Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
& Μηχανικών Υπολογιστών
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

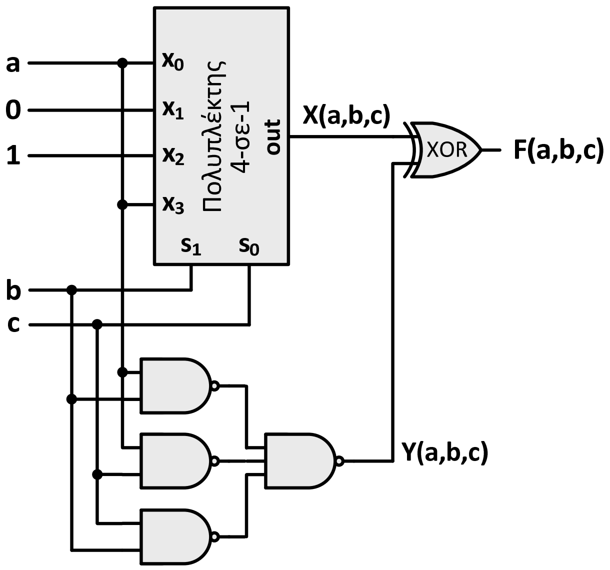
Απαντήσεις εξέτασης **«Ψηφιακή λογική σχεδίαση»**

Διδάσκων: Λ. Μπισδούνης
Ημερομηνία: 06/02/2026

ΟΜΑΔΑ Α (Α – Κ)

ΘΕΜΑ 1ο (2,5 μονάδες)

Αφού αναλύσετε την λειτουργία του συνδυαστικού κυκλώματος του παρακάτω σχήματος, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F(a,b,c) μπορεί να υλοποιηθεί **μόνο με μία πύλη XOR δύο εισόδων**.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για να αναλύσουμε την λειτουργία του κυκλώματος, αρχικά προσδιορίζουμε τις συναρτήσεις X(a,b,c) και Y(a,b,c). Λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση λειτουργίας του πολυπλέκτη 4-σε-1 (out = $s'_1s'_0x_0 + s'_1s_0x_1 + s_1s'_0x_2 + s_1s_0x_3$), η συνάρτηση X(a,b,c,) προσδιορίζεται ως εξής:

$$X(a,b,c) = ab'c' + 0b'c + 1bc' + abc = ab'c' + bc' + abc = ab'c' + b(c' + ac) = ab'c' + b(a + c') = ab'c' + ab + bc'$$
$$= ab + (ab' + b)c' = ab + (a + b)c' = ab + ac' + bc'.$$

Για να καταλήξουμε στην παραπάνω μορφή της συνάρτησης X(a,b,c) χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα x0 = 0, το αξίωμα του ουδέτερου στοιχείου (x1 = x), τα αξιώματα αντιμεταθετικότητας και επιμεριστικότητας και το θεώρημα απορρόφησης.

Η συνάρτηση Y(a,b,c,) προσδιορίζεται ως εξής:

$$Y(a,b,c) = [(ab)'(ac)'(bc)']' = ab + ac + bc.$$

Για να καταλήξουμε στην παραπάνω μορφή της συνάρτησης Y(a,b,c) χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα De Morgan.

Σύμφωνα με τον ορισμό της λογικής πράξης XOR ($x \oplus y = xy' + x'y$) που διέπει την λειτουργία της λογικής πύλης XOR, προσδιορίζουμε την συνάρτηση F(a,b,c) ως εξής:

$$F(a,b,c) = X(a,b,c) \oplus Y(a,b,c) = X(a,b,c)\,[Y(a,b,c)]' + [X(a,b,c)]'\,Y(a,b,c)]$$
$$= (ab + ac' + bc')(ab + ac + bc)' + (ab + ac' + bc')'(ab + ac + bc).$$

Στη συνέχεια, με αλγεβρικούς μετασχηματισμούς στην παραπάνω μορφή της συνάρτησης F(a,b,c), όπως εφαρμογή του θεωρήματος De Morgan, των αξιωμάτων επιμεριστικότητας, αντιμεταθετικότητας και συμπληρώματος (xx' = 0) και των θεωρημάτων x + x = x και x + x' = 0, αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση F(a,b,c) μπορεί να υλοποιηθεί μόνο με μία λογική πύλη XOR 2 εισόδων.

$$F(a,b,c) = (ab + ac' + bc')(ab + ac + bc)' + (ab + ac' + bc')'(ab + ac + bc)$$
$$= (ab + ac' + bc')[(ab)'(ac)'(bc)'] + [(ab)'(ac')'(bc')'](ab + ac + bc)$$
$$= (ab + ac' + bc')[(a' + b')(a' + c')(b' + c')] + [(a' + b')(a' + c)(b' + c)](ab + ac + bc)$$
$$= (ab + ac' + bc')[(a' + a'c' + a'b' + b'c')(b' + c')] + [(a' + a'c + a'b' + b'c)(b' + c)](ab + ac + bc)$$

$$= (ab + ac' + bc')(a'b' + a'c' + a'b'c' + \cancel{a'c'} + \cancel{a'b'} + \cancel{a'b'c'} + b'c' + \cancel{b'c'}) + (a'b' + a'c + a'b'c + \cancel{a'c} + \cancel{a'b'} + \cancel{a'b'c} + b'c + \cancel{b'c})(ab + ac + bc) = (ab + ac' + bc')(a'b' + a'c' + a'b'c' + b'c') + (a'b' + a'c + a'b'c + b'c)(ab + ac + bc)$$
$$= ab'c' + a'bc' + a'bc + ab'c = ab'(c' + c) + a'b(c' + c) = ab' + a'b = \mathbf{a \oplus b}.$$

Επομένως, η συνάρτηση F(a,b,c) μπορεί να υλοποιηθεί μόνο με **μια πύλη XOR με εισόδους a και b**.

Εναλλακτικά, μπορούμε αρχικά να εξάγουμε τις κανονικές μορφές αθροίσματος ελαχιστόρων των συναρτήσεων X(a,b,c) και Y(a,b,c):

$X(a,b,c) = ab'c' + bc' + abc = ab'c' + (a + a')bc' + abc = ab'c' + abc' + a'bc' + abc \Rightarrow$

$X(a,b,c) = \Sigma(4, 6, 2, 7) = \Sigma(2, 4, 6, 7)$,

$Y(a,b,c) = ab + ac + bc = ab(c + c') + a(b + b')c + (a + a')bc = abc + abc' + \cancel{abc} + ab'c + \cancel{abc} + a'bc \Rightarrow$

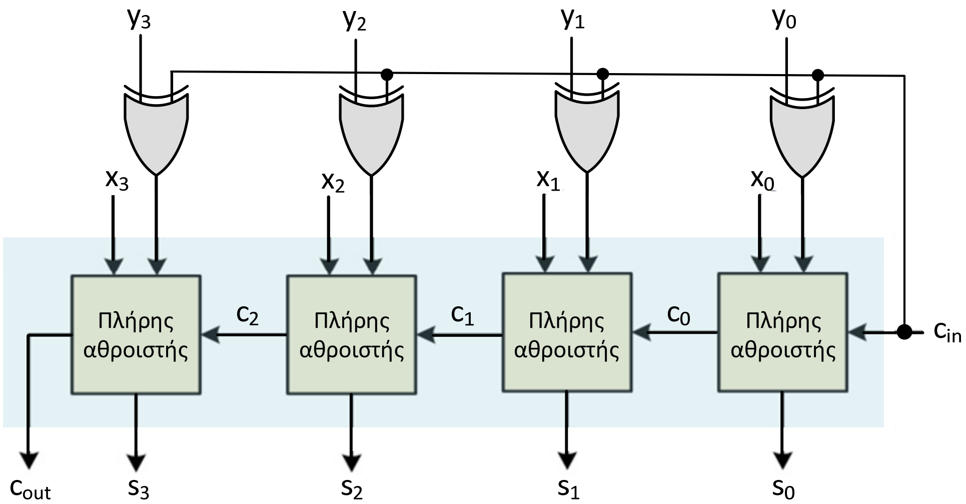
$Y(a,b,c) = \Sigma(7, 6, 5, 3) = \Sigma(3, 5, 6, 7)$.

