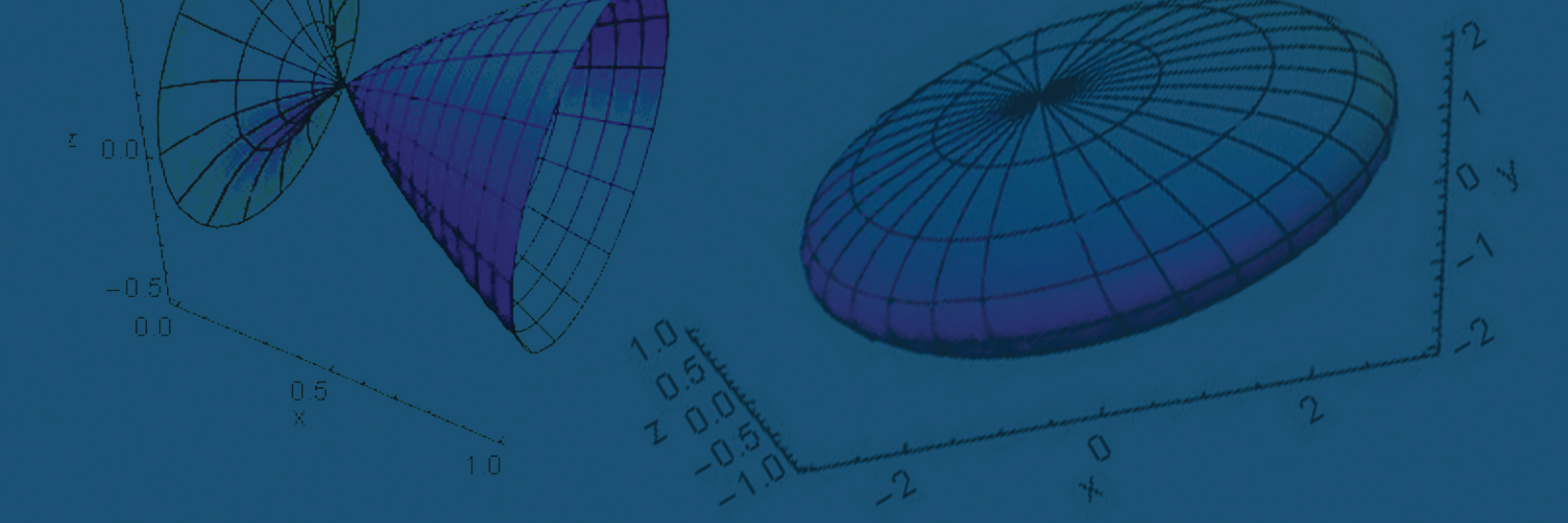


Μαθήματα Ανώτερων Μαθηματικών

ΜΠΡΑΤΣΟΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

- Διανύσματα και Αναλυτική Γεωμετρία
- Γραμμική Άλγεβρα
- Μιγαδικοί Αριθμοί και Συναρτήσεις
- Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός
- Σειρές
- Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών
- Διαφορικές Εξισώσεις
- Σειρά Fourier και Μετασχηματισμός Laplace
- Διανυσματικός Διαφορικός Λογισμός
- Πολλαπλά Ολοκληρώματα
- Επικαμπύλια και Επιφανειακά Ολοκληρώματα

Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

HEALLINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Συγγραφή
Αθανάσιος Μπράτσος
Καθηγητής

Κριτικός αναγνώστης
Ιωάννης Στρατής
Καθηγητής

Copyright © ΣΕΑΒ, 2015



Το παρόν έργο αδειοδοτείται υπό τους όρους της άδειας Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Όχι Παράγωγα Έργα 3.0.

Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου
www.kallipos.gr
ISBN: 978 – 960 – 603 – 030 – 7

Στους φοιτητές
των θετικών επιστημών

Περιεχόμενα

1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ **19**

1.1 Εισαγωγικές έννοιες 19

1.1.1 Βασικοί ορισμοί 19

1.2 Συστήματα συντεταγμένων 20

1.2.1 Ορθογώνιο σύστημα 20

1.2.2 Αλλαγές ορθογώνιου συστήματος 22

1.2.3 Πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο 25

1.2.4 Κυλινδρικές συντεταγμένες 26

1.2.5 Σφαιρικές συντεταγμένες 27

1.3 Ορισμός και Άλγεβρα διανυσμάτων 29

1.3.1 Ορισμός διανύσματος 29

1.3.2 Είδη διανυσμάτων 30

1.3.3 Ισότητα 31

1.3.4 Πρόσθεση 31

1.3.5 Πολλαπλασιασμός με πραγματικό αριθμό 31

1.3.6 Μοναδιαίο διάνυσμα 32

1.4 Συντεταγμένες διανύσματος 33

1.4.1 Διάνυσμα θέσης 33

1.4.2 Γενική μορφή 35

1.5 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων 39

1.5.1 Ορισμός και ιδιότητες 39

1.5.2 Συνθήκη καθετότητας 40

1.5.3 Υπολογισμός συναρτήσει των συντεταγμένων 40

1.5.4 Γωνία δύο διανυσμάτων 41

1.6 Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων 41
1.6.1 Ορισμός 41
1.6.2 Ιδιότητες 42
1.6.3 Υπολογισμός συναρτήσει των συντεταγμένων 43
1.7 Μεικτό γινόμενο διανυσμάτων 45
1.7.1 Ορισμός και τύπος υπολογισμού 45
1.7.2 Γεωμετρική ερμηνεία 47
1.7.3 Ιδιότητες 47
1.8 Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων 49
1.8.1 Ορισμός 49
1.8.2 Σχετικές προτάσεις 50
1.9 Βιβλιογραφία 53

2 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 55
2.1 Ευθεία 55
2.1.1 Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας 55
2.1.2 Γωνία δύο ευθειών 56
2.1.3 Ευθεία από σημείο παράλληλη προς διάνυσμα 58
2.1.4 Ευθεία από δύο σημεία 60
2.1.5 Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας στο επίπεδο 63
2.1.6 Απόσταση σημείου από ευθεία 65
2.2 Επίπεδο 67
2.2.1 Επίπεδο από σημείο και παράλληλο προς 2 διανύσματα 67
2.2.2 Επίπεδο από δύο σημεία και παράλληλο προς διάνυσμα 69
2.2.3 Επίπεδο από τρία σημεία 70
2.2.4 Γενική μορφή εξίσωσης επιπέδου 71
2.3 Κωνικές τομές 72
2.3.1 Κύκλος 72
2.3.2 Έλλειψη 74
2.3.3 Υπερβολή 79
2.3.4 Παραβολή 84
2.3.5 Γενικό πρόβλημα κωνικών τομών 86
2.4 Βιβλιογραφία 95

3 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ **97**

3.1 Ορισμός και Άλγεβρα συναρτήσεων 97

3.1.1 Ορισμοί 97

3.1.2 Ισότητα 104

3.1.3 Διάταξη 104

3.1.4 Πρόσθεση 104

3.1.5 Πολλαπλασιασμός 105

3.2 Είδη συναρτήσεων 106

3.2.1 Άρτιες και περιττές συναρτήσεις 106

3.2.2 Μονοτονία συνάρτησης 107

3.2.3 Περιοδική συνάρτηση 108

3.3 Κατηγορίες συναρτήσεων 113

3.3.1 Πολυωνυμική 113

3.3.2 Ρητή 113

3.3.3 Πεπλεγμένη 114

3.3.4 Τριγωνομετρικές 114

3.3.5 Αντίστροφες τριγωνομετρικές 116

3.3.6 Εκθετική 117

3.3.7 Λογαριθμική 118

3.3.8 Υπερβολικές 120

3.3.9 Υπερβατικές 121

3.4 Βιβλιογραφία 127

4 ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ **129**

4.1 Ορισμός και Άλγεβρα μιγαδικών αριθμών 129

4.1.1 Ορισμοί 129

4.1.2 Ισότητα 130

4.1.3 Πρόσθεση 131

4.1.4 Πολλαπλασιασμός 132

4.2 Δύναμη μιγαδικών αριθμών 134

4.2.1 Ορισμός 134

4.2.2 Ιδιότητες 134

4.3 Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί 135

4.3.1 Ορισμός . . . 135
4.3.2 Ιδιότητες . . . 136
4.3.3 Συζυγείς μιγαδικές συντεταγμένες . . . 137
4.4 Μέτρο μιγαδικών αριθμών . . . 137
4.4.1 Ορισμός . . . 137
4.4.2 Ιδιότητες . . . 138
4.5 Μορφές μιγαδικού αριθμού . . . 140
4.5.1 Τριγωνομετρική μορφή . . . 140
4.5.2 Σχετικά θεωρήματα . . . 143
4.5.3 Πολική μορφή . . . 145
4.5.4 Εκθετική μορφή . . . 146
4.6 Ρίζα μιγαδικού αριθμού . . . 147
4.6.1 Ορισμός και θεώρημα υπολογισμού . . . 147
4.6.2 Εξίσωση διωνυμική . . . 149
4.6.3 Εξίσωση 2ου βαθμού . . . 150
4.7 Λογάριθμος μιγαδικού αριθμού . . . 154
4.7.1 Ορισμός και τύπος υπολογισμού . . . 154
4.7.2 Μιγαδικές δυνάμεις . . . 155
4.8 Βιβλιογραφία . . . 159

5 ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 161
5.1 Εισαγωγή . . . 161
5.1.1 Ορισμοί . . . 161
5.1.2 Αναλυτική έκφραση . . . 163
5.2 Στοιχειώδεις μιγαδικές συναρτήσεις . . . 163
5.2.1 Πολυωνυμική . . . 163
5.2.2 Ρητή . . . 164
5.2.3 Εκθετική . . . 165
5.2.4 Όρισμα . . . 166
5.2.5 Λογαριθμική . . . 167
5.2.6 Γενίκευση εκθετικής συνάρτησης . . . 168
5.2.7 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις . . . 169
5.2.8 Υπερβολικές συναρτήσεις . . . 171

5.3 Βιβλιογραφία 173

6 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 175

6.1 Πίνακες 175
6.1.1 Ορισμοί 175
6.1.2 Αλγεβρική δομή 180
6.1.3 Δύναμη πίνακα 187
6.1.4 Πίνακες ειδικής μορφής 189
6.2 Ορίζουσες 197
6.2.1 Ορισμός 197
6.2.2 Ιδιότητες των οριζουσών 200
6.3 Αντίστροφος πίνακας 203
6.3.1 Ορισμοί 203
6.3.2 Υπολογισμός αντίστροφου πίνακα 206
6.3.3 Σχετικές προτάσεις 209
6.4 Γραμμικά συστήματα 211
6.4.1 Ορισμός 211
6.4.2 Μέθοδος του Cramer 213
6.4.3 Μέθοδος απαλοιφής του Gauss 217
6.4.4 Γραμμικά συστήματα γενικής μορφής 222
6.5 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα 225
6.5.1 Χαρακτηριστικά μεγέθη πίνακα 225
6.5.2 Υπολογισμός ιδιοτιμών 225
6.6 Βιβλιογραφία 233

7 ΟΡΙΑΚΗ ΤΙΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ 235

7.1 Γενικές έννοιες και ορισμοί 235
7.1.1 Σύγκλιση σε σημείο 235
7.1.2 Σύγκλιση στο άπειρο 245
7.1.3 Ιδιότητες συγκλινουσών συναρτήσεων 249
7.1.4 Όριο σύνθετης συνάρτησης 252
7.2 Βιβλιογραφία 255

8 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ **257**

8.1 Γενικές έννοιες και ορισμοί 257

8.1.1 Ορισμός συνέχειας 257

8.1.2 Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων 259

8.1.3 Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων 259

8.1.4 Ασυνέχεια συνάρτησης 262

8.2 Βιβλιογραφία 273

9 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ **275**

9.1 Ορισμοί και σχετικά θεωρήματα 275

9.1.1 Ορισμός παραγώγου 275

9.1.2 Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου 277

9.1.3 Διαφορικό συνάρτησης 283

9.1.4 Κανόνες παραγώγισης 284

9.1.5 Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης 286

9.1.6 Παραμετρική παράγωγος 295

9.1.7 Πεπλεγμένη παράγωγος 298

9.1.8 Υπολογισμός οριακών τιμών 299

9.1.9 Διωνυμικός συντελεστής 308

9.1.10 Τρίγωνο του Pascal - Κανόνας του Leibniz 310

9.2 Πολυώνυμα ειδικής μορφής 313

9.2.1 Πολυώνυμα Bernstein 314

9.2.2 Πολυώνυμα Hermite 319

9.2.3 Πολυώνυμα Laguerre 321

9.2.4 Πολυώνυμα Legendre 323

9.2.5 Τύποι των Taylor και Maclaurin 324

9.3 Ακρότατα και σχετικά θεωρήματα 327

9.3.1 Ακρότατα 327

9.3.2 Σχετικά θεωρήματα 329

9.4 Μελέτη συνάρτησης 332

9.4.1 Μονοτονία συνάρτησης 333

9.4.2 Υπολογισμός ακρότατων 334

9.4.3 Υπολογισμός σημείων καμπής, ασύμπτωτων ευθειών . . 338

9.5 Βιβλιογραφία 349

10 ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ 351

10.1 Εισαγωγικές έννοιες 351
10.1.1 Παράγουσα συνάρτηση 351
10.1.2 Ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος 353
10.2 Μέθοδοι ολοκλήρωσης 354
10.2.1 Ολοκλήρωση με δημιουργία του διαφορικού 354
10.2.2 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση 361
10.2.3 Παραγοντική ολοκλήρωση 363
10.2.4 Ολοκλήρωση με υποβιβασμό 371
10.2.5 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων 373
10.2.6 Ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων 378
10.2.7 Προσεγγιστικός υπολογισμός ολοκληρώματος 379
10.3 Βιβλιογραφία 383

11 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ 385

11.1 Εισαγωγικές έννοιες 385
11.1.1 Ορισμός ορισμένου ολοκληρώματος 386
11.1.2 Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος 389
11.1.3 Θεωρήματα του Ολοκληρωτικού Λογισμού 391
11.2 Υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος 392
11.2.1 Θεώρημα υπολογισμού 392
11.2.2 Τύπος υπολογισμού ορισμένου ολοκληρώματος 392
11.3 Προσέγγιση ολοκληρωμάτων ειδικής μορφής 404
11.3.1 Συνάρτηση σφάλματος 404
11.3.2 Ολοκληρώματα του Fresnel 405
11.3.3 Ημιτονικό ολοκλήρωμα 407
11.4 Γενικευμένα ολοκληρώματα 410
11.4.1 Γενικευμένα ολοκληρώματα του α' είδους 410
11.4.2 Γενικευμένα ολοκληρώματα του β' είδους 424
11.4.3 Γενικευμένα ολοκληρώματα μεικτού είδους 426
11.4.4 Συνάρτηση γάμμα 427
11.5 Εμβαδόν επίπεδου σχήματος 429

11.5.1 Ορθογώνιες συντεταγμένες 429
11.5.2 Παραμετρική εξίσωση 443
11.5.3 Πολικές συντεταγμένες 447
11.6 Εμβαδόν επιφάνειας από περιστροφή 449
11.6.1 Ορθογώνιες συντεταγμένες 449
11.6.2 Παραμετρική εξίσωση 455
11.7 Μήκος τόξου καμπύλης 464
11.7.1 Ορθογώνιες συντεταγμένες 464
11.7.2 Παραμετρική εξίσωση 474
11.7.3 Πολικές συντεταγμένες 477
11.8 Όγκος στερεών από περιστροφή 481
11.8.1 Ορθογώνιες συντεταγμένες 481
11.8.2 Παραμετρική εξίσωση 487
11.8.3 Πολικές συντεταγμένες 493
11.9 Βιβλιογραφία 499

12 ΣΕΙΡΕΣ **501**
12.1 Ακολουθίες αριθμών 501
12.1.1 Ορισμός ακολουθίας 501
12.1.2 Πράξεις μεταξύ ακολουθιών 503
12.1.3 Φραγμένη ακολουθία 504
12.1.4 Μονοτονία ακολουθίας 505
12.1.5 Ορισμός σύγκλισης ακολουθιών 508
12.1.6 Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών 511
12.1.7 Πράξεις μεταξύ συγκλινουσών ακολουθιών 512
12.1.8 Ο αριθμός e 518
12.2 Σειρές αριθμών 520
12.2.1 Ορισμός σειράς 520
12.2.2 Ορισμός σύγκλισης 523
12.2.3 Ιδιότητα σύγκλισης 525
12.3 Σύγκλιση σειράς αριθμών 525
12.3.1 Αναγκαία συνθήκη σύγκλισης 525
12.3.2 Κριτήριο σύγκρισης 526

12.3.3 Κριτήρια σύγκλισης των Cauchy και d'Alembert 527
12.4 Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων 529
12.4.1 Απλή σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων 529
12.4.2 Ομαλή σύγκλιση ακολουθιών και σειρών συναρτήσεων 534
12.4.3 Τριγωνομετρική σειρά 542
12.4.4 Δυναμοσειρές 545
12.4.5 Σειρά Taylor 550
12.5 Βιβλιογραφία 557

13 ΣΕΙΡΑ FOURIER **559**
13.1 Εισαγωγικές έννοιες 559
13.1.1 Περιοδική συνάρτηση 560
13.1.2 Ιδιότητες περιοδικών συναρτήσεων 560
13.2 Σειρά Fourier 562
13.2.1 Ορισμός της σειράς 562
13.2.2 Θεώρημα σειράς Fourier 563
13.2.3 Υπολογισμός της σειράς Fourier 564
13.2.4 Γραμμικά φάσματα 576
13.2.5 Σειρά άρτιων και περιττών συναρτήσεων 582
13.2.6 Εκθετική μορφή της σειράς Fourier 588
13.3 Μετασχηματισμός Fourier 592
13.3.1 Ορισμός 592
13.3.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier 594
13.4 Βιβλιογραφία 599

14 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ **601**
14.1 Εισαγωγικές έννοιες 601
14.1.1 Ορισμοί 601
14.1.2 Σύγκλιση συναρτήσεων δύο και τριών μεταβλητών . . 608
14.1.3 Συνέχεια συναρτήσεων δύο και τριών μεταβλητών . . . 610
14.2 Μερική παράγωγος 613
14.2.1 Ορισμοί 613
14.2.2 Υπολογισμός παραγώγων 617
14.2.3 Εφαπτόμενο επίπεδο 629

14.2.4 Η έννοια του διαφορικού 635
14.2.5 Αλυσιδωτός κανόνας παραγώγισης 637
14.3 Ακρότατα 649
14.3.1 Τοπικά ακρότατα 649
14.3.2 Μέθοδος των ελάχιστων τετραγώνων 659
14.3.3 Απόλυτα ακρότατα 668
14.3.4 Ακρότατα με συνθήκες - Μέθοδος του Lagrange 672
14.4 Βιβλιογραφία 685

15 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 687
15.1 Εισαγωγικές έννοιες 687
15.1.1 Ορισμοί και σχετικά θεωρήματα 688
15.2 Διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης 693
15.2.1 Ορισμοί 693
15.2.2 Διαφορικές εξισώσεις χωρισμένων μεταβλητών 694
15.2.3 Πλήρεις διαφορικές εξισώσεις 703
15.2.4 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις 716
15.2.5 Γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης 723
15.2.6 Διαφορική εξίσωση του Bernoulli 732
15.2.7 Διαφορική εξίσωση του Riccati 735
15.2.8 Γραμμική 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές 738
15.2.9 Εφαρμογές 743
15.3 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης 747
15.3.1 Ορισμοί 747
15.3.2 Ομογενής γραμμική με σταθερούς συντελεστές 748
15.3.3 Εφαρμογές στη Μηχανική 755
15.3.4 Εφαρμογές στον Ηλεκτρισμό 759
15.3.5 Μη ομογενής με σταθερούς συντελεστές 761
15.3.6 Εφαρμογές 777
15.4 Βιβλιογραφία 779

16 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE 781
16.1 Μετασχηματισμός Laplace 781
16.1.1 Ορισμός 781

16.1.2 Θεώρημα ύπαρξης 782
16.1.3 Ιδιότητες του μετασχηματισμού 785
16.1.4 Μετασχηματισμός περιοδικών συναρτήσεων 792
16.1.5 Συνάρτηση γάμμα 793
16.1.6 Μοναδιαία συνάρτηση του Heaviside 794
16.1.7 Συνάρτηση δέλτα του Dirac 802
16.2 Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace 807
16.2.1 Ορισμός και βασικό θεώρημα 807
16.2.2 Ιδιότητες αντίστροφου μετασχηματισμού 808
16.2.3 Μέθοδοι υπολογισμού 810
16.3 Εφαρμογές στη λύση Διαφορικών Εξισώσεων 818
16.3.1 Γραμμική 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές 818
16.3.2 Γραμμική 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές 824
16.4 Βιβλιογραφία 833

17 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 835
17.1 Εισαγωγικές έννοιες 835
17.1.1 Ορισμός διανυσματικής συνάρτησης 835
17.1.2 Οριακή τιμή 840
17.1.3 Συνέχεια 841
17.2 Παραμετρική παράσταση καμπυλών 842
17.2.1 Ορισμοί 842
17.2.2 Ευθεία 843
17.2.3 Περιφέρεια κύκλου 846
17.2.4 Έλλειψη 847
17.2.5 Παραβολή 848
17.3 Παράγωγος και ολοκλήρωση 849
17.3.1 Ορισμός παραγώγου 849
17.3.2 Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου 852
17.3.3 Κανόνες παραγώγισης 857
17.3.4 Ολοκλήρωση 860
17.4 Βιβλιογραφία 863

18 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 865
18.1 Εισαγωγή . . . 865
18.1.1 Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία . . . 865
18.2 Κατευθυνόμενη παράγωγος . . . 868
18.2.1 Εισαγωγικές έννοιες . . . 868
18.2.2 Ορισμός . . . 869
18.3 Κλίση συνάρτησης . . . 871
18.3.1 Σχετικοί ορισμοί . . . 871
18.3.2 Ιδιότητες και εφαρμογές . . . 876
18.3.3 Συντηρούμενα διανυσματικά πεδία . . . 884
18.4 Απόκλιση . . . 887
18.4.1 Ορισμός και ιδιότητες . . . 887
18.4.2 Τελεστής Laplace . . . 888
18.5 Στροβιλισμός . . . 891
18.5.1 Ορισμός και ιδιότητες . . . 891
18.5.2 Αστρόβιλα διανυσματικά πεδία . . . 892
18.6 Βιβλιογραφία . . . 895

19 ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ 897
19.1 Διπλά ολοκληρώματα . . . 897
19.1.1 Εισαγωγή . . . 897
19.1.2 Ορισμός . . . 898
19.1.3 Ιδιότητες . . . 901
19.1.4 Υπολογισμός σε καρτεσιανές συντεταγμένες . . . 903
19.1.5 Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων . . . 923
19.1.6 Υπολογισμός εμβαδών επίπεδων σχημάτων . . . 934
19.1.7 Εμβαδόν επιφάνειας . . . 937
19.1.8 Υπολογισμός μάζας . . . 938
19.1.9 Υπολογισμός όγκων . . . 945
19.2 Τριπλά ολοκληρώματα . . . 947
19.2.1 Ορισμός . . . 947
19.2.2 Ιδιότητες . . . 950
19.2.3 Μέθοδοι υπολογισμού . . . 952

19.2.4 Εφαρμογές των τριπλών ολοκληρωμάτων 958
19.3 Βιβλιογραφία 961

20 ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ 963
20.1 Επικαμπύλια ολοκληρώματα 963
20.1.1 Ορισμός σε διανυσματικό πεδίο 963
20.1.2 Τύπος υπολογισμού 966
20.1.3 Ιδιότητες 974
20.1.4 Σχέση επικαμπύλιου ολοκληρώματος και κλίσης 975
20.1.5 Ορισμός σε βαθμωτό πεδίο 983
20.1.6 Εφαρμογές 984
20.1.7 Σχέση επικαμπύλιου και διπλού ολοκληρώματος 991
20.2 Επιφανειακά ολοκληρώματα 994
20.2.1 Παραμετρικός ορισμός επιφάνειας 994
20.2.2 Θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο 997
20.2.3 Φυσική ερμηνεία και ορισμός 1004
20.2.4 Εφαρμογές επιφανειακού ολοκληρώματος 1013
20.2.5 Σχετικά θεωρήματα 1020
20.3 Βιβλιογραφία 1033

ΑΚΡΩΝΥΜΙΑ

$\mathbb{C}$	σύνολο μιγαδικών αριθμών
$\mathbb{I}$	σύνολο φανταστικών αριθμών
$\mathbb{N}$	σύνολο φυσικών αριθμών
$\mathbb{R}$	σύνολο πραγματικών αριθμών
RC	κύκλωμα RC
RL	κύκλωμα RL
RLC	κύκλωμα RLC
ΜΔΕ	μερική διαφορική εξίσωση
ΣΔΕ	συνήθης διαφορική εξίσωση

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα μαθήματα αυτά προορίζονται για τους φοιτητές της Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης. Αποτελούνται από είκοσι κεφάλαια, στα οποία αναλύονται όλες οι απαραίτητες έννοιες των Ανώτερων Μαθηματικών, ενώ δίνονται σε κάθε μάθημα αναλυτικές λύσεις έτσι ώστε να γίνει κατανοητή η θεωρία του μαθήματος και η σχετική βιβλιογραφία.

Ο συγγραφέας θεωρεί υποχρέωσή του στο σημείο αυτό να εκφράσει τις θερμές του ευχαριστίες προς όλους όσοι τον βοήθησαν στη συγγραφή των μαθημάτων αυτών και ειδικότερα τον κ. Ι. Στρατή, Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών, για τις παρατηρήσεις του στα διάφορα επιμέρους μαθήματα που βοήθησαν στη βελτίωσή των.

Σεπτέμβριος 2015

Α. Μπράτσος

Μάθημα 1

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1.1 Εισαγωγικές έννοιες

Στο μάθημα αυτό θα δοθούν τα κυριότερα στοιχεία των διανυσμάτων, που είναι απαραίτητα για την κατανόηση των επόμενων μαθημάτων. Ο αναγνώστης, για μια πληρέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4] στο τέλος του μαθήματος.

1.1.1 Βασικοί ορισμοί

Ορισμός 1.1.1 - 1. *Λέγεται προσανατολισμένη ευθεία ή άξονας μια ευθεία, έστω ε, στην οποία έχει οριστεί ένα σταθερό σημείο O, ένα ευθύγραμμο τμήμα OA που το μήκος του θεωρείται ως μονάδα μέτρησης, δηλαδή $|OA| = 1$ και θετική η φορά από το O προς το A (Σχ. 1.1.1 - 1).*

Τότε προφανώς η φορά από το A προς το O θα είναι αρνητική.

Αν τώρα M είναι ένα άλλο τυχόν σημείο της ε, θα πρέπει για το μέτρο της απόστασής του από το O να ισχύει:

$$|OM| = x|OA| = x.$$



Σχήμα 1.1.1 - 1: προσανατολισμένη ευθεία ή άξονας.

Ο αριθμός x ορίζει τότε την **τετμημένη** του σημείου M. Είναι προφανές ότι η τετμημένη είναι θετική, όταν το σημείο είναι δεξιά του O. Αντίστροφα τώρα, αν είναι γνωστή η τετμημένη ενός σημείου, τότε θα είναι γνωστή κατά μονοσήμαντο τρόπο και η θέση του στον άξονα. Σύμφωνα με τα παραπάνω, επειδή σε κάθε σημείο του άξονα αντιστοιχεί ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός και αντίστροφα (αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία), η ευθεία ε ταυτίζεται με το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

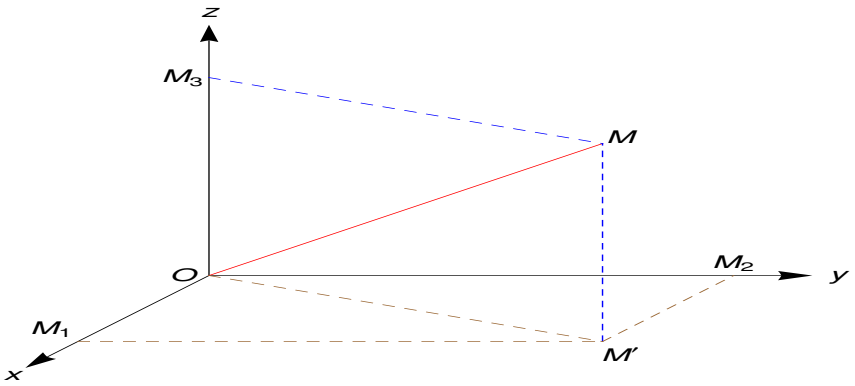
Ορισμός 1.1.1 - 2. *Έστω M_1, M_2 δύο τυχόντα σημεία της ε. Τότε το* **μέτρο** *ή η* **αλγεβρική τιμή** *του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2 θα ισούται με*

$$|M_1M_2| = |OM_2| - |OM_1| = x_2|OA| - x_1|OA| = x_2 - x_1. \qquad (1.1.1 - 1)$$

1.2 Συστήματα συντεταγμένων

1.2.1 Ορθογώνιο σύστημα

Έστω επίπεδο Π και δύο κάθετες ευθείες του με κοινή αρχή το σημείο τομής των, έστω O. Αν η μία από αυτές συμβολίζει τον άξονα των x, που λέγεται επίσης και άξονας τετμημένων και η άλλη των y, που λέγεται άξονας τεταγμένων, τότε το σύστημα αυτό ορίζει ένα **ορθογώνιο** ή **καρτεσιανό σύστημα αξόνων** στο επίπεδο, που συμβολίζεται με Oxy. Αντίστοιχα στον χώρο θεωρούνται τρεις κάθετες ευθείες Ox, Oy και Oz, όπου η Oz λέγεται και άξονας των

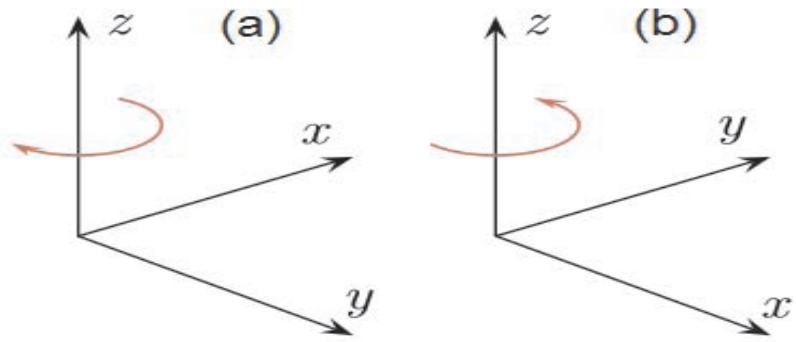


Σχήμα 1.2.1 - 2: καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

κατηγμένων. Το σύστημα αυτό συμβολίζεται με $Oxyz$ (Σχ. 1.2.1 - 2) και ορίζει το αντίστοιχο ορθογώνιο σύστημα στον χώρο.

