

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ: ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΙΚΕΣ

I. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1. Γραμμικότητα

Μιά και τό κύριο θέμα μας από δῶ καί πέρα θάναί ἡ μελέτη καί ἐπίλυση τῶν γραμμικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων μέ μεταβλητούς —ἐν γένει— συντελεστές, ἄς ἀρχίσουμε αὐτό τό πρῶτο σχετικό κεφάλαιο μέ μιά σύντομη ἀναδρομή στήν ἔννοια τῆς γραμμικότητας καί τή σημασία της.

Ἡ γενική μορφή μιᾶς γραμμικῆς διαφορικῆς ἐξίσωσης νιοστῆς τάξης εἶναι

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y(x) = R(x) \quad (1)$$

ἢ συμβολικά

$$Ly = R \quad (2)$$

ὅπου

$$L = a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_0(x) \quad (3)$$

εἶναι ὁ διαφορικός τελεστής τῆς ἐξίσωσης, τοῦ ὁποῖου ἡ δράση πάνω στήν ἄγνωστη συνάρτηση y πρέπει νά μᾶς δίνει τή δεδομένη συνάρτηση R .

Ὅπως θά δεῖξομε σε λίγο ἡ μὴ ὁμογενής ἐξίσωση (2) μπορεῖ πάντα νά λυθεῖ ἂν εἶναι γνωστές οἱ λύσεις τῆς ἀντίστοιχης ὁμογενοῦς

$$Ly = 0 \quad (4)$$

μέ τή λύση τῆς ὁποίας θά ἀσχοληθοῦμε σχεδόν στό μεγαλύτερο μέρος αὐτοῦ τοῦ βιβλίου, ξέροντας ὅτι ἔτσι λύνομε ταυτόχρονα καί τήν μὴ ὁμογενή τῆς μορφή (2).

Τό θεμελιώδες χαρακτηριστικό της γραμμικής και όμογενοῦς ἐξίσωσης (4) —στό όποιο όφείλεται καί ἡ σπουδαιότητά της— εἶναι ὅτι, *ένας τυχόν γραμμικός συνδυασμός λύσεων ἀποτελεῖ πάλι λύση*. Αὐτό ἀπορρέει ἀπό τό γεγονός ὅτι ὁ διαφορικός τελεστής (3) περιέχει μόνο τή μεταβλητή x καί τήν πράξη τῆς παραγωγίσης καί εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τίς συναρτήσεις πάνω στίς ὁποῖες δρᾷ. Θᾶναι, ἐπομένως, ἕνας *γραμμικός τελεστής* τό όποιο σημαίνει ὅτι ἡ δράση του πάνω σ' ἕνα γραμμικό συνδυασμό συναρτήσεων μεταφέρεται σέ κάθε μία ἀπό τίς συναρτήσεις τοῦ συνδυασμοῦ χωριστά. Θᾶχομε λοιπόν

$$L(c_1 y_1 + \dots + c_n y_n) = c_1 (Ly_1) + \dots + c_n (Ly_n)$$

ὁπότε ἂν οἱ συναρτήσεις y_i ($i = 1, \dots, n$) εἶναι λύσεις τῆς (4) τό ἴδιο θά ἰσχύει προφανῶς καί γιά τόν τυχόντα γραμμικό τους συνδυασμό $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$.

Αὐτή ἡ δυνατότητα *υπερθέσης* τῶν λύσεων παύει νά ὑφίσταται ὅταν ἡ ἐξίσωση εἶναι μή γραμμική, ὅπως π.χ. ἡ

$$yy'' + xy' + y^2 = 0 \quad (5)$$

ὅπου ἡ γραμμικότητα ἔχει καταστραφεῖ ἀπό τήν παρουσία τῶν ὄρων yy'' καί y^2 . Καί ἡ (5) βεβαίως μπορεῖ νά γραφεῖ στή συμβολική μορφή $Ly = 0$ μόνο πού τώρα ἡ ἔκφραση τοῦ σχετικοῦ τελεστή

$$L = y \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + y$$

περιέχει καί τήν ἄγνωστη συνάρτηση $y(x)$. Καί αὐτή ἀκριβῶς ἡ ἐξάρτηση τοῦ L ἀπό τή συνάρτηση πάνω στήν ὁποία δρᾷ εἶναι πού καταστρέφει τή γραμμικότητα τῆς ἀντίστοιχης ἐξίσωσης, καί κάνει ἀδύνατη τήν *υπερθέση* τῶν λύσεών της.

