ΑΛΛΑ ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ
Κεφάλαιο 5

Αντώνης Κ. Τραυλός (B.A., M.A., Ph.D.)
Καθηγητής
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ
Σχολή Επιστημών Ανθρώπινης Κίνησης και Ποιότητας Ζωής
Τμήμα Οργάνωσης και Διαχείρισης Αθλητισμού

1

ΑΛΛΑ ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ

- Στα μέτρα αυτά περιλαμβάνονται
  - ο **γεωμετρικός μέσος (G),**
  - ο **αρμονικός μέσος (H) και**
  - ο **τετραγωνικός μέσος (Q).**
- Επίσης περιλαμβάνεται και ο **κινητός μέσος,** που μπορεί να εφαρμοστεί σε όλους τους κύριους δείκτες κεντρικής τάσης.
- Ο **κινητός μέσος** είναι χρήσιμος για αναλύσεις χρονοσειρών, ενώ οι τρεις προηγούμενοι χρησιμοποιούνται σπανιότερα σε ειδικές εφαρμογές στις βιολογικές και τεχνολογικές επιστήμες

2

Γεωμετρικός μέσος (G)

- Ο γεωμετρικός μέσος (G) χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του μέσου όρου αριθμητικών (ισοσταθμικών) λόγων και εκατοστιαίων (%) μεταβολών.
- Εφαρμόζεται όπου η εξέλιξη ενός φαινομένου καταγράφεται ως λόγος δύο πρωτογενών μεταβλητών (π.χ. ένταση / συχνότητα).
- Για **απλή ομάδα αριθμών** πλήθους N, ο G λογαριάζεται με τον τύπο:

$$Geometric\ Mean = G = \sqrt[N]{X_1 X_2 X_3 \ldots X_N}$$

3

Γεωμετρικός μέσος (G)

- Για **παράδειγμα,** ο γεωμετρικός μέσος

- των τιμών 1 και 3 είναι	$G = \sqrt[2]{1 \times 3} = \sqrt[2]{3} = 1.73$
- των τιμών 1, 3 και 7 είναι	$G = \sqrt[3]{1 \times 3 \times 7} = \sqrt[3]{21} = 2.76$
- των τιμών 1, 3, 7 και 8 είναι	$G = \sqrt[4]{1 \times 3 \times 7 \times 8} = \sqrt[4]{112} = 3.60$

- Ο γεωμετρικός μέσος **παίρνει πάντα τιμές μικρότερες** από τον αριθμητικό μέσο (G M).
- ***Οι αριθμητικοί μέσοι των παραπάνω αριθμητικών σειρών είναι 2.5, 3.67 & 4.75 αντίστοιχα, δηλαδή μεγαλύτεροι από τους γεωμετρικούς τους μέσους.***

4

Σε μεγάλες ομάδες τιμών ο G λογαριάζεται ευκολότερα με λογάριθμους:

$$\log G = \frac{1}{N}\sum \log X \rightarrow G = 10^{\log G}$$

- Με την έννοια αυτή ο ***logG*** είναι στην ουσία ο αριθμητικός μέσος των λογάριθμων των αρχικών αριθμών.

5

Παράδειγμα - Γεωμετρικός μέσος: % *μεταβολή μυϊκής ενδυνάμωσης*

- Ένας προπονητής άρσης βαρών θέλει να σχεδιάσει ένα πρόγραμμα μυϊκής ενδυνάμωσης, διάρκειας 5 μηνών και *σταθερής σχετικής (%) αύξησης* της μέγιστης αντίστασης (βάρος), ώστε με αντίσταση 100 kg τον 1^{ο} μήνα να φθάσει τον 5^{ο} μήνα σε μέγιστη αντίσταση 130 kg.
- **Πρέπει λοιπόν να λογαριάσει τη σταθερή μηνιαία % αύξηση της μυϊκής αντίστασης: αύξηση που θα αποτελεί σταθερό ποσοστό της προηγούμενης μέγιστης αντίστασης.**

6

- Αν συμβολίσουμε με **p** τη ζητούμενη σταθερή % αύξηση της μέγιστης αντίστασης, με **A** την αρχική μέγιστη αντίσταση, και **T** την τελική μέγιστη αντίσταση για κάθε μήνα, τότε από τον τύπο

$$T = A(1+p)^k \quad \rightarrow \quad p = \sqrt[k]{\frac{T}{A}} - 1$$

- προκύπτει ότι, για να φθάσει μια αρχική ποσότητα **A** σε μια τελική τιμή **T** μέσα σε **k** (ισόποσα) χρονικά διαστήματα (ή μονάδες) και με σταθερό ποσοστό μεταβολής (%), στην αρχική τιμή πρέπει να εφαρμοστεί μια εκατοστιαία μεταβολή

$$\mathbf{p = (T/A)^{1/k} - 1}$$

- Η ποσότητα **$(T/A)^{1/k}$** αποτελεί στην ουσία το **γεωμετρικό μέσο** της όλης ποσοστιαίας μεταβολής και προκύπτει από τον γνωστό τύπο.

7

Πίνακας 5.1 - Υπολογισμός μέσης ποσοστιαίας αύξησης με το γεωμετρικό μέσο

Μήνες k	Εσφαλμένη Ανάλυση				Ορθή Ανάλυση			
	A	% p	+kg	T	A	% p	+kg	T
1	100	6	6	106	100	5.39	5.5	105.4
2	106	6	6.4	112.4	105.4	5.39	5.7	111.1
3	112.4	6	6.7	119.1	111.1	5.39	6.0	117.1
4	119.1	6	7.2	126.3	117.1	5.39	6.3	123.4
5	126.3	6	7.6	**133.9**	123.4	5.39	6.6	**130**
	k = 5 → T = 100 * (1 + 0.06) 5 = 133.9				k = 5 → T = 100 * (1 + $\boxed{0.539)}$ 5 = 130			

5-μηνο πρόγραμμα μυϊκής ενδυνάμωσης με σταθερή % αύξηση μέγιστης επιβάρυνσης.

- Έτσι, η μηνιαία αύξηση της μέγιστης αντίστασης θα πρέπει να είναι
  $p = (T/A)^{1/k} - 1$ = $(130/100)^{1/5} - 1 = (1.3)^{1/5} - 1 = 1.05387 - 1$ = **0.05387** ή **5.39%**
- Η χρήση της μέσης αριθμητικής μηνιαίας % αύξησης θα μπορούσε να οδηγήσει στην εξής εσφαλμένη ανάλυση :
  - Αφού το πρόγραμμα ξεκινάει με 100 kg μέγιστη αντίσταση και τελειώνει στα 130 kg, η ολική αύξηση θα είναι 30 kg, δηλαδή ολική % αύξηση 30% ή μηνιαία αύξηση 6%. Χρησιμοποιώντας όμως το 6% καταλήγουμε σε μέγιστη μυϊκή αντίσταση 134 kg και όχι στην επιθυμητή των 130 kg.

