αυτό εκφράζουμε τη λογική συνάρτηση σε μορφή αθροίσματος ελαχιστόρων.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $F(x,y,z) = x'yz' + x'yz + xy'z + xyz$, μπορεί να γραφεί και ως άθροισμα ελαχιστόρων: $F(x,y,z) = m_2 + m_3 + m_5 + m_7$.

Κανονικές μορφές λογικής συνάρτησης

Η F′ μπορεί να εκφραστεί σε μορφή αθροίσματος ελαχιστόρων, εάν προσθέσουμε τους ελαχιστόρους που αντιστοιχούν στους συνδυασμούς τιμών των μεταβλητών, για τους οποίους η συνάρτηση λαμβάνει τιμή 0, που είναι οι ελαχιστόροι που λείπουν από την F:

$$F'(x,y,z) = x'y'z' + x'y'z + xy'z' + xyz' = m_0 + m_1 + m_4 + m_6$$

Η συμπληρωματική συνάρτηση της F′ είναι η F (σύμφωνα με το θεώρημα διπλής άρνησης) και προκύπτει εύκολα από την F′ με εφαρμογή του θεωρήματος De Morgan:

$$F(x,y,z) = (m_0 + m_1 + m_4 + m_6)' = m'_0m'_1m'_4m'_6 = M_0M_1M_4M_6$$
$$= (x + y + z)(x + y + z')(x' + y + z)(x' + y' + z)$$

Έτσι, εκφράσαμε τη συνάρτηση σε μορφή γινομένου μεγιστόρων. Σε αυτή συμμετέχουν οι μεγιστόροι που αντιστοιχούν στους συνδυασμούς τιμών των μεταβλητών, για τους οποίους η συνάρτηση λαμβάνει λογική τιμή 0.

Κανονικές μορφές λογικής συνάρτησης

Οι εκφράσεις μιας λογικής συνάρτησης σε μορφή αθροίσματος ελαχιστόρων και γινομένου μεγιστόρων είναι μοναδικές και αναφέρονται ως κανονικές μορφές (canonical forms).

Για να μετατρέψουμε την έκφραση μιας λογικής συνάρτησης από τη μια κανονική μορφή στην άλλη, εναλλάσσουμε τα σύμβολα m, M και τους τελεστές ·, +, και ως δείκτες θέτουμε τους δείκτες των ελαχιστόρων ή των μεγιστόρων που λείπουν από την αρχική κανονική μορφή.

Για να προκύψουν οι δείκτες αυτοί, λαμβάνουμε υπόψη ότι το πλήθος των ελαχιστόρων ή μεγιστόρων για συναρτήσεις n μεταβλητών είναι 2^n.

Το άθροισμα ελαχιστόρων και το γινόμενο μεγιστόρων μιας λογικής συνάρτησης αναφέρονται και ως Σ( ), Π( ), αντίστοιχα, θέτοντας εντός των παρενθέσεων τους δείκτες των ελαχιστόρων ή των μεγιστόρων, αντίστοιχα.

Πρότυπες μορφές λογικής συνάρτησης

Οι κανονικές μορφές μιας λογικής συνάρτησης προκύπτουν απευθείας από τον πίνακα αλήθειας και λόγω του ότι στους ελαχιστόρους και στους μεγιστόρους συμμετέχουν όλες οι μεταβλητές της συνάρτησης, οι μορφές αυτές δεν είναι συνήθως οι απλούστερες δυνατές που μπορούν να οδηγήσουν σε υλοποίηση με μικρό πλήθος λογικών πυλών.

Έτσι, οι λογικές συναρτήσεις που υλοποιούνται σε ψηφιακά κυκλώματα εκφράζονται συχνά σε μορφή αθροίσματος γινομένων ή σε μορφή γινομένου αθροισμάτων, χωρίς όμως στα γινόμενα και τα αθροίσματα αυτά να συμμετέχουν όλες οι μεταβλητές.

Οι μορφές αυτές αναφέρονται και ως πρότυπες μορφές (standard forms).

Πρότυπες μορφές λογικής συνάρτησης

Για να μετατρέψουμε μια πρότυπη μορφή αθροίσματος γινομένων σε κανονική, ελέγχουμε κάθε γινόμενο, ώστε να διαπιστώσουμε ποιες μεταβλητές δε συμμετέχουν σε αυτό.

Για κάθε μεταβλητή που δε συμμετέχει σε κάποιο από τα γινόμενα (έστω x), πολλαπλασιάζουμε το γινόμενο με τον όρο $(x + x')$.

Με βάση το αξίωμα της άλγεβρας Boole για το συμπλήρωμα μιας μεταβλητής, ο όρος αυτός ισούται με 1 και η σχετική πράξη δεν επηρεάζει τη λογική τιμή του γινομένου.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το αξίωμα της επιμεριστικότητας σε κάθε ελλιπές γινόμενο και λαμβάνουμε την επιθυμητή κανονική μορφή αθροίσματος ελαχιστόρων.

Πρότυπες μορφές λογικής συνάρτησης

Στην περίπτωση πρότυπης μορφής γινομένου αθροισμάτων, για κάθε μεταβλητή που δε συμμετέχει σε κάποιο άθροισμα (έστω x), προσθέτουμε στο άθροισμα τον όρο xx′, αφού η πράξη αυτή δεν επηρεάζει τη λογική τιμή του αθροίσματος (λόγω του ότι xx′ = 0).