Ἡ γραμμικότητα τοῦ διαφορικοῦ τελεστή L εἶναι ἐπίσης σημαντική καί στήν περίπτωση τῆς μή ὁμογενοῦς ἐξίσωσης $Ly = R$. Παραδείγματος χάρη, ἀπό τή γραμμικότητα καί μόνο τοῦ L ἔπεται ἀμέσως ὅτι:

Ἡ γενική λύση τῆς μή ὁμογενοῦς ἐξίσωσης ἰσοῦται μέ τή γενική λύση τῆς ὁμογενοῦς σύν μιά ὁποιαδήποτε μερική λύση τῆς πλήρους ἐξίσωσης.

Θᾶναι δηλαδή

$$y = y_0 + y_p \quad (6)$$

ὅπου y_0 ἡ γενική λύση τῆς ὁμογενοῦς καί y_p ἡ θεωρούμενη ὡς γνωστή μερική λύση τῆς πλήρους. Πράγματι δρώντας στά δύο μέλη τῆς (6) μέ τόν τελεστή L τῆς ἐξίσωσης, παίρνομε

$$Ly = L(y_0 + y_p) = Ly_0 + Ly_p = 0 + R = R$$

τό όποιο σημαίνει ὅτι ἡ (6) εἶναι λύση τῆς μή ὁμογενοῦς ἐξίσωσης $Ly = R$. Ἐπιπλέον εἶναι καί ἡ γενική της λύση διότι περιέχει —μέσω τῆς γενικῆς λύσης y_0 τῆς ὁμογενοῦς— τό ἀναγκαῖο πλῆθος αὐθαίρετων σταθερῶν.

Μιά τελευταία σημαντική συνέπεια τῆς γραμμικότητας περιέχεται στήν ἀκόλουθη πρόταση.

Ἐάν ὁ μὴ ὁμογενὴς ὅρος εἶναι μιὰ ἐπαλληλία μερικῶν ὅρων, τότε ἡ λύση θὰ εἶναι ἐπίσης ἐπαλληλία τῶν ἀντίστοιχων μερικῶν λύσεων. Πράγματι, ἂν οἱ $y_1, \dots, y_n$ ἱκανοποιοῦν τὴν

$$Ly_1 = R_1, \dots, Ly_n = R_n$$

τότε ἡ $y = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ θὰ ἱκανοποιεῖ τὴν

$$Ly = L(y_1 + \dots + y_n) = Ly_1 + \dots + Ly_n = R_1 + R_2 + \dots + R_n = R$$