8

Παράδειγμα - Γεωμετρικός μέσος: *πηλίκα απόδοσης στο μπάσκετ*

- Ένας καλαθοσφαιριστής παρουσίασε σε 5 συνεχείς αγώνες τους πόντους και τους αντίστοιχους χρόνους συμμετοχής που φαίνονται στον πίνακα 5.2. Για να διαπιστωθεί η σχετική αποδοτικότητα του παίχτη στο σκοράρισμα (ανεξάρτητα του αριθμού των σουτ) υπολογίστηκαν τα πηλίκα Π/Χ (Πόντοι/Χρόνος) και τα αντίστροφά τους Χ/Π (Χρόνος/Πόντοι). Ο μέσος αριθμός πόντων και ο μέσος χρόνος συμμετοχής στο παιχνίδι ήταν 18.4 πόντοι και 28.2 min, αντίστοιχα. Και πάλι ως μέσος όρος των λόγων Π/Χ και Χ/Π χρησιμοποιείται ο **γεωμετρικός (G)** και όχι ο **αριθμητικός (M)**.

Πίν. 5.2 - Αναλογίες πόντων & χρόνου συμμετοχής σε 5 αγώνες

Αγώνες	1	2	3	4	5	M	G
Πόντοι (#)	11	8	22	23	28	**18.4**	16.56
Χρόνος (′)	16	21	31	33	40	**28.2**	26.77
Π/Χ	0.6875	0.3809	0.7097	0.6970	0.7000	0.6350	**0.6187**
Χ/Π	1.4545	2.6250	1.4091	1.4348	1.4286	1.6704	**1.6162**

$$G_{\Pi/X} = [\,(0.6875)\,(0.3809)\,(0.7097)\,(0.6970)\,(0.7000)\,]^{1/5} = (0.10324)^{1/5} = \mathbf{0.6187}$$

Π/Χ - πόντοι (κατά μέσο όρο) σε κάθε λεπτό συμμετοχής στον αγώνα.
Χ/Π - λεπτά συμμετοχής στον αγώνα (κατά μέσο όρο) για κάθε πόντο.

9

Παράδειγμα - Γεωμετρικός μέσος : *πηλίκα απόδοσης στο μπάσκετ.*

Πίν. 5.2 - Αναλογίες πόντων & χρόνου συμμετοχής σε 5 αγώνες

Αγώνες	1	2	3	4	5	M	G
Πόντοι (#)	11	8	22	23	28	**18.4**	16.56
Χρόνος (′)	16	21	31	33	40	**28.2**	26.77
Π/Χ	0.6875	0.3809	0.7097	0.6970	0.7000	0.6350	**0.6187**
Χ/Π	1.4545	2.6250	1.4091	1.4348	1.4286	1.6704	**1.6162**

$$G_{\Pi/X} = [\,(0.6875)\,(0.3809)\,(0.7097)\,(0.6970)\,(0.7000)\,]^{1/5} = (0.10324)^{1/5} = \mathbf{0.6187}$$

Π/Χ - πόντοι (κατά μέσο όρο) σε κάθε λεπτό συμμετοχής στον αγώνα.
Χ/Π - λεπτά συμμετοχής στον αγώνα (κατά μέσο όρο) για κάθε πόντο.

- Και στο παράδειγμα αυτό είναι εμφανής η καταλληλότητα του γεωμετρικού μέσου (G) έναντι του αριθμητικού μέσου (M) για τον υπολογισμό μέσων όρων αριθμητικών λόγων. Είναι επίσης πάλι εμφανές, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, ότι ο γεωμετρικός μέσος είναι πάντα μικρότερος του αριθμητικού μέσου (στήλες M & G).
- **ΠΑΡΑ ΠΟΛΥ σημαντικό μέτρο για την αξιολόγηση μιας μεταγραφής #####**

10

Γεωμετρικός μέσος: *ρυθμός σουτ στο μπάσκετ.*

- Τα αριθμητικά δεδομένα του παραδείγματος αυτού πάρθηκαν από ένα αγώνα μπάσκετ της εθνικής ομάδας νεανίδων. Στον αγώνα αυτόν οι 10 παίχτριες έκαναν σουτ (Σ) και συμμετείχαν για τους συνολικούς χρόνους (Χ) που φαίνονται στον πίνακα 5.3.

Πίν. 5.3 – Μέσος ρυθμός προσπάθειας για σουτ στο μπάσκετ

#	Σουτ (Σ)	Χρόνος (Χ)	Σ/Χ	Χ/Σ
5	5	18.1	0.276	3.620
6	2	18.4	0.109	9.200
7	16	17.8	0.899	1.112
8	7	17.2	0.407	2.457
9	9	28.2	0.319	3.133
10	9	16.1	0.559	1.789
11	3	17.9	0.167	5.967
12	9	24.5	0.367	2.722
13	2	19.4	0.103	9.700
15	4	25.8	0.155	6.450
M	**6.6**	**20.34**	0.336	4.615
G	5.361	19.985	**0.268**	**3.728**

Γεωμετρικός μέσος: *ρυθμός σουτ στο μπάσκετ*

Πίν. 5.3 – Μέσος ρυθμός προσπάθειας για σουτ στο μπάσκετ

#	Σουτ (Σ)	Χρόνος (Χ)	Σ/Χ	Χ/Σ
5	5	18.1	0.276	3.620
6	2	18.4	0.109	9.200
7	16	17.8	0.899	1.112
8	7	17.2	0.407	2.457
9	9	28.2	0.319	3.133
10	9	16.1	0.559	1.789
11	3	17.9	0.167	5.967
12	9	24.5	0.367	2.722
13	2	19.4	0.103	9.700
15	4	25.8	0.155	6.450
M	**6.6**	**20.34**	0.336	4.615
G	5.361	19.985	**0.268**	**3.728**

$$T = A(1+p)^k \quad \rightarrow \quad p = \sqrt[k]{\frac{T}{A}} - 1$$

- Αξίζει να δούμε ποιος είναι ο μέσος ρυθμός προσπάθειας για σουτ. Για τον λόγο αυτό λογαριάστηκαν οι γεωμετρικοί μέσοι (G) των λόγων Σ/Χ & Χ/Σ (βλ. τύπος). Για συγκριτικούς λόγους λογαριάστηκαν και οι αντίστοιχοι αριθμητικοί μέσοι (M).
- Ο γεωμετρικός μέσος (G) του λόγου Σ/Χ ήταν 0.268, που σημαίνει ότι επιχειρήθηκαν 0.27 σουτ σε κάθε λεπτό συμμετοχής τους στον αγώνα, ενώ αντίστροφα του λόγου Χ/Σ ήταν 3.73, που σημαίνει ότι χρειάστηκαν κατά μέσο όρο 3.73 λεπτά για κάθε προσπάθεια σουτ.
- Οι αντίστοιχοι αριθμητικοί μέσοι (M) βγήκαν 0.34 για το Σ/Χ και 4.61 για το Χ/Σ (μεγαλύτεροι από τους αντίστοιχους γεωμετρικούς).

Αρμονικός μέσος (Η)

- Ο **αρμονικός μέσος (Η)** χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του μέσου όρου αριθμητικών δεδομένων που εκφράζουν **ρυθμό ή ταχύτητα εξέλιξης**. Αυτό ισχύει σε περιπτώσεις που η εξέλιξη του εξεταζόμενου φαινομένου καταγράφεται ως λόγος δύο πρωτογενών μεταβλητών (π.χ. ταχύτητα = μετατόπιση / χρόνος).
- Ο αρμονικός μέσος (Η) χρησιμοποιείται ακόμα στην ανάλυση διασποράς (anova), για τον υπολογισμό του μέσου πλήθους ανισοπληθών ομάδων δεδομένων (π.χ. ο αρμονικός μέσος για το τεστ HSD του Tukey).

