

# Κανονική Κατανομή

## Κεφάλαιο 8



Αντώνης Κ. Τραυλός (B.A., M.A., Ph.D.)

Καθηγητής

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

Σχολή Επιστημών Ανθρώπινης Κίνησης και Ποιότητας Ζωής

Τμήμα Οργάνωσης και Διαχείρισης Αθλητισμού

1

1

## Γενικές Ιδιότητες

- ▶ Η κανονική κατανομή αποτελεί τη βάση της στατιστικής επαγωγής.
- ▶ Η κανονική καμπύλη ορίζεται από τη συνάρτηση  $f(x)$

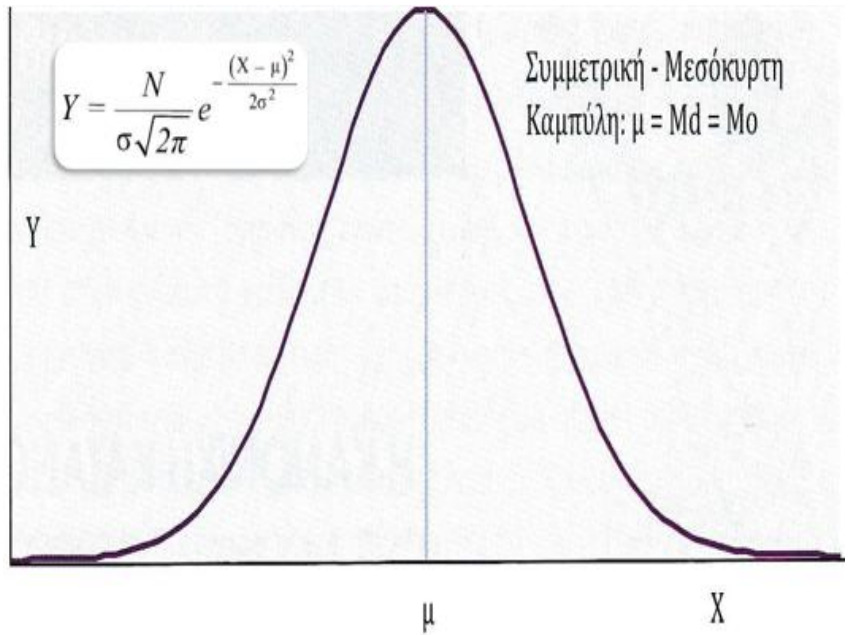
$$Y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- ▶ στην οποία  $X$  είναι η μεταβλητή,  $\pi=3.14159$  και  $e=2.71828$  οι γνωστές σταθερές,  $\mu$  η μέση τιμή και  $\sigma$  η τυπική απόκλιση της πληθυσμιακής κατανομής της  $X$ ,  $N$  το πλήθος των τιμών (παρατηρήσεων), που γεωμετρικά δίνουν τον ολικό χώρο κάτω από την καμπύλη, και  $Y$  το ύψος της καμπύλης σε κάθε συγκεκριμένη τιμή  $X$ .

2

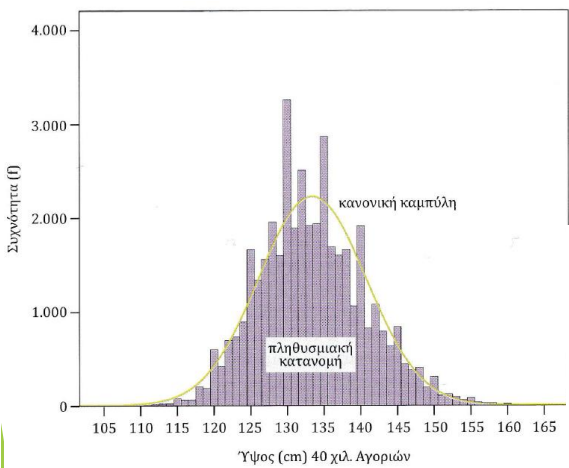
2

## Γενικές Ιδιότητες

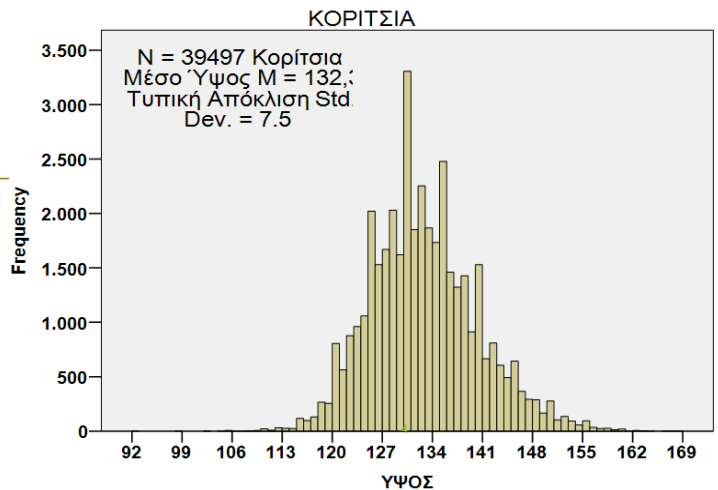


Σχήμα 8.1 - Η κανονική καμπύλη (the normal curve):  $f(x)=Y$

3



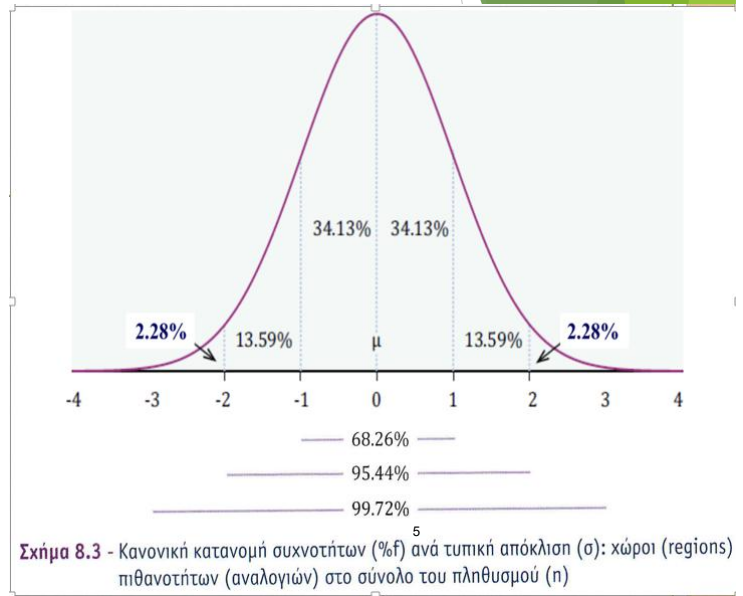
Σχήμα 8.2 - Η κατανομή ενός μικρού πληθυσμού (n=40000)