Κατόπιν, εφαρμόζουμε το αξίωμα της επιμεριστικότητας σε κάθε ελλιπές άθροισμα και λαμβάνουμε την επιθυμητή κανονική μορφή γινομένου μεγιστόρων.

Η μετατροπή μεταξύ πρότυπων μορφών γίνεται εύκολα με χρήση του αξιώματος της επιμεριστικότητας.

Πρότυπες μορφές λογικής συνάρτησης

Παράδειγμα 1: Μετατροπή της πρότυπης μορφής

$$F(x,y,z) = xy + x'z + yz$$

στις δύο κανονικές μορφές.

Η κανονική μορφή αθροίσματος ελαχιστόρων προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= xy + x'z + yz \\ &= xy(z + z') + x'z(y + y') + yz(x + x') \\ &= xyz + xyz' + x'yz + x'y'z + xyz + x'yz \\ &= m_7 + m_6 + m_3 + m_1 = \Sigma(1, 3, 6, 7) \end{aligned}$$

Οι όροι m_3 και m_7 προκύπτουν και δεύτερη φορά στο τελικό άθροισμα, αλλά απαλείφονται λόγω του θεωρήματος Θ1 της άλγεβρας Boole.

Η κανονική μορφή γινομένου μεγιστόρων προκύπτει με εφαρμογή του θεωρήματος De Morgan: $F(x,y,z) = \Sigma(1, 3, 6, 7) = \Pi(0, 2, 4, 5)$.

Πρότυπες μορφές λογικής συνάρτησης

Παράδειγμα 2: Μετατροπή της πρότυπης μορφής αθροίσματος γινομένων $F(x,y,z) = xy + x'z + yz$ σε πρότυπη μορφή γινομένου αθροισμάτων.

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) &= xy + x'z + yz \\
&= (x + x')(x + z)(y + x')(y + z) + yz \\
&= (x + z)(x' + y)(y + z) + yz \\
&= (x + z + y)(x' + y + y)(y + z + y)(x + z + z)(x' + y + z)(y + z + z) \\
&= (x + y + z)(x' + y)(y + z)(x + z)(x' + y + z)(y + z) \\
&= (x + y + z)(x' + y)(y + z)(x + z)(x' + y + z)
\end{aligned}
$$

Η μετατροπή έγινε με επαναληπτική εφαρμογή του αξιώματος της επιμεριστικότητας και απαλοιφή των μεταβλητών που επαναλαμβάνονται στα αθροίσματα, καθώς και των αθροισμάτων που επαναλαμβάνονται στη νέα πρότυπη μορφή της συνάρτησης

Πρότυπες μορφές λογικής συνάρτησης

Παράδειγμα 3: Μετατροπή της πρότυπης μορφής

$$F(x,y,z) = (x + y + z)(x' + y)(y + z)(x+z)(x' + y + z)$$

σε κανονική μορφή γινομένου μεγιστόρων

$$\begin{aligned}
F(x,y,z) &= (x + y + z)(x' + y)(y + z)(x + z)(x' + y + z) \\
&= (x + y + z)(x' + y + zz')(y + z + xx')(x + z + yy')(x' + y + z) \\
&= (x + y + z)(x' + y + z)(x' + y + z')(y + z + x)(y + z + x') \\
&\quad\ (x + z + y)(x + z + y')\ (x' + y + z) \\
&= M_0 M_4 M_5 M_2 \\
&= \Pi(0, 2, 4, 5)
\end{aligned}$$

Οι όροι M_0 και M_4 προκύπτουν περισσότερες από μία φορές στο τελικό γινόμενο, αλλά απαλείφονται λόγω του θεωρήματος Θ1 της άλγεβρας Boole.

Λογικά κυκλώματα με πύλες NOT, AND και OR

Όπως προαναφέρθηκε, ένα λογικό κύκλωμα αποτελείται από γραμμές διασύνδεσης λογικών πυλών που αντιστοιχούν στις διαδρομές των δυαδικών σημάτων και από λογικές πύλες που επιτελούν την επεξεργασία μεταξύ των σημάτων, η οποία δηλώνεται στη λογική συνάρτηση που υλοποιείται από κάθε πύλη.

Τα τρία λογικά γινόμενα που περιλαμβάνονται στη συνάρτηση $F(x,y,z) = xy + x'z + yz$, μπορούν να υλοποιηθούν με ισάριθμες πύλες AND.