Αρμονικός μέσος (Η)

- Για **απλή ομάδα αριθμών** Χ πλήθους Ν, ο αρμονικός μέσος λογαριάζεται με τον τύπο:

$$H = \frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{X_i}} = \frac{N}{\sum\frac{1}{N}} = \frac{N}{\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\ldots+\frac{1}{X_N}}$$

- Δηλαδή ο αρμονικός μέσος μιας ομάδας αριθμών είναι ίσος με το πηλίκο του πλήθους τους Ν προς το άθροισμα (Σ) των αντίστροφων τους (1/Χ).

Για **παράδειγμα,** ο αρμονικός μέσος

- των αριθμών 2 & 3 είναι $H = \dfrac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \dfrac{12}{5} = 2.40$

- των αριθμών 1, 3 & 7 είναι $H = \dfrac{3}{\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}} = \dfrac{63}{31} = 2.03$

- των αριθμών 1, 3, 7 & 8 είναι $H = \dfrac{4}{\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}} = \dfrac{672}{269} = 2.50$

- των αριθμών 2 & 3 είναι $G = \sqrt[2]{(2)(3)} = \sqrt{6} = 2.45$
- των αριθμών 1, 3 & 7 είναι $G = \sqrt[3]{(1)(3)(7)} = \sqrt[3]{21} = 2.76$
- των αριθμών 1, 3, 7 & 8 είναι $G = \sqrt[4]{(1)(3)(7)(8)} = \sqrt[4]{168} = 3.60$

- Ο αρμονικός μέσος (H) παίρνει πάντα τιμές μικρότερες από το γεωμετρικό μέσο (G) και κατά συνέπεια ακόμα μικρότερες από τις αντίστοιχες του αριθμητικού μέσου (M).
- Αν συγκρίνουμε τους παραπάνω αρμονικούς μέσους με τους γεωμετρικούς μέσους που βρήκαμε για τους ίδιους αριθμούς, βλέπουμε ότι γενικά ισχύει (για θετικούς αριθμούς όσον αφορά τον G):
- **H < G < M.**

15

Μέση ταχύτητα ποδηλάτη

- Ένας ποδηλάτης διανύει μια διαδρομή 5 km και με ειδικό ταχογράφο καταγράφει τη μέση ταχύτητα (km/h) με την οποία διάνυσε κάθε km της διαδρομής, όπως φαίνεται στον πίνακα 5.4.
- Ζητείται να υπολογιστεί η μέση ταχύτητα του κατά μήκος των 5 Km.
  - Οι 5 επί μέρους χρόνοι είναι άνισοι.
  - Έτσι, θα ήταν λάθος να πάρουμε τη μέση αριθμητική ταχύτητα
  - M = 120 / 5 = 24 km/h.
- Σωστή *μέση ταχύτητα* είναι ο αρμονικός μέσος (H) των 5 επί μέρους ταχυτήτων, που υπολογίζεται με τον παρακάτω τύπο ως εξής :

$$V = H = \frac{5}{\frac{1}{15}+\frac{1}{20}+\frac{1}{25}+\frac{1}{28}+\frac{1}{32}} = \frac{5}{0.2236} = 22.36 \quad \mathrm{kmh^{-1}}$$

Πίν. 5.4 - Ταχύτητα ποδηλάτη

d (Km)	V (Km/h)	t (h)
1	15	0.06667
2	20	0.05000
3	25	0.04000
4	28	0.03571
5	32	0.03125
Σ=	120	0.22363

V = H = 5 / 0.2236 = 22.36 km / h

Παράδειγμα - Μέσος ρυθμός πρόσληψης VO_2.

- Αγύμναστο άτομο εκτελεί ελαφρύ τρέξιμο σε δαπεδο-εργόμετρο και στα πρώτα 6 λίτρα O_2 παρουσιάζει τους ρυθμούς πρόσληψης που δίνονται στον πίν. 5.5. Ζητείται ο *μέσος ρυθμός πρόσληψης* οξυγόνου για τα πρώτα 6 λίτρα.
- Οι 6 επί μέρους χρόνοι (για κάθε lt O_2) είναι άνισοι. Κατά συνέπεια θα ήταν λάθος να πάρουμε ως μέσο ολικό ρυθμό τον αριθμητικό μέσο M = 6.9 / 6 = 1.15 l/min των επί μέρους ρυθμών πρόσληψης O_2.
- Έτσι, μέσος ρυθμός πρόσληψης O_2 είναι ο αρμονικός μέσος (H) των 6 επί μέρους ρυθμών:

Πίν. 5.5 - Ρυθμός Πρόσληψης O_2

O_2 (l)	VO_2 (l/min)	t (min)
1	0.4	2.50
2	0.7	1.43
3	1.1	0.91
4	1.4	0.71
5	1.5	0.67
6	1.8	0.56
Σ=	6.9	6.77
V= H = 6 / 6.77 = 0.886 l/min		

$$V = H = \frac{6}{\frac{1}{0.4}+\frac{1}{0.7}+\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.4}+\frac{1}{1.8}} = \frac{6}{6.77} = 0.886 \quad l/\min$$

17

Τετραγωνικός μέσος (Q, RMS)

- Ο τετραγωνικός μέσος (Q) ή πιο απλά η *ρίζα του μέσου των τετραγώνων* (RMS) μιας **απλής ομάδας i = 1, 2, . . ., N αριθμών** X_i δίνεται από τον τύπο:

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_N^2}{N}}$$

- Πιο αναλυτικά, ο τετραγωνικός μέσος μιας ομάδας αριθμών είναι ίσος με την τετραγωνική ρίζα του (αριθμητικού) μέσου των τετραγώνων των αριθμών αυτών.

18

Για **παράδειγμα,** ο τετραγωνικός μέσος …..

- των αριθμών 2 & 3 είναι $Q=\sqrt{\frac{2^2+3^2}{2}}=\sqrt{6.5}=2.55$

- των αριθμών 1, 3 & 7 είναι $Q=\sqrt{\frac{1^2+3^2+7^2}{3}}=\sqrt{19.67}=4.43$

- των αριθμών 1, 3, 7 & 8 είναι

$$Q=\sqrt{\frac{1^2+3^2+7^2+8^2}{4}}=\sqrt{30.75}=5.54$$

19

Συμπερασματικά ….

- Συγκρίνοντας τις τιμές αυτές με τις αντίστοιχες των άλλων μέτρων θέσης παρατηρούμε ότι, γενικά, ισχύει (για θετικές τιμές όσον αφορά τον G) **H< G<M<Q**.
  - Για παράδειγμα, οι τιμές των δεικτών αυτών για τη δεύτερη σειρά αριθμών (1, 3, 7) είναι H=2.03, G=2.76, M=3.67 & Q=4.43.
- Ο τετραγωνικός μέσος εφαρμόζεται στις **φυσικές και βιολογικές επιστήμες** λόγω της ιδιότητας του να συνοψίζει με το ελάχιστο αριθμητικό αποτέλεσμα παράγωγα αλγεβρικών αποκλίσεων (+, -) ή διαφορών από μια σταθερά και να παράγει θετικοποίηση αρνητικών τιμών.
  - **Αξίζει ακόμα να σημειώσουμε ότι η τυπική απόκλιση μιας σειράς N αριθμών αποτελεί στην ουσία τον τετραγωνικό μέσο των αποκλίσεων (d=X-M) των αριθμών αυτών από τον μέσο τους : SD = [Σ d^2 / N]$^{1/2}$.**

