

Ποσοτικές Μέθοδοι στη Διοίκηση

Δρ. Ιωάννης Λιθιέρης

1. Εισαγωγή στις Ποσοτικές Μεθόδους

Ερωτήσεις Πολ/λης Επιλογής

1. Ποιος είναι ο κύριος σκοπός των ποσοτικών μεθόδων στη διοίκηση;

- Η αντικατάσταση των διευθυντικών στελεχών Η υποστήριξη της λήψης αποφάσεων με αντικειμενικό τρόπο
 Η αποφυγή της συλλογής δεδομένων Η μείωση του αριθμού των εργαζομένων

2. Τι αντιπροσωπεύουν οι «μεταβλητές εισόδου» (input) σε ένα μοντέλο εκτίμησης;

- Τα αποτελέσματα που θέλουμε να προβλέψουμε Οι παράγοντες που επηρεάζουν το αποτέλεσμα
 Τα σφάλματα του μοντέλου Οι τελικές προβλέψεις της ανάλυσης

3. Ποιο από τα παρακάτω αποτελεί παράδειγμα ερωτήματος που απαντάται με ποσοτικές μεθόδους;

- «Τι χρώμα να βάψουμε τα γραφεία;» «Κατά πόσο θα αυξηθούν οι πωλήσεις αν αυξήσουμε τη διαφήμιση;»
 «Ποιος να γίνει διευθυντής;» «Πότε να κλείσουμε για διακοπές;»

4. Ποιο βήμα ακολουθεί αμέσως μετά τη «μορφοποίηση του προβλήματος» στη διαδικασία εκτίμησης/πρόβλεψης;

- Η εφαρμογή της λύσης Η συλλογή δεδομένων
 Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων Η επικύρωση της λύσης

5. Ποιο βήμα **ολοκληρώνει** τη διαδικασία επίλυσης ενός ποσοτικού προβλήματος;

- Η μαθηματική μοντελοποίηση Η ανάλυση των δεδομένων
 Ο καθορισμός του προβλήματος Η επικύρωση και εφαρμογή της λύσης

6. Τι είναι ένα «θεωρητικό ή μαθηματικό μοντέλο» στο πλαίσιο των ποσοτικών μεθόδων;

- Μια μαθηματική αναπαράσταση ενός πραγματικού προβλήματος Ένα γράφημα των δεδομένων
 Η λύση του προβλήματος Η βάση δεδομένων της εταιρείας

7. Γιατί οι επιχειρήσεις χρειάζονται εκτιμήσεις και προβλέψεις;

- Για να αποφύγουν τη λήψη αποφάσεων Επειδή το απαιτεί ο νόμος
 Λόγω αβεβαιότητας και αστάθειας του επιχειρηματικού περιβάλλοντος Για να αντικαταστήσουν τους λογιστές

8. Τι εκφράζει η σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών x και y σε ένα διάγραμμα διασποράς;

- Πάντοτε μια αιτιώδη σχέση Μια στατιστική συσχέτιση ή τάση
 Αποκλειστικά γραμμική σχέση Ότι η x προκαλεί την y

9. Ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις αντιστοιχεί σε «υποκειμενικό κριτήριο» λήψης επιχειρηματικής απόφασης;

- Χρήση ανάλυσης παλινδρόμησης Ανάλυση ιστορικών δεδομένων
 Επιλογή τοποθεσίας λόγω φθηνού ενοικίου χωρίς ανάλυση αγοράς Εκτίμηση πωλήσεων μέσω στατιστικών

10. Τι αντιπροσωπεύουν οι «μεταβλητές εξόδου» (output) σε ένα μοντέλο;

- Τα δεδομένα εισαγωγής Τα ιστορικά δεδομένα
 Τα μεγέθη που θέλουμε να εκτιμήσουμε ή να προβλέψουμε Οι παράμετροι του μοντέλου

11. Ο όρος «ανάλυση παλινδρόμησης» εισήχθη από ποιον επιστήμονα;

- Karl Pearson Francis Galton Kolmogorov Bernoulli

12. Τι διαπίστωσε ο Galton σχετικά με το ύψος γονέων και παιδιών;

- Τα παιδιά είναι πάντα ψηλότερα από τους γονείς τους Δεν υπάρχει σχέση μεταξύ ύψους γονέων και παιδιών
 Το ύψος των παιδιών τείνει να «παλινδρομεί» προς το μέσο ύψος του πληθυσμού Τα παιδιά κληρονομούν το ύψος των γονέων τους

13. Ποια σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών **δεν** μπορεί να μοντελοποιηθεί με απλή γραμμική παλινδρόμηση;

- Θετική γραμμική Αρνητική γραμμική Καμπυλόγραμμη (σχήμα Υ) Μηδενική (καμία σχέση)

14. Ποιο από τα παρακάτω αντιπροσωπεύει το πρώτο βήμα στην προσέγγιση ενός ποσοτικού προβλήματος;

- Η εφαρμογή του μοντέλου Η σαφής διατύπωση και κατανόηση του προβλήματος
 Η ανάλυση των αποτελεσμάτων Η επικύρωση της λύσης

15. Σε ποιους τομείς εφαρμόζονται οι εκτιμήσεις και οι προβλέψεις;

- Μόνο στη βιομηχανία Μόνο στον δημόσιο τομέα
 Μόνο στις τράπεζες Σε οικονομία, εμπόριο, παραγωγή, κυβερνητικές αποφάσεις κ.α.