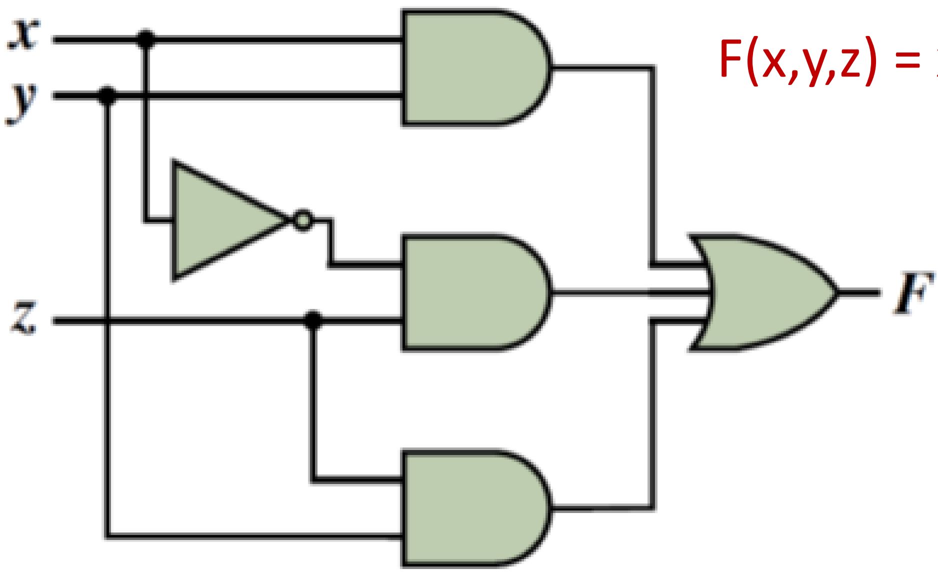
Λόγω του ότι στα γινόμενα συμμετέχουν δύο μεταβλητές, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε πύλες AND με δύο εισόδους.

Η συμπληρωματική μορφή της μεταβλητής x που εμφανίζεται στο δεύτερο κατά σειρά γινόμενο θα πρέπει να παραχθεί με χρήση ενός αντιστροφέα, ο οποίος θα προηγείται της πύλης AND που υλοποιεί το δεύτερο κατά σειρά λογικό γινόμενο.

Λογικά κυκλώματα με πύλες NOT, AND και OR

Το λογικό άθροισμα των τριών γινομένων μπορεί να υλοποιηθεί με χρήση μιας πύλης OR τριών εισόδων, η οποία θα λαμβάνει ως εισόδους τις εξόδους των πυλών AND.

Το λογικό κύκλωμα που υλοποιεί την F περιλαμβάνει δύο επίπεδα πυλών, εάν δε συνυπολογίσουμε τον αντιστροφέα που απαιτείται για την παραγωγή της συμπληρωματικής μορφής της εισόδου x.

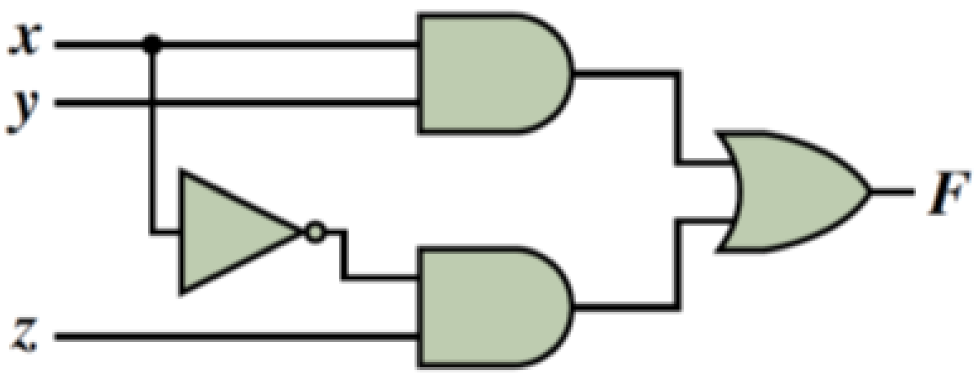


$F(x,y,z) = xy + x'z + yz$

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
& Μηχανικών Υπολογιστών
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

Λογικά κυκλώματα με πύλες NOT, AND και OR

Εάν στη συνάρτηση εφαρμόσουμε το θεώρημα ομοφωνίας, προκύπτει η ισοδύναμη συνάρτηση F(x,y,z) = xy + x′z, η οποία μπορεί να υλοποιηθεί με μία πύλη AND λιγότερη, αφού τα λογικά γινόμενα που συμμετέχουν στη συνάρτηση μειώνονται κατά ένα.



Λογικά κυκλώματα με πύλες NOT, AND και OR

Εφαρμόζοντας το αξίωμα της επιμεριστικότητας στη προηγούμενη μορφή της συνάρτησης ($F(x,y,z) = xy + x'z$), καταλήγουμε σε ισοδύναμη συνάρτηση μορφής γινομένου αθροισμάτων:

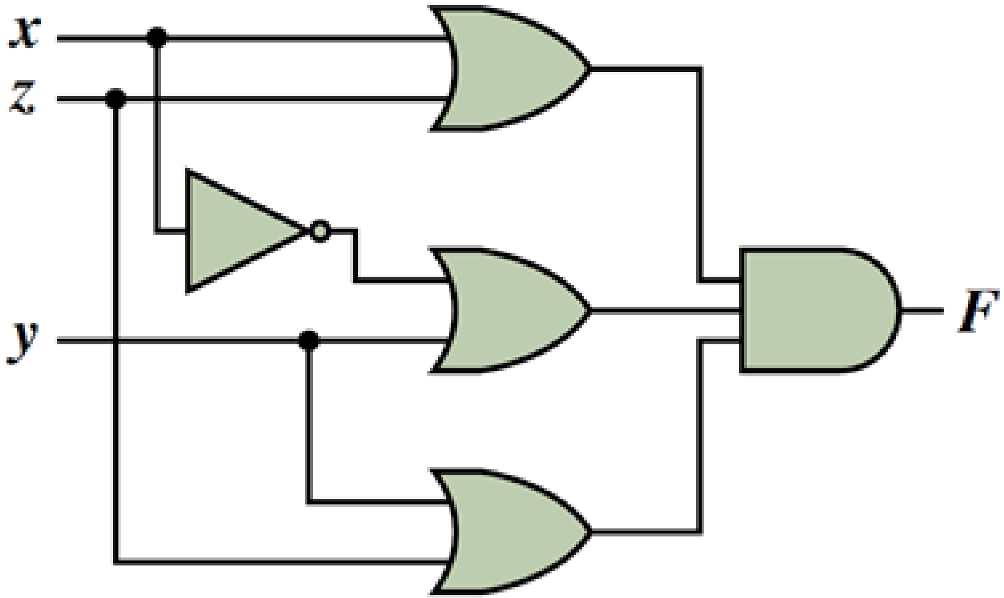
$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= xy + x'z = (xy + x')(xy + z) = (x + x')(y + x')(x + z)(y + z) \\ &= (x' + y)(x + z)(y + z). \end{aligned}$$