20

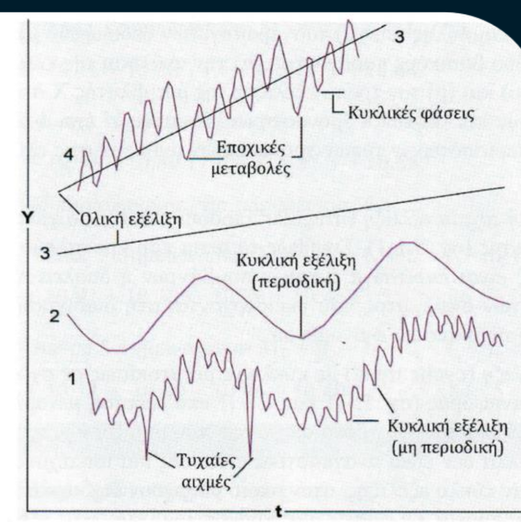
Κινητός Μέσος και Χρονοσειρές

- Τα αριθμητικά δεδομένα που προκύπτουν από την μέτρηση της εξέλιξης ενός φαινομένου, μιας βιολογικής λειτουργίας ή μιας κινητικής επίδοσης, καταγράφονται συνήθως σε συνάρτηση με το χρόνο.
- Αυτού του είδους οι κατανομές δεδομένων καλούνται ***χρονοσειρές.***
- Παραδείγματα χρονοσειρών συναντάμε σε όλους τους τομείς της επιστημονικής έρευνας.
- **Χρονοσειρά** αποτελούν και τα αρχικά δεδομένα του ηλεκτρομυογραφήματος (EMG).
- Μια χρονοσειρά έχει τη γενική μορφή X=F(t), όπου **t** είναι ο χρόνος, **F(t)** η χρονική συνάρτηση και X **η μεταβλητή**. Η ανάλυση της κλίμακας της χρονοσειράς είναι ανάλογη της μικρότερης χρονικής μονάδας καταγραφής των τιμών της X.
- Με άλλα λόγια η κλίμακα μπορεί να έχει ανάλυση σε οποιαδήποτε χρονική μονάδα (ms, sec, min, κ.λπ.).

21

Κινητός Μέσος και Χρονοσειρές … συνέχεια

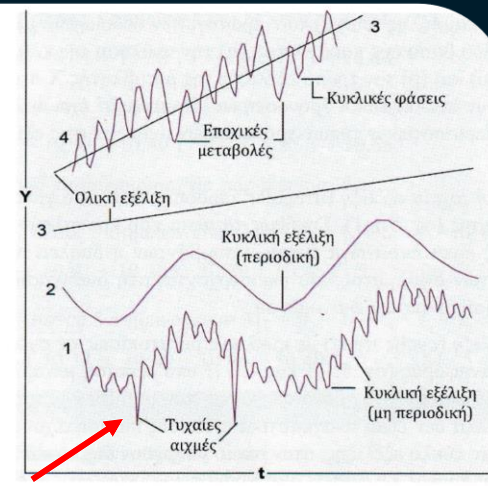
- Η μορφή της καμπύλης των πρωτογενών δεδομένων μιας χρονοσειράς εξαρτάται από δύο βασικούς παράγοντες:
  - (α) την ανάλυση της κλίμακας μέτρησης (μονάδες χρόνου) και
  - (β) τον τρόπο εξέλιξης της μεταβλητής X στο χρόνο t.
- Θεωρητικά υπάρχουν πολλοί τύποι χρονοσειρών. Η εμπειρία έχει δείξει όμως ότι οι καμπύλες των περισσότερων τύπων χρονοσειρών ανήκουν σε μία από τις εξής *γενικές κατηγορίες εξέλιξης* (Σχήμα. 5.1):



ήμα 5.1 - Τυπικές μορφές χρονοσειράς (καμπύλες)

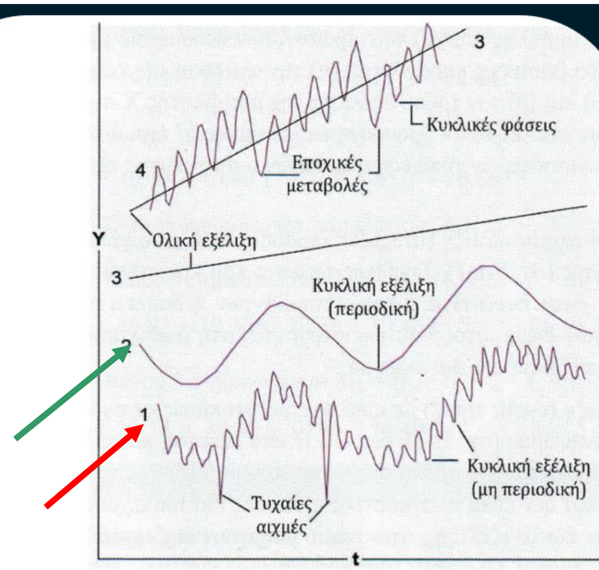
Κινητός Μέσος και Χρονοσειρές … συνέχεια

- (1) ***Ακανόνιστη ή τυχαία*** *εξέλιξη* με αιχμές τυχαίας διαδοχής και έντασης (Σχήμα. 5.1-1).
- Συνήθως τα αίτια που προκαλούν τέτοιες μορφές χρονοσειράς είναι παράγωγα τυχαίων συμβάντων ή δυσλειτουργιών ή απρόβλεπτων πηγών σφάλματος που υπεισέρχονται στη διαδικασία της καταγραφής ή της μέτρησης κάποιου φαινομένου.



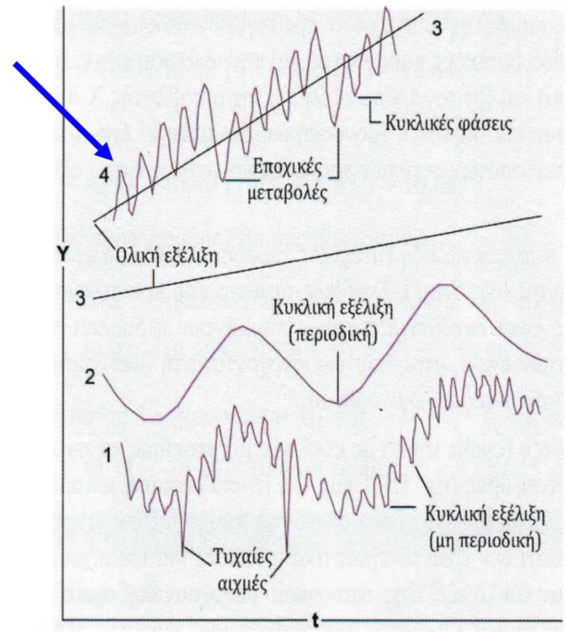
ήμα 5.1 - Τυπικές μορφές χρονοσειράς (καμπύλες)

- (2) ***Κυκλική εξέλιξη*** με κυκλικές μετατοπίσεις σε σχέση με μια βασική γραμμή αναφοράς (Σχήμα 5.1-1 & -2).
- Η υπό εξέταση μεταβλητή X (απλή ή σύνθετη) εξελίσσεται στο χρόνο σε φάσεις που μοιάζουν μεταξύ τους ως προς τη μορφή αλλά δεν είναι αναγκαστικά ισόποσες και ισαπέχουσες.
- Κάθε φάση αποτελεί έναν κύκλο εξέλιξης στον οποίο υπάρχουν διαδοχικά μια ανοδική και μια καθοδική πορεία.
- Οι φάσεις μιας χρονοσειράς κυκλικής εξέλιξης μπορεί να χαρακτηρίζονται από περιοδικότητα (Σχήμα 5.1-2), δηλαδή να γίνονται σε ισόποσα χρονικά διαστήματα (περιόδους), ή να παρουσιάζουν ακανόνιστη περιοδικότητα (Σχήμα 5.1-1).