Ένα ορθογώνιο σύστημα στον χώρο θα λέγεται δεξιόστροφο, όταν η θετική φορά του άξονα Oz συμπίπτει με την κατεύθυνση κίνησης ενός κοχλία, που στρέφεται στο επίπεδο Oxy κατά την αντίθετη φορά των δεικτών του ρολογιού, δηλαδή από τον άξονα Ox προς τον Oy. Αντίστοιχα στο επίπεδο ως δεξιόστροφο σύστημα ορίζεται εκείνο για το οποίο, η θετική φορά του άξονα Ox συμπίπτει με τη θετική φορά του άξονα Oy, όταν η κίνηση γίνεται με την αντίθετη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού, διαφορετικά λέγεται αριστερόστροφο (Σχ. 1.2.1 - 3).

Αν $Oxyz$ είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων του χώρου και M τυχόν σημείο, τότε η παράλληλη από το M προς τον άξονα Oz τέμνει το επίπεδο Oxy στο σημείο M'. Από το M' φέρνοντας παράλληλες προς τους άξονες Oy και Ox ορίζονται τα $x_1 = |OM_1|$ και $y_1 = |OM_2|$ αντίστοιχα. Τέλος από το M φέρνοντας παράλληλη προς την OM' ορίζεται το σημείο $z_1 = |OM_3|$. Η τριάδα των αριθμών (x_1, y_1, z_1) ορίζει τότε τις καρτεσιανές συντεταγμένες ή απλά συντεταγμένες του M στον χώρο. Όμοια το ζεύγος των αριθμών (x_1, y_1) ορίζει τις καρτεσιανές συντεταγμένες ή απλά συντεταγμένες του M στο επίπεδο. Σύμφωνα με αυτά σε κάθε σημείο του χώρου αντίστοιχα του επιπέδου αντιστοιχούν οι συντεταγμένες του και αντίστροφα, όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες, τότε καθορίζεται ακριβώς η θέση του στον χώρο αντίστοιχα



Σχήμα 1.2.1 - 3: (a) αριστερόστροφο και (b) δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων.

στο επίπεδο.

Ένα όμοιο με το καρτεσιανό σύστημα είναι το πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο οι άξονες τέμνονται πλάγια. Το σύστημα αυτό έχει περιορισμένες εφαρμογές. Στο εξής ο όρος συντεταγμένες θα σημαίνει καρτεσιανές συντεταγμένες, εκτός αν διαφορετικά ορίζεται.

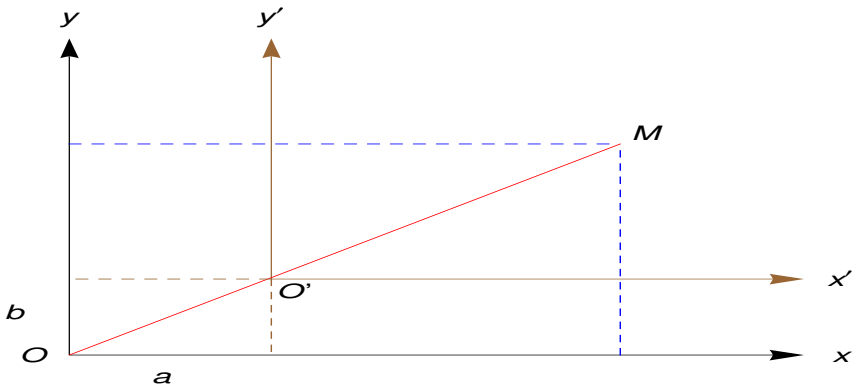
1.2.2 Αλλαγές ορθογώνιου συστήματος

Εξετάζεται στη συνέχεια το πρόβλημα της αλλαγής των συντεταγμένων στο επίπεδο. Διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

i) **Παράλληλη μετατόπιση αξόνων**

Έστω ότι οι νέοι άξονες $O'x'y'$ είναι παράλληλοι προς τους αρχικούς Oxy (Σχ. 1.2.2 - 1). Η παράλληλη μετατόπιση του συστήματος χαρακτηρίζεται από δύο θετικά ή αρνητικά μεγέθη a και b, που παριστάνουν τις παράλληλες προς τους άξονες Oy και Ox μετατοπίσεις των νέων αξόνων $O'y'$ και $O'x'$ αντίστοιχα. Τότε, αν M είναι ένα σημείο με συντεταγμένες (x, y) στο σύστημα Oxy, οι συντεταγμένες του (x', y') στο $O'x'y'$ θα είναι:

$$\begin{aligned} x' &= x - a, \\ y' &= y - b \end{aligned} \qquad (1.2.2 - 1)$$



Σχήμα 1.2.2 - 1: παράλληλη μετατόπιση αξόνων.

και αντίστροφα:

$$\begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b. \end{aligned} \qquad (1.2.2\text{ - }2)$$

ii) **Στροφή των αξόνων κατά ορισμένη γωνία**

Έστω ότι το σύστημα Oxy στρέφεται κατά τη δεξιόστροφη φορά περί την αρχή O κατά γωνία θ με $\theta \in [0, 2\pi)$ (Σχ. 1.2.2 - 2). Τότε, αν $O'x'y'$ είναι οι νέοι άξονες συντεταγμένων και M τυχόν σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y) στο αρχικό και (x', y') στο νέο σύστημα συντεταγμένων, έχουμε:

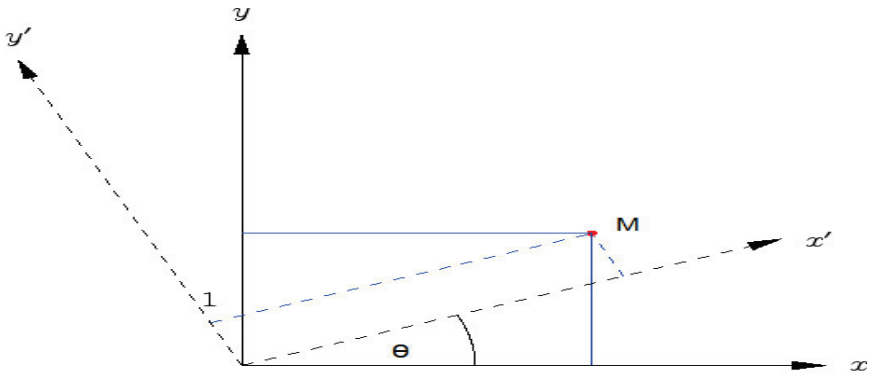
$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned} \qquad (1.2.2\text{ - }3)$$

και αντίστροφα:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y &= -x'\sin\theta + y'\cos\theta. \end{aligned} \qquad (1.2.2\text{ - }4)$$

iii) **Παράλληλη μετατόπιση και στροφή των αξόνων**

Η περίπτωση αυτή προκύπτει ως συνδυασμός των δύο προηγούμενων



Σχήμα 1.2.2 - 2: στροφή των αξόνων κατά ορισμένη γωνία.

περιπτώσεων. Έστω ότι το σύστημα Oxy μετατοπίζεται παράλληλα προς την αρχική του θέση, έτσι ώστε το O να μετατοπιστεί στο $O'(a,b)$ και στη συνέχεια στρέφεται δεξιόστροφα περί τη νέα του αρχή O' κατά γωνία θ. Τότε, αν M τυχόν σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες (x,y) στο αρχικό και (x',y') στο νέο σύστημα συντεταγμένων, έχουμε:

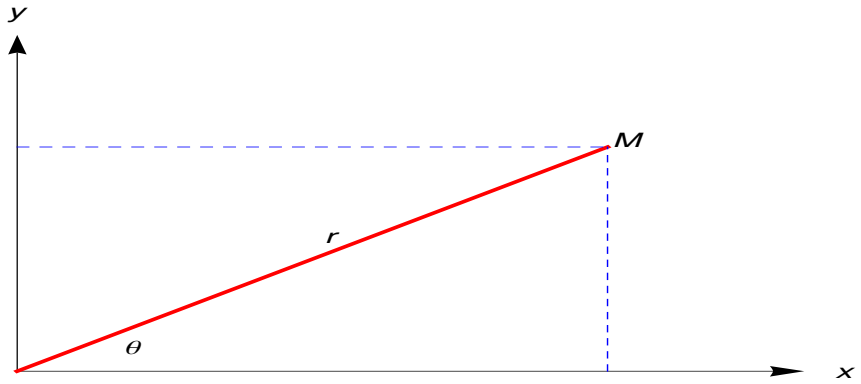
$$\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\theta + (y-b)\sin\theta \\ y' &= -(x-a)\sin\theta + (y-b)\cos\theta \end{aligned} \qquad (1.2.2\text{ - }5)$$

και αντίστροφα:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta + a \\ y &= -x'\sin\theta + y'\cos\theta + b. \end{aligned} \qquad (1.2.2\text{ - }6)$$

Άλλα συστήματα συντεταγμένων

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες είναι οι πρώτες που χρησιμοποιήθηκαν συστηματικά στις περισσότερες εφαρμογές, επειδή είναι οι πλέον εύχρηστες, αφού η εφαρμογή τους στηρίζεται στην έννοια της παράλληλης ευθείας προς τους άξονες συντεταγμένων.



Σχήμα 1.2.3 - 1: πολικές συντεταγμένες του σημείου $M(r, \theta)$.

Γενικότερα αποδεικνύεται ότι κάθε μονοσήμαντη αντιστοιχία σημείων του επιπέδου ή του χώρου και ενός συνόλου αριθμών, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ως σύστημα συντεταγμένων. Τα κυριότερα από αυτά, που συνήθως χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές, δίνονται παρακάτω.

1.2.3 Πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο

Στο σύστημα αυτό η θέση ενός σημείου M στο επίπεδο προσδιορίζεται με τη βοήθεια δύο αριθμών ως εξής:[1]
Έστω σημείο O του επιπέδου, που λέγεται πόλος και μία προσανατολισμένη ευθεία ε, που λέγεται πολικός άξονας και η οποία διέρχεται από το O, δηλαδή μία ευθεία στην οποία έχει καθοριστεί μία αρχή μέτρησης και μία θετική φορά διαγραφής. Αν $r = |OM|$ είναι η λεγόμενη πολική απόσταση και θ με $0 \leq \theta < 2\pi$ είναι η πολική γωνία, που ορίζεται με αρχική πλευρά τον πολικό άξονα και τελική την OM με δεξιόστροφη φορά διαγραφής, τότε το ζεύγος (r, θ) ορίζει κατά μονοσήμαντο τρόπο τη θέση του σημείου M και αντίστροφα. Το ζεύγος (r, θ) ορίζει τότε τις **πολικές συντεταγμένες** του M στο επίπεδο (Σχ. 1.2.3 - 1).

Ο μετασχηματισμός από τις πολικές (r, θ) στις καρτεσιανές συντεταγμένες

[1] Βλέπε: *http://en.wikipedia.org/wiki/Polar_coordinate_system*

$(x,\, y)$ γίνεται με τις σχέσεις:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \tag{1.2.3 - 1}$$

ενώ από τις καρτεσιανές στις πολικές $(r,\, \theta)$ με τις:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\theta &= \frac{x}{r} \quad \text{και} \quad \sin\theta = \frac{y}{r}\,; \quad 0 \le \theta < 2\pi, \end{aligned} \tag{1.2.3 - 2}$$

όταν $(x, y) \neq (0, 0)$.

1.2.4 Κυλινδρικές συντεταγμένες

Η θέση ενός σημείου M στον χώρο προσδιορίζεται με τις λεγόμενες κυλινδρικές συντεταγμένες ως εξής:[2]
Έστω μία αρχή (πόλος) O, ένα επίπεδο Π που διέρχεται από το O και ένας άξονας Ox που βρίσκεται στο επίπεδο αυτό και διέρχεται από το O (Σχ. 1.2.4 - 1) και έστω M' η προβολή του M στο επίπεδο Π. Τότε η θέση του σημείου M είναι δυνατόν να καθοριστεί από τα παρακάτω στοιχεία:

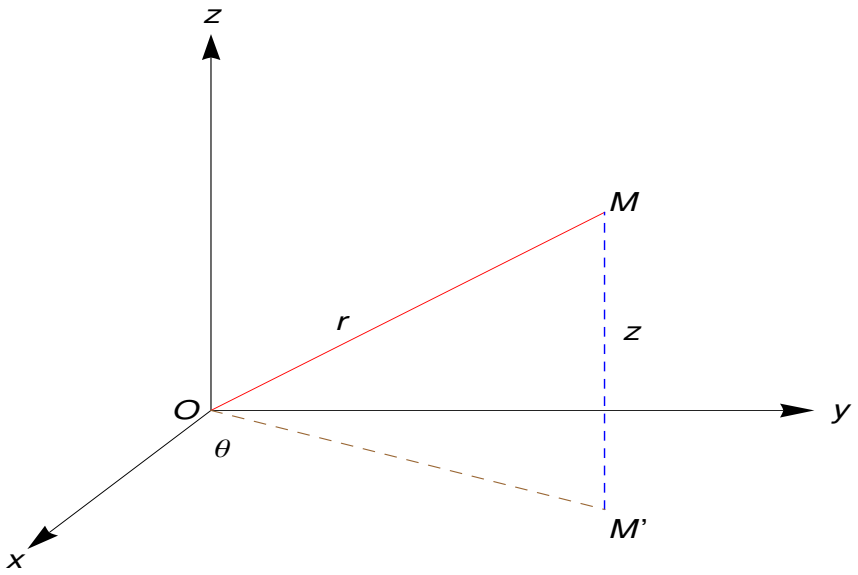
- της απόστασης $r = |OM'|$ του σημείου M' από τον πόλο,
- της γωνίας θ με $0 \le \theta < 2\pi$ που ορίζεται με αρχική πλευρά τον άξονα Ox και τελική την OM',
- της απόστασης $z = |MM'|$ του σημείου M από το επίπεδο Π.

Οι αριθμοί $(r,\, \theta,\, z)$ ορίζουν τότε τις **κυλινδρικές συντεταγμένες** του σημείου M.

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες $(x,\, y,\, z)$ προκύπτουν από τις αντίστοιχες κυλινδρικές με τις σχέσεις

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z, \tag{1.2.4 - 1}$$

[2] Βλέπε: *http://en.wikipedia.org/wiki/Cylindrical_coordinate_system*



Σχήμα 1.2.4 - 1: κυλινδρικές συντεταγμένες του σημείου $M(r,\theta,z)$, όταν $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=(OM)$ με x, y να ορίζονται από $(1.2.4-1)$ και $(MM')=z$.

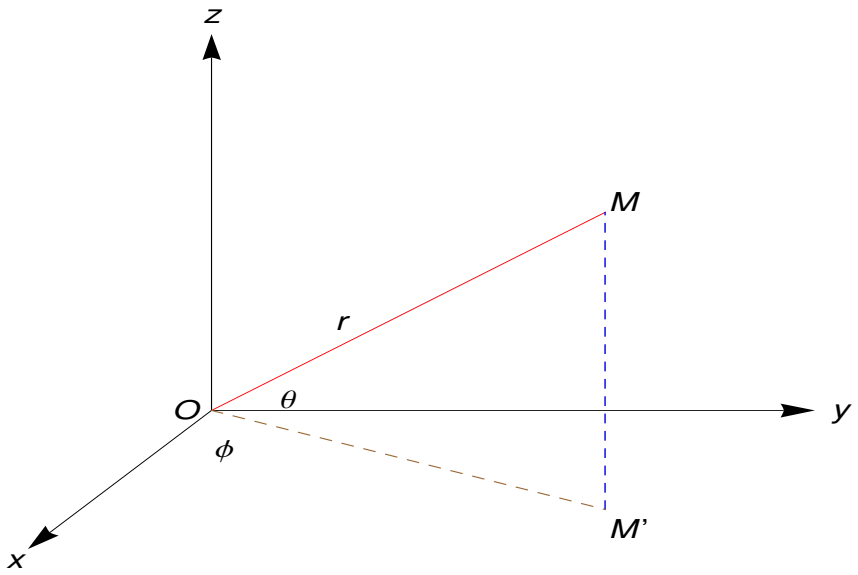
ενώ οι κυλινδρικές $(r,\ \theta,\ z)$ από τις αντίστοιχες καρτεσιανές με τις

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \cos\theta &= \frac{x}{r} \quad \text{και} \quad \sin\theta=\frac{y}{r}\,; \quad 0\le\theta<2\pi, \\ z &= z, \quad \text{όταν} \quad (x,y)\neq(0,0). \end{aligned} \tag{1.2.4 - 2}$$

1.2.5 Σφαιρικές συντεταγμένες

Όμοια η θέση του σημείου M στον χώρο προσδιορίζεται με τις λεγόμενες σφαιρικές συντεταγμένες ως εξής:[3]
Έστω μία αρχή (πόλος) O, ένα επίπεδο Π που διέρχεται από το O και ένας άξονας Ox που βρίσκεται στο επίπεδο αυτό και διέρχεται από το O (Σχ. 1.2.5 - 1). Τότε η θέση του σημείου M είναι δυνατόν να καθοριστεί από τα παρακάτω στοιχεία:

[3] Βλέπε: *http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_coordinate_system*



Σχήμα 1.2.5 - 1: σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου $M(r, \theta, \varphi)$, όταν $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (OM)$ με x, y, z να ορίζονται από $(1.2.5 - 1)$.

- της απόστασης $r = |OM|$ του σημείου M από τον πόλο,

- της γωνίας φ με $0 \leq \varphi < 2\pi$ που ορίζεται με αρχική πλευρά τον άξονα Ox και τελική την OM', όταν M' η προβολή του M στο επίπεδο OM',

- της γωνίας θ (αζιμούθιο - azimuth) με $-\pi/2 \leq \theta < \pi/2$ που ορίζεται με αρχική πλευρά την OM' και τελική την OM.

Τα (r, φ, θ) ορίζουν τότε τις **σφαιρικές συντεταγμένες** του σημείου M.

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) συνδέονται με τις αντίστοιχες σφαιρικές με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\cos\phi, \\ y &= r\cos\theta\sin\phi\,, \\ z &= r\sin\theta, \end{aligned} \qquad (1.2.5 - 1)$$

ενώ οι σφαιρικές $(r,\, \varphi,\, \theta)$ με τις αντίστοιχες καρτεσιανές με τις:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \sin\theta &= \frac{z}{r}, \\ \cos\phi &= \frac{x}{r\cos\theta} \quad \text{και} \quad \sin\phi = \frac{y}{r\cos\theta} \end{aligned} \qquad (1.2.5\text{ - }2)$$

όπου οι γωνίες θ και φ πρέπει να επαληθεύουν στην $(1.2.5{-}2)$ τις εξισώσεις από τις οποίες προσδιορίζονται με $-\pi/2 \le \theta < \pi/2$ και $0 \le \varphi < 2\pi$ αντίστοιχα, όταν $(x,\, y,\, z) \neq (0,\, 0,\, 0)$.

Οι εντολές ορισμού και αλλαγής συντεταγμένων με το MATHEMATICA είναι:

Πρόγραμμα 1.2.5 - 1 (συστήματα συντεταγμένων)

```
<<VectorAnalysis'                                  κλήση πακέτου
SetCoordinates[Cartesian[x,y,z]]          καθορισμός συστήματος
SetCoordinates[Cylindrical[r,θ,z]]
SetCoordinates[Spherical[r,θ,φ]]
CoordinatesToCartesian[{r,θ,φ},Spherical]          τύποι αλλαγής
CoordinatesFromCartesian[{x,y,z},Spherical]
```

1.3 Ορισμός και Άλγεβρα διανυσμάτων

1.3.1 Ορισμός διανύσματος

Σύμφωνα και με τον Ορισμό 1.1.1 - 1 το διάνυσμα (vector) ορίζεται ως εξής:

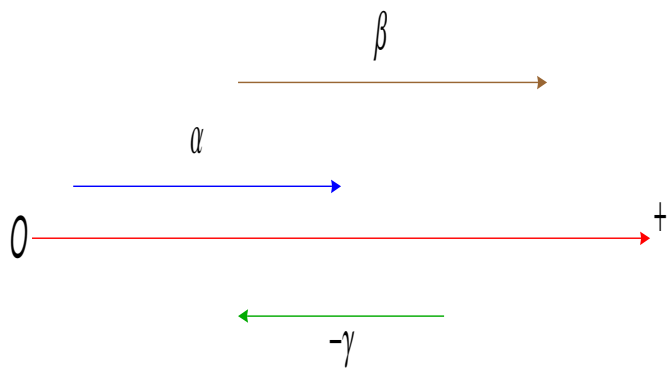
Ορισμός 1.3.1 - 1 (διανύσματος). *Ορίζεται ως διάνυσμα κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα επί του προσανατολισμένου άξονα ε ή παράλληλου προς αυτόν.*

Τα διανύσματα θα συμβολίζονται στο εξής με $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ (Σχ. 1.3.1 - 1) κ.λπ.[4]

Ορισμός 1.3.1 - 2. *Ορίζεται ως* **μηδενικό** *το διάνυσμα που η αρχή και το τέλος του συμπίπτουν.*

Τα μηδενικά διανύσματα θα συμβολίζονται με $\mathbf{0}$.

[4] Συνηθίζεται στα βιβλία ο συμβολισμός με έντονα γράμματα, όπως $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ κ.λπ., αλλά στην πράξη χρησιμοποιείται επίσης και ο συμβολισμός $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ κ.λπ.



Σχήμα 1.3.1 - 1: συμβολισμός διανυσμάτων.

Στοιχεία διανύσματος

Έστω το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} = \overrightarrow{AB}$. Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 1.3.1 - 1 το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$ χαρακτηρίζεται από τα εξής στοιχεία:

i) **διεύθυνση** που είναι η [5]ευθεία ϵ από τα σημεία A και B,

ii) **φορά** αυτή που ορίζεται με αρχή το A και τέλος το B τέλος,

iii **μέτρο** $|\boldsymbol{\alpha}|$ ή $\|\boldsymbol{\alpha}\|$ που ισούται με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB, δηλαδή

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \|\boldsymbol{\alpha}\| = |AB|.$$

Άρα ένα διάνυσμα θα είναι θετικό ή αρνητικό, όταν η φορά του συμπίπτει με τη θετική ή αντίστοιχα αρνητική φορά του άξονα.

Ορισμός 1.3.1 - 3. *Διανύσματα που έχουν την ίδια διεύθυνση θα λέγονται* **συγγραμμικά**.

1.3.2 Είδη διανυσμάτων

Τα διανύσματα, ανάλογα με τις ιδιότητες των διαφόρων διανυσματικών μεγεθών που παριστάνουν, διακρίνονται στις παρακάτω κατηγορίες:

[5]Η ευθεία ϵ λέγεται και **φορέας** του διανύσματος.

i) **ελεύθερα**, όταν είναι δυνατόν να μετατοπιστούν στον φορέα τους ή παράλληλα προς αυτόν (π.χ. η ροπή ενός ζεύγους),

ii) **ολισθαίνοντα**, όταν μετατοπίζονται στον φορέα τους αλλά όχι παράλληλα προς αυτόν (π.χ. η δύναμη που ασκείται σε σώμα),

iii) **εφαρμοστά**, όταν έχουν ορισμένο σημείο εφαρμογής και συνεπώς δεν μετατοπίζονται στον φορέα τους ή παράλληλα προς αυτόν (π.χ. η ταχύτητα υλικού σημείου).

1.3.3 Ισότητα

Ορισμός 1.3.3 - 1. *Δύο διανύσματα* α *και* β *θα είναι* **ίσα**, *όταν έχουν το ίδιο μέτρο, διεύθυνση και φορά.*

Τότε γράφεται $\alpha = \beta$, ενώ σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση τα διανύσματα θα είναι διαφορετικά, δηλαδή $\alpha \neq \beta$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η ισότητα ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας.

1.3.4 Πρόσθεση

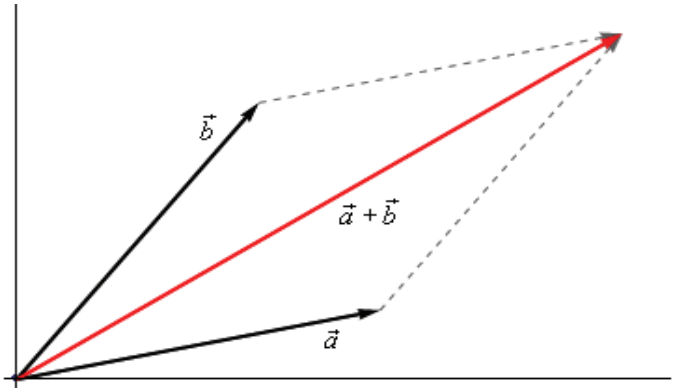
Ορισμός 1.3.4 - 1. *Το* **άθροισμα** $\alpha + \beta$ *των διανυσμάτων* α *και* β *ορίζεται ότι είναι το διάνυσμα που προκύπτει, όταν το* β *γίνει διαδοχικό του* α, *δηλαδή η αρχή του* β *συμπέσει με το τέλος του* α.

Τότε το $\alpha+\beta$ έχει ως αρχή την αρχή του α και τέλος το τέλος του β. Ο τρόπος αυτός της πρόσθεσης είναι γνωστός και ως **κανόνας του παραλληλογράμμου** (Σχ. 1.3.4 - 1).

1.3.5 Πολλαπλασιασμός με πραγματικό αριθμό

Ορισμός 1.3.5 - 1. *Ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος* α *με τον πραγματικό αριθμό* λ *(scalar multiplication) ορίζεται ότι είναι το διάνυσμα* $\lambda\alpha$, *που έχει μέτρο* $|\lambda|$ *φορές το μέτρο του* α, *ίδια διεύθυνση με το* α *και φορά: (Σχ. 1.3.5 - 1)*

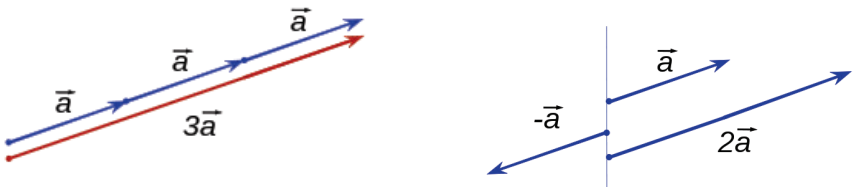
- *ίδια με του* α, *όταν* $\lambda > 0$,



Σχήμα 1.3.4 - 1: πρόσθεση διανυσμάτων.

- *αντίθετη με του* $\mathbf{a}$*, όταν* $\lambda < 0$*,*

- *είναι το μηδενικό διάνυσμα, όταν* $\lambda = 0$*.*



Σχήμα 1.3.5 - 1: Πολλαπλασιασμός διανύσματος με πραγματικό αριθμό.

1.3.6 Μοναδιαίο διάνυσμα

Ορισμός 1.3.6 - 1. *Ορίζεται ως* **μοναδιαίο** *το διάνυσμα που το μέτρο του ισούται με τη μονάδα μέτρησης.*

Παραδείγματα τέτοιων διανυσμάτων είναι σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ στους άξονες Ox, Oy και Oz. Υπενθυμίζεται ότι ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο έχουν οριστεί τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων του θα λέγεται **ορθοκανονικό**.

Στη συνέχεια ορίζεται το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του τυχόντος διανύσματος $\boldsymbol{\alpha}$.

Ορισμός 1.3.6 - 2. *Έστω $\boldsymbol{\alpha}$ τυχαίο διάνυσμα με $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$. Τότε ορίζεται ως μοναδιαίο διάνυσμα ή ως διανυσματική μονάδα κατά τη διεύθυνση του $\boldsymbol{\alpha}$ και συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha}_0$ το διάνυσμα*

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}\,. \tag{1.3.6 - 1}$$

Έχοντας υπόψη τον Ορισμό 1.3.6 - 1, από την $(1.3.6-1)$ διαδοχικά προκύπτει:

$$|\boldsymbol{\alpha}_0| = \left|\frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\,\boldsymbol{\alpha}\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\,|\boldsymbol{\alpha}| = 1, \quad \text{δηλαδή} \quad |\boldsymbol{\alpha}_0| = 1.$$

1.4 Συντεταγμένες διανύσματος

Έστω ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$. Διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

1.4.1 Διάνυσμα θέσης

Ορισμός 1.4.1 - 1. *Έστω $Oxyz$ ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων. Αν η αρχή του διανύσματος συμπίπτει με την αρχή των συντεταγμένων O (Σχ. 1.4.1 - 1), τότε το διάνυσμα λέγεται* διάνυσμα θέσης *ή* ακτινικό διάνυσμα *(position ή location ή και radius vector) και συμβολίζεται με $\mathbf{r}$.*

Αν x, y και z είναι οι προβολές του $\mathbf{r}$ στους άξονες συντεταγμένων, δηλαδή αν το τέλος M του διανύσματος έχει συντεταγμένες $M(x, y, z)$, τότε

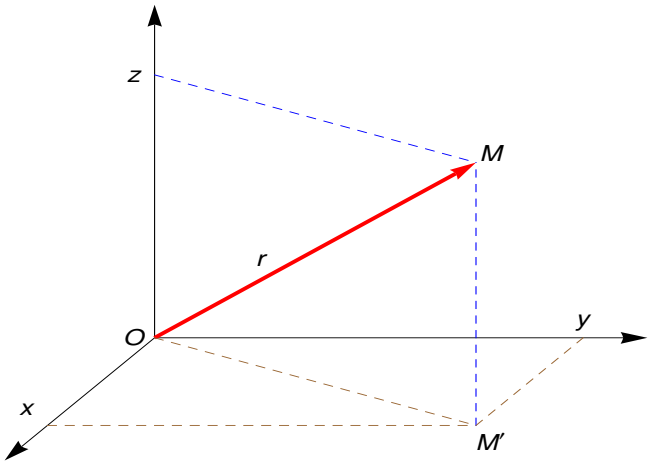
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\,\langle x, y, z\rangle \tag{1.4.1 - 1}$$

ή απλά

$$\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle\,. \tag{1.4.1 - 2}$$

Επομένως στην περίπτωση αυτή το άθροισμα των συνιστωσών διανυσμάτων $x\,\mathbf{i}$, $y\,\mathbf{j}$ και $z\,\mathbf{k}$ ορίζει το διάνυσμα $\mathbf{r}$, οπότε η $(1.4.1-5)$ αναλυτικά γράφεται:

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}. \tag{1.4.1 - 3}$$



Σχήμα 1.4.1 - 1: το **διάνυσμα θέσης** ή **ακτινικό διάνυσμα** $\mathbf{r}$.

Τότε το μέτρο του διανύσματος $\mathbf{r} = \mathbf{r}\,\langle x, y, z\rangle$ συναρτήσει των συντεταγμένων ισούται με

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (1.4.1 - 4)$$

Παρατήρηση 1.4.1 - 1

Ανάλογοι τύποι ισχύουν και στην περίπτωση των επίπεδων διανυσμάτων θέσης, δηλαδή

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} \qquad (1.4.1 - 5)$$

και

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1.4.1 - 6)$$

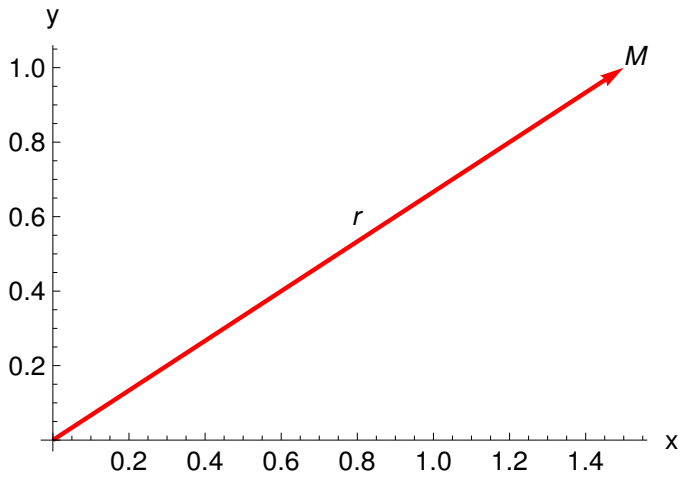
Παράδειγμα 1.4.1 - 1

Αν $M(1.5, 1)$, να υπολογιστεί το διάνυσμα θέσης που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό.