Ασκήσεις

Άσκηση 1. Ένας Δήμος θέλει να εκτιμήσει τη ζήτηση θέσεων στάθμευσης για την επόμενη πενταετία. Τα ιστορικά δεδομένα δείχνουν ότι για πληθυσμό 50.000 κατοίκων υπήρχαν 8.000 θέσεις ζήτησης, και για 70.000 κατοίκους υπήρχαν 11.000 θέσεις ζήτησης. Ο πληθυσμός αναμένεται να φτάσει τους 85.000 κατοίκους σε 5 χρόνια.

- α)** Προσδιορίστε τις μεταβλητές εισόδου και εξόδου του προβλήματος.
- β)** Περιγράψτε τα βήματα της διαδικασίας εκτίμησης που θα ακολουθήσετε.
- γ)** Ποια είναι τα βασικά ερωτήματα που πρέπει να απαντηθούν για να επιλεγεί το κατάλληλο μοντέλο;
- δ)** Τι κινδύνους εμπεριέχει η εφαρμογή ενός μοντέλου εκτίμησης χωρίς επικύρωση;

Λύση:

- α)** Μεταβλητή εισόδου (input): ο πληθυσμός του Δήμου (αριθμός κατοίκων). Μεταβλητή εξόδου (output): η ζήτηση θέσεων στάθμευσης.
- β)** Τα βήματα είναι: (1) Μορφοποίηση του προβλήματος – προσδιορισμός των μεταβλητών και της σχέσης που αναζητείται. (2) Συλλογή δεδομένων – ιστορικά στοιχεία πληθυσμού και ζήτησης. (3) Κατασκευή μοντέλου – επιλογή και εκτίμηση κατάλληλης σχέσης (π.χ. γραμμικής). (4) Εφαρμογή – πρόβλεψη για πληθυσμό 85.000. (5) Επικύρωση – έλεγχος αξιοπιστίας με γνωστά δεδομένα.
- γ)** Τα κύρια ερωτήματα είναι: Υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ πληθυσμού και ζήτησης; Ποιοι άλλοι παράγοντες επηρεάζουν τη ζήτηση (π.χ. αριθμός αυτοκινήτων, αστικές αναπλάσεις); Είναι τα δεδομένα επαρκή για αξιόπιστη εκτίμηση;
- δ)** Χωρίς επικύρωση, το μοντέλο μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένες προβλέψεις αν δεν ισχύουν οι υποθέσεις του (π.χ. αλλαγή στις μετακινήσεις, αύξηση χρήσης δημόσιων μέσων). Τα αποτελέσματα μπορεί να έχουν υπερβολική ή ανεπαρκή έκταση, οδηγώντας σε σπατάλη πόρων ή ανεπάρκεια υποδομών.

Άσκηση 2. Μια αλυσίδα λιανικής εμπορίας ενδυμάτων (Brandway) σχεδιάζει να ανοίξει νέα καταστήματα σε 3 πόλεις. Τα διαθέσιμα δεδομένα για τα υπάρχοντα 10 καταστήματα περιλαμβάνουν τον πληθυσμό της περιοχής (x_1 , σε χιλιάδες), το μέσο εισόδημα (x_2 , σε €), και τις ετήσιες πωλήσεις (y , σε χιλ. €).

- α)** Ορίστε τις μεταβλητές εισόδου και εξόδου. Γιατί είναι σημαντικό να υπάρχουν **δύο** μεταβλητές εισόδου;
- β)** Τι πλεονέκτημα έχει η ποσοτική ανάλυση σε σχέση με τη λήψη αποφάσεων βάσει «διαίσθησης» ή υποκειμενικής κρίσης;
- γ)** Περιγράψτε πώς θα μπορούσε ένα μοντέλο εκτίμησης πωλήσεων να υποστηρίξει την επιλογή τοποθεσίας νέου καταστήματος.
- δ)** Τι είδους σχέση (x_1, y) και (x_2, y) αναμένετε να υπάρχει; Αιτιολογήστε.

Λύση:

- α)** Μεταβλητές εισόδου: x_1 (πληθυσμός περιοχής) και x_2 (μέσο εισόδημα). Μεταβλητή εξόδου: y (ετήσιες πωλήσεις). Η ύπαρξη δύο μεταβλητών εισόδου επιτρέπει πιο πλήρη ερμηνεία των πωλήσεων, καθώς κανένας μόνο παράγοντας δεν αιτιολογεί πλήρως τη διακύμανσή τους.
- β)** Η ποσοτική ανάλυση παρέχει αντικειμενικά κριτήρια επιλογής, επαναληψιμότητα και δυνατότητα σύγκρισης εναλλακτικών. Αντίθετα, η διαισθητική κρίση μπορεί να επηρεαστεί από συναισθήματα ή ατομικές προκαταλήψεις και δεν είναι εύκολα δικαιολογήσιμη σε τρίτους.
- γ)** Με βάση τα ιστορικά δεδομένα των 10 υπαρχόντων καταστημάτων κατασκευάζεται μοντέλο πρόβλεψης πωλήσεων. Γνωρίζοντας τον πληθυσμό και το εισόδημα κάθε υποψήφιας τοποθεσίας, το μοντέλο δίνει εκτίμηση των αναμενόμενων πωλήσεων, επιτρέποντας άμεση σύγκριση μεταξύ των 3 πόλεων.
- δ)** Αναμένεται θετική γραμμική σχέση και για τις δύο περιπτώσεις: μεγαλύτερος πληθυσμός σημαίνει περισσότεροι πιθανοί αγοραστές, ενώ υψηλότερο εισόδημα σημαίνει μεγαλύτερη αγοραστική δύναμη – άρα υψηλότερες πωλήσεις ενδυμάτων.