Τα τρία λογικά αθροίσματα που περιλαμβάνονται μπορούν να υλοποιηθούν με ισάριθμες πύλες OR δύο εισόδων και το λογικό γινόμενο των τριών αθροισμάτων μπορεί να υλοποιηθεί με χρήση μιας πύλης AND τριών εισόδων, η οποία θα λαμβάνει ως εισόδους τις εξόδους των πυλών OR.

Η συμπληρωματική μορφή της μεταβλητής x που εμφανίζεται στο πρώτο κατά σειρά άθροισμα, παράγεται με χρήση ενός αντιστροφέα

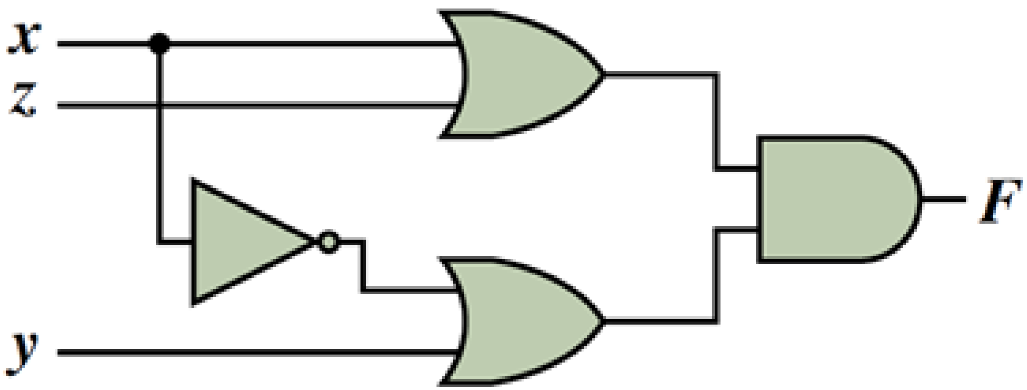
Λογικά κυκλώματα με πύλες NOT, AND και OR

$F(x,y,z) = (x' + y)(x + z)(y + z)$



Λογικά κυκλώματα με πύλες NOT, AND και OR

Εάν στη συνάρτηση που υλοποιήθηκε εφαρμόσουμε το θεώρημα ομοφωνίας, προκύπτει η επίσης ισοδύναμη συνάρτηση $F(x,y,z) = (x + z)(x' + y)$, η οποία υλοποιείται με μία πύλη OR λιγότερη, αφού τα λογικά αθροίσματα μειώνονται κατά ένα.



Λογικά κυκλώματα με πύλες NOT, AND και OR

Συμπεραίνουμε ότι μια δεδομένη λογική συνάρτηση μπορεί να υλοποιηθεί με λογικά κυκλώματα διαφορετικής δομής που αποτελούνται από:

- ✓ αντιστροφείς για την παραγωγή των συμπληρωματικών μορφών των μεταβλητών εισόδου (όπου αυτή είναι απαραίτητη) και
- ✓ δύο επίπεδα πυλών σε διάταξη AND-OR ή OR-AND, ανάλογα με το αν η συνάρτηση είναι σε μορφή αθροίσματος γινομένων ή γινομένου αθροισμάτων, αντίστοιχα.

Κάποια από τα λογικά κυκλώματα που υλοποιούν μια συνάρτηση είναι απλούστερα από άλλα και σημαντικός στόχος των σχεδιαστών είναι η μείωση του κόστους υλοποίησης, μια ένδειξη του οποίου είναι το άθροισμα του πλήθους των λογικών πυλών και του πλήθους των εισόδων των πυλών του κυκλώματος.

Λογικά κυκλώματα με πύλες NAND

Οι λογικές πύλες NAND και NOR υλοποιούνται, ως ηλεκτρονικά κυκλώματα, ευκολότερα και με μικρότερο κόστος συγκριτικά με τις πύλες AND και OR.

Επομένως, είναι χρήσιμο να μπορούμε να σχεδιάζουμε λογικά κυκλώματα αποκλειστικά μόνο με πύλες NAND ή NOR.