Ἡ φυσικὴ σημασία αὐτοῦ τοῦ ἀποτελέσματος δὲν πρέπει νὰ περάσει ἀπαράτηρη. Στὶς ἐφαρμογές, ὁ μὴ ὁμογενὴς ὅρος —ὁ «ὄρος πηγῆς» ὅπως ἀποκαλεῖται— ἀποτελεῖ, κατὰ κάποιον τρόπο, τὸ «αἷτιο», ἐνῶ ἡ λύση τὸ «ἀποτέλεσμα». Σκεφτεῖτε παραδείγματος χάρη τὴν ἐξίσωση Poisson $\nabla^2 \varphi = \rho$ τοῦ ἠλεκτροστατικού πεδίου ὅπου ὁ «ὄρος πηγῆς» —τὸ «αἷτιο»— εἶναι ἡ πυκνότητα ἠλεκτρικοῦ φορτίου, καὶ «ἀποτέλεσμα» τὸ ἠλεκτροστατικὸ δυναμικὸ $\varphi(\mathbf{r})$. Ἡ, ἀκόμα, τὴν περίπτωση ἑνὸς ἠλεκτρικοῦ κυκλώματος ὅπου οἱ μὴ ὁμογενεῖς ὅροι τοῦ γραμμικοῦ διαφορικοῦ συστήματος, πού περιγράφει τὴ λειτουργία του, εἶναι οἱ ἐπιβεβλημένες ἠλεκτρεγερτικὲς δυνάμεις, καὶ ἡ λύση, οἱ τάσεις ἢ τὰ ρεύματα πού κυκλοφοροῦν στὰ στοιχεῖα του. Τὸ κοινὸ χαρακτηριστικὸ αὐτῶν τῶν συστημάτων εἶναι ἡ γραμμικὴ σχέση αἰτίου ἀποτελέσματος, ἡ ὁποία ἐκφράζεται ἀπλὰ μὲ τὴν πρόταση ὅτι:

Στὸ ἄθροισμα τῶν αἰτίων ἀντιστοιχεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποτελεσμάτων πού δὲν εἶναι παρά ἡ διατύπωση σὲ φυσικὴ γλώσσα τῆς ἰδιότητος πού δεῖξαμε προηγουμένως.

► **Παράδειγμα 1:** Ξεχωρίστε τὶς γραμμικὲς ἀπὸ τὶς μὴ γραμμικὲς ἐξισώσεις τοῦ ἀκόλουθου καταλόγου

$$(\alpha) \quad y'' + y = \sin x$$

$$(\gamma) \quad y''' - x^2 y = 0$$

$$(\beta) \quad y'' + y = \sin y$$

$$(\delta) \quad y''' - xy^2 = 0$$

Ἀπάντηση: (α): Γραμμικὴ, μὴ ὁμογενὴς (β): Μὴ γραμμικὴ (γ): Γραμμικὴ ὁμογενὴς (δ): Μὴ γραμμικὴ ◀

► **Παράδειγμα 2:** Γράψτε τοὺς διαφορικοὺς τελεστές τῶν ἀκόλουθων γραμμικῶν ἐξισώσεων

$$(\alpha) \quad y'' - 2y' + y = 0$$

$$(\gamma) \quad y''' - y'' + y' + y = \cos x$$

$$(\beta) \quad y'' - 2xy' + \lambda y = x$$

$$(\delta) \quad y''' - xy = e^x$$

Λύση: Γιὰ τὴν ἐξίσωση (α) θᾶχομε:

$$y'' - 2y' + y = \left(\frac{d^2}{dx^2} - 2 \frac{d}{dx} + 1 \right) y = 0$$

καὶ ἐπομένως ὁ διαφορικός της τελεστής θάναί

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - 2 \frac{d}{dx} + 1 = D^2 - 2D + 1$$

όπου $D = d/dx$ ο τελεστής της παραγώγισης. Παρόμοια για την εξίσωση (β) θα έχουμε

$$y'' - 2xy' + \lambda y = \left(\frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + \lambda \right) y = x$$

ή συμβολικά

$$Ly = x \quad \text{μέ} \quad L = D^2 - 2xD + \lambda$$

Τέλος, για τις (γ) και (δ) θα είναι

$$(γ) \quad Ly = \cos x \quad \text{μέ} \quad L = D^3 - D^2 + D + 1$$

$$(δ) \quad Ly = e^x \quad \text{μέ} \quad L = D^4 - x$$

Ο διαφορικός τελεστής L της εξίσωσης είναι προφανώς ανεξάρτητος από την ύπαρξη, ή τη συγκεκριμένη μορφή του μή ομογενοῦς ὄρου. ◀