Λύση. Επειδή $z = 0$, από την $(1.4.1 - 3)$ έχουμε ότι (Σχ. 1.4.1 - 2)

$$\mathbf{r} = 1.5\,\mathbf{i} + \mathbf{j} = \langle 1.5, 1\rangle.$$

■



Σχήμα 1.4.1 - 2: Παράδειγμα 1.4.1 - 1: το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r} =< 1.5, 1 >$ του σημείου M.

1.4.2 Γενική μορφή

Γενικά, όταν το $\boldsymbol{\alpha}$ είναι ένα τυχόν διάνυσμα του 3-διάστατου χώρου με αρχή το σημείο $A\left(x_1, y_1, z_1\right)$ και τέλος το $B\left(x_2, y_2, z_2\right)$, οι συντεταγμένες του θα ορίζονται από τις προβολές του στους άξονες συντεταγμένων και θα είναι οι πραγματικοί αριθμοί

$$\alpha_1 = x_2 - x_1, \quad \alpha_2 = y_2 - y_1 \quad \text{και} \quad \alpha_3 = z_2 - z_1.$$

Τότε όμοια με την περίπτωση (i) θα είναι στην περίπτωση αυτή

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\left\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \right\rangle = \boldsymbol{\alpha}\left\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \right\rangle \qquad (1.4.2 - 1)$$

ή απλά

$$\boldsymbol{\alpha} = \left\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \right\rangle = \left\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \right\rangle \qquad (1.4.2 - 2)$$

ενώ η αναλυτική έκφρασή του θα είναι

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k} \\ &= \left(x_2 - x_1\right) \mathbf{i} + \left(y_2 - y_1\right) \mathbf{j} + \left(z_2 - z_1\right) \mathbf{k}. \end{aligned} \qquad (1.4.2 - 3)$$

Το μέτρο του διανύσματος $\boldsymbol{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ συναρτήσει των συντεταγμένων θα ισούται στην περίπτωση αυτή με

$$\begin{aligned} \alpha = |\boldsymbol{\alpha}| &= \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.4.2\text{ - }4) \end{aligned}$$

Παρατήρηση 1.4.2 - 1

Όμοια με την Παρατήρηση 1.4.1 - 1, ανάλογοι τύποι ισχύουν και στην περίπτωση αυτή για τα επίπεδα διανύσματα.

Παράδειγμα 1.4.2 - 1

Για τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ στους άξονες Ox, Oy και Oz ενός ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$ που έχουν συντεταγμένες

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \quad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

προκύπτει προφανώς από τον τύπο $(1.4.1 - 4)$ ότι

$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1.$$

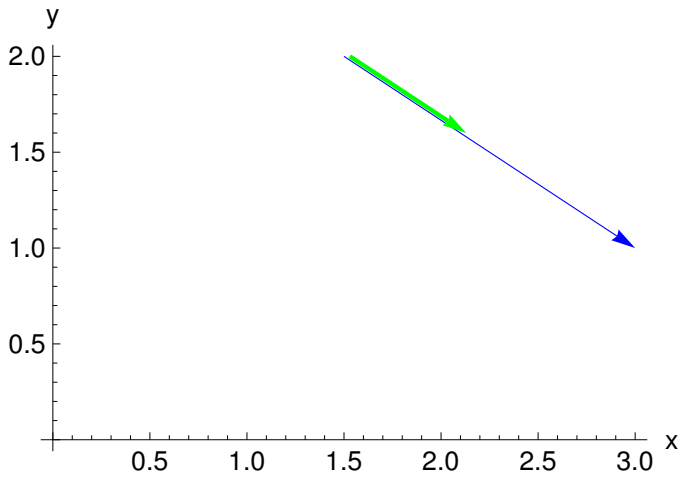
Παράδειγμα 1.4.2 - 2

Έστω το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\langle 1.5, -1 \rangle$. Τότε από τον τύπο $(1.4.1 - 4)$ προκύπτει ότι

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{1.5^2 + (-1)^2} = \sqrt{3.25} \approx 1.802776.$$

Άρα το μοναδιαίο διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}_0$ κατά τη διεύθυνση του $\boldsymbol{\alpha}$ σύμφωνα με τη σχέση $(1.3.6 - 1)$ θα είναι (Σχ. 1.4.2 - 1)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_0 &= \frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|} = \frac{1}{\sqrt{3.25}} \left(1.5\,\mathbf{i} - \mathbf{j}\right) = \frac{1}{\sqrt{3.25}} \langle 1.5, -1 \rangle \\ &\approx \langle 0.83205, -0.55470 \rangle . \end{aligned}$$



Σχήμα 1.4.2 - 1: Παράδειγμα 1.4.2 - 2: το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} =< 1.5, -1 >$ με μπλε και το αντίστοιχο μοναδιαίο $\boldsymbol{\alpha}_0$ με πράσινη γραμμή.

Παράδειγμα 1.4.2 - 3

Έστω το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\langle 1, -2, 3\rangle$. Τότε όμοια από τον τύπο $(1.4.1 - 4)$ προκύπτει ότι

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

Άρα το μοναδιαίο διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}_0$ κατά τη διεύθυνση του $\boldsymbol{\alpha}$ σύμφωνα με τη σχέση $(1.3.6 - 1)$ θα είναι

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\,(\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{14}}\,\langle 1, -2, 3\rangle\,.$$

Παρατήρηση 1.4.2 - 2

Μετά από τον ορισμό των συντεταγμένων ενός διανύσματος οι παραπάνω Ορισμοί 1.3.3 - 1 - 1.3.5 - 1, δηλαδή της ισότητας και των πράξεων των διανυσμάτων γράφονται ισοδύναμα ως εξής: αν

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \alpha_1\,\mathbf{i} + \alpha_2\,\mathbf{j} + \alpha_3\,\mathbf{k} = \boldsymbol{\alpha}\,\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle\,, \quad \text{και} \\ \boldsymbol{\beta} &= \beta_1\,\mathbf{i} + \beta_2\,\mathbf{j} + \beta_3\,\mathbf{k} = \boldsymbol{\beta}\,\langle \beta_1, \beta_2, \beta_3\rangle\,, \end{aligned}$$

τότε

- ισότητα

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}, \quad \text{όταν} \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \alpha_3 = \beta_3,$$

- πρόσθεση

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} &= (a_1 + \beta_1)\,\mathbf{i} + (\alpha_2 + \beta_2)\,\mathbf{j} + (\alpha_3 + \beta_3)\,\mathbf{k} \\ &= \langle a_1 + \beta_1,\, \alpha_2 + \beta_2,\, \alpha_3 + \beta_3 \rangle\,, \end{aligned}$$

- αφαίρεση

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} &= (a_1 - \beta_1)\,\mathbf{i} + (\alpha_2 - \beta_2)\,\mathbf{j} + (\alpha_3 - \beta_3)\,\mathbf{k} \\ &= \langle a_1 - \beta_1,\, \alpha_2 - \beta_2,\, \alpha_3 - \beta_3 \rangle\,, \end{aligned}$$

- πολλαπλασιασμός με αριθμό

$$\lambda\boldsymbol{\alpha} = \lambda a_1\,\mathbf{i} + \lambda\alpha_2\,\mathbf{j} + \lambda\alpha_3\,\mathbf{k} = \langle \lambda a_1,\, \lambda\alpha_2,\, \lambda\alpha_3 \rangle\,.$$

Αντίστοιχοι τύποι ισχύουν για την περίπτωση του 2-διάστατου χώρου.

Παράδειγμα 1.4.2 - 4

Έστω τα διανύσματα

$$\boldsymbol{\alpha} = \langle 4, -2, 3 \rangle \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\beta} = \langle 3, 2, -1 \rangle.$$

Τότε

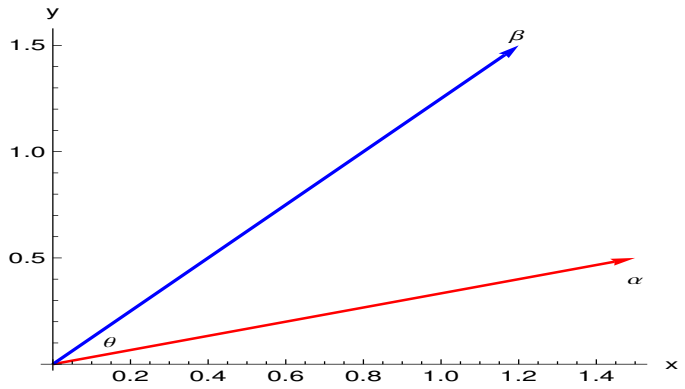
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} + 2\boldsymbol{\beta} &= \langle 4 + 2 \cdot 3, -2 + 2 \cdot 2, 3 + 2 \cdot (-1) \rangle = \langle 10, 2, 1 \rangle \\ &= 10\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Αν $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + 2\boldsymbol{\beta}$, τότε σύμφωνα με τον τύπο $(1.4.1 - 4)$ έχουμε ότι

$$\gamma = |\boldsymbol{\gamma}| = |\boldsymbol{\alpha} + 2\boldsymbol{\beta}| = \sqrt{10^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{105},$$

οπότε από τη σχέση $(1.3.6 - 1)$ προκύπτει ότι το μοναδιαίο κατά τη διεύθυνση του $\boldsymbol{\alpha} + 2\boldsymbol{\beta}$ θα είναι το διάνυσμα

$$\boldsymbol{\gamma}_0 = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{|\boldsymbol{\gamma}|} = \frac{1}{\sqrt{105}}\,(10\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{105}}\langle 10, 2, 1 \rangle\,.$$



Σχήμα 1.5.1 - 1: το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$.

1.5 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

1.5.1 Ορισμός και ιδιότητες

Ορισμός 1.5.1 - 1. *Έστω τα διανύσματα* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$ *με* $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$. *Τότε ορίζεται ως* **εσωτερικό γινόμενο** *(dot - scalar - inner product)*[6] *και συμβολίζεται με* $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$ *ή* $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$, *ο πραγματικός αριθμός που ισούται με το γινόμενο των μέτρων των διανυσμάτων επί το συνημίτονο της γωνίας* θ, *που σχηματίζουν τα δύο αυτά διανύσματα (Σχ. 1.5.1 - 1), δηλαδή*

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}| \cos\theta \quad \mu\varepsilon \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \tag{1.5.1 - 1}$$

Ειδικά, όταν ένα ή και τα δύο διανύσματα ισούνται με το μηδενικό διάνυσμα, τότε το εσωτερικό τους γινόμενο ορίζεται ίσο με το μηδέν.

Ιδιότητες

i) $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}$ αντιμεταθετική,

ii) $\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}$ επιμεριστική,

iii) $(\lambda\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\beta} = \lambda(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}\cdot(\lambda\boldsymbol{\beta})$, όταν $\lambda \in \mathbb{R}$.

[6] Βλέπε επίσης: *http://en.wikipedia.org/wiki/Dot_product*

1.5.2 Συνθήκη καθετότητας

Όταν $\theta = \pi/2$, από την $(1.5.1-1)$ προκύπτει ότι, αν τα διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους, τότε είναι

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0 \qquad (1.5.2\text{ - }1)$$

και αντίστροφα. Άρα η $(1.5.2-1)$, που εκφράζει τη **συνθήκη καθετότητας** δύο διανυσμάτων, είναι μια αναγκαία και ικανή συνθήκη.

Επίσης, αν $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \pm|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|$, τότε ή $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$, οπότε τα διανύσματα είναι **συγγραμμικά** (collinear).

1.5.3 Υπολογισμός συναρτήσει των συντεταγμένων

Αν $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$ και $\boldsymbol{\beta} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα, τότε, επειδή τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i} = \langle 1,0,0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0,1,0\rangle$ και $\mathbf{k} = \langle 0,0,1\rangle$ είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους, ενώ το μέτρο τους ισούται[7] με 1, σύμφωνα και με την $(1.5.2-1)$ εύκολα προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} &= \langle\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k}\rangle\cdot\langle\beta_1\mathbf{i}+\beta_2\mathbf{j}+\beta_3\mathbf{k}\rangle = \beta_1\,(\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{i}\\ &\quad +\beta_2\,(\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{j}+\beta_3\,(\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{k}\\ &= \beta_1\,(\alpha_1\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+\alpha_2\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+\alpha_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{i})+\beta_2\,(\alpha_1\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+\alpha_2\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k}\cdot\mathbf{j})\\ &\quad +\beta_3\,(\alpha_1\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}+\alpha_2\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}+\alpha_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) = \cdots = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3. \qquad (1.5.3\text{ - }1)$$

Από την $(1.5.3-1)$ προκύπτουν

- $$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha} = |\boldsymbol{\alpha}|^2 = \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2. \qquad (1.5.3\text{ - }2)$$
- Αν τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ είναι κάθετα, τότε σύμφωνα και με τη συνθήκη καθετότητας $(1.5.2-1)$ ισχύει
$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3 = 0. \qquad (1.5.3\text{ - }3)$$

[7] Από την $(1.5.2-1)$ προκύπτει ότι $|\,\mathbf{i}\,| = \sqrt{1^2+0+0} = 1$, $|\,\mathbf{j}\,| = 1$ και $|\,\mathbf{k}\,| = 1$, ενώ σύμφωνα με τον Ορισμό $(1.5.1-1)$ είναι $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = |\,\mathbf{i}\,|\,|\,\mathbf{j}\,|\cos\frac{\pi}{2} = 1\cdot 1\cdot 0 = 0$. Όμοια $\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$, κ.λπ.

Παράδειγμα 1.5.3 - 1

Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(1, 2, -3)$ και $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(-1, 4, 2)$. Τότε σύμφωνα με την $(1.5.3 - 1)$ είναι

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 2 = 1.$$

1.5.4 Γωνία δύο διανυσμάτων

Ορισμός 1.5.4 - 1. *Έστω ότι τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ έχουν κοινή αρχή O και είναι διάφορα του μηδενικού διανύσματος. Τότε ορίζεται ως γωνία των $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ κατά την τάξη που έχουν γραφεί, η γωνία (Σχ. 1.5.1 - 1) που διαγράφει το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$, όταν στρέφεται κατά τη δεξιόστροφη φορά μέχρις ότου συμπέσει με το διάνυσμα $\boldsymbol{\beta}$.*

Αν $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$ και $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}\langle\beta_1, \beta_2, \beta_3\rangle$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα, τότε από τους τύπους $(1.5.1 - 1)$ και $(1.5.2 - 1)$ προκύπτει ότι η γωνία τους, έστω θ, δίνεται από τη σχέση

$$\cos\theta = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\,\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}\,. \qquad (1.5.4 - 1)$$

1.6 Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

1.6.1 Ορισμός

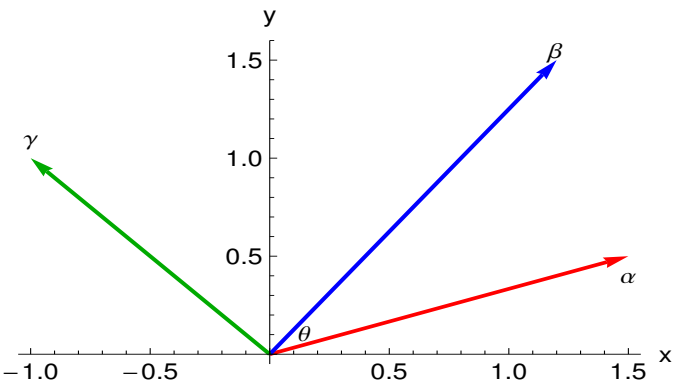
Ορισμός 1.6.1 - 1. *Ορίζεται ως* **εξωτερικό γινόμενο** *(cross - vector product)*[8] *των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$, όταν $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ και συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$ το διάνυσμα $\boldsymbol{\gamma}$, όπου*

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = (|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\,\sin\theta)\,\boldsymbol{\eta}, \qquad (1.6.1 - 1)$$

όταν θ η γωνία των $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ στο επίπεδο που περιέχει τα εν λόγω διανύσματα με $0 \leq \theta \leq \pi$ και $\boldsymbol{\eta}$ το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ και που έχει διεύθυνση εκείνη που ορίζει ο κανόνας του δεξιού χεριού[9] *(Σχ. 1.6.1 - 1).*

[8] Βλέπε επίσης: *http://en.wikipedia.org/wiki/Cross_product*

[9] Υπενθυμίζεται ότι στον κανόνα του δεξιού χεριού το μεσαίο δάχτυλο υποδηλώνει τον φορέα και τη διεύθυνση του $\boldsymbol{\beta}$, ο δείκτης υποδηλώνει τον φορέα και τη διεύθυνση του $\boldsymbol{\alpha}$, ενώ ο αντίχειρας υποδηλώνει τον φορέα και τη διεύθυνση του $\boldsymbol{\eta}$.



Σχήμα 1.6.1 - 1: το εξωτερικό γινόμενο $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$ των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$.

Στην περίπτωση που το ένα ή και τα δύο διανύσματα ισούνται με το μηδενικό διάνυσμα ή επίσης τα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *είναι συγγραμμικά* $(\theta = 0\,, \pi)$, *τότε το εξωτερικό γινόμενό τους ορίζεται να είναι το μηδενικό διάνυσμα.*

1.6.2 Ιδιότητες

Αλγεβρικές ιδιότητες

i) $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha}$ μη αντιμεταθετική (anticommutative),

ii) $\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\gamma}$ και $(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) \times \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\alpha}$ επιμεριστική (distributive) ως προς την πρόσθεση,

iii) $\lambda\,(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) = (\lambda \boldsymbol{\alpha}) \times \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \times (\lambda \boldsymbol{\beta})$ με $\lambda \in \mathbb{R}$,

iv $\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\beta} \times (\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$ (ταυτότητα του Jacobi).

Παρατήρηση 1.6.2 - 1

Στο εξωτερικό γινόμενο **δεν** ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα και ο νόμος της διαγραφής.

Γεωμετρικές ιδιότητες

i) Αν τα διανύσματα είναι συγγραμμικά, τότε το εξωτερικό τους γινόμενο ισούται με το μηδενικό διάνυσμα και αντίστροφα - βλέπε και Ορισμό 1.6.1 - 1.

ii) Αν τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ έχουν κοινή αρχή, τότε το μέτρο του εξωτερικού γινομένου τους ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου, που ορίζουν τα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$.

1.6.3 Υπολογισμός συναρτήσει των συντεταγμένων

Αν $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$ και $\boldsymbol{\beta} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα, τότε, επειδή τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους και σύμφωνα με τον Ορισμό 1.6.1 - 1 είναι:

$$\begin{array}{lllllllll} \mathbf{i}\times\mathbf{j} & = & \mathbf{k} & \mathbf{j}\times\mathbf{k} & = & \mathbf{i} & \mathbf{k}\times\mathbf{i} & = & \mathbf{j} \\ \mathbf{j}\times\mathbf{i} & = & -\mathbf{k} & \mathbf{k}\times\mathbf{j} & = & -\mathbf{i} & \mathbf{i}\times\mathbf{k} & = & -\mathbf{j} \\ \mathbf{i}\times\mathbf{i} & = & \mathbf{0} & \mathbf{j}\times\mathbf{j} & = & \mathbf{0} & \mathbf{k}\times\mathbf{k} & = & \mathbf{0}, \end{array} \qquad (1.6.3\text{ - }1)$$

προκύπτει με ανάλογους με το εσωτερικό γινόμενο υπολογισμούς ότι

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} &= (\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\times(\beta_1\mathbf{i}+\beta_2\mathbf{j}+\beta_3\mathbf{k}) = \beta_1(\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\times\mathbf{i} \\ &\quad +\beta_2(\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\times\mathbf{j}+\beta_3(\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\times\mathbf{k} \\ &= \beta_1(\alpha_1\,\mathbf{i}\times\mathbf{i}+\alpha_2\,\mathbf{j}\times\mathbf{i}+\alpha_3\,\mathbf{k}\times\mathbf{i})+\beta_2(\alpha_1\,\mathbf{i}\times\mathbf{j}+\alpha_2\,\mathbf{j}\times\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k}\times\mathbf{j}) \\ &\quad +\beta_3(\alpha_1\,\mathbf{i}\times\mathbf{k}+\alpha_2\,\mathbf{j}\times\mathbf{k}+\alpha_3\,\mathbf{k}\times\mathbf{k}), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} = (\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\,\mathbf{i}-(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)\,\mathbf{j}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\,\mathbf{k}. \qquad (1.6.3\text{ - }2)$$

Η $(1.6.3-2)$ γράφεται με μορφή ορίζουσας 3ης τάξης ως εξής:[10]

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}. \qquad (1.6.3\text{ - }3)$$

[10] Για ορίζουσες βλέπε Μάθημα *Γραμμική Άλγεβρα*.

Υπενθυμίζεται ότι το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας 2ης τάξης είναι

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \qquad (1.6.3\text{ - }4)$$

ενώ η $(1.6.3-3)$, όταν αναπτυχθεί ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής διαγράφοντας κάθε φορά τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου που θεωρείται και ορίζοντας την ορίζουσα 2ης τάξης που προκύπτει από τα αριστερά προς τα δεξιά, γράφεται

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \qquad (1.6.3\text{ - }5) \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\ &= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\,\mathbf{i} - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\,\mathbf{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\,\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Σημειώσεις 1.6.3 - 1

i) Η ορίζουσα υπολογισμού του εξωτερικού γινομένου είναι πάντοτε 3ης τάξης, δηλαδή της μορφής $(1.6.3-3)$.

ii) Όταν τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ είναι συνεπίπεδα, δηλαδή

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\beta} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j},$$

τότε σύμφωνα με την $(1.6.3-3)$ είναι

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{vmatrix} = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\,\mathbf{k}, \qquad (1.6.3\text{ - }6)$$

δηλαδή ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ - περίπτωση (ii) του Ορισμού 1.6.1 - 1.

Παράδειγμα 1.6.3 - 1

Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ και $\boldsymbol{\beta} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Ζητείται να υπολογιστεί το μέτρο του $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$.

Λύση. Σύμφωνα με την $(1.6.3 - 5)$ είναι

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (-2-1)\,\mathbf{i} - (1-2)\,\mathbf{j} + (1+4)\,\mathbf{k} = -3\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Άρα

$$|\,\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}\,| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{35} \approx 5.91608.$$

Ο υπολογισμός του εσωτερικού και του εξωτερικού γινομένου με το MATHEMATICA γίνεται ως εξής: αν $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ και $\mathbf{y} = \langle y_1, y_2, y_3 \rangle$, τότε

```
Dot[{x_1,x_2,x_3},{y_1,y_2,y_3}]          εσωτερικό
Cross[{x_1,x_2,x_3},{y_1,y_2,y_3}]        εξωτερικό
```

1.7 Μεικτό γινόμενο διανυσμάτων

1.7.1 Ορισμός και τύπος υπολογισμού

Ορισμός 1.7.1 - 1. *Έστω $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma}$ μη συνεπίπεδα και μη μηδενικά διανύσματα. Τότε το* **μεικτό** *ή* **τριπλό** *(triple product)*[11] *γινόμενό τους ορίζεται ως ο αριθμός*

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma})\,. \qquad (1.7.1 - 1)$$

[11] Βλέπε επίσης: *http://en.wikipedia.org/wiki/Triple_product*

Τύπος υπολογισμού

Πρόταση 1.7.1 - 1 *Αν* $\boldsymbol{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$, $\boldsymbol{\beta} = \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ *και* $\boldsymbol{\gamma} = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle$, *τότε*

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) = \det(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \qquad (1.7.1 - 1)$$

Η απόδειξη της πρότασης προκύπτει άμεσα από τους τύπους $(1.5.3-1)$ και $(1.6.3-2)$ σε συνδυασμό με τον τύπο $(1.6.3-5)$.

Η ορίζουσα του δεξιού μέλους στην $(1.7.1-1)$ σύμφωνα με την $(1.6.3-5)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) &= \det(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \\ &= \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \\ &= \alpha_1 (\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) - \alpha_2 (\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) \\ &\quad + \alpha_3 (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1). \end{aligned} \qquad (1.7.1 - 2)$$

Παράδειγμα 1.7.1 - 1

Αν $\boldsymbol{\alpha} = \langle -2, 3, 1 \rangle$, $\boldsymbol{\beta} = \langle 0, 4, 0 \rangle$ και $\boldsymbol{\gamma} = \langle -1, 3, 3 \rangle$, να υπολογιστεί το μεικτό γινόμενο $\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma})$.

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(1.7.1-2)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}) &= \det(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -2(4\cdot 3-0)-3\cdot 0+1\,[0-4(-1)] \\ &= -24+4=-20.\end{aligned}$$

■

1.7.2 Γεωμετρική ερμηνεία

Πρόταση 1.7.2 - 1. *Γεωμετρικά η απόλυτη τιμή του μεικτού γινομένου των διανυσμάτων των μη συνεπίπεδων και μη μηδενικών διανυσμάτων* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *και* $\boldsymbol{\gamma}$ *ισούται με τον όγκο, έστω* V, *του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα παραπάνω διανύσματα (Σχ. 1.7.2 - 1), δηλαδή*

$$V = |\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})|\,. \qquad (1.7.2\text{ - }1)$$

Το συμπέρασμα της πρότασης ορίζει και τη γεωμετρική ερμηνεία του μεικτού γινομένου.

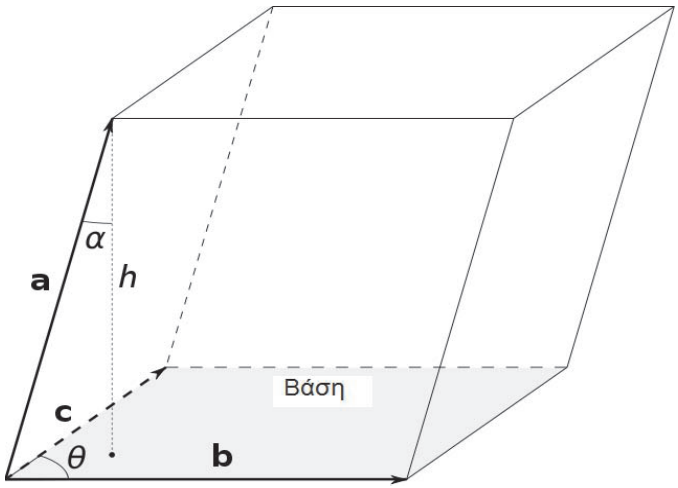
Παράδειγμα 1.7.2 - 1

Σύμφωνα με τον τύπο $(1.7.2-1)$ ο όγκος V του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα διανύσματα του Παραδείγματος 1.7.1 - 1 είναι

$$V = |-20| = 20.$$

1.7.3 Ιδιότητες

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:



Σχήμα 1.7.2 - 1: το παραλληλεπίπεδο που σχηματίζεται από τα διανύσματα α, β και γ.

- Το μεικτό γινόμενο είναι αμετάβλητο σε μια κυκλική εναλλαγή των διανυσμάτων α, β και γ, δηλαδή

$$\alpha \cdot (\beta \times \gamma) = \beta \cdot (\gamma \times \alpha) = \gamma \cdot (\alpha \times \beta)\,. \qquad (1.7.3 - 1)$$

- Η εναλλαγή του εσωτερικού γινομένου στα άκρα διανύσματα δεν μεταβάλλει την τιμή του, δηλαδή

$$\alpha \cdot (\beta \times \gamma) = (\alpha \times \beta) \cdot \gamma \qquad (1.7.3 - 2)$$

- Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta \times \gamma) &= -\alpha \cdot (\gamma \times \beta) \\ \alpha \cdot (\beta \times \gamma) &= -\beta \cdot (\alpha \times \gamma) \\ \alpha \cdot (\beta \times \gamma) &= -\gamma \cdot (\beta \times \alpha)\,. \end{aligned} \qquad (1.7.3 - 3)$$

- Επίσης συμβολικά ότι

$$[\alpha \cdot (\beta \times \gamma)]\,\alpha = (\alpha \times \beta) \times (\alpha \times \gamma)\,. \qquad (1.7.3 - 4)$$

- Το μεικτό γινόμενο ισούται με το μηδέν, όταν τα διανύσματα α, β και γ είναι συνεπίπεδα.

- Αν δύο από τα διανύσματα α, β και γ είναι ίσα, τότε το μεικτό γινόμενο είναι μηδέν, δηλαδή

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\alpha \times \gamma) &= \alpha \cdot (\beta \times \alpha) = \alpha \cdot (\beta \times \beta) \\ &= \alpha \cdot (\gamma \times \gamma) = 0. \end{aligned} \qquad (1.7.3 - 5)$$

1.8 Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων

1.8.1 Ορισμός

Ορισμός 1.8.1 - 1. *Τα διανύσματα* α_1, α_2, ..., α_ν *θα είναι* **γραμμικά ανεξάρτητα**, *όταν κάθε γραμμικός συνδυασμός των της μορφής*

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_\nu\alpha_\nu = \mathbf{0} \qquad (1.8.1 - 1)$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$; $i = 1, 2, \ldots, \nu$ *ισχύει τότε και μόνον, όταν*

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\nu = 0. \qquad (1.8.1 - 2)$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση τα διανύσματα θα λέγονται γραμμικά εξαρτημένα. Η $(1.8.1 - 2)$ είναι γνωστή και ως η **συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας**.

Παρατηρήσεις 1.8.1 - 1

- Το μηδενικό διάνυσμα είναι γραμμικά εξαρτημένο.

- Αν κάποιο από τα διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα.

- Αν τα διανύσματα α_1, α_2, ..., α_k είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε και τα α_1, α_2, ..., α_ν με $k < \nu$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

1.8.2 Σχετικές προτάσεις

Πρόταση 1.8.2 - 1. *Αν τα διανύσματα* $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}\langle\beta_1, \beta_2, \beta_3\rangle$ *με* $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε* $\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\beta}$ *με* $\lambda \in \mathbb{R}$ *και αντίστροφα.*

Απόδειξη. *Ευθύ.* Επειδή τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ με $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, θα πρέπει για κάθε γραμμικό συνδυασμό της μορφής $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ να είναι $\lambda_1 \neq 0$, δηλαδή $\boldsymbol{\alpha} = -(\lambda_2/\lambda_1)\boldsymbol{\beta}$, οπότε $\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\beta}$.
Αντίστροφο. Επειδή $\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\beta}$, θα πρέπει $1\boldsymbol{\alpha} - \lambda\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, δηλαδή τα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. ∎

Από την Πρόταση 1.8.2 - 1 προκύπτει τότε ότι, αν τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$ και $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}\langle\beta_1, \beta_2, \beta_3\rangle$ με $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε ισχύει η παρακάτω **συνθήκη παραλληλίας**:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3}. \qquad (1.8.2 - 3)$$

Πρόταση 1.8.2 - 2. *Τα διανύσματα* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$ *με* $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα τότε και μόνον, όταν είναι παράλληλα.*

Παρατήρηση 1.8.2 - 1

Οι Προτάσεις 1.8.2 - 1 και 1.8.2 - 2 ισχύουν ανάλογα και για τα επίπεδα διανύσματα.