Εάν εφαρμόσουμε κατά σειρά τα θεωρήματα διπλής άρνησης και De Morgan στη λογική συνάρτηση μορφής αθροίσματος γινομένων $F(x,y,z) = xy + x'z + yz$, λαμβάνουμε την ισοδύναμη λογική συνάρτηση:

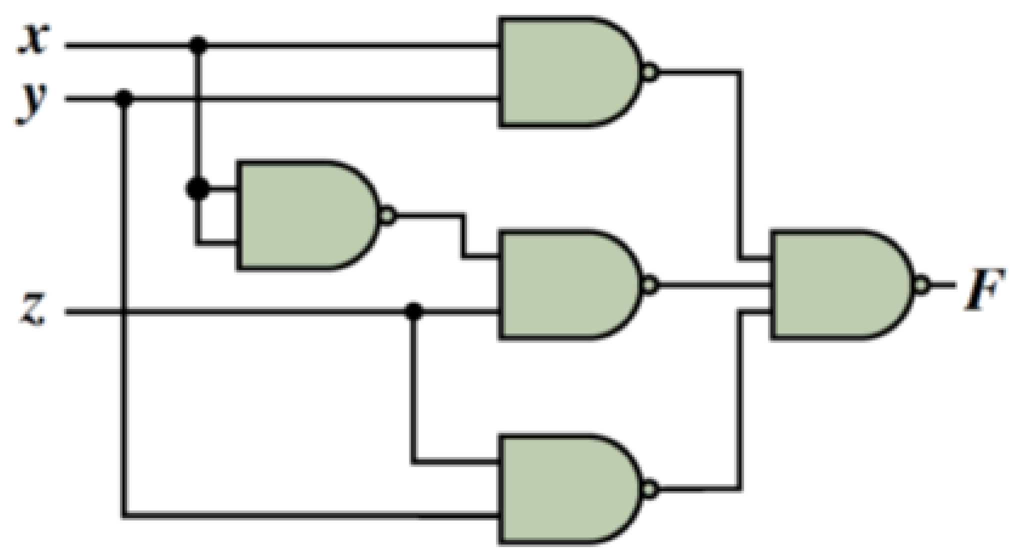
$$F(x,y,z) = [(xy + x'z + yz)']' = [(xy)'(x'z)'(yz)']'$$

Λογικά κυκλώματα με πύλες NAND

Τα συμπληρώματα των λογικών γινομένων μπορούν να υλοποιηθούν με 3 πύλες NAND 2 εισόδων, ενώ το συμπλήρωμα του συνολικού γινομένου και συνεπώς η συνολική συνάρτηση μπορεί να υλοποιηθεί, εάν θέσουμε τις εξόδους των πυλών αυτών ως εισόδους σε μία πύλη NAND 3 εισόδων.

Για την παραγωγή της συμπληρωματικής μορφής της μεταβλητής x που απαιτείται, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μία πύλη NAND δύο εισόδων, στις εισόδους της οποίας θα πρέπει να τεθεί η μεταβλητή εισόδου x

$F(x,y,z)= [(xy)'(x'z)'(yz)']'$



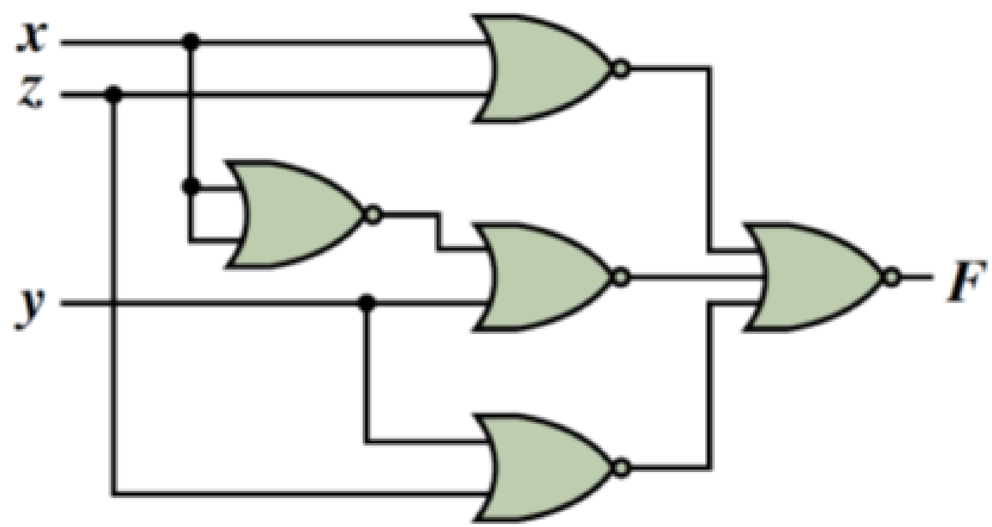
Λογικά κυκλώματα με πύλες NOR

Εάν εφαρμόσουμε όμοια διαδικασία στη συνάρτηση μορφής γινομένου αθροισμάτων $F(x,y,z) = (x + z)(x' + y)(y + z)$, λαμβάνουμε την ισοδύναμη λογική συνάρτηση:

$$F(x,y,z) = \{[(x + z)(x' + y)(y + z)]'\}' = [(x + z)' + (x' + y)' + (y + z)']'.$$

Τα συμπληρώματα των λογικών αθροισμάτων υλοποιούνται με 3 πύλες NOR 2 εισόδων, ενώ το συμπλήρωμα του συνολικού αθροίσματος υλοποιείται εάν θέσουμε τις εξόδους των πυλών αυτών ως εισόδους σε μία πύλη NOR 3 εισόδων.