4

## Κανονική Καμπύλη και Διασπορά

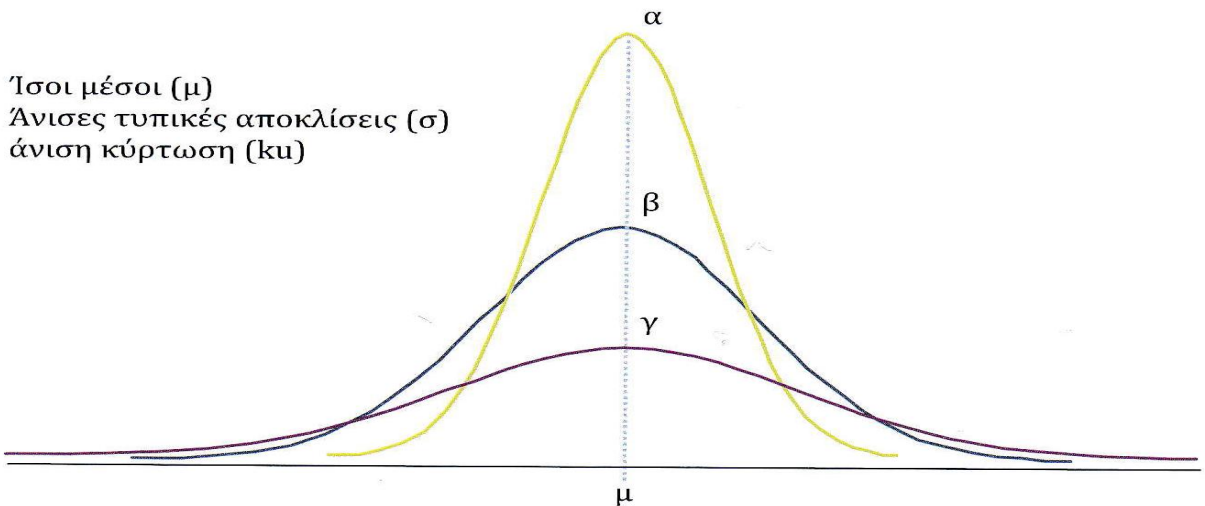
- ▶ Στην εικόνα 8.3 έχουμε το γράφημα της ιδανικής κανονικής καμπύλης, δηλαδή της καμπύλης με μηδέν λοξότητα (συμμετρική) και μέση κυρτότητα (μεσόκυρτη).



5

## Κανονική Καμπύλη και Διασπορά

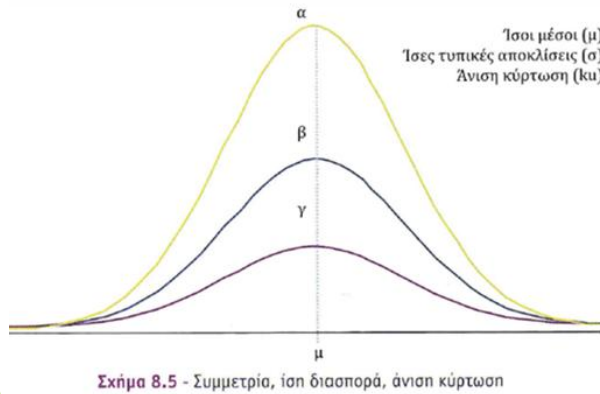
Ίσοι μέσοι ( $\mu$ )  
 Άνισες τυπικές αποκλίσεις ( $\sigma$ )  
 άνιση κύρτωση ( $k_u$ )



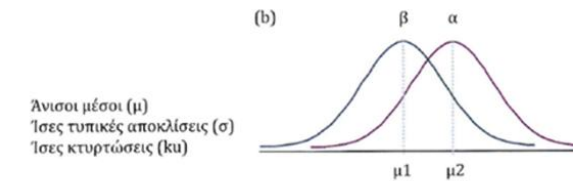
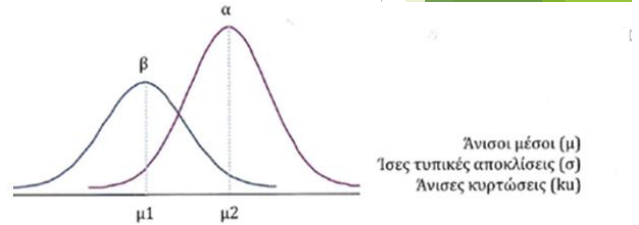
Σχήμα 8.4 - Συμμετρία, άνιση διασπορά, άνιση κύρτωση

6

## Κανονική Καμπύλη και Διασπορά



Σχήμα 8.5 - Συμμετρία, ίση διασπορά, άνιση κύρτωση

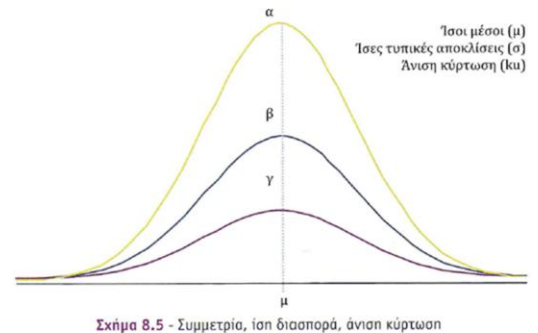


Σχήμα 8.6 - Συμμετρία, άνιση (a) και ίση (b) κύρτωση 2 κατανομών

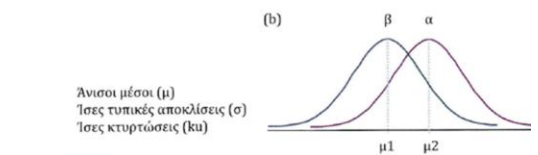
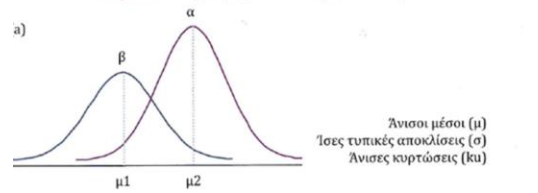
7

## Κανονική Καμπύλη και Διασπορά

- Οι κατανομές μπορεί να διαφέρουν μόνο ως προς την κυρτότητα (εικ. 8.5) ή μόνο ως προς τους αριθμητικούς μέσους (εικ. 8.6b).
- Αυτή η τελευταία περίπτωση είναι η πλέον συνήθης στην επαγωγική στατιστική, ιδιαίτερα στη στατιστική που ασχολείται με συγκρίσεις μέσω τιμών ομοιογενών δειγμάτων.



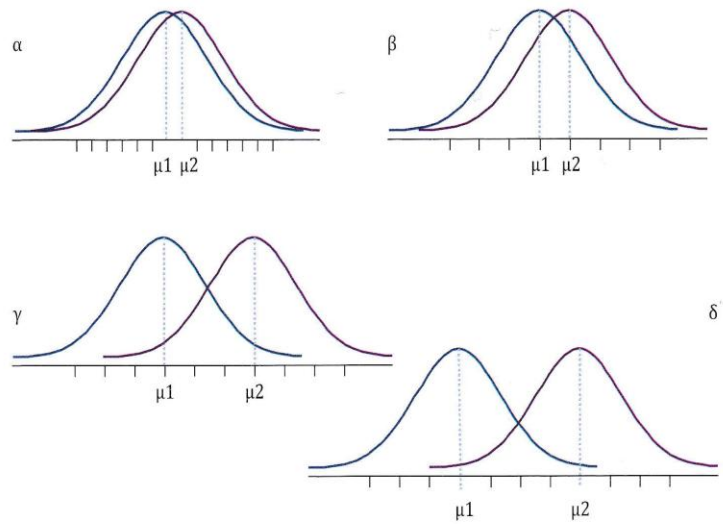
Σχήμα 8.5 - Συμμετρία, ίση διασπορά, άνιση κύρτωση



Σχήμα 8.6 - Συμμετρία, άνιση (a) και ίση (b) κύρτωση 2 κατανομών

8

## Κανονική Καμπύλη & Διασπορά



Σχήμα 8.7 - Σύγκριση 2 κανονικών πληθυσμών (κατανομές): 4 χαρακτηριστικές περιπτώσεις διαφοράς μέσων ( $\mu$ )

9

## Τυπική Κανονική Κατανομή

- ▶ Η τυπική κανονική κατανομή αποτελεί μετασχηματισμό της κανονικής κατανομής από την κλίμακα τιμών ( $X$ ) στην κλίμακα τιμών  $z$ . Η τυποποίηση της κανονικής κατανομής ορίζεται από τη συνάρτηση  $F(z)$  (Σχέση 8.2).