Ορισμός 1.8.2 - 2. *Δύο ή περισσότερα διανύσματα είναι συνεπίπεδα, όταν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο ή είναι παράλληλα προς αυτό.*

Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.8.1 - 1 και τις Προτάσεις 1.8.2 - 1 και 1.8.2 - 2 εύκολα αποδεικνύονται οι παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση 1.8.2 - 3. *Αν τα διανύσματα* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε κάθε διάνυσμα της μορφής*

$$\boldsymbol{\gamma} = k\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\beta} \quad \mu\varepsilon \quad k, \mu \in \mathbb{R} \qquad (1.8.2 - 4)$$

ανήκει στο επίπεδο Π*, που ορίζουν τα* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$ *και αντίστροφα κάθε διάνυσμα του επιπέδου* Π*, που ορίζεται από τα* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$*, αναλύεται στη μορφή* $(1.8.2-4)$.

Πρόταση 1.8.2 - 4. *Αν τα διανύσματα* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *και* $\boldsymbol{\gamma}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε θα είναι συνεπίπεδα και αντίστροφα.*

Πρόταση 1.8.2 - 5. *Αν τα διανύσματα* $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *και* $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ *είναι συνεπίπεδα, τότε*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.8.2 - 5)$$

Προφανώς, αν $\Delta \neq 0$, τα διανύσματα δεν είναι συνεπίπεδα.

Ασκήσεις

1. Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = \langle 2, -1, 4\rangle$, $\boldsymbol{\beta} = \langle 1, -2, 5\rangle$ και $\boldsymbol{\gamma} = \langle 1, 2, -1\rangle$. Να υπολογιστούν:

i) τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} + 2\boldsymbol{\beta} - 3\boldsymbol{\gamma}$, $2\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$ και τα αντίστοιχα μοναδιαία τους,

ii) τα γινόμενα $(\boldsymbol{\alpha} + 3\boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\alpha} + 3\boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\gamma}$ και $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το μοναδιαίο διάνυσμα κατά διεύθυνση $\boldsymbol{\delta}$.

2. Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = \langle 1, 2, 3\rangle$, $\boldsymbol{\beta} = \langle 2, -2, 3\rangle$ και $\boldsymbol{\gamma} = \langle k, l, m\rangle$. Να υπολογιστούν τα k, l και m, έτσι ώστε $5\boldsymbol{\alpha} + 3\boldsymbol{\beta} + 2\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$.

3. Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = \langle 1, 1 - 2l, 4 + m\rangle$ και $\boldsymbol{\beta} = \langle -2, 5 + l, 8 - m\rangle$. Να υπολογιστούν τα l, m, έτσι ώστε τα διανύσματα να είναι παράλληλα.

4. Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ του χώρου $\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα του $\mathbb{R}^2$. Να δειχθούν οι ταυτότητες

i) $|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}|^2 - |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|^2 = 4\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$,

ii) $|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}|^2 + |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|^2 = 2\,|\boldsymbol{\alpha}|^2 + 2\,|\boldsymbol{\beta}|^2$.

5. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = \langle 1, 2, 3\rangle$, $\boldsymbol{\beta} = \langle 1, -1, 4\rangle$ και $\boldsymbol{\gamma} = \langle 2, 4, 1\rangle$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Στη συνέχεια αναλύστε το διάνυσμα $\boldsymbol{\delta} = \langle 1, 1, 1\rangle$ ως προς τα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma}$.

6. Δείξτε ότι, αν $AB\Gamma\Delta$ είναι ένα τετράεδρο[12] με κορυφή A όπου $A\,(x_1, y_1, z_1)$, $B\,(x_2, y_2, z_2)$, $\Gamma\,(x_3, y_3, z_3)$ και $\Delta\,(x_4, y_4, z_4)$, τότε ο όγκος του τετραέδρου ισούται με

$$V = \frac{1}{6}\,|A|, \quad \text{όταν} \quad A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Απαντήσεις

1. i) $\boldsymbol{\alpha} + 2\boldsymbol{\beta} - 3\boldsymbol{\gamma} = \langle 1, -11, 17\rangle$, $2\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} = \langle 4, 2, 2\rangle$ κ.λπ. ii) $(\boldsymbol{\alpha} + 3\boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\gamma} = -28$, $\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\alpha} + 3\boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\gamma} = \langle -31, 14, 17\rangle$ και $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) =$ κ.λπ.
2. Από $(1.8.2-3)$ προκύπτει ότι: $k = -11/2$, $l = -2$ και $m = -12$.
3. Όμοια $l = 7/3$ και $m = -16$. **4.** Εφαρμογή των $(1.5.3-1)$ και $(1.5.3-2)$.
5. Από τον Ορισμό 1.8.1 - 1 προκύπτει ότι αν

$$\lambda_1\langle 1, 2, 3\rangle + \lambda_2\langle 1, -1, 4\rangle + \lambda_3\langle 2, 4, 1\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle,$$

τότε το ομογενές σύστημα

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \quad 2\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0, \quad 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

έχει μοναδική λύση την $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, επειδή η ορίζουσα των συντελεστών του

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Στη συνέχεια αναζητούνται συντελεστές x, y, z, έτσι ώστε: $\boldsymbol{\delta} = x\boldsymbol{\alpha} + y\boldsymbol{\beta} + z\boldsymbol{\gamma}$, οπότε τελικά

$$x = -\frac{18}{17}, \quad y = \frac{1}{17} \quad \text{και} \quad z = \frac{7}{17}.$$

6. Βλέπε αντίστοιχη απόδειξη θεωρίας, τύπο $(1.6.3-3)$ κ.λπ.

[12] Συμβολίζεται επίσης και $A.B\Gamma\Delta$, όταν A η κορυφή.

1.9 Βιβλιογραφία

[1] Καδιανάκης, Ν. & Καρανάσιος, Σ. (2008). *Γραμμική Άλγεβρα, Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές*. ISBN: 960–917–250–4.

[2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Αθήνα: Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Ξένος, Θ. (2004), *Αναλυτική Γεωμετρία*. Εκδόσεις Ζήτη. ISBN 960–431–915–9.

[4] Φούντας, Γρ. (2009). *Αναλυτική & Διανυσματική Γεωμετρία*. Εκδόσεις Γρηγ. Φούντα. ISBN 960–330–517–0.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 2

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Στο Μάθημα αυτό θα δοθούν οι κυριότερες έννοιες της Αναλυτικής Γεωμετρίας, που θεωρούνται απαραίτητες για τα επόμενα. Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4].

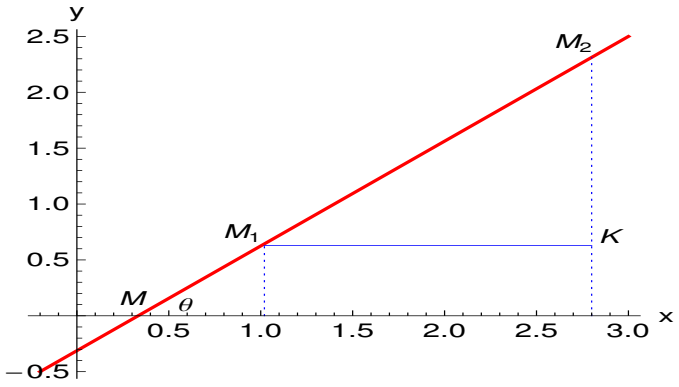
2.1 Ευθεία

2.1.1 Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Ορισμός 2.1.1 - 1. *Έστω το ορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxy και μία ευθεία ε. Αν θ είναι η γωνία που διαγράφει ο άξονας Ox, όταν περιστραφεί γύρω από το σημείο M κατά τη δεξιόστροφη φορά, έως ότου συμπέσει με την ε, τότε η εφαπτομένη της γωνίας θ ορίζει τον* **συντελεστή διεύθυνσης** *της ε, έστω λ, δηλαδή $\lambda = \tan\theta$ (Σχ. 2.1.1 - 1).*

Πρόταση 2.1.1 - 1. *Αν $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ είναι δύο τυχόντα σημεία μιας μη παράλληλης προς τους άξονες ευθείας, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας ισούται με*

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,. \qquad (2.1.1 - 1)$$



Σχήμα 2.1.1 - 1: ο συντελεστής διεύθυνσης $\lambda = \tan\theta$ της ευθείας M_1M_2.

Απόδειξη. Από το ορθογώνιο τρίγωνο KM_1M_2 (Σχ. 2.1.1 - 1) έχουμε

$$\lambda = \tan\theta = \frac{|KM_2|}{|M_1K|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,,$$

δηλαδή η αποδεικτέα. ∎

Παρατήρηση 2.1.1 - 1

Αν η ευθεία είναι παράλληλη προς τον

i) x-άξονα, τότε

$$\lambda = 0, \tag{2.1.1 - 2}$$

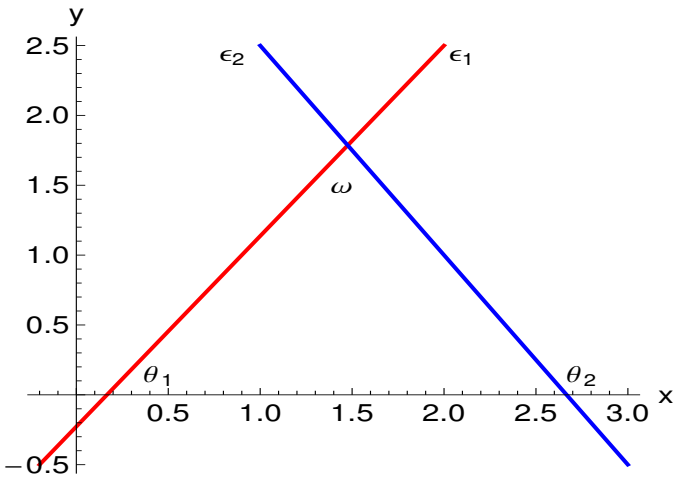
ii) y-άξονα, είναι

$$\lambda = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \tan\theta = \infty. \tag{2.1.1 - 3}$$

2.1.2 Γωνία δύο ευθειών

Πρόταση 2.1.2 - 1. *Έστω οι ευθείες ε_1, ε_2 με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα. Τότε, αν ω είναι η κυρτή γωνία των, ισχύει ότι (Σχ. 2.1.2 - 1)*

$$\tan\omega = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2}\,. \tag{2.1.2 - 1}$$



Σχήμα 2.1.2 - 1: η γωνία ω των ευθειών ε_1 και ε_2.

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση αποδεικνύεται ότι:

Πόρισμα 2.1.2 - 1. *Έστω ε_1 και ε_2 δύο ευθείες με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα. Τότε ικανή και αναγκαία συνθήκη, έτσι ώστε οι ευθείες αυτές να είναι*

- *παράλληλες είναι*

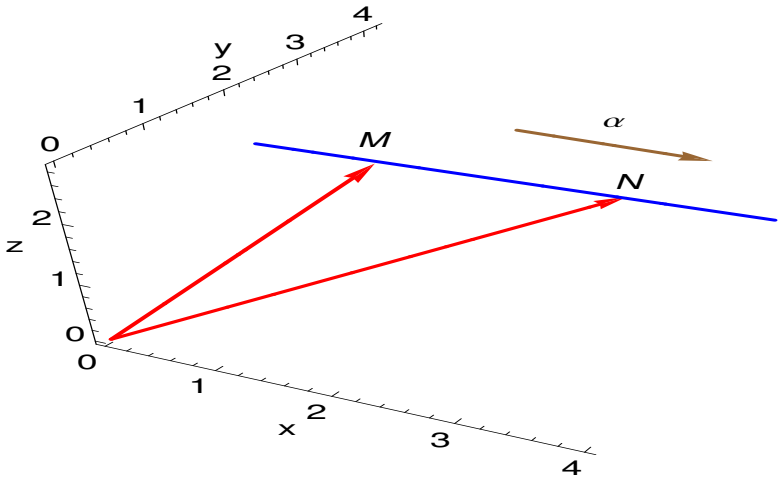
$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad (\textbf{συνθήκη παραλληλίας}) \tag{2.1.2 - 2}$$

- *κάθετες είναι*

$$\lambda_1 \, \lambda_2 = -1. \quad (\textbf{συνθήκη καθετότητας}) \tag{2.1.2 - 3}$$

Ορισμός 2.1.2 - 1. *Ορίζεται ως* **συντελεστής διεύθυνσης** *ενός διανύσματος ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που ορίζει.*

Δίνονται στη συνέχεια οι κυριότερες μορφές της εξίσωσης μίας ευθείας στο επίπεδο, αντίστοιχα στον χώρο. Σημειώνεται ότι στο εξής οι όροι διανυσματική, αντίστοιχα παραμετρική εξίσωση, όταν χρησιμοποιούνται, είναι ισοδύναμοι.



Σχήμα 2.1.3 - 1: η ευθεία MN που διέρχεται από σημείο M και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$ όπου $\mathbf{r} = \mathbf{ON}$ και $\mathbf{r}_1 = \mathbf{OM}$.

2.1.3 Ευθεία από σημείο παράλληλη προς διάνυσμα

Διανυσματική εξίσωση

Έστω ότι ζητείται η εξίσωση μιας ευθείας, που διέρχεται από ένα σημείο, έστω M και είναι παράλληλη προς ένα διάνυσμα, έστω $\boldsymbol{\alpha}$ (Σχ. 2.1.3 - 1). Αν $\mathbf{r}_1$ το ακτινικό διάνυσμα του σημείου M και N ένα άλλο τυχόν σημείο της ευθείας με ακτινικό διάνυσμα $\mathbf{r}$, τότε, επειδή τα διανύσματα $\mathbf{MN}$ και $\boldsymbol{\alpha}$ είναι παράλληλα, θα πρέπει σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.1 - 1 να υπάρχει πραγματικός αριθμός t (παράμετρος), έτσι ώστε $\mathbf{MN} = t\boldsymbol{\alpha}$. Αλλά $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{MN}$, οπότε έχουμε την παρακάτω **διανυσματική εξίσωση** της ευθείας στην περίπτωση αυτή

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\boldsymbol{\alpha}, \qquad (2.1.3 - 1)$$

όταν η παράμετρος $t \in \mathbb{R}$.

Αναλυτική εξίσωση στον χώρο

Έστω $\boldsymbol{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ και $M(x_1, y_1, z_1)$. Τότε η $(2.1.3-1)$ γράφεται

$$(x - x_1)\,\mathbf{i} \quad + \quad (y - y_1)\,\mathbf{j} + (z - z_1)\,\mathbf{k}$$

$$= t\alpha_1\mathbf{i} \quad + \quad t\alpha_2\mathbf{j} + t\alpha_3\mathbf{k},$$

οπότε εξισώνοντας τους συντελεστές των $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ και στη συνέχεια απαλείφοντας το t, τελικά προκύπτει ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της ευθείας στον χώρο είναι η

$$\frac{x - x_1}{\alpha_1} = \frac{y - y_1}{\alpha_2} = \frac{z - z_1}{\alpha_3}\,. \qquad (2.1.3\text{ - }2)$$

Αναλυτική εξίσωση στο επίπεδο

Η $(2.1.3-1)$ στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$(x - x_1)\,\mathbf{i} + (y - y_1)\,\mathbf{j} = t\alpha_1\mathbf{i} + t\alpha_2\mathbf{j},$$

οπότε όμοια τελικά αποδεικνύεται ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της ευθείας στην περίπτωση αυτή είναι η

$$\frac{x - x_1}{\alpha_1} = \frac{y - y_1}{\alpha_2} \quad \text{ή} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.1.3\text{ - }3)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 2.1.3 - 1. *Αν ένα διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} = \langle a_1, a_2 \rangle$ είναι παράλληλο προς μία ευθεία ε, που δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα Oy, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι*

$$\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\,.$$

Με το MATHEMATICA η γραφική παράσταση της παραπάνω ευθείας γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 2.1.3 - 1 (ευθείας παράλληλης σε διάνυσμα)

```
L1 = Arrow[{{0.0, 0, 0}, {1.5, 1.5, 2.5}}];
f1 = Graphics3D[{Red, Thick, L1}];
L2 = Arrow[{{0.0, 0, 0}, {2.5, 3.7, 0.95}}];
f2 = Graphics3D[{Red, Thick, L2}];
L3 = Line[{{0.5, 1.5, 2.5}, {4, 3, 1.5}}];
f3 = Graphics3D[{Blue, Thick, L3}];
L4 = Arrow[{{2, 2.7, 2.5}, {3, 4.2, 1.45}}];
f4 = Graphics3D[{Brown, Thick, L4}];
f5 = Show[{Graphics3D[Text[\[Alpha], {2.75, 2.75, 2.85}]],
    Graphics3D[Text[M, {1.5, 1.5, 2.85}]],
    Graphics3D[Text[N, {2.5, 3.7, 1.2}]]}];
fgr = Show[f1, f2, f3, f4, f5, Boxed -> False,
  Axes -> {True, True, True}, AxesLabel -> {"x", "y", "z"},
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14}]
```

2.1.4 Ευθεία από δύο σημεία

Διανυσματική εξίσωση

Έστω M_1, M_2 δύο τυχόντα σημεία της ευθείας με διανυσματικές ακτίνες $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1, z_1\rangle$, $\mathbf{r}_2 = \langle x_2, y_2, z_2\rangle$ αντίστοιχα και M τυχόν άλλο σημείο της με ακτινικό διάνυσμα, έστω $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$. Τότε η περίπτωση αυτή ανάγεται στην αντίστοιχη της Παραγράφου 2.1.3 θέτοντας $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, οπότε η **διανυσματική εξίσωση** θα είναι

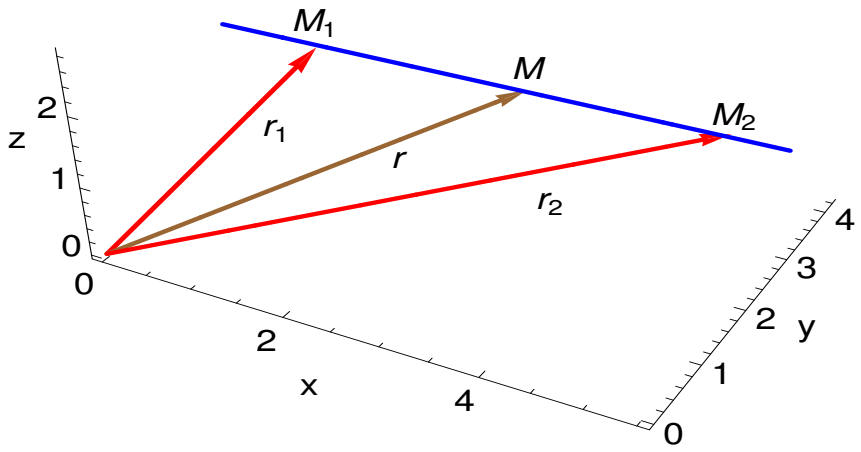
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\,(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\,, \qquad (2.1.4\text{ - }1)$$

όταν η παράμετρος $t \in \mathbb{R}$.

Η $(2.1.4-1)$ χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές εκφράσεις $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ και $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$, τελικά γράφεται

$$\begin{aligned} x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \;&=\; [tx_2 + (1-t)x_1]\,\mathbf{i} + [ty_2 + (1-t)y_1]\,\mathbf{j} \\ &\quad + [tz_2 + (1-t)z_1]\,\mathbf{k}, \end{aligned} \qquad (2.1.4\text{ - }2)$$

όταν η παράμετρος $t \in \mathbb{R}$. Η $(2.1.4-2)$ είναι γνωστή και ως η **παραμετρική εξίσωση της ευθείας** στον χώρο.



Σχήμα 2.1.4 - 1: παραμετρική παράσταση ευθείας από δύο σημεία M_1 και M_2.

Σημείωση 2.1.4 - 1

- Όταν $t \in [0,1]$, η $(2.1.4-2)$ ορίζει την **παραμετρική εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος** M_1M_2 (Σχ. 2.1.4 - 1).
- Η $(2.1.4-2)$ στο επίπεδο γράφεται

$$\begin{aligned} x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j} &= [tx_2+(1-t)x_1]\,\mathbf{i} \\ &\quad +[ty_2+(1-t)y_1]\,\mathbf{j}, \qquad (2.1.4\text{ - }3) \end{aligned}$$

  όταν επίσης η παράμετρος $t \in \mathbb{R}$, που είναι γνωστή ως η **παραμετρική εξίσωση της ευθείας** στο επίπεδο.

Αναλυτική εξίσωση στον χώρο

Έστω $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Τότε η $(2.1.4-2)$ γράφεται

$$\begin{aligned} (x-x_1)\,\mathbf{i} &+ (y-y_1)\,\mathbf{j}+(z-z_1)\,\mathbf{k} \\ =t\,(x_2-x_1)\,\mathbf{i} &+ t\,(y_2-y_1)\,\mathbf{j}+t\,(z-z_1)\,\mathbf{k}, \end{aligned}$$

οπότε εξισώνοντας τους συντελεστές των $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ και στη συνέχεια απαλείφοντας το t, τελικά προκύπτει ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της ευθείας στον χώρο είναι η

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\,. \qquad (2.1.4\text{ - }4)$$

Αναλυτική εξίσωση στο επίπεδο

Όμοια από την $(2.1.4-3)$ προκύπτει ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της ευθείας στο επίπεδο είναι η

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\quad \text{ή}\quad \begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0. \qquad (2.1.4\text{ - }5)$$

Όμοια σύμφωνα με τα παραπάνω αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 2.1.4 - 1 *Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο* $M(x_0,y_0)$ *και έχει συντελεστή διεύθυνσης* λ *δίνεται από την εξίσωση*

$$y-y_0=\lambda(x-x_0)\,. \qquad (2.1.4\text{ - }6)$$

Με το MATHEMATICA η γραφική παράσταση της παραπάνω ευθείας γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 2.1.4 - 1 (ευθείας από 2 σημεία)

```
L1 = Arrow[{{0.0, 0, 0}, {1.5, 1.5, 2.5}}];
f1 = Graphics3D[{Red, Thick, L1}];
L2 = Arrow[{{0.0, 0, 0}, {2.5, 3.7, 0.9}}];
f2 = Graphics3D[{Brown, Thick, L2}];
L3 = Line[{{0.5, 1.5, 2.5}, {5.5, 3, 1.5}}];
f3 = Graphics3D[{Blue, Thick, L3}];
L4 = Arrow[{{0, 0, 0}, {4.5, 4.2, 0.6}}];
f4 = Graphics3D[{Red, Thick, L4}];
f5 = Show[{Graphics3D[Text[Subscript[r, 1], {1.2, 1.2, 1.5}]],
    Graphics3D[Text[Subscript[r, 2], {4.0, 1.2, 1.5}]],
    Graphics3D[Text[r, {2.5, 1.2, 1.5}]],
    Graphics3D[Text[Subscript[M, 1], {1.5, 1.5, 2.85}]],
    Graphics3D[Text[M, {2.5, 3.7, 1.2}]],
```

```
    Graphics3D[Text[Subscript[M, 2], {4.5, 4.2, 0.9}]]};
fgr = Show[f1, f2, f3, f4, f5, Boxed -> False,
  Axes -> {True, True, True}, AxesLabel -> {"x", "y", "z"},
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14}]
```

2.1.5 Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας στο επίπεδο

Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 2.1.5 - 1. *Η γενική μορφή της αναλυτικής εξίσωσης της ευθείας στο επίπεδο είναι*

$$Ax + By + \Gamma = 0, \tag{2.1.5 - 1}$$

όταν $|A| + |B| \neq 0$ *και αντίστροφα.*

Απόδειξη. *Ευθύ.* Από την $(2.1.4-5)$ - όμοια αποδεικνύεται από την $(2.1.3-3)$ - αναπτύσσοντας την ορίζουσα προκύπτει ότι η εξίσωση της ευθείας διαδοχικά γράφεται

$$x \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

ή

$$x\,(y_1 - y_2) - y\,(x_1 - x_2) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0,$$

δηλαδή η αποδεικτέα με

$$A = y_1 - y_2, \quad B = x_2 - x_1 \quad \text{και} \quad \Gamma = x_1 y_2 - x_2 y_1. \tag{2.1.5 - 2}$$

Το *αντίστροφο* είναι προφανές. ∎

Από τις $(2.1.5-2)$ και $(2.1.1-1)$ προκύπτει ότι:

Πόρισμα 2.1.5 - 1. *Ο συντελεστής διεύθυνσης* λ *της ευθείας* $Ax+By+\Gamma = 0$ *ισούται με*

$$\lambda = -\frac{A}{B}. \tag{2.1.5 - 3}$$

Διερεύνηση της εξίσωσης $Ax + By + \Gamma = 0$**, όταν** $|A| + |B| \neq 0$

Διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

i) $A \neq 0, \quad B = 0$

Τότε από την $(2.1.5-1)$ προκύπτει ότι $x = -\Gamma/A$, που παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο $(-\Gamma/A,\, y)$ και είναι παράλληλη προς τον άξονα Oy. Αν και $\Gamma = 0$, τότε η ευθεία συμπίπτει με τον άξονα Oy.

ii) $A = 0, \quad B \neq 0$

Τότε από την $(2.1.5-1)$ προκύπτει ότι $y = -\Gamma/B$, που παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο $(x,\, -\Gamma/B)$ και είναι παράλληλη προς τον άξονα Ox. Αν και $\Gamma = 0$, τότε η ευθεία συμπίπτει με τον άξονα Ox.

iii) $\Gamma = 0$

Η $(2.1.5-1)$ παριστάνει ευθεία, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iv) $A,\, B,\, \Gamma \neq 0$

Η $(2.1.5-1)$ γράφεται

$$-\frac{x}{\Gamma/A} - \frac{y}{\Gamma/B} = 1,$$

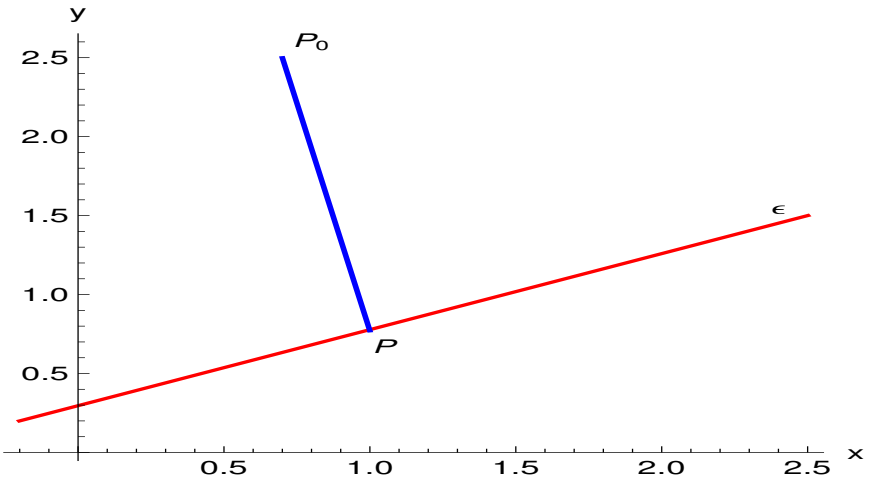
δηλαδή

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (2.1.5\text{ - }4)$$

όπου τα $a = -\Gamma/A$ και $b = -\Gamma/B$ λέγονται και **συντεταγμένες επί την αρχή** της $(2.1.5-1)$.

Πρόταση 2.1.5 - 2. *Έστω οι ευθείες* ε_1, ε_2 *και* ε_3 *με αντίστοιχες εξισώσεις*

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0, \;\; A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \;\; \textit{και} \;\; A_3x + B_3y + \Gamma_3 = 0.$$



Σχήμα 2.1.6 - 1: η απόσταση $d(P_0, \varepsilon) = P_0P$ του σημείου $P_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\varepsilon: \; Ax + By + \Gamma = 0$.

Τότε ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε οι ευθείες να διέρχονται από το ίδιο σημείο, είναι

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.1.5 - 5)$$

2.1.6 Απόσταση σημείου από ευθεία

Έστω η ευθεία ε με εξίσωση

$$\varepsilon: \quad Ax + By + \Gamma = 0$$

και τυχόν σημείο της $P_0(x_0, y_0)$. Τότε αποδεικνύεται ότι η απόσταση P_0P του σημείου P_0 από την ε δίνεται από τον τύπο (Σχ. 2.1.6 - 1)

$$d(P_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (2.1.6 - 1)$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της ευθείας στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) έχει συντεταγμένες επί την αρχή 3 και -5,

ii) έχει τετμημένη επί την αρχή 4 και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\mathbf{a} = (1, -3)$,

iii) διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $x - y = 7$, $x + 2y = 5$ και είναι κάθετη στην ευθεία $2x - 5y + 3 = 0$,

iv) διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$ και σχηματίζει γωνία $\pi/4$ με την ευθεία $x - 7y + 5 = 0$.

2. Να υπολογιστεί η γωνία των ευθειών $2x - y = 4$ και $3x + y = 1$.

3. Έστω το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, 2)$, $(3, 4)$ και $(-2, -3)$. Να υπολογιστούν:

i) οι εξισώσεις των διαγωνίων, των υψών και των διχοτόμων του,

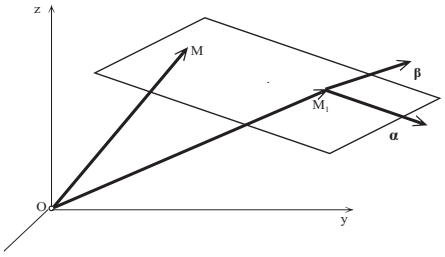
ii) οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους.

4. Να υπολογιστεί η τιμή της παραμέτρου λ, έτσι ώστε η ευθεία $\lambda x + y + 1 = 0$ να διέρχεται από το κοινό σημείο τομής των ευθειών $2x - y + 1 = 0$ και $x - y + 5 = 0$.

Απαντήσεις

1. (i) Τύπος $(2.1.5 - 4)$ όπου $a = 3$ και $b = -5$. (ii) Όμοια με (i).
(iii) Από τη λύση του συστήματος $x - y = 7$, $x + 2y = 5$ προκύπτει ότι το κοινό σημείο των ευθειών είναι το $P_0\,(x_0, y_0) = (19/3, -2/3)$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της $2x - 5y + 3 = 0$ είναι $\lambda = 5/2$, οπότε σύμφωνα με τη συνθήκη καθετότητας $(2.1.2 - 3)$ ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας θα είναι $\lambda_1 = -5/2$. Άρα από την $(2.1.4 - 6)$ προκύπτει τελικά ότι η εξίσωση είναι η $6y + 15x = 91$.
(iv) Έστω λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας, λ_1 της ευθείας $x - 7y + 5 = 0$ και ω η κυρτή γωνία των. Τότε σύμφωνα με την $(2.1.5 - 3)$ είναι $\lambda_1 = \frac{1}{7}$, οπότε από την $(2.1.5 - 3)$ προκύπτει τότε ότι

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\lambda - \frac{1}{7}}{1 + \frac{\lambda}{7}} \quad \text{δηλαδή} \quad \lambda = \frac{4}{3}\,.$$



Σχήμα 2.2.1 - 1: επίπεδο από σημείο M παράλληλο προς τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$.