Η αντιστροφή της μεταβλητής x υλοποιείται με μία επιπλέον πύλη NOR δύο εισόδων.



Λογικά κυκλώματα με πύλες NAND και NOR

Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι οποιοδήποτε λογικό κύκλωμα διάταξης AND-OR μπορεί να μετατραπεί σε λογικό κύκλωμα διάταξης NAND-NAND με την ίδια ακριβώς τοπολογία, ενώ οποιοδήποτε λογικό κύκλωμα διάταξης OR-AND μπορεί να μετατραπεί σε λογικό κύκλωμα διάταξης NOR-NOR ίδιας τοπολογίας.

Τα λογικά κυκλώματα που υλοποιούνται με τους 4 τρόπους διάταξης λογικών πυλών που προαναφέρθηκαν, περιλαμβάνουν 2 επίπεδα πυλών, πρόκειται δηλαδή για υλοποιήσεις λογικών συναρτήσεων σε δύο επίπεδα, εάν δεν συνυπολογίσουμε τους αντιστροφείς που απαιτούνται για την παραγωγή των συμπληρωματικών μορφών των μεταβλητών εισόδου.

Το πλήθος των επιπέδων πυλών ενός λογικού κυκλώματος είναι το μέγιστο πλήθος πυλών που πρέπει να διέλθουν τα δυαδικά σήματα εισόδου για να φτάσουν στην έξοδο.

Πλήρη (καθολικά) σύνολα λογικών πυλών

Με τις λογικές πράξεις AND, OR και NOT, είναι δυνατή η παράσταση κάθε λογικής συνάρτησης. Ένα τέτοιο σύνολο λογικών πράξεων αναφέρεται ως πλήρες.

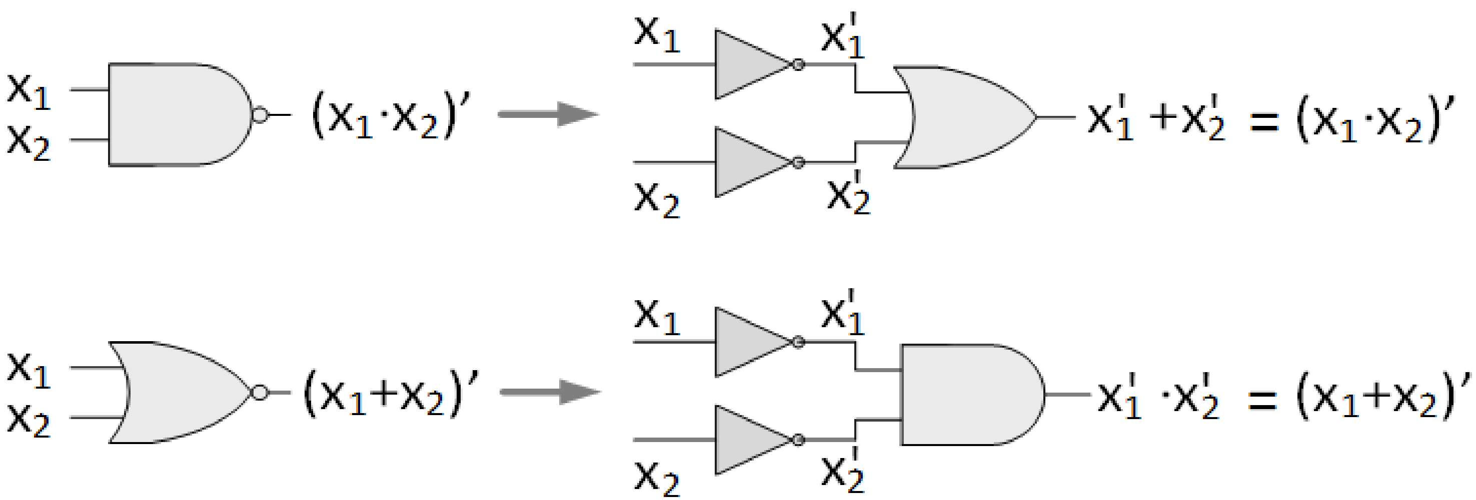
Επίσης, κάθε σύνολο λογικών πυλών με το οποίο μπορεί να υλοποιηθεί οποιαδήποτε λογική συνάρτηση αναφέρεται ως πλήρες (ή καθολικό) σύνολο πυλών.

Σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί, το σύνολο που περιλαμβάνει αντιστροφείς και πύλες AND και OR 2 εισόδων αποτελεί πλήρες σύνολο πυλών.

Επίσης, οι πύλες NAND 2 εισόδων και οι πύλες NOR 2 εισόδων είναι πλήρη σύνολα πυλών.

Πλήρη (καθολικά) σύνολα λογικών πυλών

Πλήρη σύνολα πυλών είναι και το σύνολο που περιλαμβάνει αντιστροφείς και πύλες OR 2 εισόδων, καθώς και το σύνολο που περιλαμβάνει αντιστροφείς και πύλες AND 2 εισόδων, αφού είναι ισοδύναμα με τα πλήρη σύνολα που περιλαμβάνουν πύλες NAND 2 εισόδων και πύλες NOR 2 εισόδων, αντίστοιχα.