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

- ▶ που προκύπτει από τη συνάρτηση

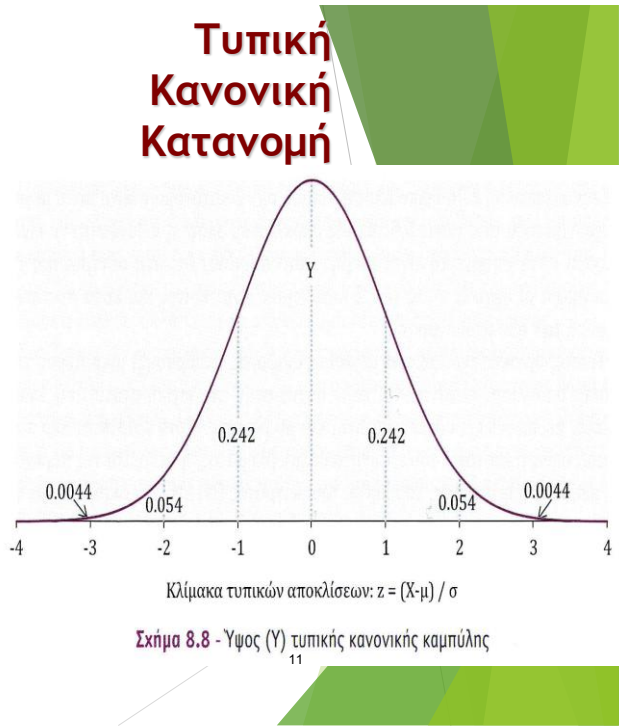
$$Y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- ▶ μετά από αντικατάσταση της ποσότητας  $[(X-\mu)/\sigma]^2$  με την ποσότητα  $z^2$  και παράλειψη του  $N/\sigma$ , καθότι στην περίπτωση αυτή  $N=1$  (ή 100%) και  $\sigma = 1$ . Η εξαρτημένη μεταβλητή  $Y$  δίνει το ύψος της τεταγμένης κάθε συγκεκριμένης τιμής  $z$  και φανερώνει την πιθανότητα εμφάνισης της αντίστοιχης τιμής  $X$  στον πληθυσμό.

10

10

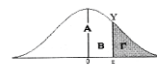
- ▶ Αν πάρουμε τις τιμές  $z$  από το  $-3.5$  μέχρι το  $+3.5$  με σταθερή αύξηση  $0.01z$ , παράγουμε με βάση τη προηγούμενη σχέση αντίστοιχες τιμές  $Y$  και παραστήσουμε γραφικά τα δεδομένα αυτά κατά ζεύγη  $(z, Y)$ , τότε παράγεται η κανονική καμπύλη (Σχ. 8.8).
- ▶ Τα δεδομένα παραγωγής της καμπύλης αυτής δίνονται στο παράρτημα 21.Β, ενώ τα αντίστοιχα εμβαδά (χώροι) που περιλαμβάνονται μεταξύ: (α)  $-\infty$  και  $z$ , (β)  $\mu$  και  $z$ , και (γ)  $z$  και  $+\infty$ , δίνονται στο παράρτημα 21.Γ.
- ▶ Από τη Σχέση 8.2 (βλ. προηγούμενη διαφάνεια) προκύπτει ότι για πολύ μεγάλες τιμές  $z$  (π.χ.  $z > 3$ ,  $z < -3$ ) οι τιμές  $Y$  είναι πολύ μικρές, ενώ για  $z=0$  έχουμε μέγιστη τιμή  $Y=0.398942$ .



## Τυπική Κανονική Κατανομή



Εικ. 8.3 - Κανονική καμπύλη : κατανομή %f κατά  $\sigma$



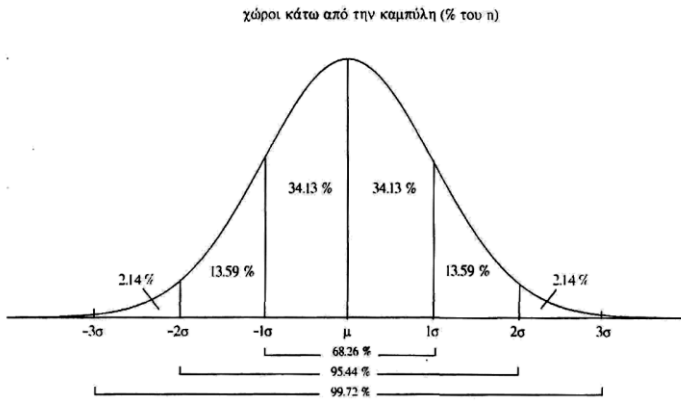
$$A = \int_{-\infty}^z Y(z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} + 0.5$$

Παράρτημα Γ - Χώροι (πιθανότητες, p) κανονικής καμπύλης για τιμές z

z	$-\infty \rightarrow z$ A	$\mu \rightarrow z$ B	$z \rightarrow +\infty$ Γ	z	$-\infty \rightarrow z$ A	$\mu \rightarrow z$ B	$z \rightarrow +\infty$ Γ
0.00	0.5	0.0	0.50	0.31	0.62172	0.12172	0.37828
0.01	0.50399	0.00399	0.49601	0.32	0.62551	0.12551	0.37449
0.02	0.50798	0.00798	0.49202	0.33	0.62930	0.12930	0.37070
0.03	0.51197	0.01197	0.48803	0.34	0.63307	0.13307	0.36693
0.04	0.51595	0.01595	0.48405	0.35	0.63683	0.13683	0.36317
0.05	0.51994	0.01994	0.48006	0.36	0.64058	0.14058	0.35942
0.06	0.52392	0.02392	0.47608	0.37	0.64431	0.14431	0.35569
0.07	0.52790	0.02790	0.47210	0.38	0.64803	0.14803	0.35197
0.08	0.53188	0.03188	0.46812	0.39	0.65173	0.15173	0.34827
0.09	0.53586	0.03586	0.46414	0.40	0.65542	0.15542	0.34458
0.10	0.53983	0.03983	0.46017	0.41	0.65910	0.15910	0.34090
0.11	0.54379	0.04379	0.45621	0.42	0.66276	0.16276	0.33724
0.12	0.54776	0.04776	0.45224	0.43	0.66640	0.16640	0.33360
0.13	0.55172	0.05172	0.44828	0.44	0.67003	0.17003	0.32997
0.14	0.55567	0.05567	0.44433	0.45	0.67364	0.17364	0.32636
0.15	0.55962	0.05962	0.44038	0.46	0.67724	0.17724	0.32276
0.16	0.56356	0.06356	0.43644	0.47	0.68082	0.18082	0.31918
0.17	0.56749	0.06749	0.43251	0.48	0.68438	0.18438	0.31562
0.18	0.57142	0.07142	0.42858	0.49	0.68793	0.18793	0.31207
0.19	0.57534	0.07534	0.42466	0.50	0.69146	0.19146	0.30854
0.20	0.57926	0.07926	0.42074	0.51	0.69497	0.19497	0.30503
0.21	0.58317	0.08317	0.41683	0.52	0.69847	0.19847	0.30153
0.22	0.58706	0.08706	0.41294	0.53	0.70194	0.20194	0.29806
0.23	0.59095	0.09095	0.40905	0.54	0.70540	0.20540	0.29460
0.24	0.59483	0.09483	0.40517	0.55	0.70884	0.20884	0.29116
0.25	0.59871	0.09871	0.40129	0.56	0.71226	0.21226	0.28774
0.26	0.60257	0.10257	0.39743	0.57	0.71566	0.21566	0.28434
0.27	0.60642	0.10642	0.39358	0.58	0.71904	0.21904	0.28096
0.28	0.61026	0.11026	0.38974	0.59	0.72240	0.22240	0.27760
0.29	0.61409	0.11409	0.38591	0.60	0.72575	0.22575	0.27425
0.30	0.61791	0.11791	0.38209				