Αν $(x_0, y_0) = (1, 1)$, τότε από την $(2.1.4 - 6)$ προκύπτει ότι η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι $4x - 3y - 1 = 0$.

2. Όμοια, αν ω η κυρτή γωνία των, τότε για τις ευθείες $2x - y = 4$ και $3x + y = 1$ σύμφωνα με την $(2.1.5 - 3)$ είναι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = -3$, οπότε τελικά $\omega = \tan^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$. Όμοια και οι υπόλοιπες ασκήσεις.

2.2 Επίπεδο

2.2.1 Επίπεδο από σημείο και παράλληλο προς 2 διανύσματα

Έστω ένα επίπεδο που διέρχεται από το σημείο $M\,(x_1, y_1, z_1)$ και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ και $\boldsymbol{\beta} = \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$, όταν τα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ υποτίθεται ότι δεν είναι παράλληλα μεταξύ τους (Σχ. 2.2.1 - 1).

Διανυσματική εξίσωση

Επειδή τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ δεν είναι παράλληλα μεταξύ τους, θα πρέπει να τέμνονται σε ένα σημείο, έστω M_1. Τότε, επειδή τα διανύσματα $\mathbf{MM}_1$ και $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ είναι συνεπίπεδα, θα υπάρχουν παράμετροι $u,\, v \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε[1]

$$\mathbf{MM}_1 = u\,\boldsymbol{\alpha} + v\,\boldsymbol{\beta}. \qquad (2.2.1\text{ - }1)$$

Έστω $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ και $\mathbf{r}_1 = \mathbf{OM}_1$ οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων M και M_1 αντίστοιχα. Τότε προφανώς ισχύει ότι

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{MM}_1. \qquad (2.2.1\text{ - }2)$$

Από τις $(2.2.1-1)$ και $(2.2.1-2)$ προκύπτει τότε η παρακάτω **διανυσματική εξίσωση** του επιπέδου

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\,\boldsymbol{\alpha} + v\,\boldsymbol{\beta}, \qquad (2.2.1\text{ - }3)$$

όταν $u,\, v \in \mathbb{R}$.

Αναλυτική εξίσωση

Η $(2.2.1-3)$ γράφεται

$$\begin{aligned} x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \;&=\; (x_1 + u\alpha_1 + v\beta_1)\,\mathbf{i} \\ &\quad + (y_1 + u\alpha_2 + v\beta_2)\,\mathbf{j} + (z_1 + u\alpha_3 + v\beta_3)\,\mathbf{k}, \end{aligned}$$

οπότε εξισώνοντας τις αντίστοιχες συντεταγμένες των $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ έχουμε

$$x = x_1 + u\alpha_1 + v\beta_1\,, \quad y = y_1 + u\alpha_2 + v\beta_2\,, \quad z = z_1 + u\alpha_3 + v\beta_3,$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \alpha_1\,u + \beta_1\,v &= x_1 - x \\ \alpha_2\,u + \beta_2\,v &= y_1 - y \\ \alpha_3\,u + \beta_3\,v &= z_1 - z, \end{aligned} \qquad (2.2.1\text{ - }4)$$

[1] Βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 1.

που ορίζει ένα σύστημα 3 εξισώσεων με 2 αγνώστους τα u, v. Είναι γνωστό ότι η λύση των συστημάτων στην περίπτωση αυτή απαιτεί η λύση των 2 εξισώσεων να επαληθεύει και την 3η εξίσωση ή όπως διαφορετικά λέγεται το σύστημα να είναι **συμβιβαστό**.[2] Παρατηρούμε ότι στην $(2.2.1-4)$, επειδή τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ έχει υποτεθεί ότι δεν είναι παράλληλα μεταξύ τους, θα πρέπει για να είναι το σύστημα συμβιβαστό, μια τουλάχιστον από τις ποσότητες

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \quad \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \quad \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3$$

να είναι διάφορη του μηδενός.

Επομένως το σύστημα $(2.2.1-4)$ θα είναι συμβιβαστό, τότε και μόνον όταν:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.2.1\text{ - }5)$$

που ορίζει τελικά και την **αναλυτική εξίσωση** του επιπέδου στην περίπτωση αυτή.

2.2.2 Επίπεδο από δύο σημεία και παράλληλο προς διάνυσμα

Έστω ένα επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ και είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$.

Διανυσματική εξίσωση

Η περίπτωση αυτή ανάγεται στην αντίστοιχη της Παραγράφου 2.2.1 θέτοντας

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M_1M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,$$

όταν $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων M_1 και M_2 αντίστοιχα. Άρα η **διανυσματική εξίσωση** του επιπέδου είναι

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + v\boldsymbol{\alpha}, \qquad (2.2.2\text{ - }1)$$

όταν $u, v \in \mathbb{R}$.

[2] Όμοια βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 3.

Αναλυτική εξίσωση

Όμοια από την $(2.2.2-1)$ για τις συντεταγμένες του τυχόντος σημείου $M(x,y,z)$ του επιπέδου Π έχουμε:

$$\begin{aligned} u\,(x_2-x_1)+v\,\alpha_1 &= x_1-x, \\ u\,(y_2-y_1)+v\,\alpha_2 &= y_1-y, \\ u\,(z_2-z_1)+v\,\alpha_3 &= z_1-z \end{aligned}$$

που τελικά δίνει ως **αναλυτική εξίσωση** την

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.2.2\text{ - }2)$$

2.2.3 Επίπεδο από τρία σημεία

Έστω ένα επίπεδο που διέρχεται από τρία μη συνευθειακά σημεία $M_1\,(x_1,y_1,z_1)$, $M_2\,(x_2,y_2,z_2)$ και $M_3\,(x_3,y_3,z_3)$.

Διανυσματική εξίσωση

Όμοια η περίπτωση αυτή ανάγεται στην αντίστοιχη της Παραγράφου 2.2.1 θέτοντας

$$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{M_1M_2}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1, \quad \boldsymbol{\beta}=\mathbf{M_1M_3}=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1,$$

όταν $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ και $\mathbf{r}_3$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων M_1, M_2 και M_3 αντίστοιχα. Άρα η **διανυσματική εξίσωση** στην περίπτωση αυτή είναι

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+u\,(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)+v\,(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)\,. \qquad (2.2.3\text{ - }1)$$

Αναλυτική εξίσωση

Όμοια για τις συντεταγμένες του τυχόντος σημείου $M(x,y,z)$ του επιπέδου έχουμε

$$\begin{aligned} x &= x_1 + u\,(x_2 - x_1) + v\,(x_3 - x_1)\,, \\ y &= y_1 + u\,(y_2 - y_1) + v\,(y_3 - y_1)\,, \\ z &= z_1 + u\,(z_2 - z_1) + v\,(z_3 - z_1) \end{aligned}$$

που τελικά δίνει ως **αναλυτική εξίσωση** την

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.2.3\text{ - }2)$$

2.2.4 Γενική μορφή εξίσωσης επιπέδου

Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 2.2.4 - 1. *Η γενική μορφή της αναλυτικής εξίσωσης του επιπέδου είναι*

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0 \qquad (2.2.4\text{ - }1)$$

και αντίστροφα.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(1,1)$ και τέμνει κάθετα την τομή των επιπέδων $3x-5y+2=0$ και $2x+3z+1=0$.
2. Έστω τα επίπεδα $2x+3y+4z-6=0$ και $4x+6y+8z+24=0$. Ζητείται

i) να δειχθεί ότι είναι παράλληλα,

ii) να υπολογιστεί η εξίσωση του επιπέδου που τέμνει τα επίπεδα αυτά κάθετα.

2.3 Κωνικές τομές

2.3.1 Κύκλος

Ορισμός 2.3.1 - 1. *Ορίζεται ως* **περιφέρεια κύκλου** *(circle) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, που απέχουν ίση απόσταση, έστω R, από ένα σημείο του επιπέδου, έστω K.*

Η απόσταση R λέγεται **ακτίνα**, ενώ το σημείο O **κέντρο** του κύκλου.

Σχετικά με τις θέσεις του κέντρου K ως προς την αρχή των συντεταγμένων ενός ορθογωνίου συστήματος Oxy διακρίνονται οι παρακάτω δύο περιπτώσεις:

- το K συμπίπτει με το O. Τότε, αν $M(x,y)$ είναι τυχόν σημείο της περιφέρειας, η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της περιφέρειας είναι

$$x^2 + y^2 = R^2, \tag{2.3.1 - 1}$$

ενώ, όταν

- το κέντρο είναι στο σημείο (α, β), τότε

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2. \tag{2.3.1 - 2}$$

Εξίσωση εφαπτομένης

Η εξίσωση της εφαπτομένης της περιφέρειας σε ένα σημείο της, έστω $M\,(x_0, y_0)$, αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση:

$$(x-x_0)\,(x-\alpha) + (y-y_0)\,(y-\beta) = R^2. \tag{2.3.1 - 3}$$

Από τις $(2.3.1-1)$ και $(2.3.1-2)$ προκύπτει ότι η γενική μορφή της αναλυτικής εξίσωσης των σημείων της περιφέρειας του κύκλου είναι

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \tag{2.3.1 - 4}$$

όπου το κέντρο ορίζεται στην περίπτωση αυτή από τις συντεταγμένες:

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

και η ακτίνα από τη σχέση

$$R = \left(A^2 + B^2 - 4\Gamma\right)^{1/2}.$$

Αντίστροφα, κάθε εξίσωση της μορφής $(2.3.1-4)$ παριστάνει περιφέρεια κύκλου. Πράγματι η $(2.3.1-4)$ γράφεται

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}. \qquad (2.3.1\text{ - }5)$$

Τότε η $(2.3.1-5)$:

- αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma \geq 0$, παριστάνει εξίσωση κύκλου με κέντρο, έστω $K\left(-A/2, -B/2\right)$ και ακτίνα $R = \sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}/2$. Ειδικά, όταν ισχύει η ισότητα, η ακτίνα του κύκλου είναι μηδέν (σημείο).
- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$, τότε δεν υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}$ που να την επαληθεύουν, οπότε στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει περιφέρεια κύκλου.

Επομένως έχει αποδειχθεί η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 2.3.1 - 1. *Η $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει εξίσωση περιφέρειας κύκλου τότε και μόνον, όταν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$.*

Διανυσματική εξίσωση

Έστω ότι το O συμπίπτει με την αρχή ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων. Τότε, αν $M(x, y)$ είναι τυχόν σημείο της περιφέρειας, η διανυσματική εξίσωση είναι της μορφής

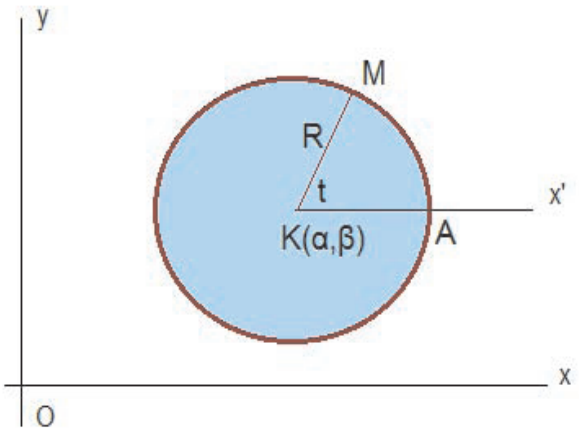
$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = \langle x, y\rangle \qquad (2.3.1\text{ - }6)$$

όπου

$$\begin{aligned} x = x(t) &= R\cos t, \\ y = y(t) &= R\sin t, \qquad \text{όταν} \quad t \in [0, 2\pi), \end{aligned} \qquad (2.3.1\text{ - }7)$$

ενώ στην περίπτωση που το κέντρο του είναι το σημείο $K(\alpha, \beta)$ έχουμε (Σχ. 2.3.1 - 1)

$$\begin{aligned} x = x(t) &= \alpha + R\cos t, \\ y = y(t) &= \beta + R\sin t, \qquad \text{όταν} \quad t \in [0, 2\pi). \end{aligned} \qquad (2.3.1\text{ - }8)$$



Σχήμα 2.3.1 - 1: παραμετρική παράσταση κύκλου με κέντρο το σημείο $K(\alpha, \beta)$ και ακτίνα R.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η ακτίνα και το κέντρο των παρακάτω περιφερειών:

i) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 9 = 0$,

ii) $x^2 + y^2 - 6x + 10y = 0$.

2. Να υπολογιστεί η εξίσωση της περιφέρειας κύκλου, όταν

i) έχει κέντρο το σημείο $(1, -2)$ και εφάπτεται στην ευθεία $x - 2y + 5 = 0$,

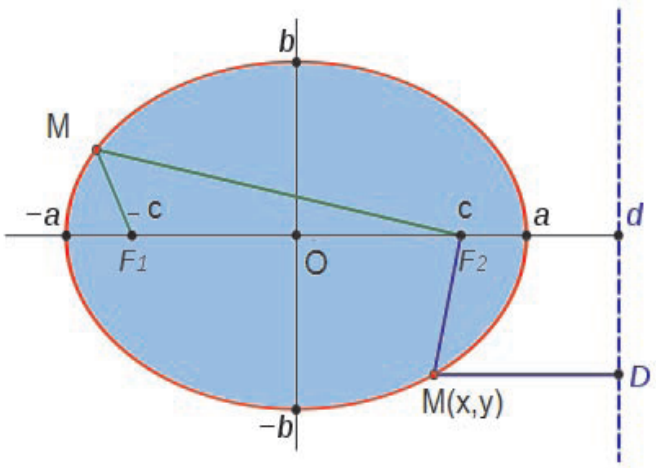
ii) διέρχεται από τα σημεία $(3, -2)$, $(1, 2)$ και $(-1, -2)$,

iii) διέρχεται από τα σημεία $(3, 1)$, $(-1, 3)$ και έχει κέντρο στην ευθεία $3x - 2y - 2 = 0$,

iv) είναι εγγεγραμμένη στο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, -2)$, $(2, 3)$ και $(4, 1)$.

2.3.2 Έλλειψη

Ορισμός 2.3.2 - 1. *Ορίζεται ως* **έλλειψη** *(ellipse) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων τυχόντος*



Σχήμα 2.3.2 - 1: η έλλειψη με εστίες στα σημεία $F_1(-c,0)$ και $F_2(c,0)$.

σημείου της, έστω M, από δύο σταθερά σημεία F_1 και F_2 είναι σταθερό (Σχ. 2.3.2 - 1).

Τα σημεία $F_1(-c,0)$ και $F_2(c,0)$ λέγονται **εστίες** (focus).

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.3.2 - 1 είναι $F_1M + F_2M = 2a$ σταθερά. Τότε για να προσδιοριστεί η εξίσωση των σημείων της έλλειψης, θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy στο οποίο η αρχή O διχοτομεί την απόσταση F_1F_2, ως άξονα των x την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία F_1 και F_2 και ως άξονα των y την κάθετη στην F_1F_2 που διέρχεται από το O.

Έστω $|F_1F_2| = 2c$. Η βασική ιδιότητα των σημείων της έλλειψης εκφράζεται για τις συντεταγμένες του τυχόντος σημείου $M(x,y)$ με τη σχέση $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, δηλαδή

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a. \qquad (2.3.2 - 1)$$

Από τη σχέση αυτή με τετραγωνισμό και των δύο μελών προκύπτει τελικά ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της έλλειψης είναι

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{όταν} \quad b^2 = a^2 - c^2. \qquad (2.3.2 - 2)$$

Ιδιότητες

i) Η (2.3.2−2) δεν μεταβάλλεται, όταν τεθεί στη θέση του (x, y) το $(-x, y)$ ή το $(x, -y)$ ή το $(-x, -y)$, δηλαδή η έλλειψη είναι συμμετρική ως προς τους άξονες Ox, Oy και την αρχή των αξόνων O.

ii) Από την $(2.3.2 - 2)$ προκύπτει ότι $y^2/b^2 = 1 - x^2/a^2 \geq 0$, δηλαδή $-a \leq x \leq a$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $-b \leq y \leq b$. Άρα η έλλειψη περιλαμβάνεται στο ορθογώνιο με πλευρές $x = \pm a$ και $y = \pm b$.

Βασικά στοιχεία

- Η ευθεία που ενώνει τις εστίες της έλλειψης, λέγεται **κύριος άξονας**. Ο κύριος άξονας τέμνει την έλλειψη στα σημεία $A(a, 0)$ και $A'(-a, 0)$, που ορίζουν τις κύριες κορυφές της. Τότε το ευθύγραμμο τμήμα AA' ορίζει τον **μεγάλο άξονα** (major axis) της έλλειψης, που έχει μήκος $2a$. Ο άξονας των συντεταγμένων Ox έχει τη διεύθυνση AA', ενώ το σημείο O είναι στο μέσον του AA'. Ο άξονας Oy τέμνει την έλλειψη στα σημεία $B(0, b)$ και $B'(0, -b)$, που λέγονται και δευτερεύουσες κορυφές της έλλειψης. Το ευθύγραμμο τμήμα BB' ορίζει τον **μικρό άξονα** (minor axis) της έλλειψης με μήκος $2b$. Τότε τα $|OA| = a$ και $|OB| = b$ ορίζουν τα μήκη του μεγάλου αντίστοιχα του μικρού ημιάξονα της έλλειψης.

- **Εκκεντρότητα** (eccentricity) της έλλειψης ορίζεται ο λόγος $e = c/a$ και προφανώς είναι $e < 1$.

Εξίσωση εφαπτομένης

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο της $M\,(x_0, y_0)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1\,. \qquad (2.3.2 - 3)$$

Διανυσματική εξίσωση

Όμοια είναι της μορφής $(2.3.1-6)$, δηλαδή

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = \langle x, y\rangle$$

όπου

$$\begin{aligned} x = x(t) &= a\cos t, \\ y = y(t) &= b\sin t, \qquad \text{όταν} \quad t \in [0, 2\pi). \end{aligned} \tag{2.3.2 - 4}$$

Η εντολή που σχηματίζει μία έλλειψη με το MATHEMATICA είναι

```
Show[Graphics[Circle[{x_0,y_0},r]]]
```

όπου (x_0, y_0) το κέντρο και r η ακτίνα, ενώ για την έλλειψη

```
Show[Graphics[Circle[{x_0,y_0},{a,b}]]]
```

όπου a ο μεγάλος και b ο μικρός ημιάξονάς της.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της έλλειψης στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) η εστιακή απόσταση είναι ίση με 6 και η εκκεντρότητα $\varepsilon = 3/5$,

ii) ο μικρός άξονας είναι ίσος με 6 και η εκκεντρότητα $\varepsilon = 4/5$.

2. Να υπολογιστούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων από το σημείο $(2, -1)$ στην έλλειψη $x^2 + 9y^2 = 9$. Στη συνέχεια να προσδιοριστεί η γωνία των εφαπτόμενων και το μήκος της χορδής της έλλειψης, που διέρχεται από τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων.

3. Έστω η έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Τότε οι ευθείες με εξισώσεις [3]

$$d: \quad x = \pm\frac{a^2}{c}$$

ορίζουν τις **διευθετούσες** (directrices) της. Δείξτε ότι

[3] Βλέπε Σχ. 2.3.2 - 1 όπου η διευθετούσα d έχει εξίσωση $x = \frac{a^2}{c}$.

i) οι διευθετούσες είναι κάθετες στον μεγάλο άξονα της έλλειψης,

ii) ο λόγος των αποστάσεων τυχόντος σημείου της έλλειψης από την εστία και τη διευθετούσα είναι σταθερός και ισούται με την εκκεντρότητα της έλλειψης.[4]

Απαντήσεις

1. (i) Είναι $F_1F_2 = 2c = 6$, οπότε $c = 3$, ενώ $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$. Άρα $a = 5$, οπότε από τη σχέση $b^2 = a^2 - c^2$ προκύπτει ότι $b^2 = 16$. Επομένως η εξίσωση είναι:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

(ii) Είναι $2b = 6$, οπότε $b = 3$, ενώ $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$, δηλαδή $c = \frac{4a}{5}$. Αντικαθιστώντας στην $b^2 = a^2 - c^2$ έχουμε $9 = \alpha^2 - \frac{16a^2}{25}$, οπότε $a^2 = 25$. Άρα η εξίσωση είναι:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

2. Η εξίσωση της έλλειψης γράφεται

$$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1. \qquad (2.3.2 - 1)$$

Άρα $a^2 = 9$ και $b^2 = 1$. Τότε σύμφωνα με την $(2.3.2 - 3)$ η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο της (x_0, y_0) γράφεται

$$\frac{x\,x_0}{9} + y\,y_0 = 1. \qquad (2.3.2 - 2)$$

Επειδή η ευθεία $(2.3.2{-}2)$ διέρχεται από το σημείο $(x, y) = (2, -1)$, θα πρέπει οι συντεταγμένες του να την επαληθεύουν, δηλαδή $\frac{2\,x_0}{9} - y_0 = 1$, από την οποία τελικά προκύπτει ότι:

$$y_0 = \frac{2x_0}{9} - 1. \qquad (2.3.2 - 3)$$

Όμοια επειδή το σημείο (x_0, y_0) ανήκει στην έλλειψη, η $(2.3.2 - 1)$ γράφεται $\frac{x_0^2}{9} + y_0^2 = 1$, οπότε αντικαθιστώντας σε αυτή την $(2.3.2 - 3)$ τελικά προκύπτει ότι τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων ε_1 και ε_2 με την έλλειψη είναι:

$$P_1: \quad (x_1, y_1) = (0, -1) \quad \text{και} \quad P_2: \quad (x_2, y_2) = \left(\frac{36}{13}, \frac{59}{13}\right).$$

Τότε η απόσταση είναι: $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{36\sqrt{5}}{13} \approx 6.192\,188$, ενώ η γωνία ω υπολογίζεται σύμφωνα με την $(2.1.1 - 1)$ από τη σχέση $\tan\omega = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 + \lambda_1\lambda_2}$ όπου

$$\lambda_1 = \frac{y - y_1}{x - x_1} = 0 \quad \text{και} \quad \lambda_1 = \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{36}{5}.$$

[4] Όμοια βλέπε Σχ. 2.3.2 - 1 όπου $|MF_2| = |MD|$.

Άρα $\tan\omega = -\frac{36}{5}$, οπότε $\omega \approx --1.432\,79\,\text{rad}$.

3. (i) Προφανής, επειδή κάθε εξίσωση της μορφής $x = x_0$ παριστάνει εξίσωση ευθείας κάθετης στον x-άξονα στο σημείο x_0.

(ii) Θα δειχθεί ότι

$$\frac{|MF_2|}{|MD|} = \varepsilon. \qquad (2.3.2\text{ - }4)$$

Σύμφωνα με το Σχ. 2.3.2 - 1 και τις $(2.3.2-1)$ - $(2.3.2-2)$ έχουμε ότι η απόσταση $|MF_2|$ είναι

$$|MF_2|^2 = (x-c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \qquad (2.3.2\text{ - }5)$$

ενώ από τον τύπο προκύπτει ότι η απόσταση $|MD|$ από τη διευθετούσα με εξίσωση $x - \frac{a^2}{c} = 0$ είναι

$$|MD| = \left|x - \frac{a^2}{c}\right|. \qquad (2.3.2\text{ - }6)$$

Αντικαθιστώντας τις $(2.3.2-5)$ και $(2.3.2-6)$ στην $(2.3.2-4)$ μετά από τετραγωνισμό και των δύο μελών προκύπτει τελικά η αποδεικτέα.

2.3.3 Υπερβολή

Ορισμός 2.3.3 - 1. *Ορίζεται ως* **υπερβολή** *(hyperbola) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η διαφορά των αποστάσεων τυχόντος σημείου της, έστω M, από δύο σταθερά σημεία F_1 και F_2, που λέγονται εστίες, είναι σταθερή (Σχ. 2.3.3 - 1).*

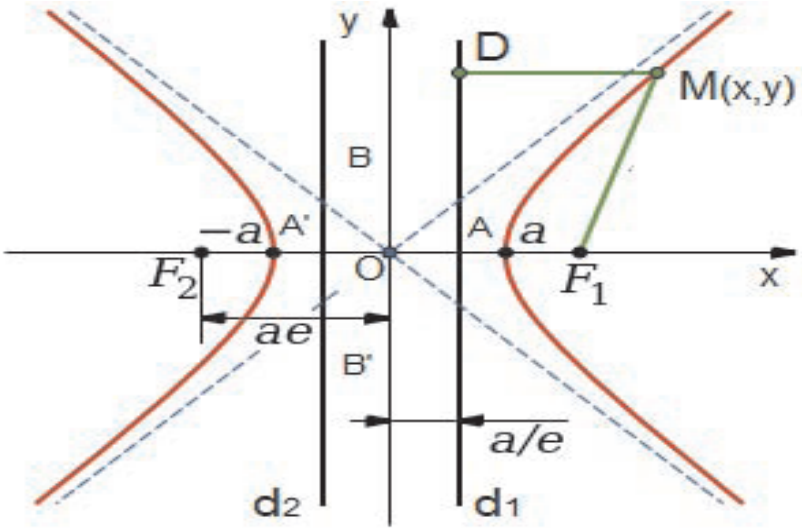
Τα σημεία F_1 και F_2 λέγονται **εστίες** (focus).

Έστω ότι $F_2M - F_1M = 2a$ σταθερά. Όμοια, όπως στην έλλειψη, θεωρώντας ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy στο οποίο το O διχοτομεί την απόσταση F_1F_2, ως άξονα των x την ευθεία που διέρχεται από τις εστίες, σύμφωνα και με τη βασική ιδιότητα των σημείων της υπερβολής έχουμε για τις συντεταγμένες του τυχόντος σημείου $M(x,y)$ τη σχέση

$$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Τότε με τετραγωνισμό και των δύο μελών προκύπτει τελικά, ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της υπερβολής είναι

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{όταν} \quad b^2 = c^2 - a^2. \qquad (2.3.3\text{ - }1)$$



Σχήμα 2.3.3 - 1: η υπερβολή με εστίες στα σημεία $F_1(c,0)$ και $F_2(-c,0)$.

Ιδιότητες

i) Η $(2.3.3-1)$ δεν μεταβάλλεται, όταν θέσουμε στη θέση του το $(-x,y)$ ή το $(x,-y)$ ή το $(-x,-y)$, δηλαδή η υπερβολή είναι συμμετρική (congruent) ως προς τους άξονες Ox, Oy και την αρχή των αξόνων.

ii) Από την $(2.3.3-1)$ προκύπτει ότι

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1\geq 0, \quad \text{δηλαδή} \quad |x|\geq a.$$

Άρα η υπερβολή βρίσκεται στα δεξιά της ευθείας με εξίσωση $x=a$ και αριστερά της ευθείας με εξίσωση $x=-a$. Είναι προφανές ότι μεταξύ των ευθειών $x=a$ και $x=-a$ δεν υπάρχουν σημεία της υπερβολής.

Βασικά στοιχεία

- Ο άξονας Ox λέγεται **πρωτεύων άξονας** (major axis). Ο πρωτεύων άξονας τέμνει την υπερβολή στα σημεία A και A'. Τότε η (AA') ορίζει το μήκος του πρωτεύοντα άξονα. Ο άξονας Oy λέγεται δευτερεύων

άξονας (minor axis), ενώ το O ορίζει το **κέντρο** της υπερβολής. Αν επί του άξονα Oy θεωρήσουμε τα σημεία $B(0,b)$ και $B'(0,-b)$, τότε η (BB') ορίζει το μήκος του **δευτερεύοντα άξονα**.

- **Εκκεντρότητα** της υπερβολής ορίζεται ο λόγος $e = c/a$, όπου προφανώς $e > 1$.

Εξίσωση εφαπτομένης

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής στο σημείο της $M\,(x_0, y_0)$ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1\,. \qquad (2.3.3\text{ - }2)$$

Συζυγείς υπερβολές

Έστω η υπερβολή με πρωτεύοντα άξονα τον Ox και εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (2.3.3\text{ - }3)$$

Αν στην $(2.3.3-3)$ θεωρηθεί ως πρωτεύων άξονας ο Oy έχουμε (Σχ. 2.3.3 - 2)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1. \qquad (2.3.3\text{ - }4)$$

Οι υπερβολές $(2.3.3-3)$ και $(2.3.3-4)$, που ο πρωτεύων άξονας της μιας είναι δευτερεύων άξονας της άλλης, λέγονται **συζυγείς** (conjugate hyperbolae).

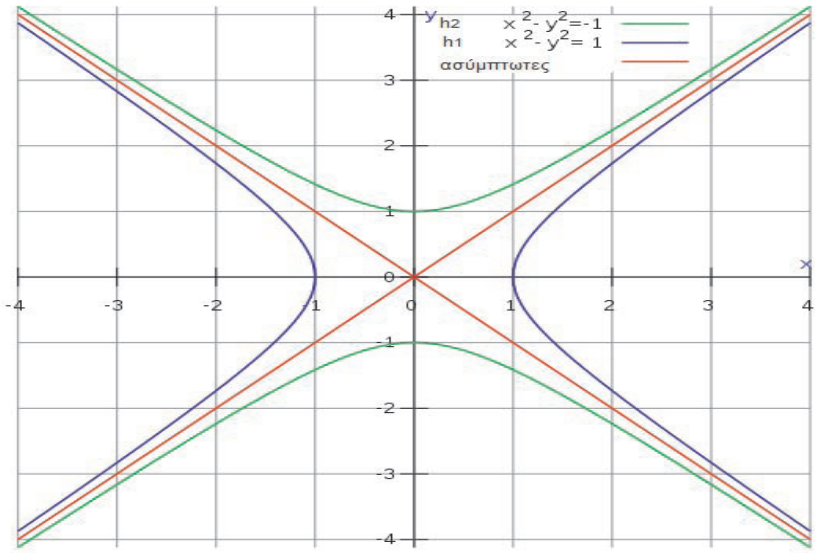
Ασύμπτωτες υπερβολής

Από την $(2.3.3-1)$ προκύπτει

$$y = \pm\frac{b}{a}\,x\,\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Άρα, όταν το x τείνει στο άπειρο κατά απόλυτη τιμή, το y τείνει επίσης στο άπειρο, ενώ ο λόγος y/x είναι πεπερασμένος αριθμός και συγκεκριμένα ισούται με

$$y = \frac{b}{a}\,x \quad \text{και} \quad y = -\frac{b}{a}\,x\,. \qquad (2.3.3\text{ - }5)$$



Σχήμα 2.3.3 - 2: η υπερβολή h_1 με εξίσωση $x^2 - y^2 = 1$ και η συζυγής της h_2 με εξίσωση $x^2 - y^2 = -1$.

Η $(2.3.3 - 5)$ παριστάνει τότε δύο ευθείες προς τις οποίες, σύμφωνα με τα παραπάνω, τείνει η υπερβολή όταν το $x \to \pm\infty$. Οι ευθείες αυτές λέγονται **ασύμπτωτες** (asymptotes)της υπερβολής.[5]

Ισοσκελής υπερβολή

Ορισμός 2.3.3 - 2. *Αν σε μία υπερβολή το μήκος του πρωτεύοντα και του δευτερεύοντα άξονα είναι ίσα, τότε η υπερβολή λέγεται ισοσκελής και η εξίσωσή της γράφεται*

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (2.3.3 - 6)$$

Στην περίπτωση αυτή οι ασύμπτωτες είναι οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι άξονες.