► **Παράδειγμα 3:** Ἀποδείξτε ὅτι, ἂν οἱ συναρτήσεις y_1, y_2 ἱκανοποιοῦν τίς ἐξισώσεις

$$Ly_1 = R_1 \quad \text{καί} \quad Ly_2 = R_2$$

ὅπου L ἕνας τυχόν γραμμικός διαφορικός τελεστής, τότε ἡ ἐξίσωση $Ly = c_1 R_1 + c_2 R_2$ θά ἱκανοποιεῖται ἀπὸ τὴν $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Ἀπόδειξη: Λόγω τῆς γραμμικότητας τοῦ L ἡ δράση του πάνω στὸν γραμμικὸ συνδυασμὸ $c_1 y_1 + c_2 y_2$ θά μεταφέρεται σέ κάθε μιά ἀπὸ τίς συναρτήσεις του χωριστά. Θαῦται δηλαδή

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 (Ly_1) + c_2 (Ly_2)$$

Εἶναι ὅμως, ἐξ ὑποθέσεως, $Ly_1 = R_1, Ly_2 = R_2$. Ἐπομένως

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 R_1 + c_2 R_2 \quad \text{ὁ.ἔ.δ.} \quad \blacktriangleleft$$

2. Γραμμικὴ ἀνεξαρτησία καὶ ἐξάρτηση

Ὅρισμός: Οἱ n συναρτήσεις $y_1, y_2, \dots, y_n$ θά ὀνομάζονται γραμμικά ἀνεξάρτητες ἂν καμμιά ἀπ' αὐτές δέν μπορεῖ νά γραφεῖ σάν γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν ὑπόλοιπων. Ἀλλοιῶτα θά ὀνομάζονται γραμμικά ἐξαρτημένες.

Σύμφωνα μ' αὐτὸ τὸν ὁρισμὸ, ἂν οἱ συναρτήσεις $y_1, \dots, y_n$ εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητες τότε μιά σχέση τῆς μορφῆς

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0 \quad (1)$$

και

$$W(1, \cos^2 x, \cos 2x) = \det \begin{pmatrix} 1 & \cos^2 x & \cos 2x \\ 0 & -\sin 2x & -2\sin 2x \\ 0 & -2\cos 2x & -4\cos 2x \end{pmatrix} = 0$$

Ο απλούστερος τρόπος υπολογισμού των οριζουσών είναι να τις αναπτύξετε ως προς την πρώτη στήλη που έχει μόνο ένα μη μηδενικό στοιχείο. Τό γεγονός ότι η τελευταία Βρονσκιανή βγήκε μηδέν δέν αποτελεί, φυσικά, έκπληξη. Οι τρεις συναρτήσεις $1, \cos^2 x, \cos 2x$ είναι γραμμικά εξαρτημένες αφού ισχύει η γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

Είναι δηλαδή

$$y_3 = 2y_2 - y_1$$

Προβλήματα

1. Ποιές από τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις είναι γραμμικές και ποιές όχι;

(α) $y'' + y' + y = 0$

(δ) $y'' = y^3$

(β) $xy''' + y'' + y = \sin x$

(ε) $y'' = x^3 + y$

(γ) $y'' + xy^2 = 0$

(στ) $y''' = y'' + \sin y$

Ποιές από τις γραμμικές είναι ομογενείς και ποιές μη ομογενείς;

2. Η εξίσωση $y' + y^2 = 1$ ικανοποιείται από τις συναρτήσεις

$$y_1 = \tanh x \quad \text{και} \quad y_2 = \cotanh x = \frac{1}{\tanh x}$$

όχι όμως και από ένα τυχόντα γραμμικό τους συνδυασμό. Γιατί;

3. Υπολογίστε την Βρονσκιανή για τα ακόλουθα ζεύγη συναρτήσεων

(α) $\cosh x, \sinh x$

(γ) $\cos^2 x, 1 + \cos 2x$

(β) $\cos x, \sin x$

(δ) $\sin x \cos x, \sin 2x$

και εξηγήστε τον λόγο μηδενισμού της για όρισμένα απ' αυτά.