Οι τιμές A υπολογίστηκαν από το συγγραφέα με βάση το ολοκλήρωμα  $\int d(z)dz$  μέσω προγράμματος Fortran και σύμφωνα με τους Conte & Boor (1980).

## Τυπική Κανονική Κατανομή



Εικ. 8.3 - Κανονική καμπύλη : κατανομή %f κατά  $\sigma$

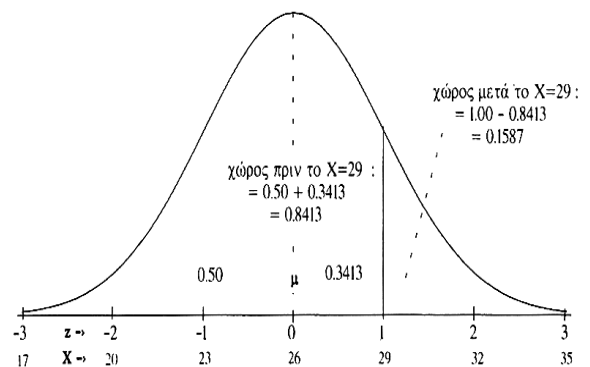
z	A	B	Γ	z	A	B	Γ
0.61	0.72907	0.22907	0.27093	1.04	0.85083	0.35083	0.14917
0.62	0.73237	0.23237	0.26763	1.05	0.85314	0.35314	0.14686
0.63	0.73565	0.23565	0.26435	1.06	0.85543	0.35543	0.14457
0.64	0.73891	0.23891	0.26109	1.07	0.85769	0.35769	0.14231
0.65	0.74215	0.24215	0.25785	1.08	0.85993	0.35993	0.14007
0.66	0.74537	0.24537	0.25463	1.09	0.86214	0.36214	0.13786
0.67	0.74857	0.24857	0.25143	1.10	0.86433	0.36433	0.13567
0.68	0.75175	0.25175	0.24825	1.11	0.86650	0.36650	0.13350
0.69	0.75490	0.25490	0.24510	1.12	0.86864	0.36864	0.13136
0.70	0.75803	0.25803	0.24197	1.13	0.87076	0.37076	0.12924
0.71	0.76115	0.26115	0.23885	1.14	0.87285	0.37285	0.12715
0.72	0.76424	0.26424	0.23576	1.15	0.87493	0.37493	0.12507
0.73	0.76730	0.26730	0.23270	1.16	0.87697	0.37697	0.12303
0.74	0.77035	0.27035	0.22965	1.17	0.87900	0.37900	0.12100
0.75	0.77337	0.27337	0.22663	1.18	0.88100	0.38100	0.11900
0.76	0.77637	0.27637	0.22363	1.19	0.88297	0.38297	0.11703
0.77	0.77935	0.27935	0.22065	1.20	0.88493	0.38493	0.11507
0.78	0.78230	0.28230	0.21770	1.21	0.88686	0.38686	0.11314
0.79	0.78523	0.28523	0.21477	1.22	0.88877	0.38877	0.11123
0.80	0.78814	0.28814	0.21186	1.23	0.89065	0.39065	0.10935
0.81	0.79103	0.29103	0.20897	1.24	0.89251	0.39251	0.10749
0.82	0.79389	0.29389	0.20611	1.25	0.89435	0.39435	0.10565
0.83	0.79673	0.29673	0.20327	1.26	0.89616	0.39616	0.10384
0.84	0.79954	0.29954	0.20046	1.27	0.89796	0.39796	0.10204
0.85	0.80234	0.30234	0.19766	1.28	0.89973	0.39973	0.10027
0.86	0.80510	0.30510	0.19490	1.29	0.90147	0.40147	0.09853
0.87	0.80785	0.30785	0.19215	1.30	0.90320	0.40320	0.09680
0.88	0.81057	0.31057	0.18943	1.31	0.90490	0.40490	0.09510
0.89	0.81327	0.31327	0.18673	1.32	0.90658	0.40658	0.09342
0.90	0.81594	0.31594	0.18406	1.33	0.90824	0.40824	0.09176
0.91	0.81859	0.31859	0.18141	1.34	0.90988	0.40988	0.09012
0.92	0.82121	0.32121	0.17879	1.35	0.91149	0.41149	0.08851
0.93	0.82381	0.32381	0.17619	1.36	0.91308	0.41308	0.08692
0.94	0.82639	0.32639	0.17361	1.37	0.91465	0.41465	0.08535
0.95	0.82894	0.32894	0.17106	1.38	0.91620	0.41620	0.08380
0.96	0.83147	0.33147	0.16853	1.39	0.91773	0.41773	0.08227
0.97	0.83397	0.33397	0.16603	1.40	0.91924	0.41924	0.08076
0.98	0.83645	0.33645	0.16355	1.41	0.92073	0.42073	0.07927
0.99	0.83891	0.33891	0.16109	1.42	0.92219	0.42219	0.07781
1.00	0.84134	0.34134	0.15866	1.43	0.92364	0.42364	0.07636
1.01	0.84375	0.34375	0.15625	1.44	0.92506	0.42506	0.07494
1.02	0.84613	0.34613	0.15387	1.45	0.92647	0.42647	0.07353
1.03	0.84849	0.34849	0.15151	1.46	0.92785	0.42785	0.07215

13

### Π.χ. 8.1 - Εύρεση χώρου τυπικής κανονικής καμπύλης: τιμή $z=1$

- ▶ Η τιμή  $X=29$  της κανονικής κατανομής της παραμέτρου *κοιλιακές αναδιπλώσεις σε 3*, έχει μέσο  $M = 26$  και τυπική απόκλιση  $S = 3$ , έχει αντίστοιχη τυπική τιμή  $z=1$  καθότι  $(X-M)/S = (29 - 26)/3 = 3/3 = 1$ .
- ▶ Βρίσκεται δηλαδή ακριβώς μία τυπική απόκλιση ( $1\sigma$ ) μετά το μέσο της κατανομής της.
- ▶ Αυτό σημαίνει ότι η τιμή  $X=29$  βρίσκεται σε μια τέτοια θέση πάνω στην κλίμακα των αρχικών τιμών της κατανομής της, ώστε ο χώρος κάτω από την καμπύλη που περιλαμβάνεται μεταξύ της τεταγμένης της και της τεταγμένης του μέσου της κατανομής, είναι 0.3413 του όλου χώρου της καμπύλης.