2. Γραμμική Παλινδρόμηση

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1. Η γραμμική παλινδρόμησης $\hat{y} = b_0 + b_1x$ εκτιμάται με τη μέθοδο:
 Μεγίστης πιθανοφάνειας Ελαχίστων τετραγώνων (OLS)
 Κινητού μέσου Εκθετικής εξομάλυνσης
2. Τι εκφράζει ο συντελεστής b_1 στη γραμμική παλινδρόμησης $\hat{y} = b_0 + b_1x$;
 Τη μέση τιμή του y Τη μεταβολή του \hat{y} για μία μονάδα αύξησης του x
 Τη διακύμανση του y Τη συσχέτιση μεταξύ x και y
3. Τι μετρά το SSE (Αθροισμα Τετραγώνων Σφαλμάτων);
 Την απόκλιση των δεδομένων από την εκτιμημένη γραμμική παλινδρόμησης Την απόκλιση από τον μέσο
 Τη συνολική μεταβλητότητα Τη μεταβλητότητα που εξηγείται
4. Ο συντελεστής προσδιορισμού r^2 παίρνει τιμές:
 $-1 \leq r^2 \leq 1$ $0 \leq r^2 \leq 1$ $0 < r^2 < \infty$ $-\infty < r^2 < \infty$
5. Τι σημαίνει $r^2 = 0.8479$;
 Το μοντέλο εξηγεί το 15.21% της μεταβλητότητας Η συσχέτιση είναι αρνητική
 Το 84.79% της μεταβλητότητας του y εξηγείται από το x Η παλινδρόμηση δεν είναι σημαντική
6. Πότε ο συντελεστής προσδιορισμού ισούται με μηδέν ($r^2 = 0$);
 Όταν υπάρχει τέλεια γραμμική σχέση Όταν δεν υπάρχει καμία γραμμική σχέση μεταξύ x και y
 Όταν $b_1 = 1$ Όταν το $SSR = SST$
7. Ποια από τις παρακάτω είναι **υπόθεση εφαρμογής** της γραμμικής παλινδρόμησης;
 Τα κατάλοιπα ακολουθούν εκθετική κατανομή Τα κατάλοιπα είναι κανονικά κατανεμημένα
 Η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι κατηγορική Ο αριθμός παρατηρήσεων πρέπει να είναι ζυγός
8. Τι σημαίνει «ίση διασπορά» (homoscedasticity) στη γραμμική παλινδρόμηση;
 Τα κατάλοιπα αυξάνονται με το x Η διακύμανση των καταλοίπων είναι σταθερή για όλα τα x
 Όλες οι παρατηρήσεις έχουν ίδια τιμή Η γραμμική παλινδρόμησης περνά από την αρχή
9. Ποιο εργαλείο χρησιμοποιούμε για να ελέγξουμε αν τα κατάλοιπα είναι κανονικά κατανεμημένα;
 Διάγραμμα διασποράς Ιστόγραμμα ή θηκόγραμμα των καταλοίπων
 Γράφημα αυτοσυσχέτισης Πίνακας συσχετίσεων
10. Τι είναι η «περιοχή παρεμβολής» (interpolation region) στην παλινδρόμηση;
 Το εύρος των τιμών του x που χρησιμοποιήθηκαν για την εκτίμηση του μοντέλου Η περιοχή όπου $r^2 = 1$
 Το σύνολο των παρατηρήσεων Η ευθεία παλινδρόμησης
11. Αν $b_1 < 0$, ποια είναι η σχέση μεταξύ x και y ;
 Καμία σχέση Αρνητική γραμμική Θετική γραμμική Καμπυλόγραμμη

12. Ποια είναι η σχέση $SST = SSR + SSE$;

- Αφορά μόνο στη μέθοδο εκθετικής εξομάλυνσης
 Ισχύει μόνο αν $r^2 = 0$

- Εκφράζει τη διαμέριση της συνολικής μεταβλητότητας
 Ισχύει μόνο αν τα κατάλοιπα είναι μηδέν

13. Ποιο αποτέλεσμα υποδεικνύει ότι τα κατάλοιπα **δεν** είναι ανεξάρτητα ;

- Τυχαία διασπορά γύρω από το μηδέν
 Κανονικό ιστόγραμμα καταλοίπων

- Εμφανής μοτίβο (πατερν) στο γράφημα καταλοίπων- x
 $r^2 > 0.5$

14. Τι εκφράζει ο σταθερός όρος b_0 της γραμμής παλινδρόμησης ;

- Την εκτιμώμενη τιμή του y όταν $x = 0$
 Τη μέση τιμή του x

- Τη διακύμανση του σφάλματος
 Τον συντελεστή συσχέτισης

15. Γιατί **δεν** πρέπει να χρησιμοποιούμε το μοντέλο για πρόβλεψη εκτός της περιοχής παρεμβολής;

- Επειδή το μοντέλο είναι τότε μη γραμμικό
 Επειδή το r^2 γίνεται μεγαλύτερο από 1

- Επειδή δεν γνωρίζουμε αν η γραμμική σχέση συνεχίζεται εκτός της περιοχής παρεμβολής
 Επειδή τα δεδομένα εκτός περιοχής έχουν μηδενικό x

Ασκήσεις

Άσκηση 1. Μια αλυσίδα 14 καταστημάτων παρέχει τα παρακάτω δεδομένα για τους δυνητικούς πελάτες (x , σε εκατ.) και τις ετήσιες πωλήσεις (y , σε εκατ. €):

Κατάστημα	Δυνητικοί πελάτες x	Ετήσιες πωλήσεις y
1	3.7	5.7
2	3.6	5.9
3	2.8	6.7
4	5.6	9.5
5	3.3	5.4
6	2.2	3.5
7	3.3	6.2

Κατάστημα	Δυνητικοί πελάτες x	Ετήσιες πωλήσεις y
8	3.1	4.7
9	3.2	6.1
10	3.5	4.9
11	5.2	10.7
12	4.6	7.6
13	5.8	11.8
14	3.0	4.1

Δίνεται ότι: $\bar{x} = 3.707$, $\bar{y} = 6.629$, $\sum(x_i - \bar{x})^2 = 13.593$, $\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 27.026$.