ήμα 5.1 - Τυπικές μορφές χρονοσειράς (καμπύλες)

- (3) ***Περιοδική (εποχική) εξέλιξη*** με μεταβολές που ακολουθούν όμοια σχέδια εξέλιξης στο χρόνο ανά ορισμένες χρονικές περιόδους (Σχήμα 5.1-4).
- Αυτού του είδους οι εξελίξεις στο χρόνο οφείλονται σε περιοδική επανάληψη ενός φαινόμενου, όπως είναι, για παράδειγμα, η εποχική εξέλιξη της θερμοκρασίας, η τροχιά του κέντρου μάζας του σώματος του δρομέα εμποδίων, που αποτελείται από 10 όμοιες διαδοχικές φάσεις, η ηλεκτρική καρδιακή λειτουργία, που στο ΗΚΓ δείχνει όμοιες διαδοχικές φάσεις κ.λπ.

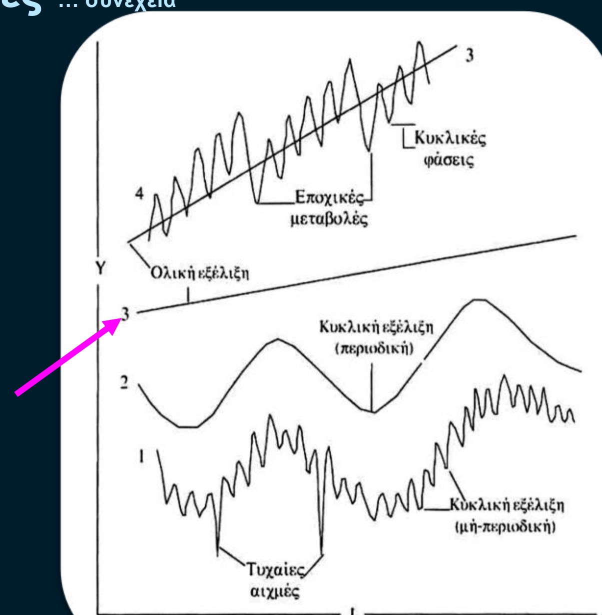


Σχήμα 5.1 - Τυπικές μορφές χρονοσειράς (καμπύλες)

25

Κινητός Μέσος και Χρονοσειρές … συνέχεια

- (4) ***Ολική εξέλιξη ή γενική τάση*** με γραμμική ομαλότητα που απεικονίζει τη γενική τάση της χρονοσειράς στο υπό εξέταση χρονικό διάστημα.
- Οι καμπύλες αυτές είναι συνήθως ευθύγραμμες ή καμπυλόγραμμες και αποτελούν κατά κανόνα μια μέση συνολική προσέγγιση των πρωτογενών δεδομένων (Σχήμα 5.1-3).



Εικ. 5.2 - Γραφήματα κύριων τύπων καμπυλών χρονοσειρών

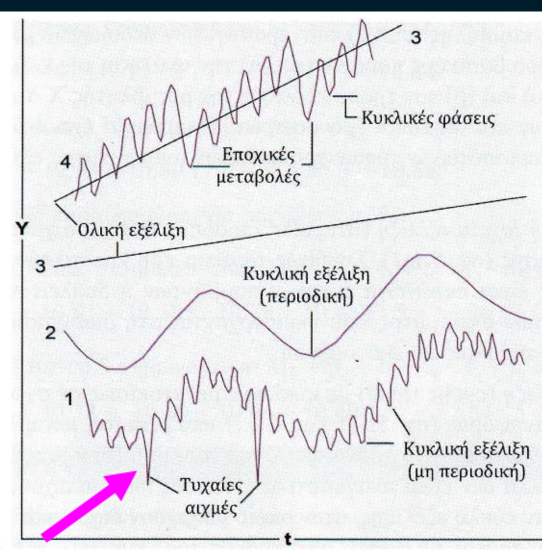
Παραδείγματα χρονοσειρών

- Πολλά παραδείγματα χρονοσειρών στον *αθλητισμό* έχουν σχέση με την εξέλιξη των αθλητικών επιδόσεων (ρεκόρ ατομικά, εθνικά, αγώνων κ.λπ.).
- Επίσης χρονοσειρές συναντάμε
  - στην **εργοφυσιολογία.** όπως είναι η εξέλιξη της πρόσληψης οξυγόνου κατά τη διάρκεια μιας άσκησης,
  - στη **βιοκινησίολογία,** όπως είναι η χρονική εξέλιξη της αεροδυναμικής αντίστασης που ασκείται στο σώμα ενός δρομέα,
  - στην **αθλητιατρική,** όπως είναι η εξέλιξη της αρτηριακής πίεσης ενός μαραθωνοδρόμου ανά λεπτό,
  - στον **κινητικό έλεγχο,** όπως είναι οι αποκλίσεις (σφάλματα) κατά τη διάρκεια μιας δοκιμασίας παρακολούθησης ενός κινούμενου στόχου.

27

Μέθοδος του κινητού μέσου (1)

- Όπως θα δούμε και στα επόμενα παραδείγματα, τα γραφήματα τέτοιων χρονοσειρών παρουσιάζουν πολλές φορές ακανόνιστες αιχμές που δεν επιτρέπουν την ανάδειξη προβλέψιμων τάσεων που υπάρχουν στις χρονοσειρές (Σχήμα 5.1-1).
  - Για τον λόγο αυτό οι πρωτογενείς καμπύλες τέτοιων χρονοσειρών, ανάλογα με τον σκοπό της καταγραφής τους, απαιτούν συνήθως κάποιου βαθμού **εξομάλυνση.**



Σχήμα 5.1 - Τυπικές μορφές χρονοσειράς (καμπύλες)

Μέθοδος του κινητού μέσου (2)

- Μια εύχρηστη ***αριθμητική μέθοδος εξομάλυνσης*** των καμπυλών χρονοσειρών, ιδιαίτερα αυτών που εμφανίζουν μεγάλη διασπορά τιμών, είναι η **μέθοδος του κινητού μέσου.**
- Εκτός από τη μέθοδο αυτή, εξομαλύνσεις χρονοσειρών επιτυγχάνονται και με την επίσης αριθμητική μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων, ενώ υπάρχει και η εμπειρική μέθοδος της γραφικής προσέγγισης με τον σχεδιασμό της μέσης καμπύλης με το χέρι ή κάποιο άλλο μη-αλγοριθμικό τρόπο.

29

Μέθοδος του κινητού μέσου (3)

- Η **μέθοδος του κινητού μέσου** στηρίζεται στην ιδέα της επαναλαμβανόμενης διαδοχικής τοπικής σύνοψης των αρχικών δεδομένων **ανά σταθερό αριθμό k σημείων**.
- Δηλαδή γίνεται ένας διαδοχικός υπολογισμός του μέσου κάθε k συνεχόμενων τιμών της αρχικής καμπύλης, με αποτέλεσμα την *κίνηση* του μέσου όρου κατά μήκος της καμπύλης.