Χώρος πριν το  $z=0$  : = 0.5000  
 Χώρος μεταξύ  $z=0$  &  $z=1$  : = 0.3413  
 Χώρος πριν το  $z=1$  : = 0.8413



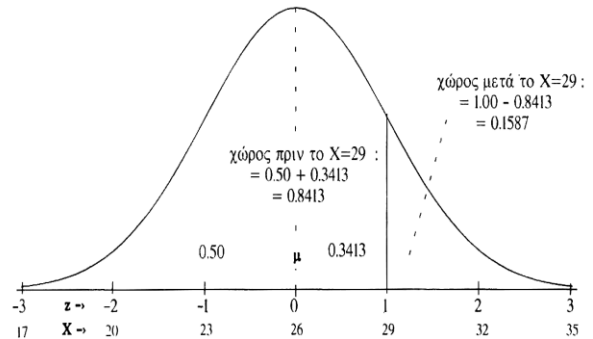
Εικ. 8.9- Χώροι κανονικής καμπύλης πριν & μετά την τιμή  $z=1$

14

## Π.χ. 8.1 - Εύρεση χώρου τυπικής κανονικής καμπύλης: τιμή $z=1$

- ▶ Με δεδομένο ότι ο μέσος της κανονικής κατανομής προσδιορίζει το 0.50 του όλου χώρου κάτω από την καμπύλη, το  $(0.50+0.3413)=0.8413$  του όλου χώρου κάτω από την καμπύλη πέφτει πριν την τιμή  $X=29$ .
- ▶ Με άλλα λόγια το 84.13% των τιμών πέφτουν πριν και το υπόλοιπο 15.87% των τιμών πέφτουν μετά την τιμή  $X=29$ .
- ▶ Αυτό σημαίνει ότι σε μια τυχαία δειγματοληψία η πιθανότητα εμφάνισης τιμών με μέγεθος ίσο ή μεταξύ του 26 και του 29 είναι 34.13%, ενώ η πιθανότητα εμφάνισης στο δείγμα τιμών με μέγεθος μεγαλύτερο του 29 είναι μόνο 15.87%.

Χώρος πριν το  $z=0$  := 0.5000  
 Χώρος μεταξύ  $z=0$  &  $z=1$  := 0.3413  
 Χώρος πριν το  $z=1$  := 0.8413

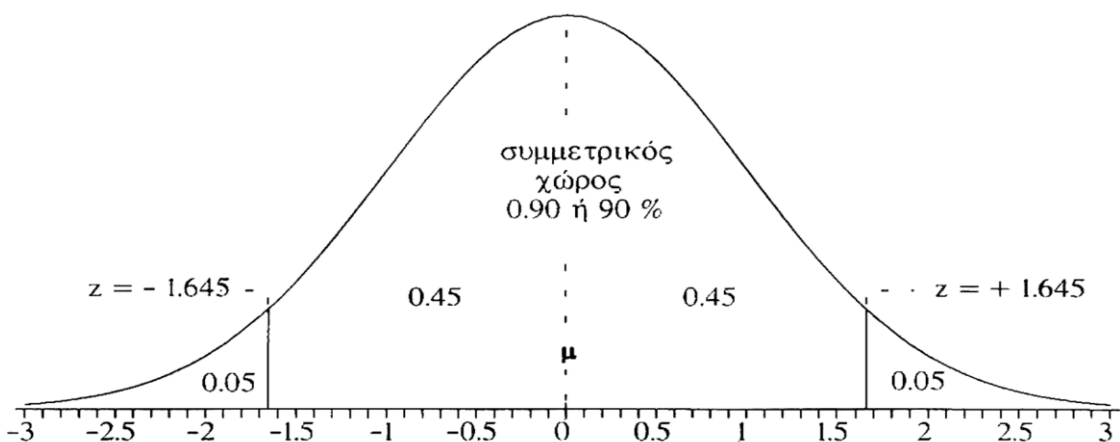


Εικ. 8.9- Χώροι κανονικής καμπύλης πριν & μετά την τιμή  $z=1$

15

15

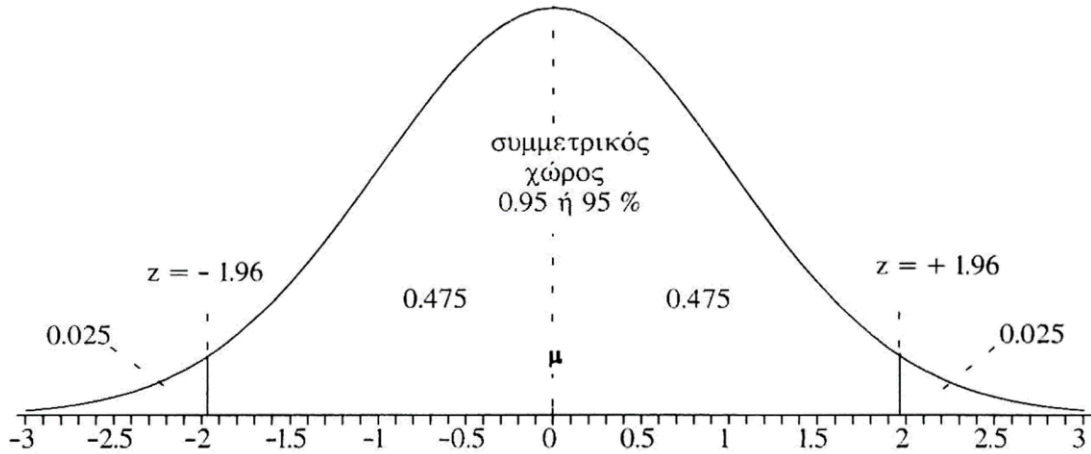
## Π.χ. 8.2 - Εύρεση τιμών $z$ : χώροι καμπύλης 0.90, 095 & 0.99.



Συμμετρικός χώρος 0.90 της κανονικής καμπύλης

16

## Π.χ. 8.2 - Εύρεση τιμών z: χώροι καμπύλης 0.90, 095 & 0.99.



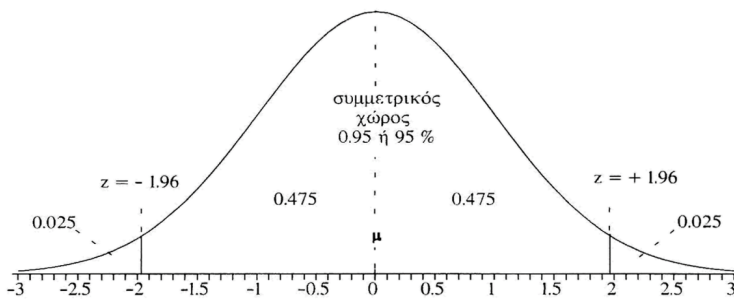
Συμμετρικός χώρος 0.95 της κανονικής καμπύλης

17

Από τη στήλη Β του παραρτήματος βλέπουμε ότι ο χώρος 0.475 αντιστοιχεί στην τιμή  $z=1.96$ . Κατά συνέπεια, το 95% των τιμών της κανονικής κατανομής πέφτει μέσα στο κεντρικό διάστημα  $z=+1.96$ .