α) Υπολογίστε τον συντελεστή b_1 της γραμμής παλινδρόμησης.

β) Υπολογίστε τον σταθερό όρο b_0 .

γ) Γράψτε την εξίσωση της γραμμής παλινδρόμησης και ερμηνεύστε τους συντελεστές.

δ) Εκτιμήστε τις ετήσιες πωλήσεις ενός νέου καταστήματος με 4.5 εκατ. δυνητικούς πελάτες. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο για πρόβλεψη με $x = 8.0$; Γιατί;

Λύση:

α)

$$b_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{27.026}{13.593} \approx 1.988$$

β)

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \cdot \bar{x} = 6.629 - 1.988 \cdot 3.707 = 6.629 - 7.369 \approx -0.740$$

γ) Η εξίσωση είναι:

$$\hat{y} = -0.740 + 1.988 \cdot x$$

Ερμηνεία: Για κάθε επιπλέον εκατομμύριο δυνητικών πελατών, οι ετήσιες πωλήσεις αυξάνονται κατά 1.988 εκατ. €. Ο σταθερός όρος $b_0 = -0.740$ δεν έχει πρακτική ερμηνεία (αρνητικές πωλήσεις για μηδενικούς πελάτες), καθώς $x = 0$ βρίσκεται εκτός της περιοχής παρεμβολής.

δ) Για $x = 4.5$: $\hat{y} = -0.740 + 1.988 \cdot 4.5 = -0.740 + 8.946 = 8.206$ εκατ. €.

Για $x = 8.0$ **δεν** είναι συνετό να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο, καθώς η μέγιστη τιμή του x στα δεδομένα μας είναι 5.8. Το $x = 8.0$ βρίσκεται εκτός της περιοχής παρεμβολής και δεν γνωρίζουμε αν η γραμμική σχέση συνεχίζεται.

Άσκηση 2. Από ανάλυση παλινδρόμησης σε δείγμα 20 νοικοκυριών, η σχέση μεταξύ ετήσιου εισοδήματος (x , σε χιλ. €) και μηνιαίων εξόδων τηλεφώνου (y , σε €) εκτιμήθηκε ως:

$$\hat{y} = 5.82 + 0.071 \cdot x$$

Επιπλέον, δίνεται: $SST = 120.4$, $SSE = 18.3$.

α) Υπολογίστε το SSR .

β) Υπολογίστε τον συντελεστή προσδιορισμού r^2 και ερμηνεύστε τον.

γ) Για ένα νοικοκυριό με εισόδημα 30 χιλ. €, υπολογίστε το εκτιμώμενο μηνιαίο έξοδο τηλεφώνου.

δ) Ένα νοικοκυριό με εισόδημα 30 χιλ. € έχει πραγματικά έξοδα τηλεφώνου 8.00 €. Υπολογίστε το κατάλοιπο (residual) $e_i = y_i - \hat{y}_i$ και σχολιάστε τι εκφράζει.

Λύση:

α)

$$SSR = SST - SSE = 120.4 - 18.3 = 102.1$$

β)

$$r^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{102.1}{120.4} \approx 0.848$$

Το 84.8% της μεταβλητότητας των μηνιαίων εξόδων τηλεφώνου εξηγείται από το ετήσιο εισόδημα. Μόνο το 15.2% οφείλεται σε άλλους παράγοντες.

γ) Για $x = 30$:

$$\hat{y} = 5.82 + 0.071 \cdot 30 = 5.82 + 2.13 = 7.95 \text{ €}$$

δ) $e_i = y_i - \hat{y}_i = 8.00 - 7.95 = 0.05 \text{ €}$. Το κατάλοιπο εκφράζει τη διαφορά μεταξύ της πραγματικής και της εκτιμώμενης τιμής. Στην περίπτωση αυτή, το νοικοκυριό δαπανά €0.05 παραπάνω από ό,τι προβλέπει το μοντέλο – μικρή, σχεδόν αμελητέα απόκλιση.

3. Ανάλυση Χρονοσειρών I

Ερωτήσεις Πολ/λης Επιλογής

1. Τι είναι μια χρονολογική σειρά;

- Μια σειρά τυχαίων αριθμών Το σύνολο των τιμών που παίρνει μια μεταβλητή διαδοχικά στο χρόνο
 Ένας πίνακας με στατιστικές κατανομές Μια ακολουθία μη χρονολογημένων παρατηρήσεων

2. Ποιες είναι οι τέσσερις συνιστώσες της «κλασσικής» ανάλυσης χρονοσειρών;

- Μέση τιμή, διακύμανση, ασυμμετρία, κύρτωση Τάση, κυκλική, εποχική, τυχαία συνιστώσα
 Τάση, παλινδρόμηση, εξομάλυνση, πρόβλεψη Γραμμική, εκθετική, πολυωνυμική, λογαριθμική

3. Τι εκφράζει η «τάση» (trend) μιας χρονοσειράς;

- Τυχαίες ακραίες τιμές Τη μακροχρόνια γενική κίνηση (άνοδο ή κάθοδο) της χρονοσειράς
 Εποχικές μεταβολές Μεταβολές με περίοδο ίση του έτους

4. Πότε λέμε ότι μια χρονοσειρά είναι «στάσιμη» (stationary);