Λογικά κυκλώματα πολλών επιπέδων

Οι υλοποιήσεις λογικών συναρτήσεων με δύο επίπεδα πυλών είναι ικανοποιητικές στις περιπτώσεις λογικών συναρτήσεων με λίγες μεταβλητές.

Σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της παραγοντοποίησης (δηλαδή το αξίωμα της επιμεριστικότητας), ώστε να επιτευχθεί υλοποίηση σε περισσότερα επίπεδα πυλών, αλλά με πύλες περιορισμένου πλήθους εισόδων.

Οι πύλες αυτές παρουσιάζουν καλύτερα χαρακτηριστικά σε σχέση με τις πύλες πολλών εισόδων, όπως μικρότερη καθυστέρηση απόκρισης και μεγαλύτερη ανεκτικότητα στην παρουσία θορύβου.

Λογικά κυκλώματα πολλών επιπέδων

Η συνάρτηση $F(A, B, C, D, E, G, H) = AC'G + ADEG + BC'H + BDEH$, απαιτεί για την υλοποίησή της έναν αντιστροφέα για την παραγωγή της συμπληρωματικής μορφής της μεταβλητής εισόδου C, 4 πύλες AND (2 με 3 εισόδους και 2 με 4 εισόδους) για την παραγωγή των λογικών γινομένων και μία πύλη OR 4 εισόδων για την παραγωγή του συνολικού λογικού αθροίσματος.

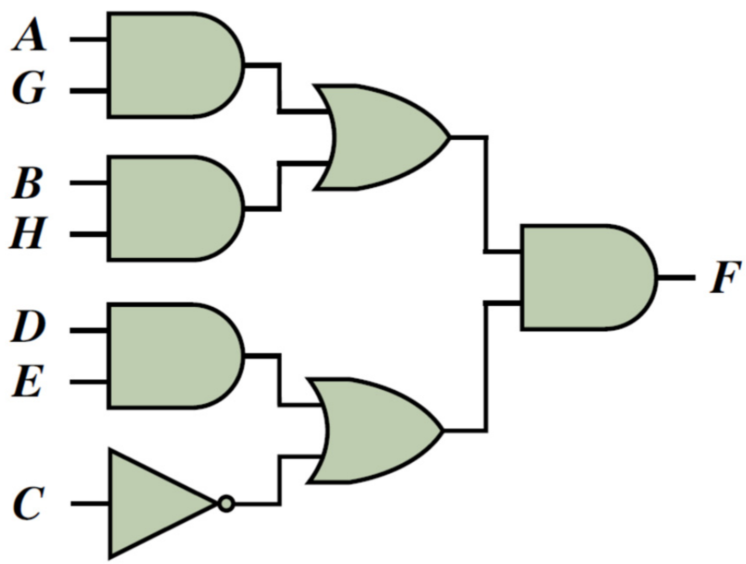
Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της παραγοντοποίησης, εφαρμόζοντας, δηλαδή, το αξίωμα επιμεριστικότητας, προκύπτει η ισοδύναμη συνάρτηση:

$$\begin{aligned} F &= AC'G + ADEG + BC'H + BDEH \\ &= AG(C' + DE) + BH(C' + DE) \\ &= (AG + BH)(C' + DE) \end{aligned}$$

Λογικά κυκλώματα πολλών επιπέδων

Η συνάρτηση $F = (AG + BH)(C' + DE)$ που προέκυψε, σύμφωνα και με την προτεραιότητα πράξεων της άλγεβρας Boole, απαιτεί για την υλοποίησή της, τρία επίπεδα πυλών.

Το 1ο αφορά την παραγωγή των τριών λογικών γινομένων 2 μεταβλητών που περιλαμβάνονται στη συνάρτηση και την παραγωγή της συμπληρωματικής μορφής της μεταβλητής εισόδου C, το 2ο αφορά την παραγωγή των λογικών αθροισμάτων και το 3ο την παραγωγή του συνολικού λογικού γινομένου.



Λογικά κυκλώματα πολλών επιπέδων

Καταλήξαμε, λοιπόν, σε μια υλοποίηση η οποία περιλαμβάνει 7 λογικές πύλες, δηλαδή μία παραπάνω από το πλήθος των πυλών που απαιτεί η υλοποίηση δύο επιπέδων.

Ωστόσο, στο λογικό κύκλωμα, καμία λογική πύλη δε διαθέτει περισσότερες από δύο εισόδους, γεγονός που αποτελεί πλεονέκτημα.

Σε αρκετές περιπτώσεις, η χρήση λογικών κυκλωμάτων με περισσότερα από δύο επίπεδα πυλών μπορεί να οδηγήσει και σε μικρότερο πλήθος πυλών.

Για παράδειγμα, η παραγοντοποίηση μπορεί να μας προσφέρει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε λογικές πύλες XOR ή XNOR, ώστε να μειώσουμε το κόστος υλοποίησης μίας λογικής συνάρτησης.

Επίσης, μία ή περισσότερες πύλες ή, ένα ή περισσότερα υποκυκλώματα, μπορούν να υλοποιούν λογικές εκφράσεις που χρησιμοποιούνται περισσότερες από μία φορές στο συνολικό λογικό κύκλωμα.