Λόγω του ότι η λογική πράξη XOR μεταξύ δύο μεταβλητών ή συναρτήσεων λαμβάνει τιμή 1, μόνο όταν η τιμή των δύο μεταβλητών ή συναρτήσεων είναι διαφορετική, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $F(a,b,c) = X(a,b,c) \oplus Y(a,b,c)$ μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα των ελαχιστόρων που δεν είναι κοινοί στις συναρτήσεις X(a,b,c) και Y(a,b,c), δηλαδή: $F(a,b,c) = X(a,b,c) \oplus Y(a,b,c) = \Sigma(2, 3, 4, 5)$.

$F(a,b,c) = X(a,b,c) \oplus Y(a,b,c) = \Sigma(2, 3, 4, 5) = a'bc' + a'bc + ab'c' + ab'c = a'b(c' + c) + ab'(c' + c) = a'b + ab' = \mathbf{a \oplus b}$.

ΘΕΜΑ 2ο (0,5 + 2 = 2,5 μονάδες)

α) Δίνεται το συνδυαστικό κύκλωμα του παρακάτω σχήματος, το οποίο λαμβάνει στις εισόδους του δύο τετραψήφιους μη προσημασμένους δυαδικούς αριθμούς $X = x_3x_2x_1x_0$, $Y = y_3y_2y_1y_0$ και το ψηφίο c_{in} και παράγει στις εξόδους του τον τετραψήφιο μη προσημασμένο δυαδικό αριθμό $S = s_3s_2s_1s_0$ και το ψηφίο c_{out}. Εάν $X = 12_{10}$, $Y = 14_{10}$ και $c_{in} = 1$, να υπολογίσετε αναλυτικά τις τιμές του δυαδικού αριθμού $S = s_3s_2s_1s_0$ και του ψηφίου c_{out} και να προσδιορίσετε την σχέση του αποτελέσματος που υπολογίσατε με τους αριθμούς X και Y.



β) Να σχεδιάσετε συνδυαστικό κύκλωμα που δέχεται στις εισόδους του έναν εξαψήφιο μη προσημασμένο δυαδικό αριθμό $X = x_5x_4x_3x_2x_1x_0$ και στις εξόδους παράγει έναν μη προσημασμένο δυαδικό αριθμό, ο οποίος ισούται με το πλήθος των μονάδων που περιέχονται στον αριθμό X. Έχετε στη διάθεσή σας, **μόνο πλήρεις αθροιστές** (full adders, FA).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

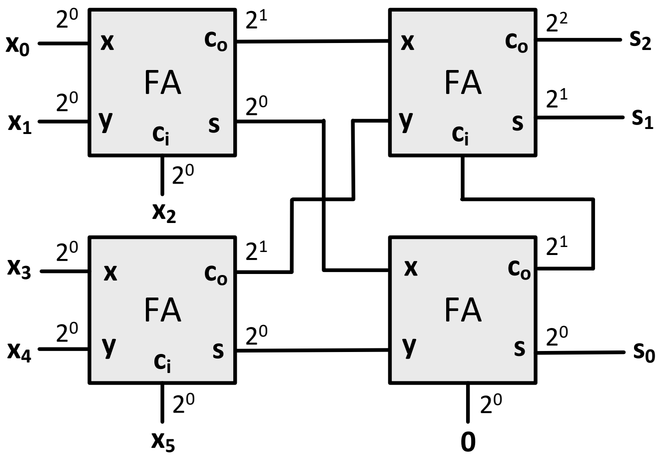
α) Το συνδυαστικό κύκλωμα που δίνεται, όταν $c_{in} = 1$ εκτελεί την πράξη $X + Y' + 1$, αφού οι πύλες XOR όταν η μία είσοδός τους λαμβάνει τιμή 1, τότε η έξοδός τους ισούται με το συμπλήρωμα της άλλης εισόδου, δηλαδή: $1 \oplus y_i = 1y'_i + 0y_i = y'_i$. Στην περίπτωση όπου $X = 12_{10} = 1100_2$, $Y = 14_{10} = 1110_2 \Rightarrow Y' = 0001_2$ και $c_{in} = 1$, η πράξη $X + Y' + 1$ εκτελείται από το κύκλωμα, ως εξής:

Κρατούμενα:	c_{out} =	0	0	0	1	1	= c_{in}
			1	1	0	0	= X
		+	0	0	0	1	= Y′
			1	1	1	0	S

Προκύπτει λοιπόν ότι S = $s_3s_2s_1s_0$ = 1110 και c_{out} = 0. **Ο αριθμός S που προέκυψε είναι το συμπλήρωμα ως προς 2 της διαφοράς Y – X** = 14 – 12 = 2 = 0010_2. Πράγματι, το συμπλήρωμα ως προς 2 του δυαδικού αριθμού 0010 είναι ο αριθμός $Σ_2$(0010) = $Σ_1$(0010) + 1 = 1101 + 1 = 1110, δηλαδή το αποτέλεσμα της πράξης X + Y′ + 1.

β) Χρησιμοποιώντας 4 πλήρεις αθροιστές (FA) μπορούμε να υλοποιήσουμε συνδυαστικό κύκλωμα που να υπολογίζει το πλήθος των μονάδων του εξαψήφιου δυαδικού αριθμού εισόδου (δηλαδή, ένα κύκλωμα που να προσθέτει τα ψηφία του αριθμού εισόδου). Το μέγιστο πλήθος μονάδων του δυαδικού αριθμού εισόδου είναι 6 (= 110_2), επομένως το κύκλωμα θα περιλαμβάνει 3 ψηφία εξόδου (έστω, $s_2s_1s_0$).

Στο παρακάτω σχήμα, οι δυνάμεις του 2 δηλώνουν την θέση (ή το βάρος) κάθε ψηφίου. Κατά την πρόσθεση των ψηφίων του αριθμού εισόδου προσέχουμε, ώστε σε κάθε πλήρη αθροιστή να προσθέτουμε ψηφία της ίδιας θέσης.



ΘΕΜΑ 3ο (1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 μονάδες)

Η είσοδος ενός συνδυαστικού κυκλώματος είναι τετραψήφιος μη προσημασμένος δυαδικός αριθμός xyzw. Η έξοδος F του κυκλώματος λαμβάνει λογική τιμή 1 όταν ο αριθμός εισόδου **διαιρείται ακριβώς με το 2**, διαφορετικά λαμβάνει τιμή 0.

α) Να καταστρώσετε τον πίνακα αλήθειας της λογικής συνάρτησης F(x,y,z,w) της εξόδου του κυκλώματος και να δώσετε τις δύο κανονικές μορφές της συνάρτησης.

β) Να ελαχιστοποιήσετε την συνάρτηση F(x,y,z,w) σε μορφή αθροίσματος γινομένων, χρησιμοποιώντας την μέθοδο του χάρτη Karnaugh.

γ) Να υλοποιήσετε την συνάρτηση F(x,y,z,w), χρησιμοποιώντας μόνο δύο πύλες NOR. Δεν επιτρέπεται η χρήση αντιστροφέων ή πυλών άλλου τύπου.

δ) Να υλοποιήσετε την συνάρτηση F(x,y,z,w), χρησιμοποιώντας έναν αποκωδικοποιητή και το μικρότερο δυνατό πλήθος πυλών OR τριών εισόδων. Δεν επιτρέπεται η χρήση αντιστροφέων ή πυλών άλλου τύπου ή πυλών OR με πλήθος εισόδων διαφορετικό του 3.

ε) Να υλοποιήσετε την συνάρτηση F(x,y,z,w) χρησιμοποιώντας τρεις πολυπλέκτες 2-σε-1 και μία λογική πύλη.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

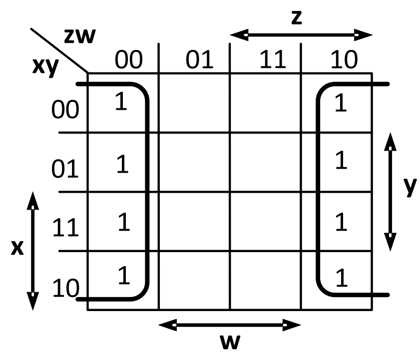
α) Με βάση τα δεδομένα, ο πίνακας αληθείας της λογικής συνάρτησης F(x,y,z,w) της εξόδου του κυκλώματος, έχει ως εξής:

Δεκαδικός	**x**	**y**	**z**	**w**	**F**
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτουν εύκολα οι δύο κανονικές μορφές της λογικής συνάρτησης.