30

Μέθοδος του κινητού μέσου (4)

- **Ως κινητός μέσος μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε μέτρο θέσης, ο αριθμητικός (M), ο γεωμετρικός (G), ο αρμονικός (H) και ο τετραγωνικός (Q) μέσος.**
  - Η επιλογή εξαρτάται από το είδος των αριθμητικών δεδομένων, δηλαδή της μεταβλητής X, ενώ σημαντικό κριτήριο αποτελεί και ο τελικός στόχος της εξομάλυνσης της καμπύλης ή γενικά ο απώτερος στατιστικός στόχος της αναλυτικής αυτής διαδικασίας.
- Θεωρητικά, κινητός μέσος μπορεί να γίνει και ο διάμεσος (Md) καθώς και η επικρατούσα τιμή (Mo). Στην πράξη, όμως, οι δύο αυτές εφαρμογές παρουσιάζουν δυσκολίες, που μπορούν να οδηγήσουν σε σημαντικές αλλοιώσεις των πραγματικών τάσεων των αρχικών δεδομένων μιας χρονοσειράς ή οποιασδήποτε διαδοχής ομοειδών αριθμών.

31

Κινητός Αριθμητικός Μέσος (M)

- Ο αλγόριθμος υπολογισμού του κινητού αριθμητικού μέσου είναι:

$$M_1 = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_k}{k}, \quad M_2 = \frac{X_2 + X_3 + \ldots + X_{k+1}}{k}, \quad M_3, \quad M_4, \ldots$$

- όπου X_1, X_2,.. ., X_k είναι οι αρχικές τιμές, με βάση τις οποίες λογαριάζεται μια τιμή του κινητού μέσου, και k είναι ο αριθμός των τιμών αυτών. Γενικά, ο κινητός μέσος λογαριάζεται για κάθε k διαδοχικά (ανά k-1 επικαλυπτόμενα) σημεία (αρχικές τιμές) της καμπύλης.
- Για κάθε χρονοσειρά υπάρχει ένα βέλτιστο k, δηλαδή αριθμός αρχικών τιμών που πρέπει να συνοψιστούν από μια τιμή του κινητού μέσου, προκειμένου η παραγόμενη εξομάλυνση να είναι η καλύτερη δυνατή.
- **Η ερευνητική πρακτική έχει δείξει ότι οι κινητοί μέσοι όροι είναι συνήθως <u>2, 3, 4 και 5 σημείων</u>, αλλά και πάλι αυτό εξαρτάται από τη χρονική πυκνότητα εμφάνισης των πρωτογενών δεδομένων.**

32

Για κινητό αριθμητικό μέσο **3 σημείων** ο αλγόριθμος 5.6 γίνεται

$$M_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}, \quad M_2 = \frac{X_2 + X_3 + X_4}{3}, \quad M_3 = \frac{X_3 + X_4 + X_5}{3}, \ldots$$

Για παράδειγμα η σειρά 2, 3, 1, 4, 5 έχει 3 κινητούς μέσους 3 σημείων:

$$M_1 = \frac{2+3+1}{3} = 2, \quad M_2 = \frac{3+1+4}{3} = 2.7, \quad M_3 = \frac{1+4+5}{3} = 3.3$$

Για κινητό αριθμητικό μέσο **5 σημείων** ο αλγόριθμος 5.6 γίνεται

$$M_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5}, \quad M_2 = \frac{X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6}{5}, \ldots$$

Π.χ. η σειρά 2, 3, 1, 4, 4, 5, 2 έχει 3 κινητούς μέσους 5-σημείων:

$$M_1 = \frac{2+3+1+4+4}{5} = 2.8, \quad M_2 = \frac{3+1+4+4+5}{5} = 3.4,$$

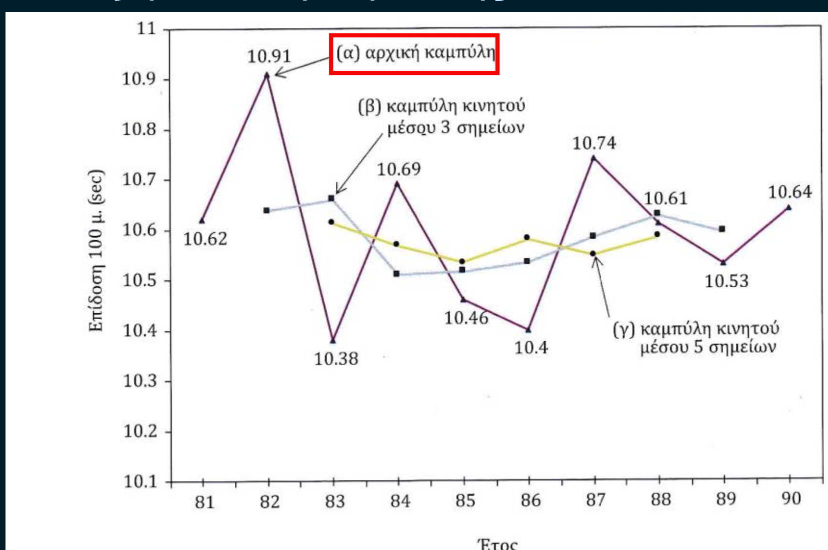
$$M_3 = \frac{1+4+5+5+2}{5} = 3.2$$

- Ο αριθμός των κινητών μέσων τιμών (M_1, M_2, M_3,...) μιας χρονοσειράς πλήθους N είναι **N - (k-1)**. Όπως θα δούμε στο επόμενο παράδειγμα (πίν. 5.7, εικ. 5.3), για N=10 αρχικές τιμές λογαριάζονται 10 - (3-1) = 8 τιμές κινητού μέσου 3 σημείων και 10 - (5-1) = 6 τιμές κινητού μέσου 5-σημείων.

33

Παράδειγμα 5.6 - Κινητός μέσος 3 & 5 σημείων - *εξομάλυνση καμπύλης.*

- Στην εικόνα έχουμε τη γραφική επίλυση του υπολογισμού του κινητού αριθμητικού μέσου (M) για 3 σημεία και για 5 σημεία των τιμών t_1 μέχρι και t_{10} της χρονοσειράς (καμπύλη α) των ρεκόρ των πανελλήνιων αγώνων στα 100 μ. ανδρών για το χρονικό διάστημα 1981-1990 (πίν. 5.6).