Λογικά κυκλώματα πολλών επιπέδων

Για την υλοποίηση σε 2 επίπεδα πυλών της συνάρτησης

$$F(x,y,z,w) = x'z'w' + yz'w + x'zw + yzw',$$

εάν εξαιρέσουμε τους αντιστροφείς παραγωγής των συμπληρωματικών μορφών των μεταβλητών εισόδου, απαιτούνται 4 πύλες AND 3 εισόδων για την παραγωγή των λογικών γινομένων και 1 πύλη OR 4 εισόδων για την παραγωγή του συνολικού λογικού αθροίσματος.

Για την υλοποίηση της ίδιας συνάρτησης μόνο με πύλες 2 εισόδων σε 4 επίπεδα πυλών, απαιτούνται (εκτός των αντιστροφέων) 8 πύλες AND και 4 πύλες OR, αφού κάθε πύλη 3 εισόδων υλοποιείται με 2 πύλες 2 εισόδων και η πύλη 4 εισόδων υλοποιείται με 3 πύλες 2 εισόδων.

Λογικά κυκλώματα πολλών επιπέδων

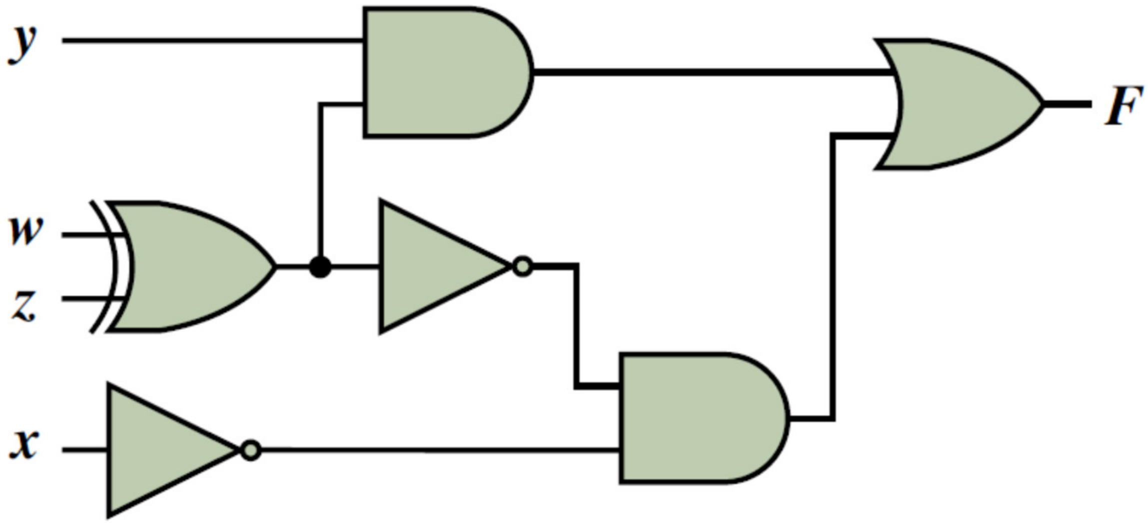
Ωστόσο, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της παραγοντοποίησης, μπορούμε να καταλήξουμε στην ακόλουθη ισοδύναμη λογική συνάρτηση:

$$
\begin{aligned}
F &= x'z'w' + yz'w + x'zw + yzw' \\
&= x'(z'w' + zw) + y(z'w + zw') \\
&= x'(z \oplus w)' + y(z \oplus w)
\end{aligned}
$$

Η υλοποίηση της F μπορεί τώρα να επιτευχθεί σε 4 επίπεδα πυλών, οι είσοδοι των συμμετεχουσών πυλών δεν είναι σε καμία περίπτωση περισσότερες από 2 και η έξοδος η πύλης XOR χρησιμοποιείται τόσο στην υλοποίηση της λογικής συνάρτησης αποκλειστικού OR, όσο και στην υλοποίηση της λογικής ισοδυναμίας των μεταβλητών z και w, με τη συνδρομή ενός αντιστροφέα.

Λογικά κυκλώματα πολλών επιπέδων

$F = x'(z \oplus w)' + y(z \oplus w)$



Το λογικό κύκλωμα περιλαμβάνει μικρότερο πλήθος πυλών από τις υλοποιήσεις διάταξης AND-OR.

Λογικά κυκλώματα πολλών επιπέδων

Μολονότι, η υλοποίηση λογικών συναρτήσεων με πολλά επίπεδα πυλών, μπορεί να περιορίζει το πλήθος των εισόδων των πυλών που χρησιμοποιούνται ή να προσφέρει τη δυνατότητα χρησιμοποίησης μικρότερου πλήθους λογικών πυλών, συχνά οδηγεί σε μεγαλύτερη καθυστέρηση απόκρισης των λογικών κυκλωμάτων, λόγω των πολλαπλών επιπέδων πυλών που παρεμβάλλονται μεταξύ των εισόδων και της εξόδου του λογικού κυκλώματος.

Καθυστέρηση απόκρισης μιας πύλης είναι η καθυστέρηση διάδοσης των δυαδικών σημάτων διαμέσου της πύλης.

Καθυστέρηση απόκρισης ενός λογικού κυκλώματος είναι το άθροισμα της καθυστέρησης απόκρισης του μέγιστου πλήθους πυλών που πρέπει να διέλθουν τα δυαδικά σήματα εισόδου για να φτάσουν στην έξοδο του κυκλώματος.