- Όταν παρουσιάζει έντονη εποχικότητα Όταν οι τιμές μεταβάλλονται γύρω από μια σταθερή αναμενόμενη τιμή
 Όταν η τάση είναι ανοδική Όταν η τυχαία συνιστώσα είναι μηδέν

5. Ποια συνιστώσα εκφράζει επαναλαμβανόμενες διακυμάνσεις με περίοδο **μικρότερη ή ίση** του έτους;

- Τάση Κυκλική Εποχική Τυχαία

6. Ποια είναι η διαφορά μεταξύ κυκλικής και εποχικής συνιστώσας;

- Η κυκλική έχει σταθερή περίοδο ενώ η εποχική όχι Η εποχική έχει περίοδο ≤ 1 έτος, η κυκλική > 1 έτος
 Δεν υπάρχει διαφορά Η κυκλική αφορά μόνο μηνιαία δεδομένα

7. Ποιο μοντέλο σύνθεσης ΧΣ χρησιμοποιείται όταν η εποχική συνιστώσα αυξάνεται ανάλογα με την τάση;

- Πολλαπλασιαστικό: $x_t = T \cdot C \cdot S \cdot I$ Προσθετικό: $x_t = T + C + S + I$
 Λογαριθμικό Εκθετικό

8. Τι εκφράζει ο «δείκτης εποχικότητας» (seasonal index);

- Κατά πόσο η μέση τιμή μιας χρονικής περιόδου αποκλίνει από τη συνολική μέση τιμή Τη γενική τάση της χρονοσειράς
 Τη διακύμανση της τυχαίας συνιστώσας Τον ρυθμό μεταβολής της τάσης

9. Ποιο από τα παρακάτω **δεν** αποτελεί σκοπό της ανάλυσης χρονοσειρών;

- Περιγραφή Πρόβλεψη Λογιστικός έλεγχος Εξήγηση

10. Ποιο είναι το πρώτο βήμα στην «κλασσική» ανάλυση χρονοσειρών;

- Υπολογισμός δεικτών εποχικότητας Γραφική παρουσίαση των δεδομένων
 Εκτίμηση τάσης με παλινδρόμηση Εφαρμογή εκθετικής εξομάλυνσης

11. Ποιο μοντέλο τάσης χρησιμοποιείται όταν η αύξηση της ΧΣ είναι σταθερή σε απόλυτους αριθμούς ανά χρονική μονάδα;

- Εκθετικό: $x_t = \beta_0 \cdot \beta_1^t$ Γραμμικό: $x_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t$
 Πολυωνυμικό 2ου βαθμού Λογαριθμικό

12. Σε ποια περίπτωση είναι κατάλληλο το **προσθετικό** υπόδειγμα $x_t = T + C + S + I$;

- Όταν η εποχική συνιστώσα αυξάνεται με την τάση Όταν η εποχική συνιστώσα παραμένει σταθερή σε σχέση με την τάση
 Όταν η τυχαία συνιστώσα είναι μηδέν Όταν δεν υπάρχει τάση

13. Ποιος τύπος δεδομένων αποτελεί τυπικό παράδειγμα χρονοσειράς;

- Στοιχεία ύψους και βάρους φοιτητών Μηνιαίες πωλήσεις εκδοτικού οίκου για 4 χρόνια
 Απόψεις πελατών σε ερωτηματολόγιο Αποτελέσματα ψηφοφορίας σε μια εκλογή

14. Τι εκφράζει ο τύπος $x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots)$ στην ανάλυση ΧΣ;

- Τάση της ΧΣ ως συνάρτηση του χρόνου Δυναμικό μοντέλο που εξαρτά την τρέχουσα τιμή από τις προηγούμενες τιμές
 Εποχική συνιστώσα Ο κινητός μέσος

15. Ποιος σκοπός ανάλυσης ΧΣ αφορά στον εντοπισμό των αιτιών μεταβολής της;

- Πρόβλεψη Εξήγηση Έλεγχος Περιγραφή

Ασκήσεις

Άσκηση 1. Ένας εκδοτικός οίκος ειδικευμένος σε πανεπιστημιακά βιβλία καταγράφει τις μηνιαίες πωλήσεις (σε €1.000) για 4 χρόνια. Τα δεδομένα των πρώτων 12 μηνών (Έτος 1) είναι:

Μήνας	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Πωλήσεις	196	188	192	164	140	120	112	140	160	168	192	200

- α)** Υπολογίστε τη μέση ετήσια πώληση (μέσος 12 μηνών).
β) Σε ποιους μήνες οι πωλήσεις υπερβαίνουν τον μέσο; Τι εποχική εξήγηση έχει αυτό;
γ) Υπολογίστε τον δείκτη εποχικότητας για τον Ιανουάριο (μήνας 1) και τον Ιούλιο (μήνας 7), χρησιμοποιώντας τον τύπο: $SI_m = \frac{\bar{x}_m}{\bar{x}} \cdot 100$, όπου \bar{x}_m η μέση τιμή του μήνα m και \bar{x} η γενική μέση τιμή.
δ) Σχολιάστε το αποτέλεσμα: τι εκφράζει δείκτης $SI > 100$ και τι $SI < 100$;

Λύση:

α)

$$\bar{x} = \frac{196 + 188 + 192 + 164 + 140 + 120 + 112 + 140 + 160 + 168 + 192 + 200}{12} = \frac{1972}{12} \approx 164.3 \text{ (€1.000)}$$