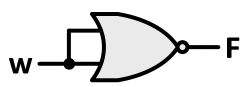
Άθροισμα ελαχιστόρων: F(x,y,z,w) = Σ(0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14).
Γινόμενο μεγιστόρων: F(x,y,z,w) = Π(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15).

β) Από τις κανονικές μορφές της F(x,y,z,w), καταστρώνουμε τον χάρτη Karnaugh που την περιγράφει:



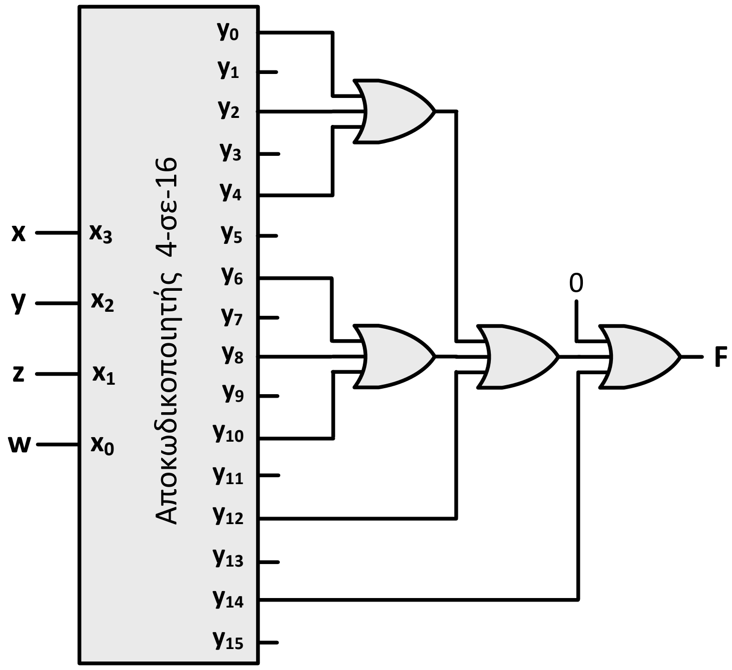
Ομαδοποιώντας στον χάρτη Karnaugh μια οκτάδα τετραγώνων που περιέχει μονάδες, καταλήγουμε στην ελαχιστοποιημένη μορφή της συνάρτησης F(x,y,z,w) = w′, η οποία μπορεί ωστόσο να προκύψει απευθείας από τον πίνακα αλήθειας της συνάρτησης.

γ) Για να υλοποιήσουμε τη συνάρτηση μόνο με λογικές πύλες NOR, παρατηρούμε ότι από τις δύο διαθέσιμες πύλες NOR, αρκεί μόνο η μία, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα που ακολουθεί.

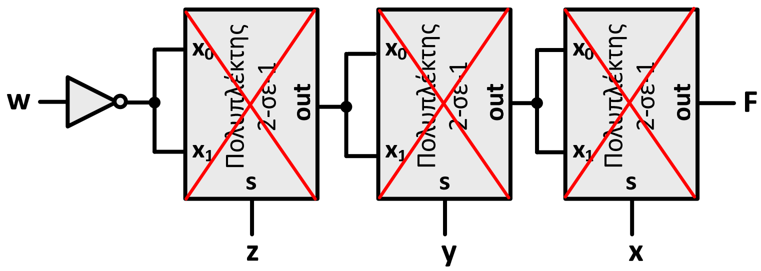


δ) Ένας αποκωδικοποιητής N-σε-2^N αποτελεί γεννήτρια ελαχιστόρων και συνδυάζοντάς τον με μία λογική πύλη OR, η οποία παράγει το λογικό άθροισμα κατάλληλων εξόδων του, μπορούμε να υλοποιήσουμε οποιαδήποτε λογική συνάρτηση σε μορφή αθροίσματος ελαχιστόρων. Για να γίνει αυτό, πρέπει το πλήθος των εισόδων του αποκωδικοποιητή να ισούται με το πλήθος των μεταβλητών της συνάρτησης και το πλήθος των εισόδων της πύλης OR να ισούται με το πλήθος των ελαχιστόρων που συμμετέχουν στη συνάρτηση. Έτσι, για την υλοποίηση της συνάρτησης F(x,y,z,w) χρειαζόμαστε έναν αποκωδικοποιητή 4-σε-16 (δηλαδή, με 4 εισόδους και 16 εξόδους) και μία πύλη OR με 8 εισόδους, αφού στη συνάρτηση συμμετέχουν 8 ελαχιστόροι.

Ωστόσο, λόγω του ότι είναι διαθέσιμες μόνο πύλες OR με 3 εισόδους, υλοποιούμε την απαιτούμενη πύλη 8 εισόδων με 4 πύλες 3 εισόδων, όπως παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



ε) Για την υλοποίηση της λογικής συνάρτησης F(x,y,z,w) = w′ με 3 πολυπλέκτες 2-σε-1 (βασιζόμενοι και στον πίνακα αλήθειας της συνάρτησης), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κύκλωμα που ακολουθεί:



Ωστόσο, παρατηρούμε ότι οι 3 πολυπλέκτες 2-σε-1 είναι περιττοί, συνεπώς η συνάρτηση μπορεί να υλοποιηθεί μόνο με την διαθέσιμη λογική πύλη που είναι αντιστροφέας του παραπάνω σχήματος.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Επειδή στην διάρκεια της εξέτασης, πιθανώς (με δική μου ευθύνη) δημιουργήθηκε η εντύπωση ότι ο ελαχιστόρος m_0 δεν συμμετέχει στην συνάρτηση F(x,y,z,w), δηλαδή ότι για την πρώτη γραμμή του πίνακα αλήθειας, η συνάρτηση λαμβάνει τιμή 0 και όχι 1, στην συνέχεια παρατίθεται η απάντηση της άσκησης με δεδομένο ότι ο ελαχιστόρος m_0 δεν συμμετέχει στην συνάρτηση F(x,y,z,w). **Η εν λόγω απάντηση θα θεωρηθεί επίσης σωστή**.

α) Με βάση τα δεδομένα, ο πίνακας αληθείας της λογικής συνάρτησης F(x,y,z,w) της εξόδου του κυκλώματος, έχει ως εξής:

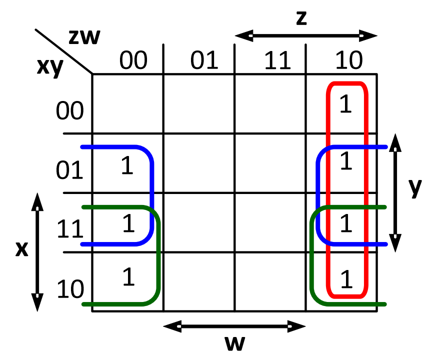
Δεκαδικός	x	y	z	w	F
0	0	0	0	0	**0**
1	0	0	0	1	0

2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτουν εύκολα οι δύο κανονικές μορφές της λογικής συνάρτησης.

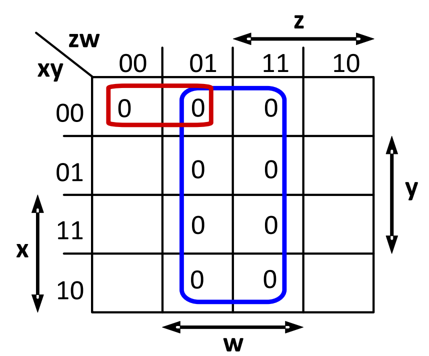
Άθροισμα ελαχιστόρων: F(x,y,z,w) = Σ(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14).
Γινόμενο μεγιστόρων: F(x,y,z,w) = Π(**0**, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15).

β) Από τις κανονικές μορφές της F(x,y,z,w), καταστρώνουμε τον χάρτη Karnaugh που την περιγράφει:



Ομαδοποιώντας στον χάρτη Karnaugh 3 τετράδες τετραγώνων που περιέχουν μονάδες, καταλήγουμε στην ελαχιστοποιημένη μορφή αθροίσματος γινομένων της συνάρτησης F(x,y,z,w) = yw′ + xw′ + zw′.