416

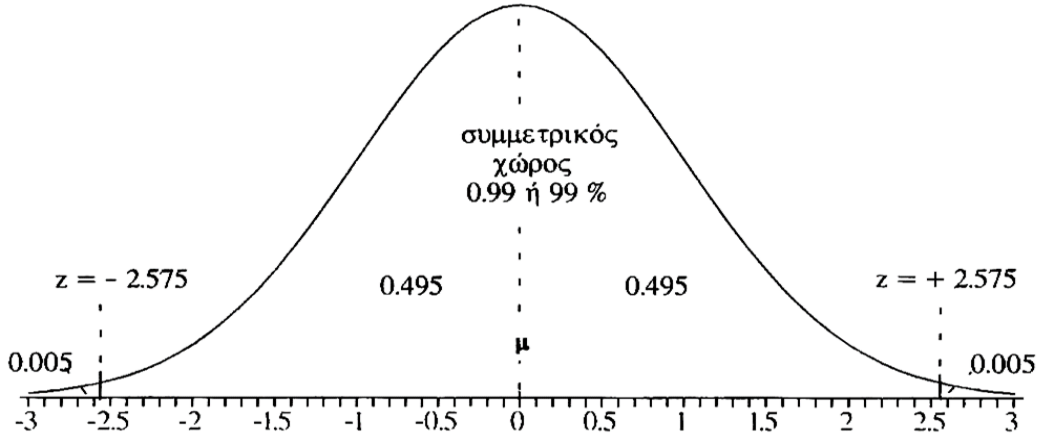
z	A	B	Γ	z	A	B	Γ
1.47	0.92922	0.42922	0.07078	1.90	0.97128	0.47128	0.02872
1.48	0.93056	0.43056	0.06944	1.91	0.97193	0.47193	0.02807
1.49	0.93189	0.43189	0.06811	1.92	0.97257	0.47257	0.02743
1.50	0.93319	0.43319	0.06681	1.93	0.97320	0.47320	0.02680
1.51	0.93448	0.43448	0.06552	1.94	0.97381	0.47381	0.02619
1.52	0.93574	0.43574	0.06426	1.95	0.97441	0.47441	0.02559
1.53	0.93699	0.43699	0.06301	1.96	0.97500	0.47500	0.02500
1.54	0.93822	0.43822	0.06178	1.97	0.97558	0.47558	0.02442
1.55	0.93943	0.43943	0.06057	1.98	0.97615	0.47615	0.02385
1.56	0.94062	0.44062	0.05938	1.99	0.97670	0.47670	0.02330
1.57	0.94179	0.44179	0.05821	2.00	0.97725	0.47725	0.02275
1.58	0.94295	0.44295	0.05705	2.01	0.97778	0.47778	0.02222
1.59	0.94408	0.44408	0.05592	2.02	0.97831	0.47831	0.02169
1.60	0.94520	0.44520	0.05480	2.03	0.97882	0.47882	0.02118
1.61	0.94630	0.44630	0.05370	2.04	0.97932	0.47932	0.02068
1.62	0.94738	0.44738	0.05262	2.05	0.97982	0.47982	0.02018
1.63	0.94845	0.44845	0.05155	2.06	0.98030	0.48030	0.01970
1.64	0.94950	0.44950	0.05050	2.07	0.98077	0.48077	0.01923
1.65	0.95053	0.45053	0.04947	2.08	0.98124	0.48124	0.01876
1.66	0.95154	0.45154	0.04846	2.09	0.98169	0.48169	0.01831
1.67	0.95254	0.45254	0.04746	2.10	0.98213	0.48213	0.01787
1.68	0.95352	0.45352	0.04648	2.11	0.98257	0.48257	0.01743
1.69	0.95448	0.45448	0.04552	2.12	0.98300	0.48300	0.01700
1.70	0.95543	0.45543	0.04457	2.13	0.98341	0.48341	0.01659
1.71	0.95637	0.45637	0.04363	2.14	0.98382	0.48382	0.01618
1.72	0.95728	0.45728	0.04272	2.15	0.98422	0.48422	0.01578
1.73	0.95818	0.45818	0.04182	2.16	0.98461	0.48461	0.01539
1.74	0.95907	0.45907	0.04093	2.17	0.98500	0.48500	0.01500
1.75	0.95994	0.45994	0.04006	2.18	0.98537	0.48537	0.01463
1.76	0.96079	0.46079	0.03921	2.19	0.98574	0.48574	0.01426
1.77	0.96164	0.46164	0.03836	2.20	0.98610	0.48610	0.01390
1.78	0.96246	0.46246	0.03754	2.21	0.98645	0.48645	0.01355
1.79	0.96327	0.46327	0.03673	2.22	0.98679	0.48679	0.01321
1.80	0.96407	0.46407	0.03593	2.23	0.98713	0.48713	0.01287
1.81	0.96485	0.46485	0.03515	2.24	0.98745	0.48745	0.01255
1.82	0.96562	0.46562	0.03438	2.25	0.98777	0.48777	0.01223
1.83	0.96637	0.46637	0.03363	2.26	0.98809	0.48809	0.01191
1.84	0.96711	0.46711	0.03289	2.27	0.98840	0.48840	0.01160
1.85	0.96784	0.46784	0.03216	2.28	0.98870	0.48870	0.01130
1.86	0.96856	0.46856	0.03144	2.29	0.98899	0.48899	0.01101
1.87	0.96926	0.46926	0.03074	2.30	0.98928	0.48928	0.01072
1.88	0.96994	0.46994	0.03006	2.31	0.98956	0.48956	0.01044
1.89	0.97062	0.47062	0.02938	2.32	0.98983	0.48983	0.01017