[5] Βλέπε διακεκομμένες ευθείες στο Σχ. 2.3.3 - 1 και κόκκινες ευθείες στο Σχ. 2.3.3 - 2.

Διανυσματική εξίσωση

Αποδεικνύεται ότι είναι της μορφής $(2.3.1-6)$, δηλαδή

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = \langle x, y\rangle$$

όπου

$$\begin{aligned} x = x(t) &= a\cosh t, \\ y = y(t) &= b\sinh t \end{aligned} \qquad (2.3.3\text{ - }7)$$

όπου η παράμετρος $t \in \mathbb{R}$.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της υπερβολής στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) η εστιακή απόσταση είναι ίση με 8 και η εκκεντρότητα $\varepsilon = 5/4$,

ii) οι εξισώσεις των ασύμπτωτων είναι $y = \pm 4x/3$ και η εστιακή απόσταση είναι ίση με 20.

2. Να υπολογιστεί η γωνία των ασύμπτωτων της υπερβολής που έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = 1.5$.

3. Έστω η υπερβολή $9x^2 - 4y^2 = 36$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου, που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτές της και την ευθεία $9x + 2y - 24 = 0$.

4. Να δειχθεί ότι κάθε εφαπτομένη υπερβολής σχηματίζει με τις ασύμπτωτές της τρίγωνο σταθερού εμβαδού.

5. Έστω η υπερβολή

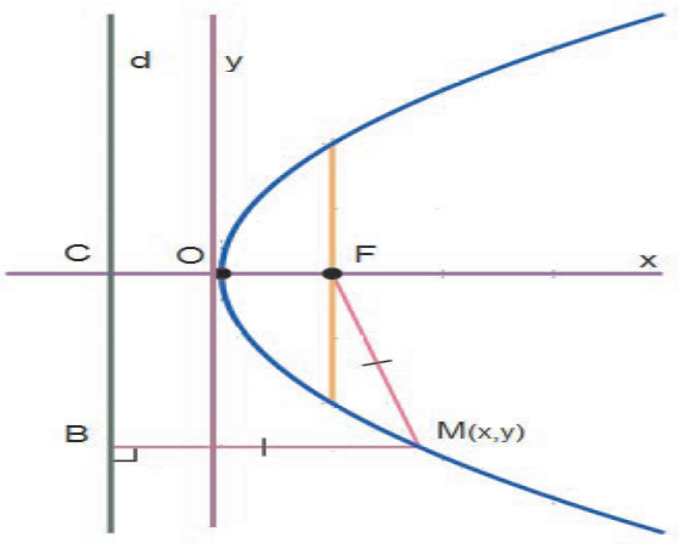
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Τότε οι ευθείες

$$x = \pm\frac{a^2}{c}$$

λέγονται **διευθετούσες** της υπερβολής. Δείξτε ότι:

i) οι διευθετούσες είναι κάθετες στον μεγάλο άξονα της υπερβολής,



Σχήμα 2.3.4 - 1: η παραβολή με εστία στο σημείο F και διευθετούσα την ευθεία $d: BC$.

ii) οι διευθετούσες δεν τέμνουν την υπερβολή,

iii) ο λόγος των αποστάσεων τυχόντος σημείου της υπερβολής από την εστία και τη διευθετούσα είναι σταθερός και ισούται με την εκκεντρότητα της υπερβολής.

2.3.4 Παραβολή

Ορισμός 2.3.4 - 1. *Ορίζεται ως* **παραβολή** *(parabola) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόσταση από σταθερό σημείο, έστω F και σταθερή ευθεία d είναι σταθερή (Σχ. 2.3.4 - 1).*

Το σημείο F λέγεται **εστία** (focus), ενώ η ευθεία d **διευθετούσα** (directrix).

Για να προσδιοριστεί η αναλυτική εξίσωση των σημείων της παραβολής, θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy στο οποίο το O είναι επί της κάθετης ευθείας, που φέρεται από την εστία, έστω F, στη διευθετούσα d και στο μέσο της, ενώ ως άξονας των x ορίζεται η κάθετη αυτή ευθεία.

Τότε, σύμφωνα με τη βασική ιδιότητα των σημείων της παραβολής, για το τυχόν σημείο $M(x, y)$ είναι $|MB| = |MF|$, οπότε, αν $p = |CF|$, έχουμε

$$x + \frac{1}{2}p = |MF|. \tag{1}$$

Αλλά

$$|MF|^2 = y^2 + \left(x - \frac{1}{2}p\right)^2. \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας τη (2) στην (1) προκύπτει τελικά ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της παραβολής είναι

$$y^2 = 2px. \tag{2.3.4 - 1}$$

Ιδιότητες

i) Η $(2.3.4 - 1)$ δεν μεταβάλλεται, όταν θέσουμε στη θέση του (x, y) το $(x, -y)$, δηλαδή η παραβολή είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Ox.

ii) Από την $(2.3.4 - 1)$ προκύπτει ότι $y^2 = 2px \geq 0$, δηλαδή $x \geq 0$. Άρα η παραβολή βρίσκεται στο δεξιό μέρος του άξονα Oy.

Βασικά στοιχεία

Ο άξονας Ox τέμνει την παραβολή στο σημείο O, που λέγεται **κορυφή**, ενώ το p λέγεται **ημιπαράμετρος**.

Εξίσωση εφαπτομένης

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της $M(x_0, y_0)$ δίνεται από τη σχέση

$$-yy_0 = p(x + x_0). \tag{2.3.4 - 2}$$

Διανυσματική εξίσωση

Όμοια αποδεικνύεται ότι είναι της μορφής $(2.3.1 - 6)$, δηλαδή

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = \langle x, y \rangle$$

όπου

$$\begin{aligned} x(t) &= t, \\ y^2(t) &= 2pt \end{aligned} \qquad (2.3.4\text{ - }3)$$

όπου η παράμετρος $t \in \mathbb{R}$.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της παραβολής στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) έχει εστία στο σημείο και διευθετούσα $y + 3 = 0$,

ii) διέρχεται από το σημείο $(5, 7)$, είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y και έχει κορυφή το σημείο $(0, 0)$.

2. Να υπολογιστούν οι εφαπτόμενες της παραβολής $y^2 = 2x$, που διέρχονται από το σημείο $(-4, -1)$.

3. Έστω η παραβολή $y^2 = 2px$. Να προσδιοριστεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη, έτσι ώστε η ευθεία $y = \kappa x + \lambda$ να εφάπτεται της παραβολής.

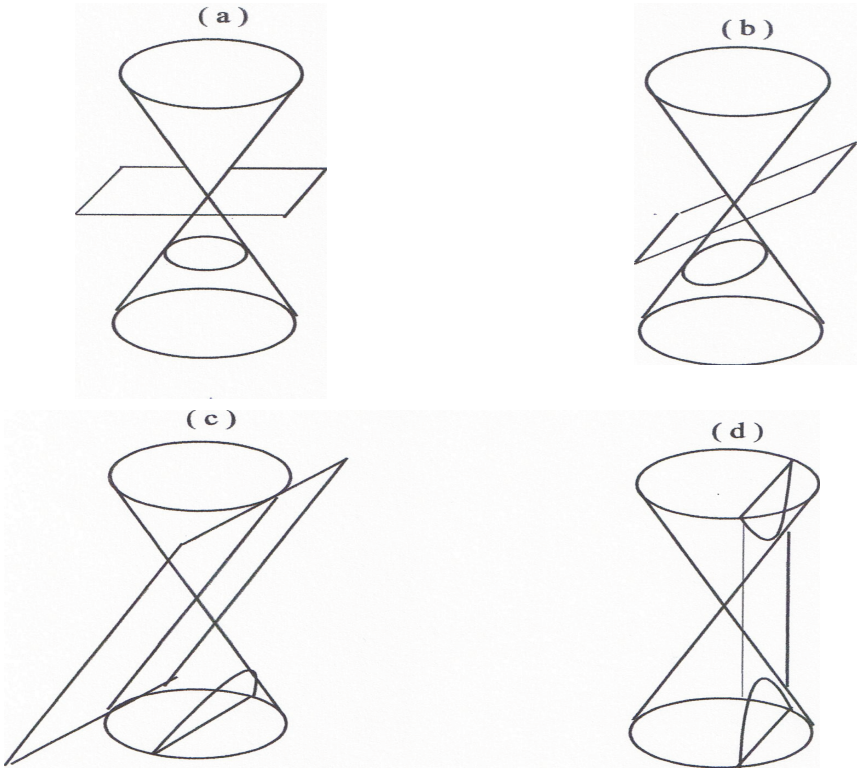
2.3.5 Γενικό πρόβλημα κωνικών τομών

Η έλλειψη, η υπερβολή και η παραβολή λέγονται και **κωνικές τομές** (conic sections), επειδή είναι δυνατόν να προκύψουν από την τομή ενός κυκλικού κώνου εκ περιστροφής, έστω K, με ένα επίπεδο (Σχ. 2.3.5 - 1). Ειδικότερα έχουμε:

i) αν το επίπεδο, έστω Π, δεν είναι παράλληλο προς καμιά από τις γενέτειρες του κώνου, τότε η τομή του επιπέδου με τον κώνο θα δώσει μία έλλειψη (Σχ. 2.3.5 - 1 b), ενώ στην ειδική περίπτωση που είναι κάθετο στον άξονα του κώνου, η τομή είναι **κύκλος** (Σχ. 2.3.5 - 1 a),

ii) αν το επίπεδο είναι παράλληλο προς δύο γενέτειρες, η τομή είναι **υπερβολή** (Σχ. 2.3.5 - 1 c) και,

iii) αν είναι παράλληλο προς ένα εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας του κώνου, η τομή είναι **παραβολή** (Σχ. 2.3.5 - 1 d).



Σχήμα 2.3.5 - 1: γενικό πρόβλημα κωνικών τομών.

Ειδικά όταν το επίπεδο διέρχεται από το σημείο O, η τομή συμπίπτει με μία ή δύο γενέτειρες του κώνου ή περιορίζεται στο σημείο O.

Πρόταση 2.3.5 - 1. *Η γενική εξίσωση των κωνικών τομών, όταν το σύστημα των συντεταγμένων δεν έχει μετατοπιστεί παράλληλα ή στραφεί, είναι της μορφής*

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, \quad \text{όταν} \quad |A| + |B| \neq 0 \qquad (2.3.5\text{ - }1)$$

και αντίστροφα.

Απόδειξη. Επειδή το ευθύ προκύπτει άμεσα μετά τις πράξεις στις $(2.3.2-2)$, $(2.3.3-1)$ και $(2.3.4-1)$, αρκεί να δειχθεί το αντίστροφο.

Διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

1. $AB \neq 0$. Τότε η $(2.3.5-1)$ γράφεται

$$A\left(x^2 + \frac{C}{A}x\right) + B\left(y^2 + \frac{D}{B}y\right) + E = 0$$

και τελικά μετά τις πράξεις

$$\frac{1}{B}\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + \frac{1}{A}\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{BC^2 + AD^2 - 4ABE}{4A^2B^2} = k, \qquad (2.3.5\text{ - }2)$$

όπου k σταθερά. Τότε:

1-I. Αν $k \neq 0$, η $(2.3.5-2)$ γράφεται

$$\frac{1}{kB}\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + \frac{1}{kA}\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 = 1. \qquad (2.3.5\text{ - }3)$$

1-Ia. Αν $AB > 0$, από την $(2.3.5-3)$ έχουμε

1-Ia.i. αν k ομόσημο προς τα A και B, η $(2.3.5-3)$ και κατά συνέπεια η $(2.3.5-1)$ παριστάνει **έλλειψη**, ενώ στην ειδική περίπτωση όπου $A = B > 0$ **κύκλο**.

1-Ia.ii. Αν k ετερόσημο προς τα A και B, η $(2.3.5-3)$ είναι **αδύνατη**.

1-Ib. Αν $AB < 0$, η $(2.3.5-3)$ και κατά συνέπεια η $(2.3.5-1)$ παριστάνει υπερβολή.

1-II. Αν $k = 0$, η $(2.3.5-3)$ γράφεται

$$A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2 = 0. \qquad (2.3.5\text{ - }4)$$

1-IIa. Αν $AB > 0$, η $(2.3.5-4)$ επαληθεύεται για

$$x = -\frac{C}{2A} \quad \text{και} \quad y = -\frac{D}{2B}\,.$$

1-IIb. Αν $AB < 0$, το πρώτο μέλος της $(2.3.5-4)$ αναλύεται σε γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων όρων ως προς x και y, οπότε η $(2.3.5-4)$ παριστάνει δύο ευθείες.

2. Αν $AB = 0$. Τότε:

2-I. Αν $A = 0$ και $B \neq 0$, η $(2.3.5-1)$ γράφεται

$$B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2 = -Cx - E + \frac{D^2}{4B}. \qquad (2.3.5\text{ - }5)$$

Τότε

2-Ia. Αν $C \neq 0$, η $(2.3.5-5)$ τελικά γράφεται

$$\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2 = -\frac{C}{B}\left(x+\frac{D^2-4BE}{4BC}\right), \qquad (2.3.5\text{ - }6)$$

δηλαδή παριστάνει παραβολή.

2-Ib. Αν $C = 0$, η $(2.3.5-6)$ γράφεται

$$\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{D^2-4BE}{4B}\,, \qquad (2.3.5\text{ - }7)$$

οπότε, αν

2-Ib.i. $D^2-4BE > 0$, η $(2.3.5-7)$ και κατά συνέπεια η $(2.3.5-1)$ παριστάνει δύο ευθείες παράλληλες προς τον x-άξονα,

2-Ib.ii. $D^2-4BE = 0$, η $(2.3.5-7)$ παριστάνει μια ευθεία παράλληλη στον x-άξονα, και

2-Ib.iii. $D^2-4BE<0$, η $(2.3.5-7)$ είναι αδύνατη.

2-II. Αν $A\neq 0$ και $B=0$, τότε η $(2.3.5-1)$ γράφεται

$$A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2=-Dy-E+\frac{C^2}{4A}\,. \qquad (2.3.5\text{ - }8)$$

Όμοια τότε η $(2.3.5-8)$, αν

- $D\neq 0$ παριστάνει παραβολή, ενώ όταν
- $D=0$, παριστάνει δύο ή μία ευθείες παράλληλες προς τον y-άξονα ή τελικά είναι αδύνατη.

∎

Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 2.3.5 - 2. *Η γενικότερη μορφή των κωνικών τομών, όταν το σύστημα συντεταγμένων έχει μετατοπιστεί ή έχει στραφεί ή και τα δύο, είναι*

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+K=0 \qquad (2.3.5\text{ - }9)$$

και αντίστροφα κάθε εξίσωση της μορφής $(2.3.5-9)$*, δεν δύναται να παριστάνει πέραν των κωνικών τομών, τίποτε άλλο εκτός από φανταστικές ευθείες και ελλείψεις.*

Η $(2.3.5-9)$ χαρακτηρίζει τότε τη γενική εξίσωση των καμπυλών 2ου βαθμού.

Το πρόβλημα που προκύπτει τώρα είναι ο τρόπος προσδιορισμού του είδους της κωνικής τομής από την $(2.3.5-9)$. Αρχικά εξετάζεται το πρόσημο της παράστασης

$$\Delta=B^2-4AC.$$

Τότε, αν:

i) $\Delta>0$ η καμπύλη είναι υπερβολή, ενώ, αν $\Delta<0$ έλλειψη.

Στη συνέχεια, θέτουμε στην $(2.3.5-9)$ τους τύπους $(1.2.2-2)$ αλλαγής συντεταγμένων με παράλληλη μετατόπιση στο σημείο (a,b), δηλαδή τους

$$x=x'+a \quad \text{και} \quad y=y'+b$$

και προσδιορίζουμε τα a, b.

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας τις τιμές των a και b στην (2.3.5−9) προκύπτει μία εξίσωση της μορφής

$$A\left(x'\right)^2 + Bx'y' + C\left(y'\right)^2 + D = 0, \qquad (2.3.5 - 10)$$

οπότε από τον τύπο

$$\tan\theta = \frac{B}{A - C} \qquad (2.3.5 - 11)$$

προσδιορίζεται η γωνία στροφής των αξόνων.

ii) $\Delta = 0$ η καμπύλη είναι **παραβολή**. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται μόνον ο τύπος $(2.3.5 - 11)$.

Παράδειγμα 2.3.5 - 1

Να προσδιοριστεί το είδος της καμπύλης

$$xy - 2y - 4x = 0. \qquad (1)$$

Λύση. Είναι

$$B^2 - 4AC = 1 > 0,$$

οπότε πρόκειται για υπερβολή.

Θέτοντας στην (1) τους τύπους

$$x = x' + a \quad \text{και} \quad y = y' + b$$

έχουμε

$$x'y' + (b-4)x' + (a-2)y' + ab - 2b - 4a = 0$$

από την οποία προκύπτει ότι $b - 4 = 0$ και $a - 2 = 0$.

Άρα

$$b = 4 \quad \text{και} \quad a = 2,$$

οπότε οι αρχικοί άξονες έχουν μετατοπιστεί στο σημείο $(2, 4)$.

Τότε η (1) γράφεται

$$x'y' = 8, \qquad (2)$$

οπότε η υπερβολή έχει ασύμπτωτες τους άξονες $O'x'$ και $O'y'$.

Από την $(2.3.5-11)$ προκύπτει τότε ότι

$$\tan 2\theta \to +\infty, \quad \text{δηλαδή} \quad \theta = \frac{\pi}{4}\,.$$

Θέτοντας την τιμή αυτή στους τύπους $(1.2.2-4)$ της στροφής των αξόνων κατά ορισμένη γωνία, δηλαδή στους

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y &= -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned}$$

προκύπτει ότι

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'' - y''\right) \quad \text{και} \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'' + y''\right), \tag{3}$$

όπου $O'x''y''$ οι άξονες συντεταγμένων μετά τη μετατόπιση και τη στροφή.

Τότε η (2) σύμφωνα με την (3) γράφεται

$$\left(x''\right)^2 - \left(y''\right)^2 = 16$$

δηλαδή πρόκειται για ισοσκελή υπερβολή.

Παράδειγμα 2.3.5 - 2

Όμοια το είδος της καμπύλης

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 10y + 5 = 0. \tag{4}$$

Λύση. Είναι

$$B^2 - 4AC = 0,$$

οπότε πρόκειται για παραβολή.

Τότε από την $(2.3.5-11)$ προκύπτει ότι

$$\tan 2\theta \to +\infty, \quad \text{οπότε} \quad \theta = \frac{\pi}{4}\,.$$

Όμοια θέτοντας την τιμή αυτή στους τύπους $(1.2.2-4)$ της στροφής των αξόνων κατά ορισμένη γωνία, δηλαδή στους

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y &= -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned}$$

προκύπτει ότι

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x' - y'\right) \quad \text{και} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x' + y'\right),$$

όπου $Ox'y'$ οι άξονες συντεταγμένων μετά τη στροφή.

Άρα η (4) γράφεται

$$\left(x' - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{7}{\sqrt{2}}\left(y' - \frac{11}{28\sqrt{2}}\right),$$

δηλαδή πρόκειται για παραβολή με κορυφή το σημείο $\left(3/2\sqrt{2},\, 11/28\sqrt{2}\right)$ και παράλληλη στον άξονα Oy'.

Ασκήσεις

1. Να προσδιοριστεί το είδος των παρακάτω κωνικών τομών:

i) $y^2 + 3x - 4y + 9 = 0$,

ii) $y^2 + 4xy + 4x^2 + 2y + 4x - 36 = 0$,

iii) $8y^2 + 4xy + 5x^2 + 16y + 4x - 28 = 0$,

iv) $3xy + 5x + 10y = 0$.

2. Δίνεται η καμπύλη $4x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 1 = 0$. Ζητείται να προσδιοριστεί η θέση της ευθείας $y = \lambda x$ ως προς την καμπύλη για τις διάφορες τιμές του λ.

Απαντήσεις

1. i) $\Delta = 0$ παραβολή, ii) $\Delta = 16 > 0$ υπερβολή, iii) $\Delta = -144$ έλλειψη,
iv) $\Delta = 9 > 0$ υπερβολή.

2.4 Βιβλιογραφία

[1] Καδιανάκης, Ν. & Καρανάσιος, Σ. (2008). *Γραμμική Άλγεβρα. Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές*. ISBN: 960–917–250–4.

[2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Ξένος, Θ. (2004), *Αναλυτική Γεωμετρία*. Εκδόσεις Ζήτη. ISBN 960–431–915–9.

[4] Φούντας, Γρ. (2009). *Αναλυτική & Διανυσματική Γεωμετρία*. Εκδόσεις Γρηγ. Φούντα. ISBN 960–330–517–0.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 3

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

3.1 Ορισμός και Άλγεβρα συναρτήσεων

3.1.1 Ορισμοί

Στο μάθημα αυτό θα δοθούν οι κυριότεροι ορισμοί και θεωρήματα για τις πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής, που θεωρούνται απαραίτητοι για τα επόμενα μαθήματα. Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4].

Ορισμός 3.1.1 - 1 (συνάρτησης). *Έστω D και T δύο τυχόντα μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Τότε λέγεται συνάρτηση, μία* **μονοσήμαντη** *απεικόνιση, έστω f, του συνόλου D στο T, δηλαδή*

$$f: \quad D \ni x \longrightarrow f(x) = y \in T. \qquad (3.1.1 - 1)$$

Παρατηρήσεις 3.1.1 - 1

- Υπενθυμίζεται ότι μονοσήμαντη είναι μια απεικόνιση, όταν στο x αντιστοιχεί **ένα ακριβώς** y.
- Το σύνολο D λέγεται **πεδίο ορισμού**, ενώ το T **πεδίο τιμών** της συνάρτησης f. Στο εξής μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το D θα συμβολίζεται με $f|D$ ή και $f(x)$, $x \in D$.
- Το x, που περιγράφει τις τιμές του D, λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το y, που ορίζει τις αντίστοιχες τιμές του x στο T, εξαρτημένη μεταβλητή.
- Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η απεικόνιση f, περιγράφεται από τη σχέση $f(x)$, που λέγεται **τύπος** της συνάρτησης.

Παράδειγμα 3.1.1 - 1

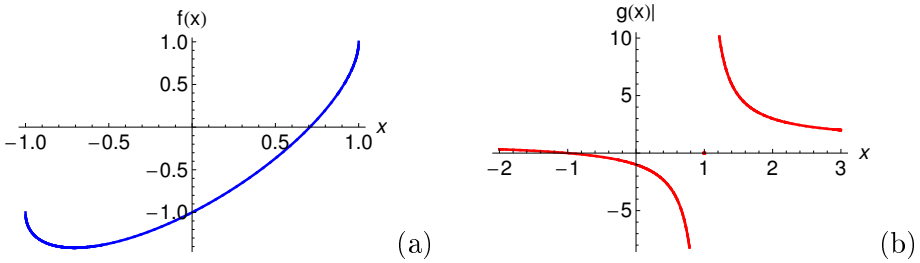
Σύμφωνα με τον Ορισμό 17.1.1 - 1, αν $D = \{0, 2, 5\}$, τότε ο τύπος

- $f(x) = x^2$ ορίζει συνάρτηση, επειδή κάθε στοιχείο του D μέσω της f απεικονίζεται σε ένα στοιχείο (μονοσήμαντη απεικόνιση), δηλαδή: $f(0) \to 0$, $f(2) \to 4$ και $f(5) \to 25$, οπότε $T = \{0, 4, 25\}$, ενώ ο
- $g(x) = \pm\sqrt{x}$ δεν ορίζει, επειδή τα στοιχεία του D απεικονίζονται σε δύο στοιχεία, όπως $f(2) \to \pm\sqrt{2}$, κ.λπ.

Η συνάρτηση είναι δυνατόν να παρασταθεί γραφικά στο καρτεσιανό επίπεδο $D \times T \subseteq \mathbb{R}^2$ από το διάγραμμα ή τη **γραφική παράστασή** της G_f (Σχ. 3.1.1 - 1), όπου

$$G_f = \{\, (x, f(x)) : \quad \text{για κάθε } x \in D\} \subseteq D \times T. \tag{3.1.1 - 2}$$

Αν η συνάρτηση εκφράζεται με τον τύπο $y = f(x)$, τότε θα λέγεται ότι η σχέση που συνδέει τη μεταβλητή y με τη μεταβλητή x είναι **λυμένη** (explicit) ως προς τη μεταβλητή y. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που η y δεν είναι



Σχήμα 3.1.1 - 1: (a) Συνάρτηση $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$ με $D = [-1, 1]$ και (b) $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ με $D = \mathbb{R} - \{1\}$.

δυνατόν να εκφραστεί στη μορφή $y = f(x)$. Στις περιπτώσεις αυτές είναι γνωστή μόνον η σχέση που συνδέει τα x και y, δηλαδή επαληθεύεται μία σχέση της μορφής $f(x, y) = 0$. Τότε λέγεται ότι η συνάρτηση y δίνεται με **πεπλεγμένη** (implicit) μορφή.

Παράδειγμα 3.1.1 - 2

Αν $y = y(x)$, τότε η συνάρτηση

$$y = x^2 + 3x + 2$$

εκφράζεται με λυμένη μορφή, ενώ η

$$e^y - x - y = 0$$

με πεπλεγμένη, επειδή η σχέση αυτή δεν λύνεται ως προς y.

Προσδιορισμός του πεδίου ορισμού

Στην περίπτωση που ζητείται να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, όταν είναι γνωστός ο τύπος της, πρέπει να ληφθούν υπόψη τα εξής:

- οι περιορισμοί που υπάρχουν από την ίδια τη συνάρτηση όπως ρίζα, λογάριθμος κ.λπ., έτσι ώστε ο τύπος της να ορίζεται, και
- οι πράξεις που είναι σημειωμένες στον τύπο της συνάρτησης να έχουν έννοια - επιτρεπτές πράξεις - στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Υπενθυμίζεται ότι οι μη επιτρεπτές πράξεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι οι:

$$\frac{a}{0}\,, \quad \frac{\infty}{\infty}\,, \quad 0\,\infty\,, \quad \infty\,0\,, \quad \infty-\infty\,, \quad 0^0\,, \quad 1^\infty\,, \quad \infty^0. \qquad (3.1.1\text{ - }3)$$

Παράδειγμα 3.1.1 - 3

Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=x^2-5x+1.$$

Τότε προφανώς είναι $D=\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 3.1.1 - 4

Όμοια η συνάρτηση

$$g(x)=\frac{x+1}{(x-3)\,(x^2+4)}\,.$$

Τότε θα πρέπει $(x-3)\left(x^2+4\right)\neq 0$. Επειδή $x^2+4\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αρκεί $x\neq 3$, δηλαδή $D=\mathbb{R}-\{3\}$.

Παράδειγμα 3.1.1 - 5

Όμοια η

$$h(x)=\sqrt{\frac{x}{x+2}}.$$

Πρέπει

$$\frac{x}{x+2}\geq 0 \quad \text{και} \quad x+2\neq 0$$

ή ισοδύναμα

$$x(x+2)\geq 0 \quad \text{και} \quad x+2\neq 0.$$

Τότε σύμφωνα με τον Πίνακα 3.1.1 - 1 προκύπτει ότι $x<-2$ ή $x\geq 0$. Άρα $D=(-\infty,-2)\cup[0,+\infty)$.

Πίνακας 3.1.1 - 1: Παράδειγμα 3.1.1 - 5.

Συνάρτηση	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x	-	-	+	
$x+2$	-	+	+	
$x(x+2)$	+	-	+	

Αντίστροφη συνάρτηση

Ορισμός 3.1.1 - 2 (αντίστροφης συνάρτησης). *Έστω μία συνάρτηση*

$$f: \qquad D \ni x \longrightarrow f(x) = y \in T$$

και $T^* \subseteq T$. *Αν η απεικόνιση* f^* *με*

$$f^*: \qquad T \ni y \longrightarrow f^*(y) = x \in D \tag{3.1.1 - 4}$$

είναι επίσης μονοσήμαντη, τότε ορίζει την **αντίστροφη συνάρτηση** *της* f, *που συμβολίζεται με* f^{-1}.

Σημειώσεις 3.1.1 - 1

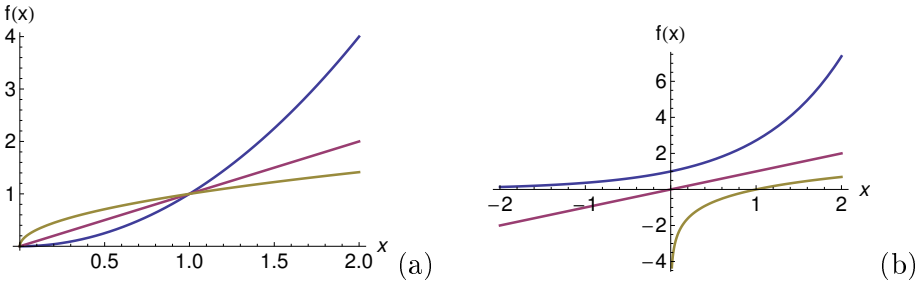
i) Το f^{-1} είναι συμβολισμός και δεν πρέπει να συγχέεται με το $1/f$.

ii) Ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης υπολογίζεται, όταν η εξίσωση $f(x) = y$ λυθεί ως προς x (Παράδειγμα 3.1.1 - 6). Επειδή όμως τις περισσότερες φορές η λύση της εξίσωσης είναι αδύνατη (Παράδειγμα 3.1.1 - 7), ο τύπος της και όταν ακόμα είναι γνωστό ότι υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση, δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί.

iii) Το διάγραμμα της f και της f^{-1} εφόσον υπάρχει, είναι **συμμετρικό** ως προς την ευθεία $y = x$ (Σχ. 3.1.1 - 2).

iv) Στην περίπτωση που ισχύει ο Ορισμός 3.1.1 - 2, δηλαδή ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση, λέγεται ότι η f ορίζει μια **αμφιμονοσήμαντη** ή **ένα προς ένα** απεικόνιση. Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτή ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.1.1 - 1. *Η συνάρτηση f έχει αντίστροφη συνάρτηση τότε και μόνον, όταν η f είναι αμφιμονοσήμαντη.*



Σχήμα 3.1.1 - 2: Ευθεία $y = x$ κόκκινη γραμμή. (a) Συνάρτηση $f(x) = x^2$ μπλε, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ πράσινη καμπύλη, όταν $x > 0$ και (b) e^x μπλε, $\ln x$ πράσινη καμπύλη.

Στα παραδείγματα που δίνονται στη συνέχεια υποτίθεται ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση.

Παράδειγμα 3.1.1 - 6

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \quad \text{με πεδίο ορισμού} \quad D = \mathbb{R} - \{1\}.$$

Να υπολογιστεί ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης.

Λύση. Έστω

$$\frac{2x+1}{x-1} = y, \quad \text{οπότε} \quad x = \frac{y+1}{y-2} \quad \text{με} \quad T^* = \mathbb{R} - \{2\}.$$

Άρα

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}.$$

Παράδειγμα 3.1.1 - 7

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = e^x - x, \quad \text{όταν το πεδίο ορισμού είναι} \quad D = [,+\infty).$$

Τότε, επειδή η εξίσωση $e^x - x = y$ δεν λύνεται ως προς x, είναι αδύνατος ο υπολογισμός του τύπου της αντίστροφης συνάρτησης.