4. Δείξτε ότι η Βρονσκιανή δύο γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της εξίσωσης

$$y'' + Q(x)y = 0$$

είναι πάντα —δηλαδή για κάθε $Q(x)$ — μιά σταθερά. Στο φώς αυτού του αποτελέσματος τί έχετε να πείτε για τις περιπτώσεις (α) και (β) του προηγούμενου προβλήματος;

5. Ἡ μέθοδος λύσης τῶν γραμμικῶν καὶ ὁμογενῶν ἐξισώσεων μέ σταθεροῦς συντελεστές εἶναι βέβαια γνωστή στὸν ἀναγνώστη ἀπὸ τὴ σύντομη σχετικὴ εἰσαγωγή τοῦ τρίτου κεφαλαίου. Ὅπως θυμᾶστε, ἡ λύση ἔχει πάντα τὴ μορφή ἑνός ἐκθετικοῦ $y = e^{\rho x}$ ὅπου τὸ ρ ὑπολογίζεται ἀπὸ τὴν «χαρακτηριστικὴ ἐξίσωση» ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀντικατάσταση τοῦ ἐκθετικοῦ στὴν δεδομένη διαφορικὴ ἐξίσωση. Γιά ἐπανάληψη λύστε τίς ἀκόλουθες διαφορικὲς ἐξισώσεις.

$$(\alpha) \quad y'' - y = 0$$

$$(\beta) \quad y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$(\gamma) \quad y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

$$(\delta) \quad y''' - y = 0$$

Στὴν περίπτωση μιγαδικοῦ ρ ($\rho = \alpha + i\beta$) μπορούμε νά πάρουμε πραγματικὲς λύσεις χρησιμοποιώντας τὸ γνωστὸ τύπο

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

6. Νά λυθοῦν οἱ ἀκόλουθες διαφορικὲς ἐξισώσεις μέ τίς παρατιθέμενες ἀρχικὲς συνθήκες

$$(\alpha) \quad y'' + y = 0$$

$$(\beta) \quad y'' - y = 0$$

$$(\gamma) \quad y'' + y' - 2y = 0$$

$$(\delta) \quad y''' - y = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$y(0) = \alpha$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

$$y'(0) = \beta$$

$$y'(0) = 1$$

Ὑπάρχει κάποιο σκόπιμο λάθος σ' ἓνα ἀπ' αὐτὰ τὰ προβλήματα. Βρεῖτε το.

7. Γράψτε τὴ γενικὴ λύση γιά τίς ἀκόλουθες μὴ ὁμογενεῖς ἐξισώσεις μέ σταθεροῦς συντελεστές

$$(\alpha) \quad y'' - y = e^{2x}$$

$$(\beta) \quad y'' + y = e^x$$

$$(\gamma) \quad y'' - y = e^{2x} + e^{-2x}$$

$$(\delta) \quad y'' + y = e^x + e^{-x}$$

Σημείωση: Ὅταν ὁ μὴ ὁμογενὴς ὅρος μιᾶς γραμμικῆς ἐξίσωσης μέ σταθεροῦς συντελεστές, ἔχει τὴ μορφή $R = e^{\lambda x}$ τότε ἡ ζητούμενη εἰδικὴ λύση τῆς μὴ ὁμογενοῦς θάχει ἐπίσης τὴ μορφή $y = Ae^{\lambda x}$ ὅπου ἡ σταθερά A ὑπολογίζεται μέ κατ' εὐθείαν ἀντικατάσταση στὴν ἐξίσωση.

II. ΓΕΝΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ

1. Η Βρονσκιανή και οι χρήσεις της

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, η Βρονσκιανή είναι μία πολύ χρήσιμη ποσότητα γιατί ο μηδενισμός της ή μή αποτελεί τό κριτήριο της γραμμικής εξάρτησης ή ανεξαρτησίας μιάς δεδομένης νιάδας συναρτήσεων.