γ) Για να υλοποιήσουμε τη συνάρτηση με λογικές πύλες NOR, ομαδοποιούμε τα τετράγωνα του χάρτη Karnaugh που περιέχουν μηδενικά, έτσι ώστε να εξάγουμε την ελαχιστοποιημένη συνάρτηση σε μορφή γινομένου α-θροισμάτων.

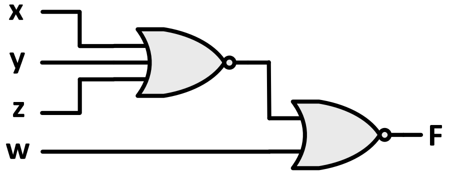


Ομαδοποιώντας στον χάρτη Karnaugh μία οκτάδα και ένα ζεύγος τετραγώνων που περιέχουν μηδενικά, καταλήγουμε στην ελαχιστοποιημένη μορφή αθροίσματος γινομένων της συνάρτησης F′(x,y,z,w) = w + x′y′z′ και στη συνέχεια εφαρμόζοντας το θεώρημα De Morgan λαμβάνουμε την ακόλουθη ελαχιστοποιημένη μορφή της συνάρτησης F(x,y,z,w): F′(x,y,z,w) = w + x′y′z′ ⇒ F(x,y,z,w) = (w + x′y′z′)′ = w′(x + y + z).

Εφαρμόζουμε στην παραπάνω μορφή της συνάρτησης, κατά σειρά τα θεωρήματα διπλής άρνησης και De Morgan και λαμβάνουμε μια μορφή της συνάρτησης που είναι άμεσα υλοποιήσιμη μόνο με πύλες NOR:

F(x,y,z,w) = w′(x + y + z) = {[w′(x + y + z)]′}′ = [w + (x + y + z)′]′.

Για την υλοποίηση της παραπάνω μορφής της συνάρτησης F(x,y,z,w) χρειάζονται μόνο δύο πύλες NOR, όπως παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.

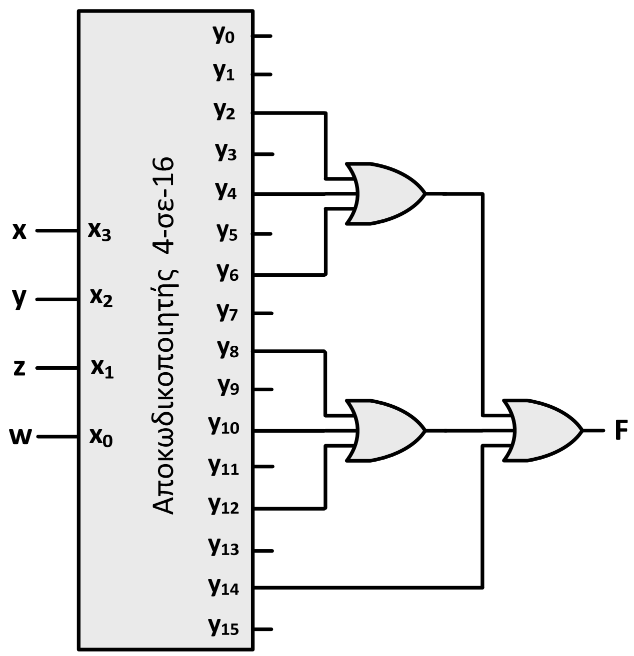


Εναλλακτικά, μπορούμε να καταλήξουμε στην ίδια μορφή της συνάρτησης F(x,y,z,w), ξεκινώντας από την ελαχιστοποιημένη της μορφή που προέκυψε στο προηγούμενο ερώτημα και εφαρμόζοντας το αξίωμα της επιμεριστικότητας και τα θεωρήματα διπλής άρνησης και De Morgan:

F(x,y,z,w) = yw′ + xw′ + zw′ = w′(y + x + z) = {[w′(y + x + z)]′}′ = [w + (x + y + z)′]′.

δ) Ένας αποκωδικοποιητής N-σε-2^N αποτελεί γεννήτρια ελαχιστόρων και συνδυάζοντάς τον με μία λογική πύλη OR, η οποία παράγει το λογικό άθροισμα κατάλληλων εξόδων του, μπορούμε να υλοποιήσουμε οποιαδήποτε λογική συνάρτηση σε μορφή αθροίσματος ελαχιστόρων. Για να γίνει αυτό, πρέπει το πλήθος των εισόδων του αποκωδικοποιητή να ισούται με το πλήθος των μεταβλητών της συνάρτησης και το πλήθος των εισόδων της πύλης OR να ισούται με το πλήθος των ελαχιστόρων που συμμετέχουν στη συνάρτηση. Έτσι, για την υλοποίηση της συνάρτησης F(x,y,z,w) χρειαζόμαστε έναν αποκωδικοποιητή 4-σε-16 (δηλαδή, με 4 εισόδους και 16 εξόδους) και μία πύλη OR με 7 εισόδους, αφού στη συνάρτηση συμμετέχουν 7 ελαχιστόροι.

Ωστόσο, λόγω του ότι είναι διαθέσιμες μόνο πύλες OR με 3 εισόδους, υλοποιούμε την απαιτούμενη πύλη 7 εισόδων με 3 πύλες 3 εισόδων, όπως παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



ε) Για την υλοποίηση της λογικής συνάρτησης F(x,y,z,w) με πολυπλέκτες, είναι χρήσιμο να καταστρώσουμε τον πίνακα προγραμματισμού των πολυπλεκτών.

x	y	z	w	F	
0	0	0	0	0	F = 0
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	1	F = w′
0	0	1	1	0	
0	1	0	0	1	F = w′
0	1	0	1	0	
0	1	1	0	1	F = w′
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	1	F = w′
1	0	0	1	0	
1	0	1	0	1	F = w′
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	1	F = w′
1	1	0	1	0	
1	1	1	0	1	F = w′
1	1	1	1	0	

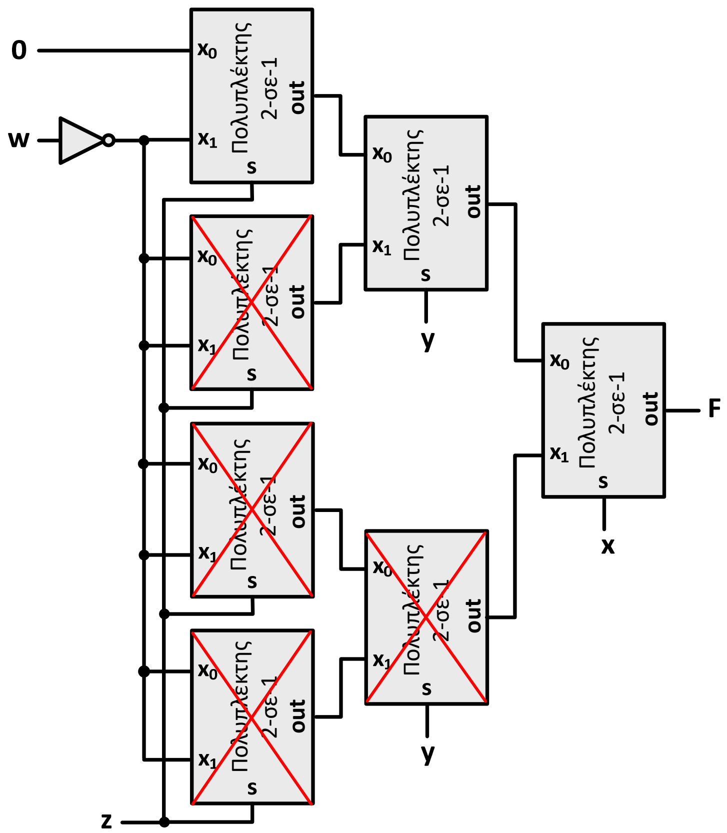
Από την παρακάτω ανάπτυξη της λογικής συνάρτησης F(x,y,z,w) σύμφωνα με το θεώρημα Shannon, προκύπτει μια μορφή της συνάρτησης που είναι άμεσα υλοποιήσιμη με πολυπλέκτες 2-σε-1:

$$F(x,y,z,w) = xF(1,y,z,w) + x'F(0,y,z,w)$$

$$= x[yF(1,1,z,w) + y'F(1,0,z,w)] + x'F[yF(0,1,z,w) + y'F(0,0,z,w)] =$$

$$= x\{y[zF(1,1,1,w) + z'F(1,1,0,w)] + y'[zF(1,0,1,w) + z'F(1,0,0,w)]\}$$

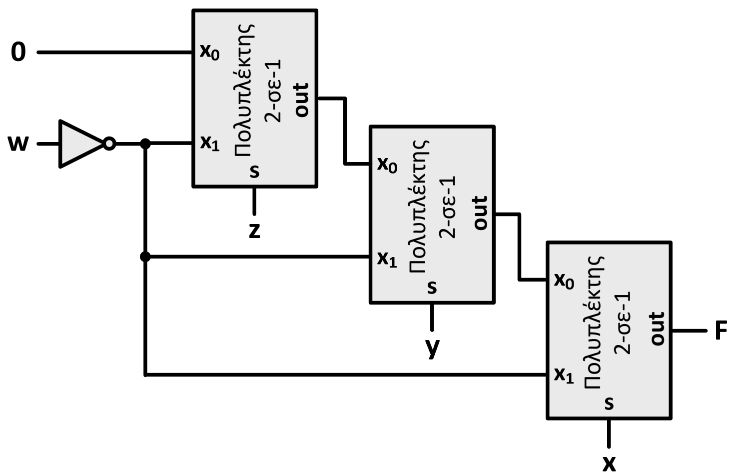
$$+ z'\{y[zF(0,1,1,w) + z'F(0,1,0,w)] + y'[zF(0,0,1,w) + z'F(0,0,0,w)]\} .$$



Στην ανάπτυξη της συνάρτησης, οι 4 συναρτήσεις που περικλείονται στις αγκύλες υλοποιούνται με έναν πολυπλέκτη 2-σε-1 η καθεμία. Η είσοδος επιλογής των 4 πολυπλεκτών τροφοδοτείται με τη μεταβλητή z. Οι είσοδοι δεδομένων τους τροφοδοτούνται κατά σειρά με τις συναρτήσεις F(0,0,0,w), F(0,0,1,w), F(0,1,0,w), F(0,1,1,w), F(1,0,0,w), F(1,0,1,w), F(1,1,0,w), F(1,1,1,w), οι οποίες ισούνται με 0, w′, w′, w′, w′, w′, w′, w′, αντίστοιχα, όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα προγραμματισμού.

Οι έξοδοι των τεσσάρων πολυπλεκτών τροφοδοτούνται ανά δύο στις εισόδους δεδομένων δύο πολυπλεκτών 2-σε-1 με είσοδο επιλογής τη μεταβλητή y. Οι έξοδοι των δύο πολυπλεκτών τροφοδοτούνται στις εισόδους δεδομένων ενός ακόμη πολυπλέκτη 2-σε-1 με είσοδο επιλογής τη μεταβλητή x. Με βάση τα προαναφερόμενα, η υλοποίηση της λογικής συνάρτησης F(x,y,z,w) με πολυπλέκτες 2-σε-1 και έναν αντιστροφέα, παρουσιάζεται στο παραπάνω σχήμα.

Σε 3 από τους 4 πολυπλέκτες του πρώτου επιπέδου του παραπάνω κυκλώματος, οι δύο είσοδοι δεδομένων είναι ίδιες (w′ στον δεύτερο, στον τρίτο και στον τέταρτο πολυπλέκτη). Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να τους απαλείψουμε και να τροφοδοτήσουμε τις εισόδους του δεύτερου πολυπλέκτη του δευτέρου επιπέδου απευθείας με w′. Επειδή όμως οι είσοδοι του πολυπλέκτη αυτού είναι επίσης ίδιες, μπορούμε να τον απαλείψουμε και αυτόν, καταλήγοντας έτσι στο κύκλωμα υλοποίησης με 3 μόνο πολυπλέκτες 2-σε-1 και έναν αντιστροφέα, που παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.

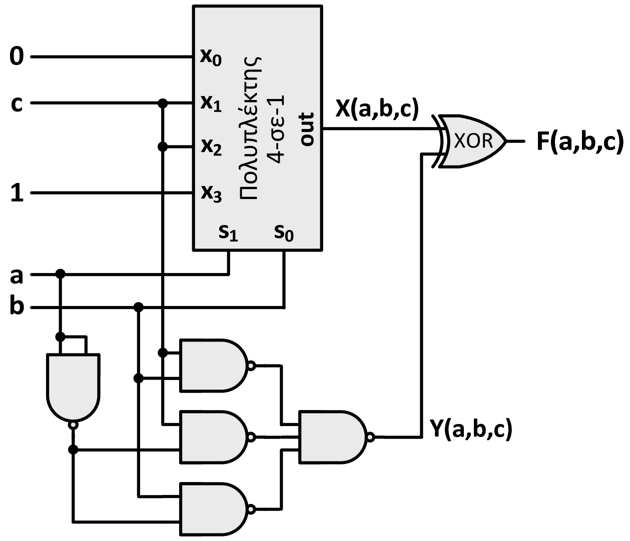


==

ΟΜΑΔΑ Β (Λ – Ω)

ΘΕΜΑ 1ο (2,5 μονάδες)

Αφού αναλύσετε την λειτουργία του συνδυαστικού κυκλώματος του παρακάτω σχήματος, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F(a,b,c) μπορεί να υλοποιηθεί **μόνο με μία πύλη XOR δύο εισόδων**.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για να αναλύσουμε την λειτουργία του κυκλώματος, αρχικά προσδιορίζουμε τις συναρτήσεις X(a,b,c) και Y(a,b,c). Λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση λειτουργίας του πολυπλέκτη 4-σε-1 ($out = s'_1s'_0x_0 + s'_1s_0x_1 + s_1s'_0x_2 + s_1s_0x_3$), η συνάρτηση X(a,b,c,) προσδιορίζεται ως εξής:

$X(a,b,c) = 0a'b' + ca'b + cab' + 1ab = a'bc + ab'c + ab = a'bc + a(b'c + b) = a'bc + a(b + c) = a'bc + ab + ac$

$\qquad = (a'b + a)c + ab = (a + b)c + ab = ab + ac + bc.$

Για να καταλήξουμε στην παραπάνω μορφή της συνάρτησης X(a,b,c) χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα x0 = 0, το αξίωμα του ουδέτερου στοιχείου (x1 = x), τα αξιώματα αντιμεταθετικότητας και επιμεριστικότητας και το θεώρημα απορρόφησης.

Η συνάρτηση Y(a,b,c,) προσδιορίζεται ως εξής:

$Y(a,b,c) = \{(bc)'[(aa)'c]'[(aa)'b]'\}' = [(bc)'(a'c)'(a'b)']' = a'b + a'c + bc.$

Για να καταλήξουμε στην παραπάνω μορφή της συνάρτησης Y(a,b,c) χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα xx = x και το θεώρημα De Morgan.

Σύμφωνα με τον ορισμό της λογικής πράξης XOR ($x \oplus y = xy' + x'y$) που διέπει την λειτουργία της λογικής πύλης XOR, προσδιορίζουμε την συνάρτηση F(a,b,c) ως εξής:

$F(a,b,c) = X(a,b,c) \oplus Y(a,b,c) = X(a,b,c)\,[Y(a,b,c)]' + [X(a,b,c)]'\,Y(a,b,c)]$

$\qquad = (ab + ac + bc)(a'b + a'c + bc)' + (ab + ac + bc)'(a'b + a'c + bc).$

Στη συνέχεια, με αλγεβρικούς μετασχηματισμούς στην παραπάνω μορφή της συνάρτησης F(a,b,c), όπως εφαρμογή του θεωρήματος De Morgan, των αξιωμάτων επιμεριστικότητας, αντιμεταθετικότητας και συμπληρώματος (xx' = 0) και των θεωρημάτων x + x = x και x + x' = 0, αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση F(a,b,c) μπορεί να υλοποιηθεί μόνο με μία λογική πύλη XOR 2 εισόδων.