Συμμετρικός χώρος 0.95 της κανονικής καμπύλης

18

**Π.χ. 8.2 - Εύρεση τιμών z: χώροι καμπύλης 0.90, 095 & 0.99.**



Συμμετρικός χώρος 0.99 της κανονικής καμπύλης

**Από τη στήλη B του παραρτήματος Γ βλέπουμε ότι ο χώρος 0.495 αντιστοιχεί στην τιμή z=2.575**

417

z	A	B	Γ	z	A	B	Γ
2.33	0.99010	0.49010	0.00990	2.76	0.99711	0.49711	0.00289
2.34	0.99036	0.49036	0.00964	2.77	0.99720	0.49720	0.00280
2.35	0.99061	0.49061	0.00939	2.78	0.99728	0.49728	0.00272
2.36	0.99086	0.49086	0.00914	2.79	0.99736	0.49736	0.00264
2.37	0.99111	0.49111	0.00889	2.80	0.99744	0.49744	0.00256
2.38	0.99134	0.49134	0.00866	2.81	0.99752	0.49752	0.00248
2.39	0.99158	0.49158	0.00842	2.82	0.99760	0.49760	0.00240
2.40	0.99180	0.49180	0.00820	2.83	0.99767	0.49767	0.00233
2.41	0.99202	0.49202	0.00798	2.84	0.99774	0.49774	0.00226
2.42	0.99224	0.49224	0.00776	2.85	0.99781	0.49781	0.00219
2.43	0.99245	0.49245	0.00755	2.86	0.99788	0.49788	0.00212
2.44	0.99266	0.49266	0.00734	2.87	0.99795	0.49795	0.00205
2.45	0.99286	0.49286	0.00714	2.88	0.99801	0.49801	0.00199
2.46	0.99305	0.49305	0.00695	2.89	0.99807	0.49807	0.00193
2.47	0.99324	0.49324	0.00676	2.90	0.99813	0.49813	0.00187
2.48	0.99343	0.49343	0.00657	2.91	0.99819	0.49819	0.00181
2.49	0.99361	0.49361	0.00639	2.92	0.99825	0.49825	0.00175
2.50	0.99379	0.49379	0.00621	2.93	0.99831	0.49831	0.00169
2.51	0.99396	0.49396	0.00604	2.94	0.99836	0.49836	0.00164
2.52	0.99413	0.49413	0.00587	2.95	0.99841	0.49841	0.00159
2.53	0.99430	0.49430	0.00570	2.96	0.99846	0.49846	0.00154
2.54	0.99446	0.49446	0.00554	2.97	0.99851	0.49851	0.00149
2.55	0.99461	0.49461	0.00539	2.98	0.99856	0.49856	0.00144
2.56	0.99477	0.49477	0.00523	2.99	0.99860	0.49860	0.00140
2.57	0.99491	0.49491	0.00509	3.00	0.99865	0.49865	0.00135
2.58	0.99506	0.49506	0.00494	3.01	0.99869	0.49869	0.00131
2.59	0.99520	0.49520	0.00480	3.02	0.99874	0.49874	0.00126
2.60	0.99534	0.49534	0.00466	3.03	0.99878	0.49878	0.00122
2.61	0.99547	0.49547	0.00453	3.04	0.99882	0.49882	0.00118
2.62	0.99560	0.49560	0.00440	3.05	0.99886	0.49886	0.00114
2.63	0.99573	0.49573	0.00427	3.06	0.99889	0.49889	0.00111
2.64	0.99585	0.49585	0.00415	3.07	0.99893	0.49893	0.00107
2.65	0.99598	0.49598	0.00402	3.08	0.99896	0.49896	0.00104
2.66	0.99609	0.49609	0.00391	3.09	0.99900	0.49900	0.00100
2.67	0.99621	0.49621	0.00379	3.10	0.99903	0.49903	0.00097
2.68	0.99632	0.49632	0.00368	3.11	0.99906	0.49906	0.00094
2.69	0.99643	0.49643	0.00357	3.12	0.99910	0.49910	0.00090
2.70	0.99653	0.49653	0.00347	3.13	0.99913	0.49913	0.00087
2.71	0.99664	0.49664	0.00336	3.14	0.99916	0.49916	0.00084
2.72	0.99674	0.49674	0.00326	3.15	0.99918	0.49918	0.00082
2.73	0.99683	0.49683	0.00317	3.16	0.99921	0.49921	0.00079
2.74	0.99693	0.49693	0.00307	3.17	0.99924	0.49924	0.00076
2.75	0.99702	0.49702	0.00298	3.18	0.99926	0.49926	0.00074

### Π.χ. 8.3 - Πιθανότητες - ένα πρακτικό παράδειγμα.

- ▶ Η πληθυσμιακή κατανομή της μεταβλητής *σωματικό βάρος Ελλήνων φοιτητών ηλικίας 20-25 ετών*, όπως εκτιμήθηκε από ένα εκτεταμένο δείγμα  $N=339$  φοιτητών, έχει κανονική μορφή, μέση τιμή  $\mu = 74.55$  kg και τυπική απόκλιση  $\sigma = 7.46$  kg.
- ▶ Ο υπεύθυνος εθνικός προπονητής γυμναστικής των Ελληνικών Πανεπιστημίων θέλει να δημιουργήσει μια ειδική ομάδα επίδειξης ασκήσεων εδάφους (πυραμίδες, ακροβασίες) της οποίας η σύνθεση να περιλαμβάνει :
  - ▶ (α) μία κατηγορία φοιτητών-αθλητών με μικρό σωματικό βάρος, δηλαδή 60-65 kg,
  - ▶ (β) μια κατηγορία φοιτητών-αθλητών με μέτριο σωματικό βάρος, δηλαδή 72-77 kg και
  - ▶ (γ) μία κατηγορία φοιτητών-αθλητών με μεγάλο σωματικό βάρος, δηλαδή 90-95 kg.

21

21

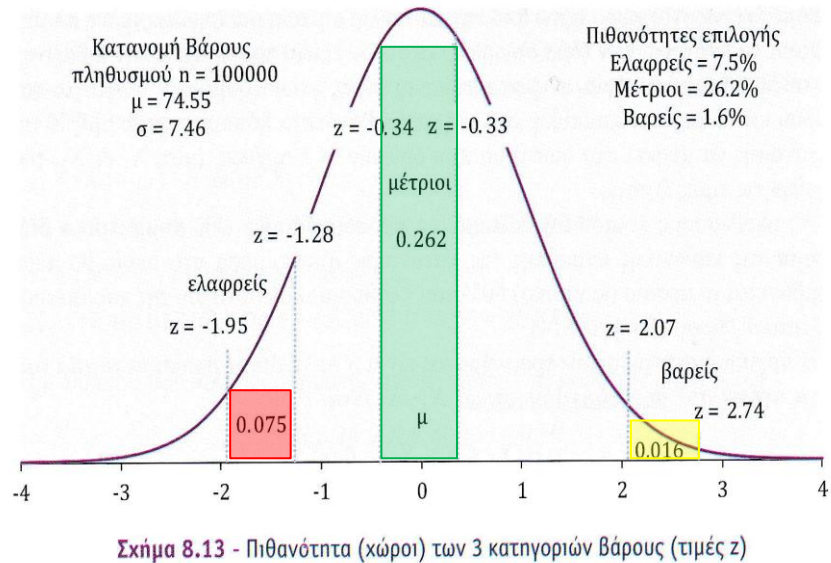
- ▶ Προκειμένου, λοιπόν, να δημιουργήσει την ομάδα αυτή, αρχικά σκοπεύει να διαπιστώσει, μέσω των παραπάνω νορμικών δεδομένων, ποια είναι η πιθανότητα ανεύρεσης αυτών των τριών διαφορετικών κατηγοριών (υποπληθυσμών) φοιτητών μέσα στον πληθυσμό των περίπου  $n=100000$  τακτικών φοιτητών (πανελλαδικά).
- ▶ Έτσι, θα μπορέσει να σχεδιάσει τον τρόπο με τον οποίο θα έρθει σε επαφή με τους τρεις υποπληθυσμούς, για να επιλέξει τελικά από αυτούς τους πλέον κατάλληλους, σύμφωνα βέβαια και με άλλα κριτήρια επιλογής.