Σ' αυτή την παράγραφο θά δοϋμε καί μερικές άλλες χρήσεις της Βρονσκιανής πού την αναδεικνύουν σ' ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο. Καί πρώτ' απ' όλα θά δείξομε ότι, γιά μιά δευτεροτάξια εξίσωση γραμμένη στή γνωστή μας τυπική μορφή

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1)$$

ή Βρονσκιανή δύο γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων y_1 καί y_2

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \quad (2)$$

μπορεί νά υπολογιστεί κατ' εϋθείαν από τούς συντελεστές της εξίσωσης χωρίς προηγούμενη γνώση των λύσεων της. Ειδικότερα θά δείξομε ότι

$$W' = -PW$$

οπότε θάβναι καί

$$W(x) = e^{-\int P(x) dx} \quad (3)$$

*Απόδειξη: Παραγωγίζοντας την (2) παίρνομε

$$W' = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' \quad (4)$$

Όμως αφού οί y_1 καί y_2 ικανοποιούν την (1) θάβναι

$$y_1'' = -(Py_1' + Qy_1) \quad , \quad y_2'' = -(Py_2' + Qy_2)$$

οπότε ή (4) θά δώσει

$$\begin{aligned} W' &= -y_1(Py_2' + Qy_2) + y_2(Py_1' + Qy_1) \\ &= -P(y_1 y_2' - y_2 y_1') = -PW \quad (\delta. \epsilon. \delta.) \end{aligned}$$

*Υποθέστε τώρα ότι ή μία από τίς δύο λύσεις της (1) —έστω ή y_1 — είναι γνωστή. Τότε, αφού καί τό $W(x)$ είναι γνωστό, ή (2) δέν είναι παρά μιά πρωτοτάξια γραμμική διαφορική εξίσωση ως πρός y_2 ή όποία μπορεί πάντα νά ολοκληρωθεί. Μάλιστα ή ολοκλήρωση γίνεται άμέσως αν παρατηρήσομε ότι

$$\frac{W(x)}{y_1^2} = \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1} \right)'$$

τότε θα είναι

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{W(x)}{y_1^2} dx \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 \int \frac{W(x)}{y_1^2} dx \quad (5)$$

Τό γεγονός λοιπόν ότι η Βρονσκιανή μπορεί να υπολογιστεί κατ' εὐθείαν από την εξίσωση μᾶς ἐπιτρέπει να βρίσκουμε μιὰ δεύτερη λύση όταν συμβαίνει να ξέρομε ἤδη μία. Μὲ ἄλλα λόγια, ἡ γνώση μιᾶς λύσης ἐπαρκεῖ γιὰ τὴν πλήρη λύση τῆς εξίσωσης.

Ὅμως ἡ Βρονσκιανή εἶναι χρήσιμο ἐργαλεῖο καὶ γιὰ τὴ μελέτη τῆς σχέσης ἀνάμεσα στίς λύσεις δύο διαφορετικῶν εξισώσεων. Ἐστω, παραδείγματος χάρι, ὅτι οἱ συναρτήσεις y_1 καὶ y_2 εἶναι λύσεις τῶν εξισώσεων

$$y''_1 + Q_1(x)y_1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad y''_2 + Q_2(x)y_2 = 0 \quad (6)$$

τότε, με τὸν ἴδιο ὅπως καὶ πρὶν τρόπο, βρίσκουμε ὅτι

$$W' = (Q_1 - Q_2)y_1y_2 \quad (7)$$

Ἡ χρησιμότητα μιᾶς σχέσης σάν τὴν (7) θὰ φανεῖ ἀργότερα (σελ. 417) ὅταν μιλήσουμε γιὰ τὰ λεγόμενα *προβλήματα ιδιοτιμῶν*. Ὅμως γιὰ νὰ πάρετε μιὰ ἰδέα καὶ ἀπὸ τώρα, ὑποθέστε ὅτι λύνουμε τίς εξισώσεις (6) στὸ διάστημα $[a, b]$ με τὴν ἀπαιτήση οἱ λύσεις νὰ μηδενίζονται στὰ ἅκρα του. Δηλαδή