$F(a,b,c) = (ab + ac + bc)(a'b + a'c + bc)' + (ab + ac + bc)'(a'b + a'c + bc)$

$\qquad = (ab + ac + bc)[(a'b)'(a'c)'(bc)'] + [(ab)'(ac)'(bc)'](a'b + a'c + bc)$

$\qquad = (ab + ac + bc)[(a + b')(a + c')(b' + c')] + [(a' + b')(a' + c')(b' + c')](a'b + a'c + bc)$

$\qquad = (ab + ac + bc)[(a + ac' + ab' + b'c')(b' + c')] + [(a' + a'c' + a'b' + b'c')(b' + c')](a'b + a'c + bc)$

$= (ab + ac + bc)(ab' + ac' + ab'c' + \cancel{ac'} + \cancel{ab'} + \cancel{ab'c'} + b'c' + \cancel{b'c'}) + (a'b' + a'c' + a'b'c' + \cancel{a'c'} + \cancel{a'b'} + \cancel{a'b'c'}$
$+ b'c' + \cancel{b'c'})(a'b + a'c + bc) = (ab + ac + bc)(ab' + ac' + ab'c' + b'c') + (a'b' + a'c' + a'b'c' + b'c')(a'b + a'c + bc)$
$= abc' + ab'c + a'b'c + a'bc' = (a + a')bc' + (a + a')b'c = bc' + b'c = \mathbf{b \oplus c}$.

Επομένως, η συνάρτηση F(a,b,c) μπορεί να υλοποιηθεί μόνο με **μια πύλη XOR με εισόδους b και c**.

Εναλλακτικά, μπορούμε αρχικά να εξάγουμε τις κανονικές μορφές αθροίσματος ελαχιστόρων των συναρτήσεων X(a,b,c) και Y(a,b,c):

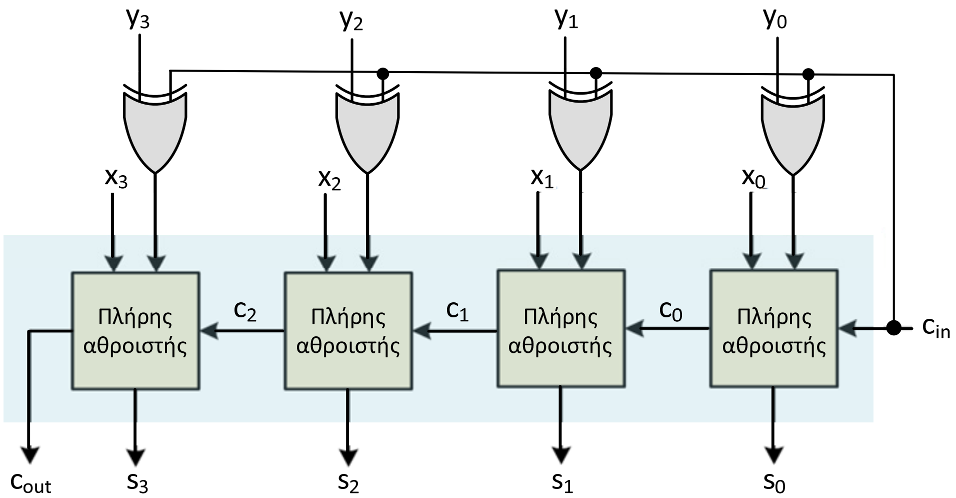
$X(a,b,c) = a'bc + ab'c + ab = a'bc + ab'c + ab(c + c') = a'bc + ab'c + abc + abc' \Rightarrow$
$X(a,b,c) = \Sigma(3, 5, 7, 6) = \Sigma(3, 5, 6, 7)$,
$Y(a,b,c) = a'b + a'c + bc = a'b(c + c') + a'(b + b')c + (a + a')bc = a'bc + a'bc' + \cancel{a'bc} + a'b'c + abc + \cancel{a'bc} \Rightarrow$
$Y(a,b,c) = \Sigma(3, 2, 1, 7) = \Sigma(1, 2, 3, 7)$.

Λόγω του ότι η λογική πράξη XOR μεταξύ δύο μεταβλητών ή συναρτήσεων λαμβάνει τιμή 1, μόνο όταν η τιμή των δύο μεταβλητών ή συναρτήσεων είναι διαφορετική, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $F(a,b,c) = X(a,b,c) \oplus Y(a,b,c)$ μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα των ελαχιστόρων που δεν είναι κοινοί στις συναρτήσεις X(a,b,c) και Y(a,b,c), δηλαδή: $F(a,b,c) = X(a,b,c) \oplus Y(a,b,c) = \Sigma(1, 2, 5, 6)$.

$F(a,b,c) = X(a,b,c) \oplus Y(a,b,c) = \Sigma(1, 2, 5, 6) = a'b'c + a'bc' + ab'c + abc' = (a' + a)b'c + (a' + a)bc' = b'c + bc' = \mathbf{b \oplus c}$.

ΘΕΜΑ 2ο (0,5 + 2 = 2,5 μονάδες)

α) Δίνεται το συνδυαστικό κύκλωμα του παρακάτω σχήματος, το οποίο λαμβάνει στις εισόδους του δύο τετραψήφιους μη προσημασμένους δυαδικούς αριθμούς $X = x_3x_2x_1x_0$, $Y = y_3y_2y_1y_0$ και το ψηφίο c_{in} και παράγει στις εξόδους του τον τετραψήφιο μη προσημασμένο δυαδικό αριθμό $S = s_3s_2s_1s_0$ και το ψηφίο c_{out}. Εάν $X = 9_{10}$, $Y = 13_{10}$ και $c_{in} = 1$, να υπολογίσετε αναλυτικά τις τιμές του δυαδικού αριθμού $S = s_3s_2s_1s_0$ και του ψηφίου c_{out} και να προσδιορίσετε την σχέση του αποτελέσματος που υπολογίσατε με τους αριθμούς X και Y.



β) Να σχεδιάσετε συνδυαστικό κύκλωμα που δέχεται στις εισόδους του έναν πενταψήφιο μη προσημασμένο δυαδικό αριθμό $X = x_4x_3x_2x_1x_0$ και στις εξόδους παράγει έναν μη προσημασμένο δυαδικό αριθμό, ο οποίος ισούται με το πλήθος των μονάδων που περιέχονται στον αριθμό X. Έχετε στη διάθεσή σας, **μόνο πλήρεις αθροιστές** (full adders, FA).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

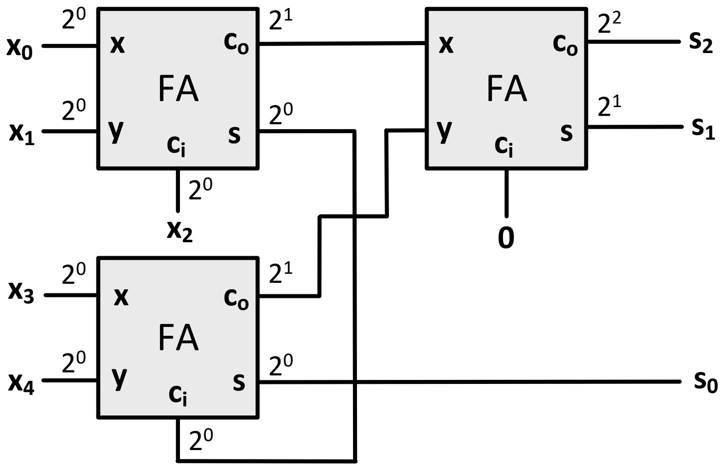
α) Το συνδυαστικό κύκλωμα που δίνεται, όταν $c_{in} = 1$ εκτελεί την πράξη X + Y′ + 1, αφού οι πύλες XOR όταν η μία είσοδός τους λαμβάνει τιμή 1, τότε η έξοδός τους ισούται με το συμπλήρωμα της άλλης εισόδου, δηλαδή: $1 \oplus y_i = 1y'_i + 0y_i = y'_i$. Στην περίπτωση όπου $X = 9_{10} = 1001_2$, $Y = 13_{10} = 1101_2 \Rightarrow Y' = 0010_2$ και $c_{in} = 1$, η πράξη X + Y′ + 1 εκτελείται από το κύκλωμα, ως εξής:

Κρατούμενα:	c_{out} =	0	0	1	1	1	= c_{in}
			1	0	0	1	= X
		+	0	0	1	0	= Y′
			1	1	0	0	S

Προκύπτει λοιπόν ότι S = $s_3s_2s_1s_0$ = 1100 και c_{out} = 0. **Ο αριθμός S που προέκυψε είναι το συμπλήρωμα ως προς 2 της διαφοράς Y – X** = 13 – 9 = 4 = 0100_2. Πράγματι, το συμπλήρωμα ως προς 2 του δυαδικού αριθμού 0100 είναι ο αριθμός Σ_2(0100) = Σ_1(0100) + 1 = 1011 + 1 = 1100, δηλαδή το αποτέλεσμα της πράξης X + Y′ + 1.