22

22

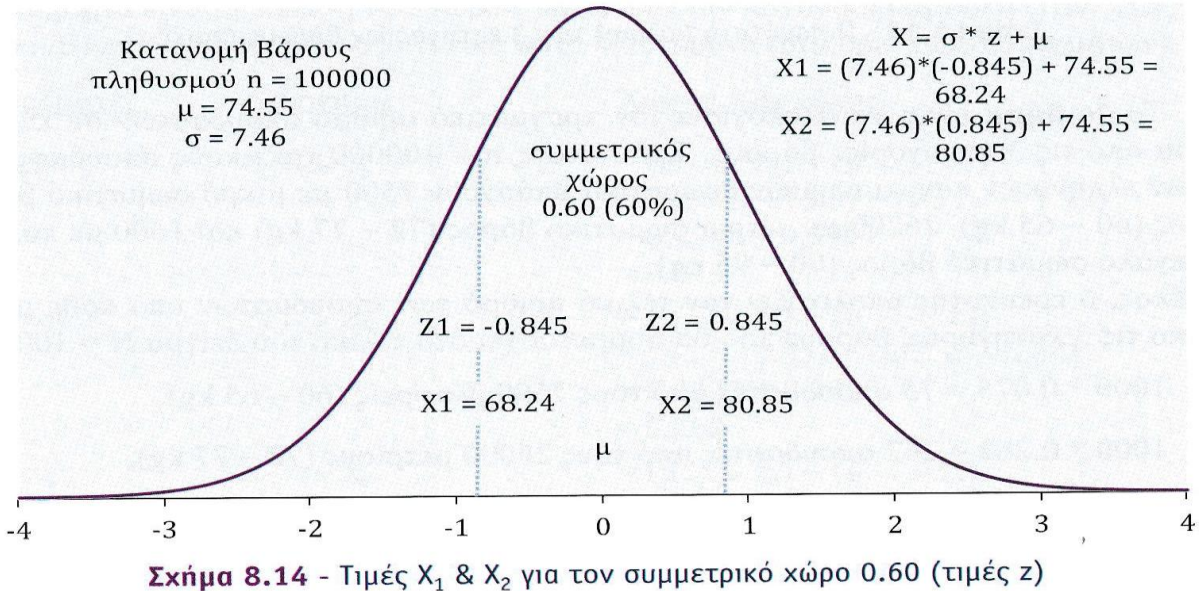
Από τους υπολογισμούς προκύπτει ....

Η κατανομή έχει κανονική μορφή, με μέση τιμή  $\mu=74.55$  και τυπική απόκλιση  $\sigma=7.46$ .

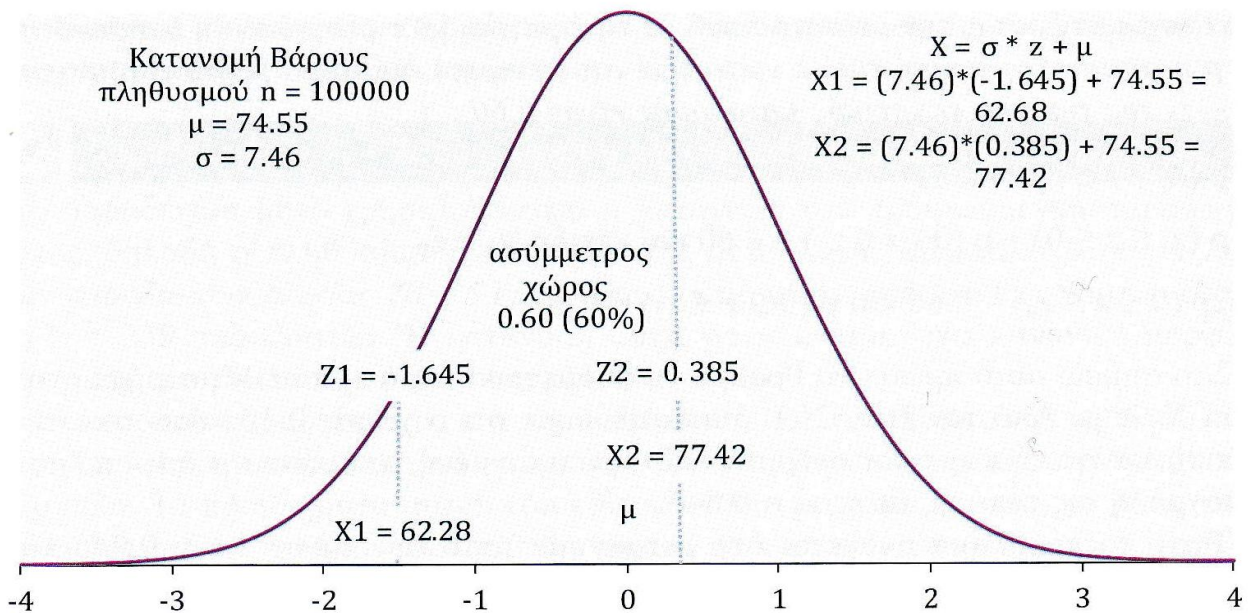


23

## Π.χ. 8.4 - Χώρος κανονικής καμπύλης - μέθοδος πιθανότητας



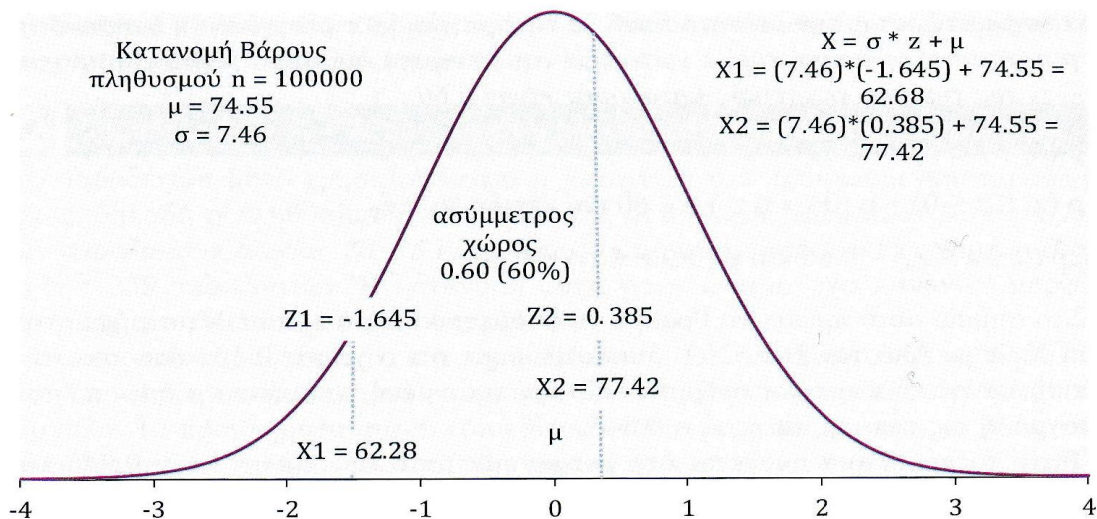
24



Σχήμα 8.15 - Τιμές  $X_1$  &  $X_2$  για τον ασύμμετρο χώρο 0.60 (τιμές  $z$ )

25

## Π.χ. 8.4 - Χώρος κανονικής καμπύλης - μέθοδος πιθανότητας



Σχήμα 8.15 - Τιμές  $X_1$  &  $X_2$  για τον ασύμμετρο χώρο 0.60 (τιμές  $z$ )

26

26

## Σας ευχαριστώ για την προσοχή σας

Normal distribution function

$$p(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

x - Random variable  
p(x) - Probability distribution of random variable  
μ - Mean of all values of x  
σ - Standard deviation of all values of x

AKT