$$y_1(a) = y_1(b) = 0 \quad \text{καὶ} \quad y_2(a) = y_2(b) = 0 \quad (8)$$

Ἄν τώρα ὁλοκληρώσουμε τὴν (7) ἀπὸ a ἔως b θᾶχουμε

$$W(b) - W(a) = \int_a^b (Q_1 - Q_2)y_1y_2 dx$$

Ὅμως, λόγω τῶν (8), ἡ Βρονσκιανή

$$W(x) = y_1y'_2 - y'_1y_2$$

θὰ μηδενίζεται καὶ στὰ δύο ἅκρα τοῦ διαστήματος $[a, b]$. Θὰ ἰσχύει ἐπομένως ἡ σχέση

$$\int_a^b (Q_1 - Q_2)y_1y_2 dx = 0$$

ἡ ὁποία θὰ ἐρμηνευτεῖ ἀργότερα ὡς *σχέση ὀρθογωνιότητας* μεταξύ τῶν *ιδιοσυναρτήσεων* ἑνὸς προβλήματος ιδιοτιμῶν.

Τέλος, εἶναι πολὺ εὐκόλο νὰ δείξετε μόνοι σας —μὲ ἀπλή ἐφαρμογὴ τοῦ ὁρισμοῦ— ὅτι ἰσχύει ἡ

$$W(gy_1, gy_2) = g^2 W(y_1, y_2) \quad (9)$$

ὅπου $g = g(x)$ μιὰ αὐθαίρετη συνάρτηση. Ἡ (9) μᾶς λέει ὅτι ἡ Βρονσκιανή συμπεριφέρεται σάν μιὰ ὁμογενῆς συνάρτηση βαθμοῦ δύο, ὡς πρὸς ἓνα γραμμικό καὶ ὁμογενὲ μετασχηματισμὸ τῶν συναρτήσεων y_1, y_2 .

► **Παράδειγμα 1.** Όπως μπορείτε εύκολα να επαληθεύσετε, η εξίσωση

$$xy'' - (x+2)y' + \left(1 + \frac{2}{x}\right)y = 0 \quad (10)$$

έχει σαν μία λύση την $y_1(x) = x$. Χρησιμοποιείτε τη μέθοδο της Βρονσκιανής για να υπολογίσετε μία δεύτερη λύση.

Λύση: Όπως δείξαμε προηγουμένως, η δεύτερη λύση θα δίδεται από τον τύπο (5) όπου $W = \exp(-\int P dx)$ ή Βρονσκιανή της εξίσωσης. Για την (10) θα έχουμε $P(x) = -(x+2)/x$, και επομένως

$$W = e^{\int \frac{x+2}{x} dx} = x^2 e^x$$

Έτσι η εφαρμογή του τύπου (5) θα δώσει

$$y_2 = x \int \frac{x^2 e^x}{x^2} dx = x \int e^x dx = x e^x$$

Όπως βλέπετε, κατά τον υπολογισμό των άοριστων ολοκληρωμάτων αγνοήσαμε τις σταθερές ολοκλήρωσης. Αν τις είχαμε κρατήσει, τότε στη θέση της $y_2 = x e^x$ θα παίρναμε τη γενική λύση της εξίσωσης σαν γραμμικό συνδυασμό των y_1 και y_2 . ◀

► **Παράδειγμα 2:** Λόγω του άοριστου χαρακτήρα του ολοκληρώματος $\int P dx$ ο τύπος

$$W(x) = e^{-\int P dx} \quad (11)$$

ορίζει τη Βρονσκιανή με άπροσδιοριστία ενός πολλαπλασιαστικού παράγοντα. Γράψτε τον (11) κατά τέτοιο τρόπο που η Βρονσκιανή να παίρνει μία δεδομένη τιμή $W(x_0)$ στο τυχόν σημείο $x = x_0$.