β) Χρησιμοποιώντας 3 πλήρεις αθροιστές (FA) μπορούμε να υλοποιήσουμε συνδυαστικό κύκλωμα που να υπολογίζει το πλήθος των μονάδων του πενταψήφιου δυαδικού αριθμού εισόδου (δηλαδή, ένα κύκλωμα που να προσθέτει τα ψηφία του αριθμού εισόδου). Το μέγιστο πλήθος μονάδων του δυαδικού αριθμού εισόδου είναι 5 (= 101_2), επομένως το κύκλωμα θα περιλαμβάνει 3 ψηφία εξόδου (έστω, $s_2s_1s_0$).

Στο παρακάτω σχήμα, οι δυνάμεις του 2 δηλώνουν την θέση (ή το βάρος) κάθε ψηφίου. Κατά την πρόσθεση των ψηφίων του αριθμού εισόδου προσέχουμε, ώστε σε κάθε πλήρη αθροιστή να προσθέτουμε ψηφία της ίδιας θέσης.



ΘΕΜΑ 3ο (1 + 1 + 1,25 + 0,75 + 1 = 5 μονάδες)

Η είσοδος ενός συνδυαστικού κυκλώματος είναι τετραψήφιος μη προσημασμένος δυαδικός αριθμός xyzw. Η έξοδος F του κυκλώματος λαμβάνει λογική τιμή 1 όταν ο αριθμός εισόδου **δεν διαιρείται ακριβώς με το 4**, διαφορετικά λαμβάνει τιμή 0.

α) Να καταστρώσετε τον **πίνακα αλήθειας** της λογικής συνάρτησης F(x,y,z,w) της εξόδου του κυκλώματος και να δώσετε τις **δύο κανονικές μορφές** της συνάρτησης.

β) Να ελαχιστοποιήσετε την συνάρτηση F(x,y,z,w) σε **μορφή αθροίσματος γινομένων**, χρησιμοποιώντας την μέθοδο του χάρτη Karnaugh.

γ) Να υλοποιήσετε την συνάρτηση F(x,y,z,w), χρησιμοποιώντας το **μικρότερο δυνατό πλήθος πυλών NOR δύο εισόδων**. Δεν επιτρέπεται η χρήση αντιστροφέων, πυλών άλλου τύπου ή πυλών NOR με περισσότερες από 2 εισόδους.

δ) Να υλοποιήσετε την συνάρτηση F(x,y,z,w), χρησιμοποιώντας **έναν αποκωδικοποιητή** και **μία πύλη NOR**. Δεν επιτρέπεται η χρήση αντιστροφέων και πυλών άλλου τύπου.

ε) Να υλοποιήσετε την συνάρτηση F(x,y,z,w), χρησιμοποιώντας **μόνο τρεις πολυπλέκτες 2-σε-1**.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

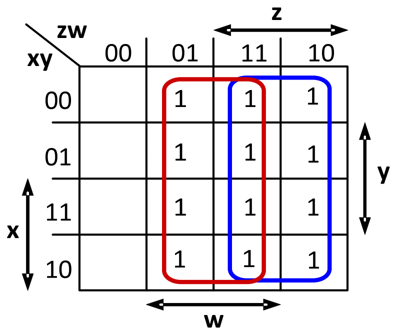
α) Με βάση τα δεδομένα, ο πίνακας αληθείας της λογικής συνάρτησης F(x,y,z,w) της εξόδου του κυκλώματος, έχει ως εξής:

Δεκαδικός	**x**	**y**	**z**	**w**	**F**
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτουν εύκολα οι δύο κανονικές μορφές της λογικής συνάρτησης.

Άθροισμα ελαχιστόρων: F(x,y,z,w) = Σ(1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15).
Γινόμενο μεγιστόρων: F(x,y,z,w) = Π(0, 4, 8, 12).

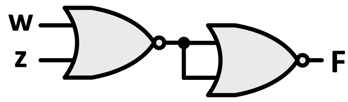
β) Από τις κανονικές μορφές της F(x,y,z,w), καταστρώνουμε τον χάρτη Karnaugh που την περιγράφει:



Ομαδοποιώντας στον χάρτη Karnaugh 2 οκτάδες τετραγώνων που περιέχουν μονάδες, καταλήγουμε στην ελαχιστοποιημένη μορφή αθροίσματος γινομένων της συνάρτησης F(x,y,z,w) = z + w.

γ) Στην ελαχιστοποιημένη μορφή της συνάρτησης που προέκυψε, εφαρμόζουμε το θεώρημα διπλής άρνησης και προκύπτει μια μορφή της συνάρτησης που υλοποιείται με 2 πύλες NOR δύο εισόδων.

F(x,y,z,w) = z + w = [(z + w)′]′.



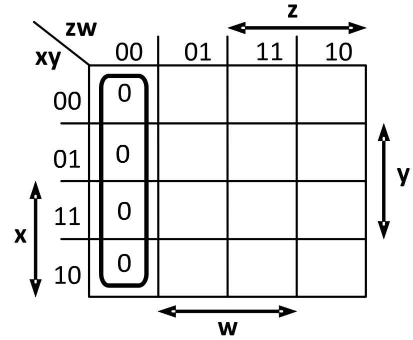
Εναλλακτικά, μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τα μηδενικά του χάρτη Karnaugh που περιέχουν μηδενικά και να εξάγουμε την ελαχιστοποιημένη μορφή της συμπληρωματικής συνάρτησης F′(x,y,z,w).

Ομαδοποιώντας στον χάρτη Karnaugh δύο ζεύγη τετραγώνων που περιέχουν μηδενικά, προκύπτει ότι:

F′(x,y,z,w) = z′w′.

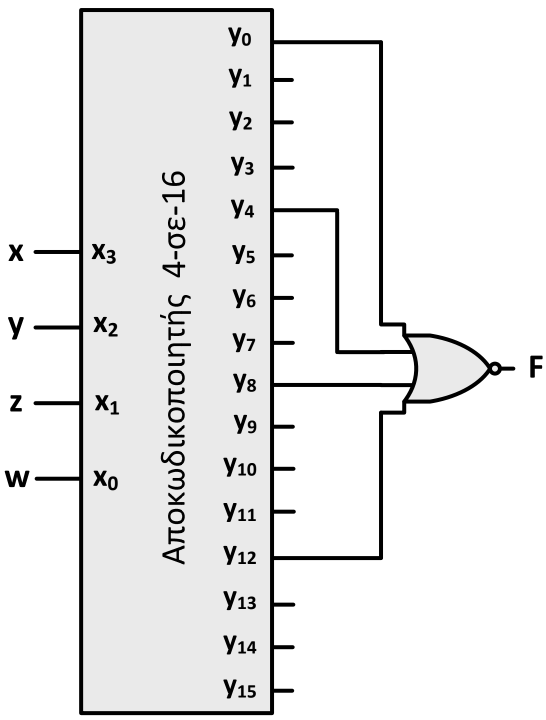
Εφαρμόζουμε στην συνέχεια το θεώρημα De Morgan και το θεώρημα διπλής άρνησης και καταλήγουμε στην μορφή της συνάρτησης F(x,y,z,w) που υλοποιήσαμε με 2 πύλες NOR δύο εισόδων.

$$F'(x,y,z,w) = z'w' \Rightarrow F(x,y,z,w) = (z'w')' = z + w = [(z + w)']'.$$



δ) Ένας αποκωδικοποιητής N-σε-2^N αποτελεί γεννήτρια ελαχιστόρων και συνδυάζοντάς τον με μία λογική πύλη OR, η οποία παράγει το λογικό άθροισμα κατάλληλων εξόδων του, μπορούμε να υλοποιήσουμε οποιαδήποτε λογική συνάρτηση σε μορφή αθροίσματος ελαχιστόρων. Για να γίνει αυτό, πρέπει το πλήθος των εισόδων του αποκωδικοποιητή να ισούται με το πλήθος των μεταβλητών της συνάρτησης και το πλήθος των εισόδων της πύλης OR να ισούται με το πλήθος των ελαχιστόρων που συμμετέχουν στη συνάρτηση. Έτσι, για την υλοποίηση της συνάρτησης F(x,y,z,w) χρειαζόμαστε έναν αποκωδικοποιητή 4-σε-16 (δηλαδή, με 4 εισόδους και 16 εξόδους) και μία πύλη OR με 12 εισόδους, αφού στη συνάρτηση συμμετέχουν 12 ελαχιστόροι.