- β)** Οι μήνες με πωλήσεις > 164.3 είναι: Ιανουάριος (196), Φεβρουάριος (188), Μάρτιος (192), Νοέμβριος (192), Δεκέμβριος (200). Αυτοί αντιστοιχούν στους μήνες έναρξης ακαδημαϊκού εξαμήνου (Σεπτέμβριος-Νοέμβριος, Φεβρουάριος-Μάρτιος) και στις εορτές, οπότε η αγορά πανεπιστημιακών βιβλίων αυξάνεται. Οι χαμηλές πωλήσεις του καλοκαιριού (Ιούνιος-Αύγουστος) εξηγούνται από τις εξεταστικές περιόδους και τις διακοπές.
γ) Επειδή έχουμε μόνο ένα έτος, $\bar{x}_1 = 196$ και $\bar{x}_7 = 112$:

$$SI_1 = \frac{196}{164.3} \cdot 100 \approx 119.3, \quad SI_7 = \frac{112}{164.3} \cdot 100 \approx 68.2$$

- δ)** Δείκτης $SI > 100$ σημαίνει ότι ο συγκεκριμένος μήνας έχει πωλήσεις **υψηλότερες** από τη μέση ετήσια τιμή – ισχυρή εποχική επίδραση. Δείκτης $SI < 100$ σημαίνει ότι ο μήνας έχει πωλήσεις **χαμηλότερες** από τη μέση, δηλαδή εποχικά «αδύναμος» μήνας.

Άσκηση 2. Ένα νοσοκομείο καταγράφει τον αριθμό εισαγωγών ηλικιωμένων (+65 ετών) ανά ημέρα. Τα δεδομένα δείχνουν γενική ανοδική τάση με εποχικότητα (περισσότερες εισαγωγές το χειμώνα). Η τάση εκτιμήθηκε με γραμμικό μοντέλο: $\hat{x}_t = 12 + 0.05 \cdot t$ (t = ημέρα).

- α)** Περιγράψτε τις 4 συνιστώσες που αναμένεται να υπάρχουν στη χρονοσειρά αυτή, με παραδείγματα για κάθε μία.
β) Εκτιμήστε την τάση για $t = 100$ και $t = 200$.
γ) Αν για $t = 100$ η πραγματική τιμή είναι $x_{100} = 20$, τι αντιπροσωπεύει η διαφορά $x_{100} - \hat{x}_{100}$ σε ένα προσθετικό μοντέλο;
δ) Ποιο μοντέλο (προσθετικό ή πολλαπλασιαστικό) ταιριάζει καλύτερα αν το εύρος των χειμερινών αιχμών **αυξάνεται** με την πάροδο των ετών; Αιτιολογήστε.

Λύση:

- α)**
- **Τάση (T):** Σταδιακή αύξηση των εισαγωγών με την πάροδο του χρόνου, π.χ. λόγω γήρανσης πληθυσμού.
 - **Κυκλική (C):** Μεταβολές που σχετίζονται με οικονομικούς κύκλους ή επιδημίες με πολυετή περίοδο.

- **Εποχική** (S): Αύξηση εισαγωγών το χειμώνα (γρίπη, κρύο) και μείωση το καλοκαίρι – περίοδος ενός έτους.
- **Τυχαία** (I): Απρόβλεπτες ημερήσιες διακυμάνσεις, π.χ. λόγω ατυχημάτων ή τοπικών εστιών λοίμωξης.

β)

$$\hat{x}_{100} = 12 + 0.05 \cdot 100 = 12 + 5 = 17 \text{ εισαγωγές/ημέρα}$$

$$\hat{x}_{200} = 12 + 0.05 \cdot 200 = 12 + 10 = 22 \text{ εισαγωγές/ημέρα}$$

γ) Σε ένα προσθετικό μοντέλο:

$$x_t = T(t) + C(t) + S(t) + I(t)$$

Η διαφορά $x_{100} - \hat{x}_{100} = 20 - 17 = 3$ εκφράζει την αθροιστική επίδραση της κυκλικής, εποχικής και τυχαίας συνιστώσας στη χρονική στιγμή $t = 100$.

δ) Το **πολλαπλασιαστικό** μοντέλο ταιριάζει καλύτερα. Αν το εύρος των εποχικών αιχμών αυξάνεται ανάλογα με την τάση, τότε η εποχική συνιστώσα δεν είναι σταθερή αλλά «κλιμακώνεται» με το γενικό επίπεδο της ΧΣ – ακριβώς η περίπτωση που περιγράφει το πολλαπλασιαστικό υπόδειγμα $x_t = T \cdot C \cdot S \cdot I$.

4. Ανάλυση Χρονοσειρών II — Εξομάλυνση και Πρόβλεψη

Ερωτήσεις Πολ/λης Επιλογής

1. Ποιος είναι ο κύριος σκοπός της εξομάλυνσης (smoothing) μιας χρονοσειράς;

- Η αύξηση της τυχαίας συνιστώσας Η μείωση της τυχαίας μεταβλητότητας για να αναδειχθούν οι άλλες συστατικές
 Η κατάργηση της τάσης Η αύξηση του αριθμού των παρατηρήσεων

2. Ο κινητός μέσος $k = 3$ μιας ΧΣ υπολογίζεται για τη χρονική στιγμή t ως:

- $\frac{x_t + x_{t+1} + x_{t+2}}{3}$ $\frac{x_{t-1} + x_t + x_{t+1}}{3}$
 $\frac{x_{t-2} + x_{t-1} + x_t}{3}$ $\frac{x_t + x_{t+3}}{2}$

3. Ποιο μειονέκτημα έχει ο κινητός μέσος;

- Δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε ΧΣ με τάση Οδηγεί σε απώλεια δεδομένων στα άκρα της ΧΣ
 Δεν αφαιρεί την τυχαία συνιστώσα Απαιτεί κανονική κατανομή

4. Αν ο συντελεστής εξομάλυνσης $\alpha = 0.1$ στην απλή εκθετική εξομάλυνση, ποια είναι η επίδραση;