Σύνθετη συνάρτηση

Ορισμός 3.1.1 - 3 (σύνθετης συνάρτησης). *Έστω A, B, Γ τρία τυχόντα σύνολα διάφορα του κενού και $g|A$ μία συνάρτηση με πεδίο τιμών το B και $f|B$ μία συνάρτηση με πεδίο τιμών το Γ. Τότε ορίζεται μία συνάρτηση $h|A$ με πεδίο τιμών το Γ, που συμβολίζεται με $f \circ g$, από τον τύπο*

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \textit{για κάθε} \quad x \in A \qquad (3.1.1 - 5)$$

και λέγεται σύνθετη συνάρτηση των f, g.

Είναι προφανές ότι η σύνθεση συναρτήσεων πληροί την επιμεριστική ιδιότητα, δηλαδή

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

Παράδειγμα 3.1.1 - 8

Έστω οι συναρτήσεις

$$g(x) = 3x - 1 \quad \text{και} \quad f(x) = \sin x.$$

Τότε ορίζεται η σύνθετη συνάρτηση $f \circ g$ και είναι

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(3x - 1),$$

όπου για τα πεδία ορισμού είναι $D(f) = D(g) = D(f \circ g) = \mathbb{R}$, ενώ για τα πεδία τιμών $T(g) = \mathbb{R}$ και $T(f) = T(f \circ g) = [-1, 1]$.

Παράδειγμα 3.1.1 - 9

Όμοια η σύνθεση των συναρτήσεων

$$g(x) = -x^2 \quad \text{και} \quad f(x) = e^x$$

δίνει

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{-x^2},$$

[1]όπου $D(f) = D(g) = D(f \circ g) = \mathbb{R}$, ενώ $T(f) = \mathbb{R}$ και $T(g) = T(f \circ g) = (0, +\infty)$.

[1]Βλέπε Παράγραφο 3.3.6.

3.1.2 Ισότητα

Ορισμός 3.1.2 - 1. *Οι συναρτήσεις f, $g|D$ λέγονται* **ίσες** *και συμβολίζεται αυτό με $f = g$ στο D τότε και μόνον, όταν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in D$.*

Προφανώς η ισότητα είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική, οπότε ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού D.

3.1.3 Διάταξη

Ορισμός 3.1.3 - 1. *Έστω οι συναρτήσεις f, $g|D$. Τότε θα είναι $f \leq g$ τότε και μόνον, όταν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in D$.*

Η σχέση αυτή είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική και μεταβατική, οπότε ορίζει μία **σχέση διάταξης** στο σύνολο των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού D, η οποία όμως δεν είναι γραμμική. Αντίστοιχα ορίζεται η δυϊκή της σχέση $f \geq g$.

3.1.4 Πρόσθεση

Ορισμός 3.1.4 - 1. *Έστω οι συναρτήσεις f, $g|D$. Τότε ορίζεται ως άθροισμά τους η συνάρτηση $h = f + g|D$, όπου*

$$h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{για κάθε } x \in D. \tag{3.1.4 - 1}$$

Το άθροισμα γενικεύεται για ν το πλήθος συναρτήσεις.

Ιδιότητες

i) αντιμεταθετική $f + g = g + f$ για κάθε f, $g|D$,

ii) προσεταιριστική $f + (g + h) = (f + g) + h$ για κάθε f, g, $h|D$,

iii) υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού D, που λέγεται **μηδενική** συνάρτηση και συμβολίζεται με $\tilde{O}$, τέτοια ώστε $\tilde{O}(x) = 0$ για κάθε $x \in D$ και για την οποία ισχύει $f + \tilde{O} = \tilde{O} + f = f$ για κάθε $f|D$,

iv) για κάθε $f|D$ υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση η $-f|D$, που λέγεται **αντίθετη** συνάρτηση της f στο D, τέτοια ώστε $f+(-f)=\tilde{O}$,

v) στο D ισχύει η ισοδυναμία: αν $f+h=g+h$, τότε $f=g$ για κάθε $f, g, h|D$ (νόμος της διαγραφής στην πρόσθεση),

v) για κάθε $f, g, X|D$ η εξίσωση $f+X=g|D$ έχει μοναδική λύση την $X=g+(-f)$.

Η μοναδική λύση της εξίσωσης αυτής λέγεται διαφορά της f από την g και συμβολίζεται με $g-f$, ενώ η πράξη με την οποία υπολογίζεται η διαφορά των δύο συναρτήσεων λέγεται **αφαίρεση**.

3.1.5 Πολλαπλασιασμός

Ορισμός 3.1.5 - 1. *Έστω οι συναρτήσεις $f, g|D$. Τότε ορίζεται ως γινόμενό τους η συνάρτηση $h=f\cdot g=fg|D$, όταν*

$$h(x)=(fg)(x)=f(x)g(x) \quad \textit{για κάθε } x\in D. \tag{3.1.5 - 1}$$

Όμοια ο πολλαπλασιασμός γενικεύεται για ν το πλήθος συναρτήσεις.

Ιδιότητες

i) αντιμεταθετική $fg=gf$ για κάθε $f, g|D$,

ii) προσεταιριστική $f(gh)=(fg)h$ για κάθε $f, g, h|D$,

iii) επιμεριστική ως προς την πρόσθεση $f(g+h)=fg+fh$ για κάθε $f, g, h|D$,

iv) υπάρχει στο D ακριβώς μία συνάρτηση, που λέγεται **μοναδιαία** συνάρτηση και συμβολίζεται με e, τέτοια ώστε $e(x)=1$ για κάθε $x\in D$ και για την οποία ισχύει ότι $fe=ef=f$ για κάθε $f|D$,

v) αν $f|D$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in D$, τότε υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f^*=1/f|D$, τέτοια ώστε $ff^*=e$,

vi) στο D ισχύει η ισοδυναμία: αν $fh = gh$ και $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D$, τότε $f = g$ (νόμος της διαγραφής στον πολλαπλασιασμό),

vii) για κάθε f, g, $X|D$ η εξίσωση $fX = g|D$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D$ έχει μοναδική λύση την $X = g/f$.

Η μοναδική λύση της εξίσωσης αυτής λέγεται πηλίκο της g προς την f και συμβολίζεται με g/f. Η πράξη, με την οποία υπολογίζεται το πηλίκο δύο συναρτήσεων, λέγεται διαίρεση.

3.2 Είδη συναρτήσεων

3.2.1 Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Ορισμός 3.2.1 - 1. *Μία συνάρτηση $f|D$ λέγεται άρτια (even), όταν για κάθε x, $-x \in D$ ισχύει*

$$f(-x) = f(x). \tag{3.2.1 - 1}$$

Χαρακτηριστικό του διαγράμματος μιας άρτιας συνάρτησης είναι ότι παρουσιάζει συμμετρία ως προς τον άξονα Oy. Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η $\cos x$, $\left(x^2+1\right)^{1/2}$ (Σχ. 3.2.1 - 1a), κ.λπ.

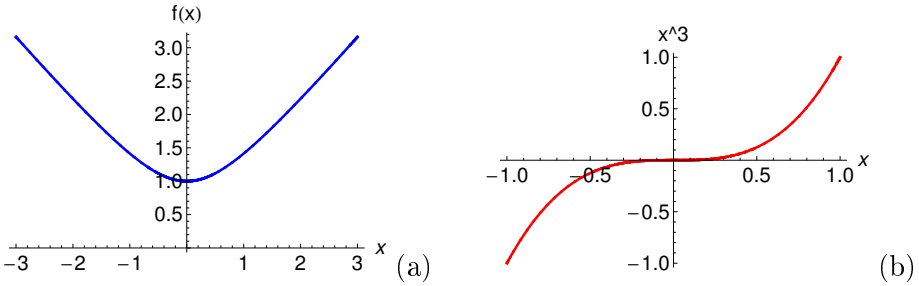
Ορισμός 3.2.1 - 2. *Μία συνάρτηση $f|D$ λέγεται περιττή (odd), όταν για κάθε x, $-x \in D$ ισχύει*

$$f(-x) = -f(x). \tag{3.2.1 - 2}$$

Χαρακτηριστικό του διαγράμματος μιας περιττής συνάρτησης είναι ότι παρουσιάζει συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων O. Όμοιο παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η x^3 (Σχ. 3.2.1 - 1b), $\sin x$, κ.λπ.

Άμεσα προκύπτει από τους παραπάνω ορισμούς ότι:

Πρόταση 3.2.1 - 1. *Αν η f είναι άρτια και η g περιττή συνάρτηση, τότε το γινόμενό τους είναι περιττή συνάρτηση, ενώ το γινόμενο δύο περιττών ή δύο άρτιων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.*



Σχήμα 3.2.1 - 1: (a) Συνάρτηση $f(x) = \left(x^2+1\right)^{1/2}$ και (b) x^3.

3.2.2 Μονοτονία συνάρτησης

Ορισμός 3.2.2 - 1 (μονοτονίας). *Έστω η συνάρτηση $f|D$ και x_1, $x_2 \in D$, όπου χωρίς να περιορίζεται η γενικότητα υποτίθεται ότι $x_1 < x_2$. Τότε, αν:*

i) $f(x_1) \leq f(x_2)$ *η* f *θα λέγεται αύξουσα και θα συμβολίζεται με* $\uparrow$.

ii) $f(x_1) \geq f(x_2)$ *η* f *θα λέγεται φθίνουσα και θα συμβολίζεται με* $\downarrow$.

Και στις δύο περιπτώσεις η συνάρτηση θα λέγεται **μονότονη**.

iii) $f(x_1) < f(x_2)$ *η* f *θα λέγεται γνήσια αύξουσα και θα συμβολίζεται με* $\Uparrow$.

iv) $f(x_1) > f(x_2)$ *η* f *θα λέγεται γνήσια φθίνουσα και θα συμβολίζεται με* $\Downarrow$.

Στις περιπτώσεις (iii) *και* (iv) *η συνάρτηση θα λέγεται* **γνήσια μονότονη**.

Ο προσδιορισμός της μονοτονίας μιας συνάρτησης θα γίνει στο Μάθημα *Παράγωγος Συνάρτησης*.

Δίνονται στη συνέχεια χωρίς απόδειξη δύο σημαντικά για τα επόμενα μαθήματα θεωρήματα, που έχουν σχέση με τις μονότονες συναρτήσεις.

Θεώρημα 3.2.2 - 1. *Αν μία συνάρτηση $f|D$ είναι γνήσια μονότονη στο D, τότε υπάρχει πάντοτε η αντίστροφή της συνάρτηση $f^{-1}|T$, όπου $T = f(D)$ και είναι του ίδιου είδους μονοτονίας με αυτή.*

Θεώρημα 3.2.2 - 2. *Η σύνθεση δύο συναρτήσεων του ίδιου είδους μονοτονίας είναι αύξουσα συνάρτηση, ενώ διαφορετικού είδους μονοτονίας φθίνουσα συνάρτηση.*

3.2.3 Περιοδική συνάρτηση

Ορισμός 3.2.3 - 1. *Μία συνάρτηση $f|\mathbb{R}$ λέγεται* **περιοδική**, *αν υπάρχει $\tau \in \mathbb{R}$ με $\tau \neq 0$, έτσι ώστε να ισχύει*

$$f(x+\tau) = f(x) \quad \textit{για κάθε } x \in \Re. \tag{3.2.3 - 1}$$

Τότε ο τ λέγεται **περίοδος**, ενώ ο ελάχιστος θετικός αριθμός τ για τον οποίο ισχύει η $(3.2.3-1)$ λέγεται **θεμελιώδης περίοδος** και συμβολίζεται με T.

Στην περίπτωση που η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το D με $D \subset \mathbb{R}$, τότε ο Ορισμός 3.2.3 - 1 τροποποιείται ως εξής:

Ορισμός 3.2.3 - 2. *Μία συνάρτηση $f|D$ λέγεται* **περιοδική**, *αν υπάρχει $\tau \in D$ με $\tau \neq 0$, έτσι ώστε να ισχύει*

$$f(x+\tau) = f(x) \quad \textit{για κάθε } x,\ x+\tau \in D. \tag{3.2.3 - 2}$$

Σημείωση 3.2.3 - 1

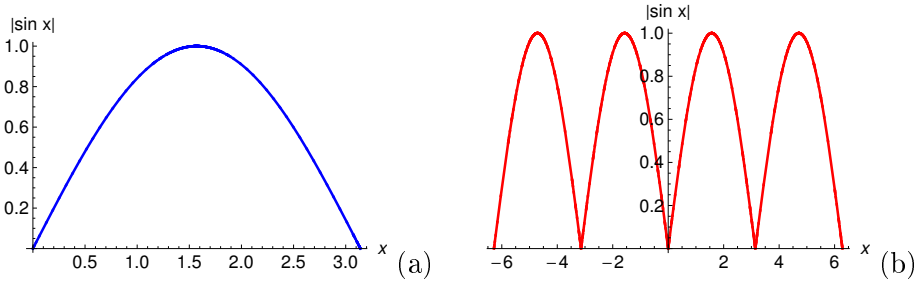
Άμεσα προκύπτει από τον ορισμό ότι οι ιδιότητες και το διάγραμμα μιας περιοδικής συνάρτησης θα είναι γνωστά, όταν μελετηθεί η συνάρτηση σε ένα διάστημα πλάτους T, δηλαδή όσο η θεμελιώδης περίοδος.

Οι περιοδικές συναρτήσεις συναντώνται συχνά στις εφαρμογές, όπου η μεταβλητή τους t συμβολίζει τον χρόνο και μεταβάλλεται σε διαστήματα όπως το $[0,+\infty)$, $[t_1,t_2]$ κ.λπ. Στις περιπτώσεις αυτές λέγεται ότι έχουμε τον **περιορισμό** της περιοδικής συνάρτησης στα διαστήματα αυτά.

Κατηγορίες περιοδικών συναρτήσεων

Οι περιοδικές συναρτήσεις χωρίζονται στις παρακάτω δύο κατηγορίες:

i) Εκείνες που από τον ορισμό τους είναι περιοδικές, δηλαδή οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις όπως: $\sin x$, $\cos 3x$, $\tan 5x$, $|\sin x|$ που είναι γνωστή ως [2]**πλήρης ανόρθωση** (Σχ. 3.2.3 - 2) με θεμελιώδη περίοδο $T = \pi$, κ.λπ.



Σχήμα 3.2.3 - 1: Συνάρτηση (a) $|\sin x|$, όταν $x \in [0, \pi]$ δηλαδή διάστημα πλάτους $T = \pi$ και (b) όταν $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

ii) Συναρτήσεις που ορίζονται με κάποια συνθήκη περιοδικότητας. Οι συναρτήσεις αυτές συναντώνται στις εφαρμογές και παραδείγματά τους δίνονται στη συνέχεια.

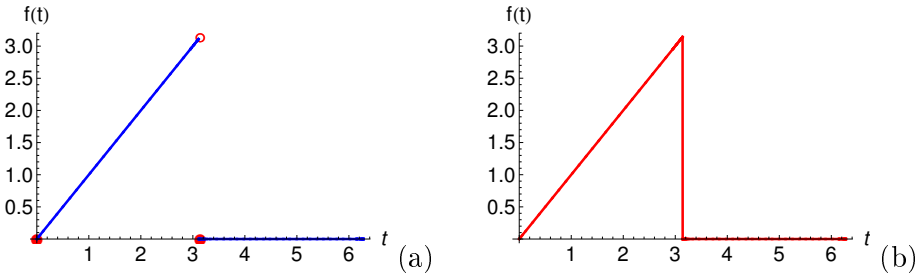
Παράδειγμα 3.2.3 - 1

Η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{αν} \quad 0 \le t < \pi \\ \\ 0 & \text{αν} \quad \pi \le t < 2\pi, \end{cases} \qquad \text{όταν} \ \overbrace{f(t + \underbrace{2\pi}_{T}) = f(t) \ \text{για κάθε} \ t \in \Re}^{\text{συνθήκη}}$$

είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$. Στο Σχ. 3.2.3 - 2a δίνεται το διάγραμμά της στο διάστημα $[0, T]$ πλάτους όσο η θεμελιώδης περίοδος, όπως αυτό παρουσιάζεται στα μαθηματικά, ενώ στο Σχ. 3.2.3 - 2b όπως στις εφαρμογές.

[2] Γενικότερα η συνάρτηση $|\sin \omega x|$ με $\omega > 0$ είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = \pi/\omega$.



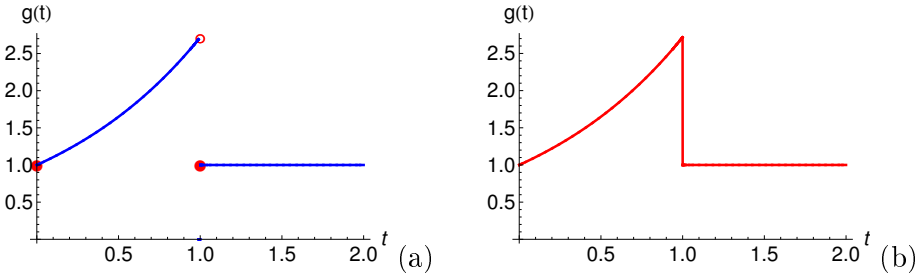
Σχήμα 3.2.3 - 2: Παράδειγμα 3.2.3 - 1.

Παράδειγμα 3.2.3 - 2

Όμοια η

$$g(t) = \begin{cases} e^t & \text{αν} \quad 0 \le t < 1 \\ 1 & \text{αν} \quad 1 \le t < 2, \end{cases} \quad \text{όταν} \quad \overbrace{f(t + \underbrace{2}_{T}) = f(t) \ \text{για κάθε} \ t \in \Re}^{\text{συνθήκη}}$$

είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = 2$ με διάγραμμα στο Σχ. 3.2.3 - 3a στα Μαθηματικά, αντίστοιχα Σχ. 3.2.3 - 3b στις εφαρμογές.



Σχήμα 3.2.3 - 3: Παράδειγμα 3.2.3 - 2.

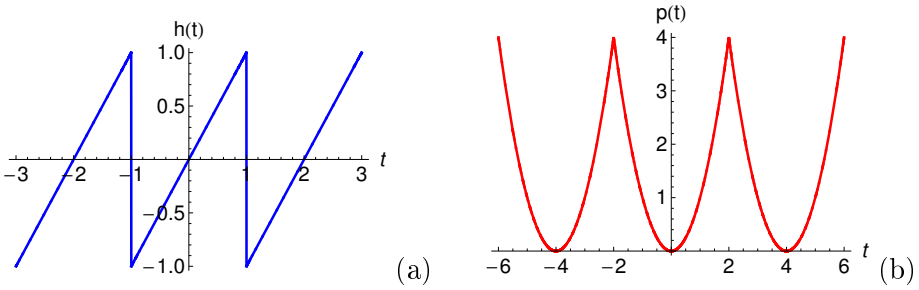
Παράδειγμα 3.2.3 - 3

Όμοια οι

$$h(t) = t, \quad \text{όταν} \quad -1 \le t < 1 \ \text{και} \ h(t + \overbrace{2}^{T}) = h(t), \ \text{και}$$

$$p(t) = t^2, \quad \text{όταν} \quad -2 \le t < 2 \ \text{και} \ p(t + \overbrace{4}^{T}) = p(t)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$ είναι περιοδικές με θεμελιώδη περίοδο $T = 2$ (Σχ. 3.2.3 - 4a) και $T = 4$ (Σχ. 3.2.3 - 4b).



Σχήμα 3.2.3 - 4: Παράδειγμα 3.2.3 - 3.

Ιδιότητες

Σχετικά με τις περιοδικές συναρτήσεις ισχύουν:

i) το διάγραμμα μιας περιοδικής συνάρτησης σε μία περίοδο λέγεται **κύμα**,

ii) αν η μεταβλητή μιας περιοδικής συνάρτησης συμβολίζει το διάστημα, τότε η περίοδός της λέγεται **μήκος κύματος** και συμβολίζεται με λ,

iii) κάθε περιοδική συνάρτηση $f(t)$ με θεμελιώδη περίοδο T γίνεται περιοδική με θεμελιώδη περίοδο 2π, θέτοντας

$$t = \frac{2\pi}{T}x\,, \qquad (3.2.3 - 3)$$

iv) αν T είναι η θεμελιώδης περίοδος, τότε ορίζεται ως **συχνότητα** ν ο αριθμός

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad (3.2.3 - 4)$$

και ως **κυκλική συχνότητα** ο

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,, \qquad (3.2.3 - 5)$$

v) ορίζεται ως **αρμονική** κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(t) = a\cos(\omega t + \theta) \quad \text{ή} \quad f(t) = a\sin(\omega t + \theta). \qquad (3.2.3 - 6)$$

Πρόταση 3.2.3 - 1. *Το άθροισμα δύο ή περισσοτέρων αρμονικών συναρτήσεων με την ίδια κυκλική συχνότητα, έστω ω, είναι επίσης αρμονική συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα.*

Απόδειξη. Έστω οι αρμονικές συναρτήσεις $f(t) = \alpha_1 \cos(\omega t + \theta_1)$ και $g(t) = \alpha_2 \cos(\omega t + \theta_2)$. Τότε, αν $h(t) = f(t) + g(t)$, είναι

$$\begin{aligned} h(t) &= \alpha_1 \cos(\omega t + \theta_1) + \alpha_2 \sin(\omega t + \theta_2) \\ &= (\alpha_1 \cos\theta_1 + \alpha_2 \sin\theta_2)\cos\omega t + (-\alpha_1 \sin\theta_1 + \alpha_2 \cos\theta_2)\sin\omega t \\ &= A\,\cos\omega t + B\,\sin\omega t = B\left(\frac{A}{B}\,\cos\omega t + \sin\omega t\right) \\ &= B\,(\tan\phi\,\cos\omega t + \sin\omega t) = C\sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

δηλαδή

$$h(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t = C\sin(\omega t + \phi), \qquad (3.2.3\text{ - }7)$$

όπου $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ με $\tan\varphi = A/B$, όταν $B \neq 0$ και $-\pi \leq \varphi < \pi$. Από την $(3.2.3 - 7)$ προκύπτει ότι το άθροισμα είναι όμοια μία αρμονική συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα ω. ∎

Παράδειγμα 3.2.3 - 4

Το άθροισμα των αρμονικών συναρτήσεων $f(t) = \sin t$ και $g(t) = \sqrt{3}\cos t$, όπου $\omega = 1$, δίνει

$$h(t) = \sin t + \sqrt{3}\cos t = 2\left(\frac{1}{2}\sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\right) = 2\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right),$$

δηλαδή μία αρμονική συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα ω.

Αποδεικνύεται επίσης ότι ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση 3.2.3 - 2. *Το άθροισμα δύο ή περισσότερων αρμονικών συναρτήσεων, που η καθεμιά έχει κυκλική συχνότητα ακέραιο πολλαπλάσιο μιας συχνότητας, έστω ω_0, είναι μία περιοδική - γενικά μη αρμονική - συνάρτηση με συχνότητα τη μικρότερη συχνότητα των αρμονικών συναρτήσεων.*

Πρόταση 3.2.3 - 3. *Το άθροισμα δύο ή περισσότερων αρμονικών συναρτήσεων, που οι συχνότητές τους έχουν ανά δύο πηλίκο ρητό αριθμό, είναι περιοδική - γενικά μη αρμονική - συνάρτηση.*

3.3 Κατηγορίες συναρτήσεων

Δίνονται στη συνέχεια οι κυριότερες κατηγορίες συναρτήσεων με τις πλέον βασικές ιδιότητές τους.

3.3.1 Πολυωνυμική

Ορισμός 3.3.1 - 1 *Κάθε συνάρτηση της μορφής*

$$P(x) = P_\nu(x) = a_\nu x^\nu + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad (3.3.1\text{ - }1)$$

όταν $a_i \in \mathbb{R}$; $i = 0, 1, \ldots, \nu$ *και* $\nu = 1, 2, \ldots$ *λέγεται* **πολυωνυμική** *βαθμού* ν.

Τότε είναι $D = \mathbb{R}$, ενώ το T προσδιορίζεται, εφόσον αυτό είναι δυνατόν.

Ορισμός 3.3.1 - 2 *Κάθε εξίσωση της μορφής*

$$a_\nu x^\nu + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (3.3.1\text{ - }2)$$

όταν $a_i \in \mathbb{R}$; $i = 0, 1, \ldots, \nu$ *και* $\nu = 1, 2, \ldots$ *λέγεται* **πολυωνυμική εξίσωση** *βαθμού* ν, *ενώ κάθε τιμή, έστω* x^*, *που την επαληθεύει* **ρίζα** *της εξίσωσης.*

3.3.2 Ρητή

Ορισμός 3.3.2 - 1 *Λέγεται* **ρητή** *κάθε συνάρτηση που είναι δυνατόν να παρασταθεί ως το πηλίκο δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων, δηλαδή*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_\nu \nu x^\nu + \ldots + a_1 x + a_0}{\beta_m x^m + \ldots + \beta_1 x + \beta_0} \qquad (3.3.2\text{ - }1)$$

όπου $\nu, m = 1, 2, \ldots$ *με* $a_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ *για κάθε* $i = 0, 1, \ldots, \nu$ *και* $j = 0, 1, \ldots, m$.

Τότε $D = \mathbb{R} - \{$πραγματικές ρίζες του παρονομαστή$\}$, ενώ όμοια το T προσδιορίζεται, εφόσον αυτό είναι δυνατόν. Οι ρίζες του παρονομαστή λέγονται και **πόλοι** της $R(x)$.

3.3.3 Πεπλεγμένη

Ορισμός 3.3.3 - 1 *Λέγεται* **πεπλεγμένη** *(implicit) κάθε συνάρτηση που ορίζεται από μία αλγεβρική σχέση μεταξύ των y και x και η οποία δεν είναι λυμένη ως προς y, δηλαδή μία σχέση της μορφής*

$$F(x, y(x)) = 0, \tag{3.3.3 - 1}$$

όπου η F είναι ένα πολυώνυμο τόσο ως προς y όσο και ως προς x, η οποία και όταν ακόμα λυθεί ως προς y, θα περιέχει στην αναλυτική της έκφραση και ριζικά.

Ενδεικτικά δίνονται οι συναρτήσεις $y^2 = ax^2 + bx + c$, $x^3 + y^3 - 3ax = 0$, $y = x + \left(1 + x^2\right)^{1/2}$ κ.λπ. Οι ρητές συναρτήσεις είναι μία ειδική κατηγορία των πεπλεγμένων συναρτήσεων.

3.3.4 Τριγωνομετρικές

Ημίτονο: $\sin x$

Πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R}$ και τιμών $T = [-1, 1]$. Η συνάρτηση είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$, περιττή, γνήσια αύξουσα για κάθε $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, δηλαδή στο I και IV τεταρτημόριο και γνήσια φθίνουσα για κάθε $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$, δηλαδή στο II και III τεταρτημόριο (Σχ. 3.3.4 - 1a).

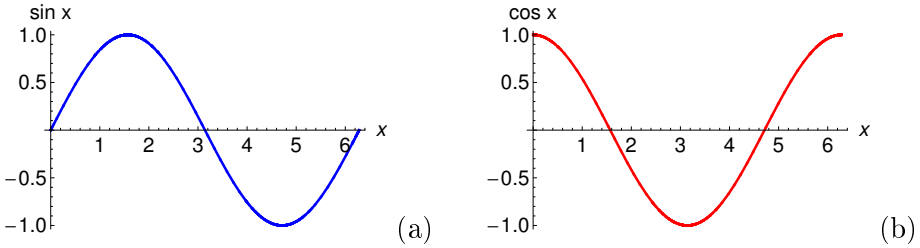
Βασική ταυτότητα: $\sin x = \sin a \iff \begin{cases} x = 2k\pi + a \\ x = 2k\pi + \pi - a \end{cases}$ με $k \in \mathbb{Z}$,

όταν $\mathbb{Z} = 0, \pm 1, \ldots, .$

Συνημίτονο: $\cos x$

Πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R}$ και τιμών $T = [-1, 1]$. Η συνάρτηση είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$, άρτια, γνήσια φθίνουσα για κάθε $x \in [0, \pi]$, δηλαδή στο I και II τεταρτημόριο και γνήσια αύξουσα για κάθε $x \in [\pi, 2\pi]$, δηλαδή στο III και IV τεταρτημόριο (Σχ. 3.3.4 - 1b).

Βασική ταυτότητα: $\cos x = \cos a \iff x = 2k\pi \pm a$ με $k \in \mathbb{Z}$.



Σχήμα 3.3.4 - 1: (a) Συνάρτηση $\sin x$ και (b) $\cos x$, όταν $x \in [0, 2\pi]$.

Εφαπτομένη: $\tan x$

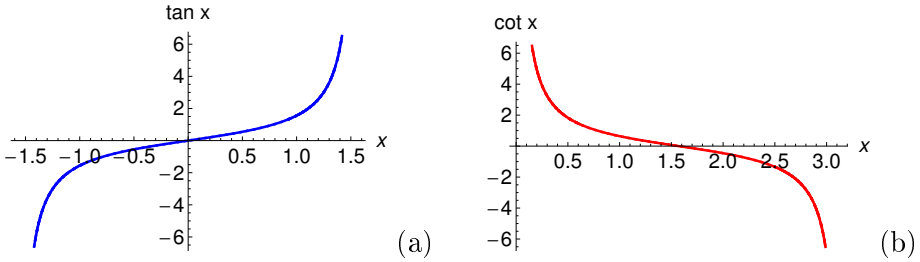
Πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \pi/2\}$; $\kappa \in \mathbb{Z}$ και τιμών $T = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = \pi$, περιττή και γνήσια αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της (Σχ. 3.3.4 - 2a).

Βασική ταυτότητα: $\tan x = \tan a \iff x = k\pi + a$ με $k \in \mathbb{Z}$.

Συνεφαπτομένη: $\cot x$

Πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R} - \{\kappa\pi\}$; $\kappa \in \mathbb{Z}$ και τιμών $T = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = \pi$, περιττή και γνήσια φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της (Σχ. 3.3.4 - 2b).

Βασική ταυτότητα: $\cot x = \cot a \iff x = k\pi + a$ με $k \in \mathbb{Z}$.



Σχήμα 3.3.4 - 2: (a) Συνάρτηση $\tan x$, όταν $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ και (b) $\cot x$, όταν $x \in (0, \pi)$.