Ωστόσο, λόγω του ότι είναι διαθέσιμη μόνο μια πύλη NOR, μπορούμε να υλοποιήσουμε την συνάρτηση, εάν τροφοδοτήσουμε τις εισόδους μιας πύλης NOR 4 εισόδων με τις εξόδους του αποκωδικοποιητή που αντιστοιχούν στους 4 ελαχιστόρους της συμπληρωματικής συνάρτησης (m_0, m_4, m_8, m_{12}), όπως παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



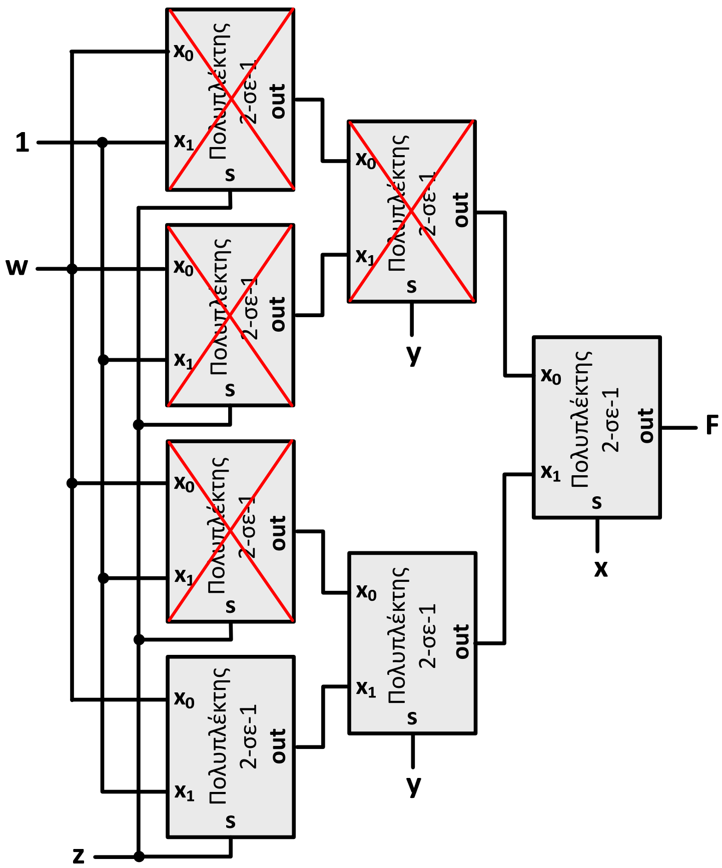
ε) Για την υλοποίηση της λογικής συνάρτησης F(x,y,z,w) με πολυπλέκτες, είναι χρήσιμο να καταστρώσουμε τον πίνακα προγραμματισμού των πολυπλεκτών.

x	y	z	w	F	
0	0	0	0	0	F = w
0	0	0	1	1	

0	0	1	0	1	F = 1
0	0	1	1	1	
0	1	0	0	0	F = w
0	1	0	1	1	
0	1	1	0	1	F = 1
0	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	F = w
1	0	0	1	1	
1	0	1	0	1	F = 1
1	0	1	1	1	
1	1	0	0	0	F = w
1	1	0	1	1	
1	1	1	0	1	F = 1
1	1	1	1	1	

Από την παρακάτω ανάπτυξη της λογικής συνάρτησης F(x,y,z,w) σύμφωνα με το θεώρημα Shannon, προκύπτει μια μορφή της συνάρτησης που είναι άμεσα υλοποιήσιμη με πολυπλέκτες 2-σε-1:

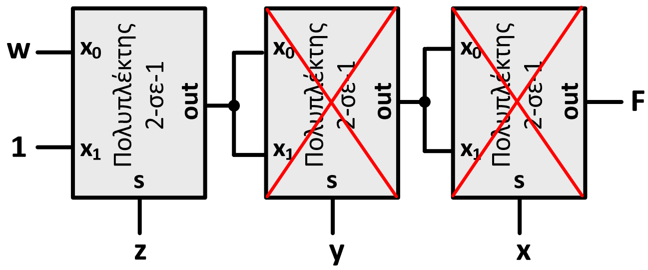
$$F(x,y,z,w) = xF(1,y,z,w) + x'F(0,y,z,w)$$
$$= x[yF(1,1,z,w) + y'F(1,0,z,w)] + x'F[yF(0,1,z,w) + y'F(0,0,z,w)] =$$
$$= x\{y[zF(1,1,1,w) + z'F(1,1,0,w)] + y'[zF(1,0,1,w) + z'F(1,0,0,w)]\}$$
$$+ z'\{y[zF(0,1,1,w) + z'F(0,1,0,w)] + y'[zF(0,0,1,w) + z'F(0,0,0,w)]\} .$$



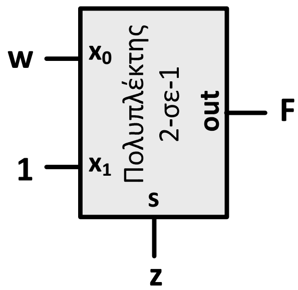
Στην ανάπτυξη της συνάρτησης, οι 4 συναρτήσεις που περικλείονται στις αγκύλες υλοποιούνται με έναν πολυπλέκτη 2-σε-1 η καθεμία. Η είσοδος επιλογής των 4 πολυπλεκτών τροφοδοτείται με τη μεταβλητή z. Οι είσοδοι δεδομένων τους τροφοδοτούνται κατά σειρά με τις συναρτήσεις F(0,0,0,w), F(0,0,1,w), F(0,1,0,w), F(0,1,1,w), F(1,0,0,w), F(1,0,1,w), F(1,1,0,w), F(1,1,1,w), οι οποίες ισούνται με w, 1, w, 1, w, 1, w, 1, αντίστοιχα, όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα προγραμματισμού.

Οι έξοδοι των τεσσάρων πολυπλεκτών τροφοδοτούνται ανά δύο στις εισόδους δεδομένων δύο πολυπλεκτών 2-σε-1 με είσοδο επιλογής τη μεταβλητή y. Οι έξοδοι των δύο πολυπλεκτών τροφοδοτούνται στις εισόδους δεδομένων ενός ακόμη πολυπλέκτη 2-σε-1 με είσοδο επιλογής τη μεταβλητή x. Με βάση τα προαναφερόμενα, η υλοποίηση της λογικής συνάρτησης F(x,y,z,w) με πολυπλέκτες 2-σε-1 και έναν αντιστροφέα, παρουσιάζεται στο παραπάνω σχήμα.

Στους πολυπλέκτες του πρώτου επιπέδου του παραπάνω κυκλώματος, οι είσοδοι δεδομένων είναι ίδιες (w και 1). Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να απαλείψουμε τους 3 από αυτούς και να διατηρήσουμε μόνο έναν με εισόδους δεδομένων w και 1, καταλήγοντας στην ζητούμενη υλοποίηση με 3 πολυπλέκτες 2-σε-1, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Ωστόσο, παρατηρούμε ότι οι πολυπλέκτες του δεύτερου και του τρίτου επιπέδου είναι περιττοί και έτσι μπορούμε να καταλήξουμε σε υλοποίηση του κυκλώματος με έναν μόνο πολυπλέκτη 2-σε-1.



Επαλήθευση: F = z′w + z1 = z′w + z = (z′ + z)(w + z) = 1(w + z) = z + w.

==