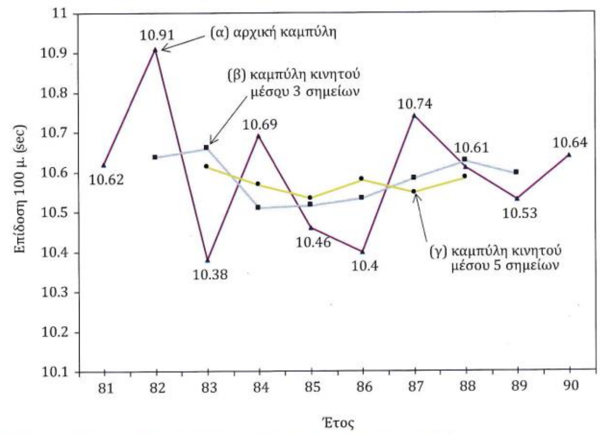
Σχήμα 5.2 - Κινητός μέσος 3-σημείων (εξομάλυνση χρονοσειράς)

34

Πίνακας 5.6 - Ρεκόρ Πανελλήνιων αγώνων 100 μ. ανδρών (1981-90)

Έτος	time	Επίδοση (sec)	Κινητός μέσος k = 3-σημείων Σ	Κινητός μέσος k = 3-σημείων Μ	Κινητός μέσος k = 5-σημείων Σ	Κινητός μέσος k = 5-σημείων Μ
1981	t1 =	10.62		-	-	-
1982	t2 =	10.91	31.91	**10.64**	- -	
1983	t3 =	10.38	31.98	**10.66**	53.06	**10.61**
1984	t4 =	10.69	31.53	10.51	52.84	**10.57**
1985	t5 =	10.46	31.55	10.52	52.67	10.53
1986	t6 =	10.40	31.60	10.53	52.90	10.58
1987	t7 =	10.74	31.75	10.58	52.74	10.55
1988	t8 =	10.61	31.88	10.63	52.92	10.58
1989	t9 =	10.53	31.78	10.59	-	-
1990	t10 =	10.64		-	-	-

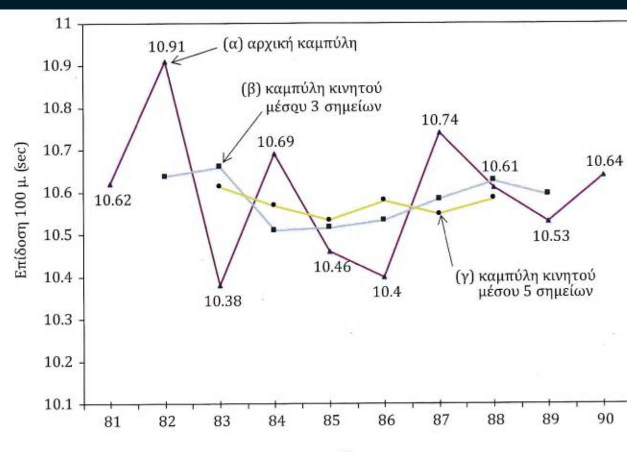
Οι χρονοσειρές παρουσιάζονται αναλυτικά στη συνέχεια (υποκ. 5.5)



Σχήμα 5.2 - Κινητός μέσος 3-σημείων (εξομάλυνση χρονοσειράς)

Προσοχή όμως ……

- Οι εξομαλύνσεις που παράγονται με την εφαρμογή του κινητού μέσου προκαλούν, από ένα σημείο και μετά, παραποίηση της αρχικής εικόνας, δηλαδή ένα είδος υπερ-εξομάλυνσης.
  - Στο παράδειγμα μας η δεύτερη εξομάλυνση (μέσες τιμές μ, κινητός 5 σημείων) επικάλυψε τις δύο τάσεις που αναδύθηκαν με την πρώτη εξομάλυνση (κινητός μέσος 3 σημείων).
  - Έτσι, είναι σαφές ότι η δεύτερη εξομάλυνση είναι μάλλον περιττή, διότι όχι μόνο δεν προσθέτει στη αρχική εικόνα αλλά στην ουσία αφαιρεί χρήσιμες πτυχές της πρώτης.
  - Εντούτοις συμπεριλήφθηκε στο παράδειγμα, για να δειχθεί η εφαρμογή του κινητού μέσου και με τη μέθοδο των 5 σημείων.



Σχήμα 5.2 - Κινητός μέσος 3-σημείων (εξομάλυνση χρονοσειράς)

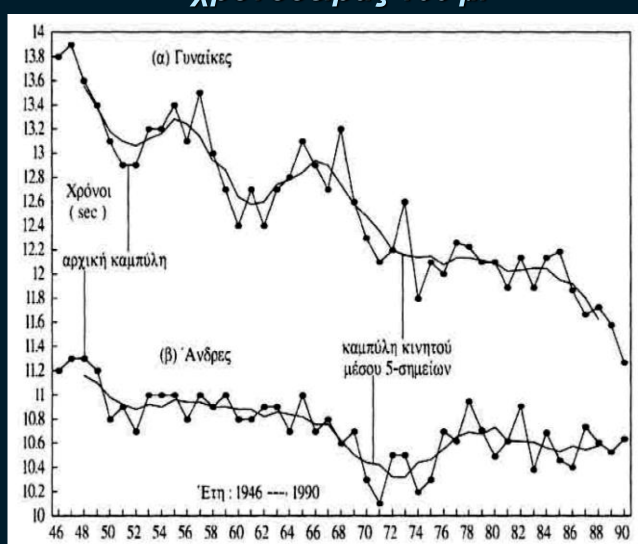
Προσοχή όμως ……

- Η μέθοδος του κινητού μέσου μπορεί να χρησιμοποιηθεί όχι μόνο σε χρονοσειρές **αλλά και σε κάθε είδους σειρές αριθμητικών δεδομένων** τα οποία είναι διατεταγμένα διαδοχικά σε συνάρτηση με κάποια ποσοτική μεταβλητή.
- Δηλαδή σε σειρές αριθμών που έχουν τη γενική μορφή X=F(s), **όπου s μπορεί να είναι κάθε ποσοτική (συνεχής ή διακριτή) μεταβλητή** με βάση την οποία μπορεί να καταγραφεί αριθμητικά ή να μετρηθεί η υπό εξέταση μεταβλητή X.
  – Επισημαίνεται ότι υπό την αυστηρή έννοια του όρου η μέθοδος του κινητού μέσου αφορά μόνο διακριτές μεταβλητές. Εντούτοις, όμως, μπορεί να εφαρμόζεται και σε δεδομένα συνεχούς κλίμακας.

Πίν. 5.8 - Εξομάλυνση καμπυλών ρεκόρ πανελλήνιων αγώνων 100 μ.

	Ρεκόρ (Χρόνοι σε sec)		Κινητός Μέσος (Μ)	
ETH	΄Αντρες	Γυναίκες	Άντρες	Γυναίκες
1946	11.2	13.8	-	-
47	11.3	13.9	-	-
48	11.3	13.6	11.16	13.56
49	11.2	13.4	11.10	13.38
1950	10.8	13.1	10.98	13.18
51	10.9	12.9	10.92	13.10
52	10.7	12.9	10.88	13.06
53	11.0	13.2	10.92	13.12
54	11.0	13.2	10.90	13.16
55	11.0	13.4	10.96	13.28
56	10.8	13.1	10.94	13.24
57	11.0	13.5	10.94	13.14
58	10.9	13.0	10.90	12.94
59	11.0	12.7	10.90	12.86
1960	10.8	12.4	10.88	12.64
61	10.8	12.7	10.88	12.58
62	10.9	12.4	10.82	12.60
63	10.9	12.7	10.86	12.74
64	10.7	12.8	10.84	12.78
65	11.0	13.1	10.82	12.84
66	10.7	12.9	10.76	12.94
67	10.8	12.7	10.76	12.90
68	10.6	13.2	10.62	12.74
69	10.7	12.6	10.50	12.58
1970	10.3	12.3	10.44	12.48
71	**10.1**	12.1	10.42	12.36
72	**10.5**	12.2	10.32	12.20
73	**10.5**	12.6	**10.32**	12.16
74	**10.2**	11.8	10.44	12.14
75	**10.3**	12.1	10.46	12.15
76	10.7	12.0	10.55	12.08
77	10.62	12.26	10.66	12.14
78	10.95	12.23	10.69	12.14
79	10.71	12.10	10.68	12.12
1980	10.49	12.10	10.74	12.09
81	10.62	11.89	10.62	12.02
82	10.91	12.14	10.62	12.03
83	10.38	11.89	10.61	12.05
84	10.69	12.14	10.57	12.05
85	10.46	12.19	10.53	11.95
86	10.40	**11.87**	10.58	11.92
87	10.74	**11.67**	10.55	11.81
88	10.61	**11.73**	10.58	**11.62**
89	10.53	**11.58**	—	—
90	10.64	**11.27**	—	—