- Μεγάλη εξομάλυνση, γρήγορη ανταπόκριση σε αλλαγές Καμία εξομάλυνση
 Μεγάλη εξομάλυνση, αργή ανταπόκριση σε αλλαγές Η τρέχουσα τιμή αγνοείται εντελώς

5. Ποια είναι η εξίσωση της απλής εκθετικής εξομάλυνσης;

- $s_t = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} x_{t-i}$ $s_t = \alpha \cdot x_t + (1 - \alpha) \cdot s_{t-1}$
 $s_t = \alpha \cdot x_t - (1 - \alpha) \cdot s_{t-1}$ $s_t = x_t + \alpha \cdot s_{t-1}$

6. Τι ισχύει για $\alpha = 1$ στην εκθετική εξομάλυνση;

- Η εξομαλυμένη τιμή είναι ο μέσος όλων των τιμών Λαμβάνεται υπόψη μόνο η τρέχουσα τιμή, οι προηγούμενες αγνοούνται
 Η εξομάλυνση είναι μέγιστη Η τάση αγνοείται

7. Για ποιον τύπο ΧΣ προτείνεται η **διπλή** εκθετική εξομάλυνση;

- ΧΣ με τάση ΧΣ εντελώς τυχαία
 ΧΣ με ισχυρή εποχικότητα ΧΣ χωρίς τάση και εποχικότητα

8. Τι εκφράζει η αυτοσυσχέτιση (autocorrelation) με καθυστέρηση (lag) $k = 1$ σε μια ΧΣ;

- Τη συσχέτιση μεταξύ διαδοχικών τιμών x_t και x_{t-1} Τη συσχέτιση μεταξύ δύο διαφορετικών ΧΣ
 Τη συσχέτιση μεταξύ τιμών που απέχουν k έτη Τη διακύμανση της ΧΣ

9. Ποιο από τα παρακάτω **πλεονεκτητά** η εκθετική εξομάλυνση έναντι του κινητού μέσου;

- Λαμβάνει υπόψη όλες τις προηγούμενες τιμές με φθίνουσα βαρύτητα Δεν χρειάζεται αρχική τιμή
 Δεν έχει παραμέτρους Προσθέτει παρατηρήσεις στην ΧΣ

10. Αν ο κινητός μέσος υπολογίζεται με $k = 12$ σε μηνιαία δεδομένα, ποιο στόχο εξυπηρετεί;

- Ενίσχυση της τυχαίας συνιστώσας Εξάλειψη της εποχικότητας ετήσιου κύκλου
 Εύρεση της κυκλικής συνιστώσας Υπολογισμός της τάσης χωρίς εποχικότητα

11. Αν η αυτοσυσχέτιση σε $\text{lag} = 12$ είναι μεγάλη σε μηνιαία δεδομένα, τι συνεπάγεται ;
 Δεν υπάρχει εποχικότητα Κάθε μηνιαία τιμή είναι ισχυρά συσχετισμένη με την τιμή του ίδιου μήνα
 Η τυχαία συνιστώσα κυριαρχεί Η ΧΣ είναι στάσιμη
12. Ποια τιμή του α δίνει τη **μεγαλύτερη** εξομάλυνση ;
 $\alpha = 0.05$ $\alpha = 0.3$ $\alpha = 0.7$ $\alpha = 1.0$
13. Γιατί ο κινητός μέσος είναι ευαίσθητος σε ακραίες τιμές (outliers);
 Επειδή δίνει μεγαλύτερο βάρος στις παλαιές τιμές Επειδή κάθε τιμή εντός του παραθύρου k συμμετέχει
 Επειδή αγνοεί τις παλαιές τιμές Επειδή χρησιμοποιεί εκθετικές βαρύτητες
14. Τι είναι η διπλή εκθετική εξομάλυνση (Holt's method);
 Εφαρμογή απλής εκθετικής εξομάλυνσης δύο φορές Μέθοδος που εκτιμά ταυτόχρονα το επίπεδο και την κλίση
 Κινητός μέσος με $k = 2$ Εξομάλυνση με δύο διαφορετικές τιμές α
15. Τι δείχνει το γράφημα αυτοσυσχετίσεων (ACF plot) μιας ΧΣ ;
 Τη γραμμική τάση της ΧΣ Τη συσχέτιση μεταξύ τιμών της ΧΣ σε διάφορες χρονικές καθυστερήσεις
 Την εποχική συνιστώσα μόνο Την κατανομή των τιμών

Ασκήσεις

Άσκηση 1. Ο ημερήσιος αριθμός εισαγωγών ηλικιωμένων σε ένα νοσοκομείο για τις πρώτες 8 ημέρες είναι:

Ημέρα t	1	2	3	4	5	6	7	8
Εισαγωγές x_t	8	17	15	21	8	9	17	19

- α)** Υπολογίστε τον κινητό μέσο $k = 3$ για τις χρονικές στιγμές $t = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ (κεντρικός κινητός μέσος).
β) Εφαρμόστε απλή εκθετική εξομάλυνση με $\alpha = 0.5$, δίνοντας $s_1 = x_1 = 8$. Υπολογίστε s_2, s_3, s_4 .
γ) Συγκρίνετε τις εξομαλυμένες τιμές για $t = 4$: κινητός μέσος έναντι εκθετικής εξομάλυνσης. Ποια πλησιάζει περισσότερο την πραγματική τιμή $x_4 = 21$;
δ) Γιατί ο κινητός μέσος $k = 3$ δεν μπορεί να υπολογιστεί για $t = 1$ και $t = 8$;

Λύση:

α) Κεντρικός κινητός μέσος $k = 3$: $MA_t = \frac{x_{t-1} + x_t + x_{t+1}}{3}$

$$MA_2 = \frac{8 + 17 + 15}{3} = \frac{40}{3} \approx 13.33$$

$$MA_3 = \frac{17 + 15 + 21}{3} = \frac{53}{3} \approx 17.67$$

$$MA_4 = \frac{15 + 21 + 8}{3} = \frac{44}{3} \approx 14.67$$

$$MA_5 = \frac{21 + 8 + 9}{3} = \frac{38}{3} \approx 12.67$$

$$MA_6 = \frac{8 + 9 + 17}{3} = \frac{34}{3} \approx 11.33$$

$$MA_7 = \frac{9 + 17 + 19}{3} = \frac{45}{3} = 15.00$$

β) Εκθετική εξομάλυνση με $\alpha = 0.5$, $s_1 = 8$:

$$s_2 = 0.5 \cdot 17 + 0.5 \cdot 8 = 8.5 + 4 = 12.50$$

$$s_3 = 0.5 \cdot 15 + 0.5 \cdot 12.50 = 7.5 + 6.25 = 13.75$$

$$s_4 = 0.5 \cdot 21 + 0.5 \cdot 13.75 = 10.5 + 6.875 = 17.375$$

γ) Για $t = 4$: κινητός μέσος $MA_4 \approx 14.67$, εκθετική εξομάλυνση $s_4 \approx 17.38$. Η πραγματική τιμή είναι $x_4 = 21$. Η εκθετική εξομάλυνση (17.38) πλησιάζει περισσότερο την πραγματική τιμή σε αυτή την περίπτωση, καθώς αποδίδει μεγαλύτερο βάρος στις πρόσφατες τιμές.

δ) Ο κεντρικός κινητός μέσος $k = 3$ για το $t = 1$ απαιτεί την τιμή x_0 , η οποία δεν υπάρχει στα δεδομένα. Αντίστοιχα, για $t = 8$ απαιτείται x_9 που επίσης δεν υπάρχει. Αυτό αποτελεί τη χαρακτηριστική «απώλεια δεδομένων» στα άκρα της ΧΣ κατά τη χρήση κινητού μέσου.

Άσκηση 2. Τα ετήσια έσοδα (σε εκατ. €) μιας εταιρείας για τα έτη 2018–2024 είναι:

Έτος	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
t	1	2	3	4	5	6	7
Έσοδα x_t	42	45	41	48	52	50	56

- α)** Εφαρμόστε απλή εκθετική εξομάλυνση με $\alpha = 0.3$, θέτοντας $s_1 = x_1 = 42$. Υπολογίστε s_2, s_3, s_4, s_5 .
- β)** Επαναλάβετε για $\alpha = 0.7$. Υπολογίστε s_2, s_3, s_4, s_5 .
- γ)** Συγκρίνετε τα αποτελέσματα των δύο τιμών του α . Ποια τιμή αποκρίνεται ταχύτερα στη ξαφνική αύξηση των εσόδων σε $t = 4$ (2021);
- δ)** Η εταιρεία θέλει πρόβλεψη για το 2025 ($t = 8$). Δεδομένης της τάσης, ποια μέθοδος (απλή ή διπλή εκθετική εξομάλυνση) θεωρείτε καταλληλότερη; Αιτιολογήστε.

Λύση:

- α)** Απλή εκθετική εξομάλυνση, $\alpha = 0.3$, $s_1 = 42$:

$$s_2 = 0.3 \cdot 45 + 0.7 \cdot 42 = 13.5 + 29.4 = 42.9$$

$$s_3 = 0.3 \cdot 41 + 0.7 \cdot 42.9 = 12.3 + 30.03 = 42.33$$

$$s_4 = 0.3 \cdot 48 + 0.7 \cdot 42.33 = 14.4 + 29.63 = 44.03$$

$$s_5 = 0.3 \cdot 52 + 0.7 \cdot 44.03 = 15.6 + 30.82 = 46.42$$

- β)** Απλή εκθετική εξομάλυνση, $\alpha = 0.7$, $s_1 = 42$:

$$s_2 = 0.7 \cdot 45 + 0.3 \cdot 42 = 31.5 + 12.6 = 44.1$$

$$s_3 = 0.7 \cdot 41 + 0.3 \cdot 44.1 = 28.7 + 13.23 = 41.93$$

$$s_4 = 0.7 \cdot 48 + 0.3 \cdot 41.93 = 33.6 + 12.58 = 46.18$$

$$s_5 = 0.7 \cdot 52 + 0.3 \cdot 46.18 = 36.4 + 13.85 = 50.25$$

- γ)** Για $t = 4$ ($x_4 = 48$): με $\alpha = 0.3$ έχουμε $s_4 = 44.03$, ενώ με $\alpha = 0.7$ έχουμε $s_4 = 46.18$. Η τιμή $\alpha = 0.7$ αποκρίνεται ταχύτερα (46.18 έναντι 44.03), πλησιάζοντας περισσότερο την πραγματική τιμή 48. Αυτό είναι αναμενόμενο: μεγαλύτερο α αποδίδει μεγαλύτερο βάρος στην τρέχουσα παρατήρηση.

- δ)** Για πρόβλεψη με τάση προτείνεται η **διπλή εκθετική εξομάλυνση** (Holt's method). Η απλή εκθετική εξομάλυνση εκτιμά μόνο το επίπεδο της ΧΣ και παράγει «επίπεδες» προβλέψεις, υποεκτιμώντας συστηματικά μια ανοδική τάση. Η διπλή εξομάλυνση εκτιμά ταυτόχρονα επίπεδο **και** τάση, παράγοντας προβλέψεις που ακολουθούν την κατεύθυνση της ΧΣ.