Λύση: Θάναί

$$\int P(x) dx = \int_{x_0}^x P(x) dx + c \implies W(x) = C e^{-\int_{x_0}^x P(x) dx} \quad (12)$$

όπου $C = \exp(-c)$ μία νέα αυθαίρετη σταθερά. Θέτοντας τώρα $x = x_0$ στον (12) παίρνομε $C = W(x_0)$. Θάναί λοιπόν τελικά

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x P(x) dx} \quad \blacktriangleleft$$

Προβλήματα

1. Υπολογείτε τη Βρονσκιανή των ακόλουθων εξισώσεων

(α) $x^2 y'' - xy' + y = 0$

(γ) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$

(β) $y'' + y' + y = 0$

(δ) $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$

2. Για $\lambda = n(n+1)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) η εξίσωση του Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

διαθέτει πολυωνυμικές λύσεις, βαθμού n , γνωστές σάν *πολυώνυμα του Legendre*. (Τό σχετικό σύμβολο είναι $P_n(x)$). Όμως, για κάθε συγκεκριμένο n , εκτός από την πολυωνυμική, υπάρχει και μία δεύτερη —μή πολυωνυμική— λύση, που συμβολίζεται με $Q_n(x)$ και άκουει στο όνομα *συνάρτηση Legendre δευτέρου είδους*. Για $n=1$ τό σχετικό πολυώνυμο Legendre είναι $P_1(x) = x$. Έπαληθεύστε το και υπολογείστε κατόπιν τή δεύτερη λύση $Q_1(x)$ χρησιμοποιώντας τή μέθοδο τής Βρονσκιανής.

3. Όταν ή χαρακτηριστική εξίσωση

$$\rho^2 + a\rho + \beta = 0$$

πού προκύπτει από τήν αντικατάσταση $y = e^{\rho x}$ στη γενική δευτεροτάξια εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0$$

έχει διπλή ρίζα, τότε μόνο μία από τίς λύσεις θά έχει τήν έκθετική μορφή $e^{\rho x}$. Υπολογείστε τή δεύτερη λύση με τή μέθοδο τής Βρονσκιανής και δείξτε ότι έχει τή μορφή $x e^{\rho x}$ όπου ρ ή τιμή τής διπλής ρίζας.

4. Δείξτε ότι ή Βρονσκιανή δύο γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων y_1, y_2 τής εξίσωσης $y'' + Q(x)y = R(x)$, ικανοποιεί τή σχέση

$$W' = R(y_1 - y_2)$$

5. Δείξτε ότι ό λεγόμενος τύπος του Abel

$$W(x) = e^{-\int P(x) dx}$$

ισχύει καί για εξισώσεις ανώτερης από δεύτερη τάξης, με τήν αναμενόμενη αντικατάσταση του $P(x)$ με τόν συντελεστή τής άμέσως μετά τήν μέγιστη παραγώγου τής εξίσωσης. (Γραμμένης, βέβαια, στήν τυπική μορφή όπου ό συντελεστής τής μέγιστης παραγώγου είναι μονάδα). Συγκεκριμένα για τήν εξίσωση

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x) y^{(n-1)} + P_{n-2}(x) y^{(n-2)} + \dots + P_0(x) y = 0$$

δείξτε ότι θάναι

$$W(x) = e^{-\int P_{n-1}(x) dx}$$

Γιά «προθέρμανση» δείξτε πρώτα τό ζητούμενο για τήν τριτοτάξια εξίσωση

$$y''' + P_2(x)y'' + P_1(x)y' + P_0(x)y = 0$$

6. Αποδείξτε ότι ή Βρονσκιανή μιās τριάδας συναρτήσεων συμπεριφέρεται σάν μία όμογενής συνάρτηση βαθμού τρία ως προς ένα κοινό, γραμμικό καί όμογενή, μετασχηματισμό τών συναρτήσεων τής τριάδας. Συγκεκριμένα, δείξτε ότι ισχύει ή

$$W(gy_1, gy_2, gy_3) = g^3 W(y_1, y_2, y_3)$$