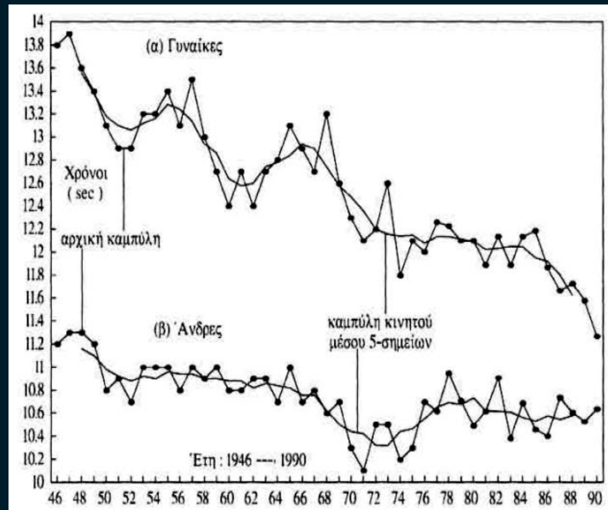
Κινητός μέσος: *εξομάλυνση χρονοσειράς 100 μ.*



Εικ. 5.4 - Εξομάλυνση χρονοσειράς ρεκόρ πανελλ. αγώνων 100 μ. (1946-90)

Κινητός μέσος: *εξομάλυνση χρονοσειράς 100 μ.*

- Χρονοσειρά αποτελούν και οι χρόνοι στα 100 μ. των νικητών (ανδρών & γυναικών) των πανελλήνιων αγώνων για το διάστημα 1946-1990.
  - Οι χρόνοι μαζί με τις αντίστοιχες τιμές του κινητού αριθμητικού μέσου για 5 σημεία δίνονται στον πίνακα 5.8.
  - Οι καμπύλες των δύο χρονοσειρών και των αντίστοιχων κινητών μέσων για 5 σημεία δίνονται στην εικόνα 5.4.
- Στις γυναίκες (καμπύλη α) παρατηρείται μια γενική τάση βελτίωσης των ρεκόρ κατά διαδοχικές, περιοδικές φάσεις. Ιδιαίτερα εμφανείς είναι οι βελτιώσεις των ρεκόρ περίπου το 1950, το 1960 και το 1970.
  - Μάλιστα το 1970 παρατηρείται η απαρχή μιας διαρκέστερης βελτίωσης μέχρι το 1976.

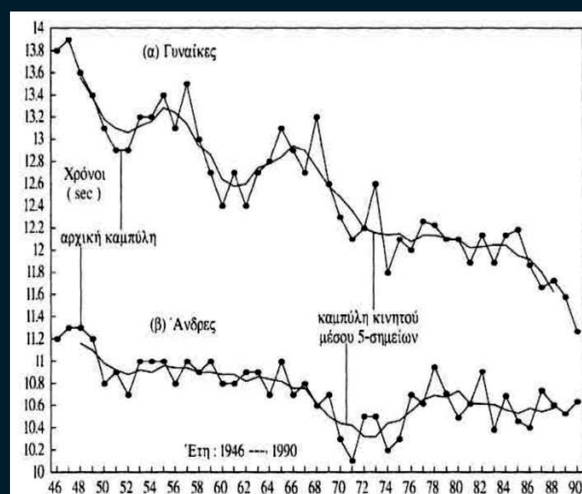


Εικ. 5.4 - Εξομάλυνση χρονοσειράς ρεκόρ πανελλ. αγώνων 100 μ. (1946-90)

39

Κινητός μέσος: *εξομάλυνση χρονοσειράς 100 μ.*

- Στους άντρες (καμπύλη β) παρατηρείται επίσης μια γενική τάση βελτίωσης των ρεκόρ, με δύο μόνο φάσεις βελτίωσης: μια σχετικά μικρή την περίοδο 1949-52 και μια μεγαλύτερη την περίοδο 1969-72.
- Στις γυναίκες οι φάσεις βελτίωσης επαναλαμβάνονται κάθε 10 χρόνια ενώ στους άντρες κάθε 20 χρόνια.
- Αυτή η διαφορά επιβεβαιώνεται από τις % βελτιώσεις των ρεκόρ για την περίοδο 1946-90 :
  - στις γυναίκες η βελτίωση ήταν **(13.8 - 11.27)/13.8 = 2.53/13.8 = 0.183**, δηλαδή 18.3 %,
  - στους άντρες η βελτίωση ήταν **(11.2 - 10.64)/11.2 = 0.56 / 11.2 = 0.05**, δηλαδή 5 %.
  - Η διαφορά των 13.3 εκατοστιαίων μονάδων είναι από πλευράς ερευνητικής και προπονητικής αρκετά σημαντική.

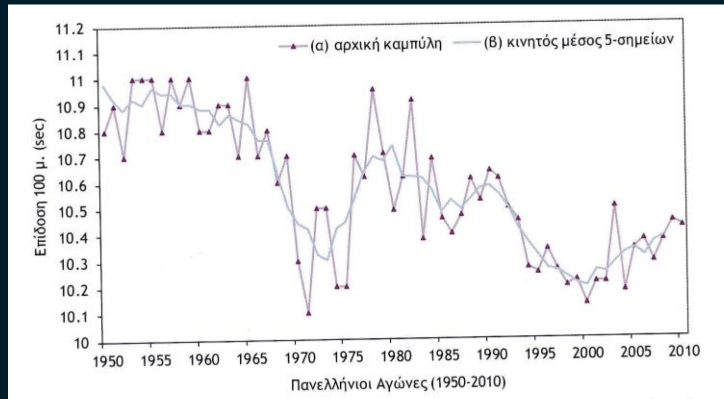


Εικ. 5.4 - Εξομάλυνση χρονοσειράς ρεκόρ πανελλ. αγώνων 100 μ. (1946-90)

40

Παράδειγμα 5.8 - Επεξεργασία χρονοσειράς 100 μ: Κινητός μέσος (Μ)

- Χρονοσειρά αποτελούν π.χ. οι χρόνοι των νικητών στα 100 μ. ανδρών των πανελλήνιων αγώνων για το διάστημα 1950-2010. Η καμπύλη της χρονοσειράς αυτής (α) με την καμπύλη εξομάλυνσης κινητού μέσου 5 σημείων (β) δίνονται στο σχήμα 5.4. Αξία μερικές φορές έχει και η καμπύλη των μεταβολών μεταξύ διαδοχικών σημείων της χρονοσειράς (σχ. 5.5).



Σχήμα 5.4 - Επεξεργασία της χρονοσειράς επιδόσεων 100 μ. ανδρών με τον κινητό αριθμητικό μέσο 5-σημείων

41

42