3.3.5 Αντίστροφες τριγωνομετρικές

Τόξο ημιτόνου: $\sin^{-1} x$ **ή** $\arcsin x$

Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, όταν έχει πεδίο ορισμού το $[-\pi/2, \pi/2]$, είναι γνήσια αύξουσα και έχει πεδίο τιμών το $[-1,\, 1]$, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 20.1.4 - 1 αντιστρέφεται και ορίζει τη συνάρτηση (Σχ. 3.3.5 - 1a)

$$y = g(x) = f^{-1}(x) = \sin^{-1} x \iff \begin{cases} x = \sin y \\ -\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}\,. \end{cases} \qquad (3.3.5\text{ - }1)$$

Τόξο συνημιτόνου: $\cos^{-1} x$ **ή** $\arccos x$

Όμοια η συνάρτηση $f(x) = \cos x$ με πεδίο ορισμού το $[0, \pi]$ είναι γνήσια φθίνουσα και έχει πεδίο τιμών το $[-1,\, 1]$, οπότε αντιστρέφεται και ορίζει τη συνάρτηση

$$y = g(x) = f^{-1}(x) = \cos^{-1} x \iff \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \le y \le \pi. \end{cases} \qquad (3.3.5\text{ - }2)$$

Τόξο εφαπτομένης: $\tan^{-1} x$ **ή** $\arctan x$

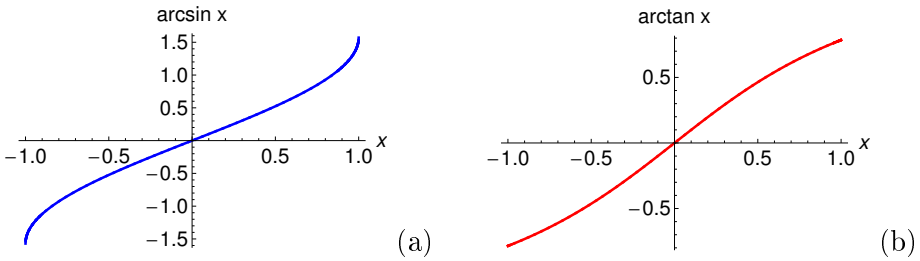
Η συνάρτηση $f(x) = \tan x$ όμοια με πεδίο ορισμού το $(-\pi/2, \pi/2)$ είναι γνήσια αύξουσα με πεδίο τιμών $\mathbb{R}$, οπότε αντιστρέφεται και ορίζει τη συνάρτηση (Σχ. 3.3.5 - 1b)

$$y = g(x) = f^{-1}(x) = \tan^{-1} x \iff \begin{cases} x = \tan y \\ -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\,. \end{cases} \qquad (3.3.5\text{ - }3)$$

Τόξο συνεφαπτομένης: $\cot^{-1} x$ **ή** $\operatorname{arccot} x$

Η συνάρτηση $f(x) = \cot x$ όμοια με πεδίο ορισμού το $(0, \pi)$ είναι γνήσια φθίνουσα με πεδίο τιμών $\mathbb{R}$, οπότε αντιστρέφεται και ορίζει τη συνάρτηση

$$y = g(x) = f^{-1}(x) = \cot^{-1} x \iff \begin{cases} x = \cos y \\ 0 < y < \pi. \end{cases} \qquad (3.3.5\text{ - }4)$$



Σχήμα 3.3.5 - 1: (a) Συνάρτηση $\sin^{-1} x$ και (b) $\tan^{-1} x$, όταν $x \in [-1, 1]$.

3.3.6 Εκθετική

Ορισμός 3.3.6 - 1. *Κάθε συνάρτηση της μορφής* $f(x) = a^x$ *όπου* $a > 0$ *και* $x \in \mathbb{R}$ *λέγεται* **εκθετική**. *Ειδικά όταν* $a = 1$ *είναι* $f(x) = 1$.

Προφανώς είναι $D = \mathbb{R}$, ενώ $T = (0, +\infty)$, δηλαδή οι τιμές της εκθετικής συνάρτησης είναι πάντοτε θετικές.

Ιδιότητες

Έστω $a, b \in (0, +\infty)$ και $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$i)$ $a^x a^y = a^{x+y}$ $\qquad$ $v)$ $a^x = 1 \iff x = 0$ με $a \neq 1$,

$ii)$ $a^x : a^y = a^{x-y}$ $\qquad$ $vi)$ $a > b \implies \begin{cases} a^x > b^x & ; \quad x > 0 \\ a^x < b^x & ; \quad x < 0 \end{cases}$,

$iii)$ $(ab)^x = a^x b^x$ $\qquad$ $vi)$ $a^x = a^y \iff x = y$ με $a \neq 1$,

$iv)$ $(a^x)^y = a^{xy}$ $\qquad$ $viii)$ $x > y \implies \begin{cases} a^x > a^y & ; \quad a > 1 \\ a^x < a^y & ; \quad a < 1 \end{cases}$.

Μονοτονία

Αποδεικνύεται ότι, όταν:

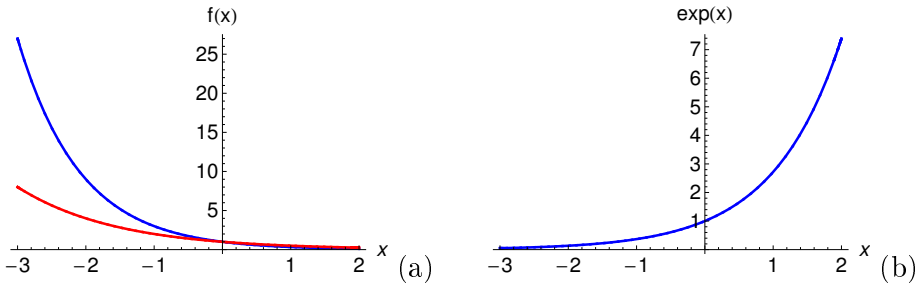
I) $0 < a < 1$, η συνάρτηση είναι **γνήσια φθίνουσα** (Σχ. 3.3.6 - 1 a),

II) $a > 1$, είναι **γνήσια αύξουσα**.

Ειδικά, όταν $a = e$, όπου e είναι ο γνωστός υπερβατικός αριθμός[3] έχουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = e^x, \qquad (3.3.6 - 1)$$

που είναι μία γνήσια αύξουσα συνάρτηση (Σχ. 3.3.6 - 1 b).



Σχήμα 3.3.6 - 1: (a) Συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $a = \frac{1}{3}$ μπλε, $a = \frac{1}{2}$ κόκκινη καμπύλη και (b) η e^x, όταν $x \in [-3, 2]$.

Σημείωση 3.3.6 - 1

Η συνάρτηση e^x πολλές φορές στις εφαρμογές συμβολίζεται με $\exp(x)$.

3.3.7 Λογαριθμική

Αποδεικνύεται ότι ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 3.3.7 - 1. *Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό a με $a \neq 1$ και κάθε $y \in \mathbb{R}$ με $y > 0$, υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x, έτσι ώστε $a^x = y$.*

Ορισμός 3.3.7 - 1. *Ο μονοσήμαντα ορισμένος πραγματικός αριθμός y για τον οποίον ισχύει*

$$a^y = x \quad \text{όπου} \quad a > 0 \quad \text{με} \quad a \neq 1 \quad \text{και} \quad x > 0$$

λέγεται **λογάριθμος** *του x με βάση a και συμβολίζεται με $\log_a x$.*

[3] Βλέπε Μάθημα *Σειρές - Ακολουθίες*.

Παρατηρήσεις 3.3.7 - 1

- Προφανώς $D = (0, +\infty)$, ενώ $T = \mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση $\log_a x$ είναι η αντίστροφη της a^x.
- Ειδικά, όταν $a = e$, ορίζεται ο **φυσικός** ή **νεπέριος** λογάριθμος, που συμβολίζεται συνήθως με $\ln x$ (Σχ. 3.3.7 - 1 b).

  Προφανώς τότε ισχύει η ταυτότητα

$$a^x = e^{x \ln a}. \tag{3.3.7 - 1}$$

  Όταν $a = 10$, ορίζεται ο **δεκαδικός λογάριθμος**, που συμβολίζεται με $\log x$ ή $\log_{10} x$.

Ιδιότητες

Έστω $a > 0$ με $a \neq 1$ και $x, y > 0$. Τότε:

i) $a^{\log_a x} = x$

ii) $\log_a x = \log_a y \iff x = y$

iii) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$

iv) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,

v) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$,

vi) $\log_a x^b = b \log_a x$; $b \in \mathbb{R}$,

vii) $\log_a x > \log_a y \iff$

$$\begin{cases} x > y & ; \quad a > 1 \\ x < y & ; \quad a < 1 \end{cases}.$$

Άμεση συνέπεια των ιδιοτήτων *iv*, *v* και *vi* είναι ότι, αν $xy > 0$, τότε:

viii) $\log_a(xy) = \log_a |x| + \log_a |y|$,

ix) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a |x| - \log_a |y|$,

x) $\log_a x^\nu = \nu \log_a x$, όταν $x > 0$ $\nu = 1, 2, \ldots$,

xi) Ισχύει ο παρακάτω **τύπος αλλαγής βάσης**:

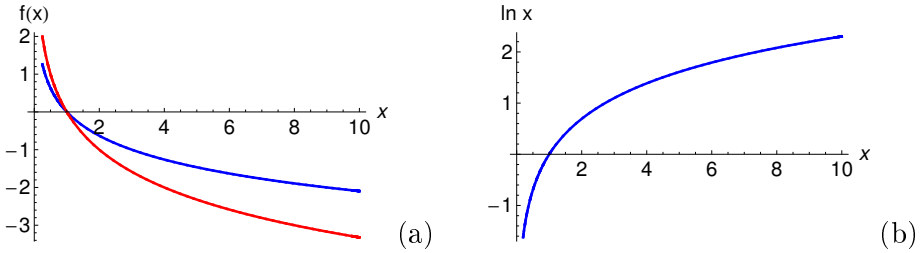
$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}. \tag{3.3.7 - 2}$$

Μονοτονία

Σύμφωνα με το Θεώρημα 20.1.4 - 1, όταν

a) $0 < a < 1$, η συνάρτηση είναι **γνήσια φθίνουσα** (Σχ. 3.3.7 - 1 a),

b) $a > 1$, είναι **γνήσια αύξουσα** (Σχ. 3.3.7 - 1 b).



Σχήμα 3.3.7 - 1: (a) Συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ με $a = \frac{1}{3}$ μπλε, $a = \frac{1}{2}$ κόκκινη καμπύλη και (b) η $\ln x$, όταν $x \in (0, 10]$.

3.3.8 Υπερβολικές

[4]Οι υπερβολικές συναρτήσεις (hyperbolic functions) ορίζονται βάσει των συναρτήσεων e^x και e^{-x}. Χρησιμοποιούνται στην περιγραφή πολλών φυσικών φαινομένων, που αναφέρονται στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία, τη μεταφορά θερμότητας, τις κυματομορφές soliton κ.λπ.

Οι συναρτήσεις αυτές είναι:

Υπερβολικό ημίτονο

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \mid \mathbb{R} \quad (\Sigma\chi.\ 3.3.8 - 1a). \tag{3.3.8 - 1}$$

Υπερβολικό συνημίτονο

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \mid \mathbb{R} \quad (\Sigma\chi.\ 3.3.8 - 1b). \tag{3.3.8 - 2}$$

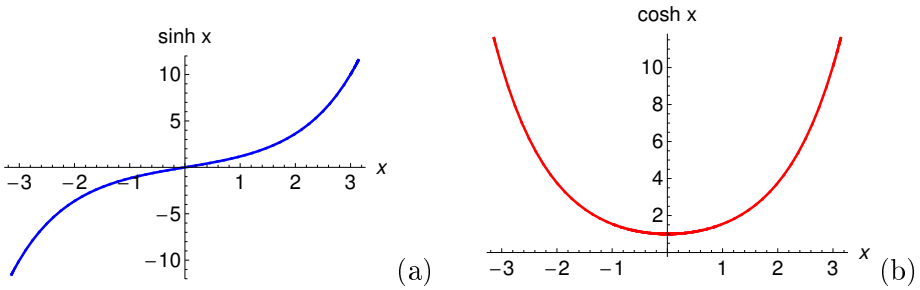
[4]Για εφαρμογές βλέπε Α. Μπράτσος [1].

Υπερβολική εφαπτομένη

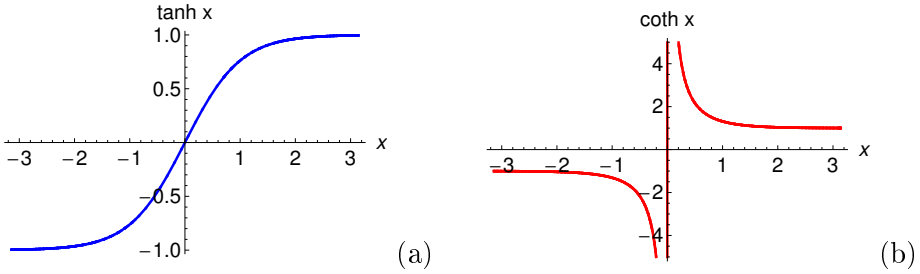
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \,|\, \mathbb{R} \quad (\Sigma\chi.\ 3.3.8 - 2a). \qquad (3.3.8\text{ - }3)$$

Υπερβολική συνεφαπτομένη

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \,|\, \mathbb{R} - \{0\} \quad (\Sigma\chi.\ 3.3.8 - 2b). \qquad (3.3.8\text{ - }4)$$



Σχήμα 3.3.8 - 1: (a) Συνάρτηση $\sinh x$ και (b) $\cosh x$, όταν $x \in [-\pi, \pi]$.



Σχήμα 3.3.8 - 2: (a) Συνάρτηση $\tanh x$ και (b) $\coth x$, όταν $x \in [-\pi, \pi]$.

3.3.9 Υπερβατικές

Οι συναρτήσεις της κατηγορίας αυτής δεν επαληθεύουν καμία αλγεβρική εξίσωση και η αναλυτική έκφραση επιτυγχάνεται με απεριόριστα μεγάλο αριθμό αλγεβρικών

όρων. Είναι προφανές ότι η εκθετική, οι τριγωνομετρικές, οι υπερβολικές και οι αντίστροφές των συναρτήσεις είναι υπερβατικές.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$:

i) $\sqrt{x^2-5x+4}$

ii) $\tan(\sin 2x)$

iii) $\dfrac{x}{|x+3|}$

iv) $\sin^{-1} 3x$

v) $\sqrt{\dfrac{1-x}{(x-2)(x+5)}}$

vi) $\tan^{-1} 5x$

vii) $\ln\left(x^2-x-2\right)$

viii) $\cosh\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

ix) $\dfrac{3x^2+4x-5}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{2x^2-54}}$

x) $\coth\dfrac{x-1}{x+1}$

xi) $(x+1)^{1/x}$

xii) $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^x$.

2. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\ln(\sin x).$$

Να υπολογιστούν τα πεδία ορισμού, τιμών και να γίνει το διάγραμμά της.

3. Όμοια της συνάρτησης

$$f(x)=\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right).$$

4. Δείξτε ότι:

i) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$,

ii) $\sinh(-x)=-\sinh x$, $\cosh(-x)=\cosh x$, $\tanh(-x)=-\tanh x$,

iii) $\sinh(x\pm y)=\sinh x\,\cosh y\pm\cosh x\,\sinh y$,

iv) $\cosh(x\pm y)=\cosh x\,\cosh y\pm\sinh x\,\sinh y$,

v) $\tanh(x\pm y)=\dfrac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm\tanh x\,\tanh y}$.

5. Δείξτε ότι οι αντίστροφες συναρτήσεις των υπερβολικών συναρτήσεων δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{aligned}
\sinh^{-1} x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\\
\cosh^{-1} x &= \begin{cases} \cosh_+^{-1} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\\ \cosh_-^{-1} x = \ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\\ (\text{δίτιμη συνάρτηση}) \end{cases}\\
\tanh^{-1} x &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\\
\coth^{-1} x &= \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}.
\end{aligned}$$

Σε κάθε περίπτωση να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού των και βάσει αυτού το πεδίο τιμών των υπερβολικών συναρτήσεων.

6. Να εξεταστεί αν είναι περιοδικές οι παρακάτω συναρτήσεις $f(x)$:

i) $\sin 3x$ *ii)* $\sin|x|$ *iii)* $|\sin\omega x|$

iv) $|\cos\omega x|$ *v)* $\cos x^2$ *vi)* $|\tan 2x|$, να

υπολογιστεί η θεμελιώδης περίοδος T και να γίνει το διάγραμμα για τις περιοδικές από αυτές στη θεμελιώδη περίοδο.

7. Να γίνει η γραφική παράσταση των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων, όταν ο περιορισμός τους στη θεμελιώδη περίοδο είναι:

i) $f(t) = e^{-t}$ αν $0 \le t < \pi$,

ii) $f(t) = 4\pi^2 - t^2$ αν $0 \le t < 2\pi$,

iii) $f(t) = \begin{cases} t & \text{αν} \quad -\pi \le t < 0\\ 0 & \text{αν} \quad 0 \le t < \pi, \end{cases}$

iv) $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{αν} \quad -\pi/2 \le t < 0\\ 0 & \text{αν} \quad 0 \le t < \pi/2, \end{cases}$

v) $f(t) = |\sin t|$

vi) $f(t) = \begin{cases} \pi + t & \text{αν} \quad -\pi \leq t < 0 \\ \pi - t & \text{αν} \quad 0 \leq t < \pi. \end{cases}$

8. Να δειχθεί ότι, αν μία συνάρτηση $f(t)$ είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο T, τότε

i) $f(t) = f(t + kT)$, όταν $k \in \mathbb{Z}$,

ii) η $f(kt)$ με $k \neq 0$ είναι όμοια περιοδική με θεμελιώδη περίοδο T/k.

9. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι περιοδικές με περίοδο τ, τότε και η συνάρτηση $h = kf + \lambda g$ όπου k, $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι όμοια περιοδική.

Απαντήσεις

1. (i) Πρέπει $x^2 - 5x + 4 \geq 0$, οπότε $D = (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$. (ii) $D = \mathbb{R}$. (iii) $D = \mathbb{R} - -3$. (iv) $D = \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$. (v) Πρέπει $x \neq -5, 2$ και $(1 - x)(x - 2)(x + 5) \geq 0$, οπότε τελικά $D = (-\infty, -5) \cup [1, 2)$. (vi) $D = \left(-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}\right)$. (vii) Πρέπει $x^2 - x - 2 > 0$, δηλαδή $D = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$. (viii) Πρέπει $x \neq -1$ και $x(x + 1) \geq 0$, οπότε τελικά $D = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ (ix) Ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός, ενώ ο αριθμητής ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα τελικά πρέπει $x^2 - 4 \geq 0$ και $2x^2 - 54 \geq 0$, δηλαδή μετά τη συναλήθευση των ανισοτήτων $D = (-\infty, \sqrt{27}] \cup [\sqrt{27}, +\infty)$. (x) $D = \mathbb{R} - \pm 1$. (xi) Πρέπει $x + 1 > 0$ και $x \neq 0$, οπότε $D = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$. (xii) Πρέπει $x \sin x > 0$ και $x \neq 0$. Άρα $D = (2k\pi, (2k + 1)\pi)$ με $k = 0, 2, \ldots$.
2. Πρέπει $\sin x > 0$, οπότε $D = (2k\pi, (2k + 1)\pi)$ με $k = 0, 2, \ldots$.
3. Πρέπει $\cos \frac{x}{2} > 0$, οπότε $D = \left(2k\pi - \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ με $k = 0, 2, \ldots$.
4. Αντικατάσταση σύμφωνα με τους τύπους $(3.3.8 - 1)$ - $(3.3.8 - 4)$. **5.** Έστω

$$\tanh x = y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1},$$

οπότε με $1 - y \neq 0$ τελικά $(1 - y)e^{2x} = 1 + y)$, δηλαδή $e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$ και λογαριθμίζοντας τελικά η αποδεικτέα. **6.** Εφαρμογή της σχέσης $(3.2.3 - 1)$. **7.** Δίνονται οι εντολές με το MATHEMATICA:
(i)

```
Plot[Ex[[-t], {t, 0, Pi}, PlotStyle -> Thick,
ColorFunction -> Function[Red],
AxesLabel -> {x, "Ex[-t]"}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial",
FontSize -> 14}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```

(iii)

```
Plot[Piecewise[{{t, -Pi < t < 0 - 0.03}, {0, 0< t < Pi}}],
{t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> Thick,  ColorFunction -> Function[Blue],
AxesLabel -> {t, "f(t)"}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial",
FontSize -> 14}]
```

και ανάλογα οι υπόλοιπες. **8.** Εφαρμογή του Ορισμού 3.2.3 - 1. **9.** Όμοια.

3.4 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Finney, R. L. & Giordano F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[4] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Βιβλιογραφία για περαιτέρω μελέτη

Παπαδημητράκης, Μ. (2015). *Ανάλυση: Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής* *http://fourier.math.uoc.gr/papadim/analysis_n.pdf*
Πανεπιστήμιο Κρήτης: Τμήμα Μαθηματικών.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://eclass.uoa.gr/courses/MATH130/ θέση Έγγραφα
- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/

- http://eom.springer.de/

Μάθημα 4

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

4.1 Ορισμός και Άλγεβρα μιγαδικών αριθμών

4.1.1 Ορισμοί

Ορισμός 4.1.1 - 1 (φανταστική μονάδα). *Ορίζεται από τη σχέση*

$$i = (-1)^{1/2}. \tag{4.1.1 - 1}$$

Άρα

$$i^2 = -1. \tag{4.1.1 - 2}$$

[1] Ο συμβολισμός $i = (-1)^{1/2}$ αρχικά δόθηκε από τον Euler, ενώ ο Gauss επινοώντας τη γεωμετρική παράσταση των μιγαδικών αριθμών απέδειξε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί είναι το ίδιο συγκεκριμένοι, όπως οι πραγματικοί αριθμοί, αφού είναι δυνατόν να παρασταθούν γεωμετρικά στο επίπεδο.

Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.1 - 1 είναι δυνατόν να οριστούν οι παρακάτω αριθμοί:

[1] Βλέπε βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4, 5, 6] και
https : //en.wikipedia.org/wiki/Complex_number

Ορισμός 4.1.1 - 2 (φανταστικός αριθμός). *Ορίζεται ως φανταστικός κάθε αριθμός της μορφής $z = \beta i$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$ και i η φανταστική μονάδα.*

Ορισμός 4.1.1 - 3 (μιγαδικός αριθμός). *Ορίζεται ως μιγαδικός κάθε αριθμός (complex number) της μορφής $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και i η φανταστική μονάδα.*

Επομένως οι αριθμοί $3\,i$, $-4\,i$, $\sqrt{2}\,i$ είναι φανταστικοί, ενώ οι αριθμοί $1 + 2\,i$, $2 - 5\,i$, $4 + \sqrt{3}\,i$ μιγαδικοί.

Οι μιγαδικοί αριθμοί θα συμβολίζονται συνήθως με τα γράμματα z, w κ.λπ., ενώ το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με $\mathbb{C}$ και το σύνολο των φανταστικών αριθμών με $\mathbb{I}$.

Ορισμός 4.1.1 - 4. *Αν $z = \alpha + \beta i$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός, τότε ορίζεται ως* πραγματικό μέρος *του z ο πραγματικός αριθμός*

$$\mathrm{Re}\, z = \alpha \tag{4.1.1 - 3}$$

και ως φανταστικό μέρος *ο πραγματικός αριθμός*

$$\mathrm{Im}\, z = \beta. \tag{4.1.1 - 4}$$

Άρα, αν $z = 3 - i$, τότε $\mathrm{Re}\, z = 3$ και $\mathrm{Im}\, z = -1$.

4.1.2 Ισότητα

Ορισμός 4.1.2 - 1. *Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$. Τότε είναι $z_1 = z_2$, όταν $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.*

Σύμφωνα με τον ορισμό, αν $x - 2y\,i = 3 + 4\,$, τότε $x = 2$ και $-2y = 4$, δηλαδή $y = -2$.

Αποδεικνύεται ότι η ισότητα ορίζει στο σύνολο $\mathbb{C}$ μια σχέση ισοδυναμίας.[2]

[2] Μία σχέση $\sim$ ορίζει μια **σχέση ισοδυναμίας** σε ένα σύνολο Σ, όταν πληροί την αυτοπαθή, συμμετρική και μεταβατική ιδιότητα.

4.1.3 Πρόσθεση

Ορισμός 4.1.3 - 1. *Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί* $z_1 = \alpha + \beta i$ *και* $z_2 = \gamma + \delta i$. *Τότε ορίζεται ως* **άθροισμά** *τους ο μιγαδικός αριθμός*

$$z_1 + z_2 = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i. \qquad (4.1.3 - 1)$$

Παράδειγμα 4.1.3 - 1

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 - 3$ και $z_2 = 4 + 5\,i$. Τότε σύμφωνα με την $(4.1.3 - 1)$ είναι

$$z_1 + z_2 = (1 + 4) + (-3 + 5)i, \quad \text{δηλαδή} \quad z_1 + z_2 = 5 + 2\,i.$$

Ιδιότητες

i) **αντιμεταθετική** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

ii) **προσεταιριστική** $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ για κάθε z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$,

iii) αν $z_1 + z = z_2 + z$, τότε $z_1 = z_2$ για κάθε $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ (νόμος διαγραφής στο $\mathbb{C}$),

iv) υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος μιγαδικός αριθμός $z^* = 0 + 0\,i$, έτσι ώστε

$$z + z^* = z \quad \text{για κάθε} \quad z \in \mathbb{C}. \qquad (4.1.3 - 2)$$

Ο μιγαδικός $0 + 0i$ λέγεται το **ουδέτερο στοιχείο** της πρόσθεσης.

v) Για κάθε μιγαδικό αριθμό z υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος μιγαδικός αριθμός $z' = (-\alpha) + (-\beta)i$, έτσι ώστε να ισχύει

$$z + z' = 0. \qquad (4.1.3 - 3)$$

Ο μιγαδικός z' λέγεται **αντίθετο** ή **συμμετρικό** στοιχείο του z για την πρόσθεση στο $\mathbb{C}$.

vi) Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ τότε η εξίσωση

$$z_1 + z = z_2 \qquad (4.1.3 - 4)$$

έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{C}$ την $z = z_2 + (-z_1)$. Η μοναδική λύση της εξίσωσης $(4.1.3 - 4)$ λέγεται διαφορά, ενώ η πράξη **αφαίρεση**.

Έστω $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$. Τότε

$$z_1 - z_2 = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i. \qquad (4.1.3 - 5)$$

Παράδειγμα 4.1.3 - 2

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 του Παραδείγματος 4.1.3 - 1. Τότε σύμφωνα με την $(4.1.3 - 5)$ είναι

$$z_1 - z_2 = (1 - 4) + (-3 - 5)i, \quad \text{δηλαδή} \quad z_1 - z_2 = -3 - 8\,i.$$

4.1.4 Πολλαπλασιασμός

Ορισμός 4.1.4 - 1. *Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$. Τότε ορίζεται ως* **γινόμενό** *τους ο μιγαδικός αριθμός*

$$z_1 z_2 = (\alpha + \beta\, i)(\gamma + \delta\, i) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i. \qquad (4.1.4 - 1)$$

Σημείωση 4.1.4 - 1

Ο τύπος $(4.1.4 - 1)$ προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\alpha + \beta\, i)(\gamma + \delta\, i) = \alpha(\gamma + \delta\, i) + \beta\, i(\gamma + \delta\, i) \\ &= \alpha\gamma + \alpha\delta\, i + \beta\gamma\, i + \overbrace{\beta\delta\, i^2}^{(4.1.1-2):\ i^2=-1} \\ &= (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.1.4 - 1

Έστω οι μιγαδικοί $z_1 = 2-3\,i$ και $z_2 = 4+i$. Τότε σύμφωνα με τη διαδικασία της Σημείωσης 4.1.4 - 1 διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2-3\,i)(5+i) = 2(4+i) - 3i(4+i) \\ &= 8 + 2\,i - 12\,i - 3\,i^2 = 8 + (2-12)i - 3(-1) \\ &= (8+3) + (2-12)i = 11 - 10\,i. \end{aligned}$$

Ιδιότητες

i) αντιμεταθετική $z_1 z_2 = z_2 z_1$ για κάθε $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$,

ii) προσεταιριστική $(z_1 z_2)\, z_3 = z_1\, (z_2 z_3)$ για κάθε $z_1,\, z_2,\, z_3 \in \mathbb{C}$,

iii) επιμεριστική $z_1\, (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ για κάθε $z_1,\, z_2,\, z_3 \in \mathbb{C}$,

iv) αν $z_1 z = z_2 z$, τότε $z_1 = z_2$ για κάθε $z \in$ με $z \neq 0$ και για κάθε $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$ (νόμος της διαγραφής του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{C}$),

v) υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος μιγαδικός αριθμός $z^* = 1 + 0\,i$, έτσι ώστε

$$z z^* = z \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}. \tag{4.1.4 - 2}$$

Ο μιγαδικός $1 + 0i$ λέγεται **ουδέτερο στοιχείο** ή **μονάδα** και θα συμβολίζεται στο εξής με 1.

vi) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$ υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος μιγαδικός αριθμός $z^* = 1/z = z^{-1}$, έτσι ώστε να ισχύει

$$z z^* = 1. \tag{4.1.4 - 3}$$

Ο μιγαδικός αριθμός $1/z = z^{-1}$, λέγεται **αντίστροφος** του z ή το **συμμετρικό** στοιχείο του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{C}$.

vii) Αν $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_2 \neq 0$, τότε η εξίσωση

$$z_2 z = z_1 \tag{4.1.4 - 4}$$

έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{C}$ την $z = z_1 z_2^{-1} = z_1/z_2$. Η μοναδική λύση της εξίσωσης $(4.1.4-4)$ λέγεται **πηλίκο** του z_1 δια του z_2 και συμβολίζεται z_1/z_2, ενώ η πράξη **διαίρεση**.

Σημείωση 4.1.4 - 2

Παραδείγματα υπολογισμού του αντίστροφου και του πηλίκου μιγαδικών αριθμών θα δοθούν στην Παράγραφο 4.3.

4.2 Δύναμη μιγαδικών αριθμών

4.2.1 Ορισμός

Οι δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη ορίζονται για τους μιγαδικούς αριθμούς όπως και για τους πραγματικούς, δηλαδή

$$z^1 = z \quad \text{για κάθε} \quad z \in \mathbb{C}$$

και διαδοχικά (επαγωγικά)

$$z^\nu = z^{\nu-1} z \quad \text{για κάθε} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{και} \quad \nu = 2, 3, \ldots .$$

Επίσης ορίζεται ότι

$$z^{-\nu} = \frac{1}{z^\nu} \quad \text{για κάθε} \quad z \in \mathbb{C} \ \text{με} \ z \neq 0 \ \text{και} \ \nu = 1, 2, \ldots,$$

ενώ ειδικά ισχύει ότι $z^0 = 1$ με $z \neq 0$.

Παρατήρηση 4.2.1 - 1

Η παράσταση 0^0 δεν έχει έννοια στο $\mathbb{C}$.

4.2.2 Ιδιότητες

Οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων ισχύουν και στην περίπτωση των μιγαδικών αριθμών.

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$

και γενικά

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i, \quad i^{4k+4} = 1.$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, όπου $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών.

Παράδειγμα 4.2.2 - 1

Έστω ο μιγαδικός $z_1 = 2 + 3\,i$. Τότε διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} z^2 &= (2+3\,i)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot 3\,i + \overbrace{(3\,i)^2}^{9\,i^2=9(-1)=-9} \\ &= (4-9) + 12\,i = -5 + 12\,i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^3 &= (2+3\,i)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot 3\,i + 3\cdot 2\cdot \overbrace{(3\,i)^2}^{9\,i^2=9(-1)=-9} \\ &\quad + \overbrace{(3\,i)^3}^{27\,i^3=27(-1)\,i=-27\,i} \\ &= 8 + 36\,i - 54 - 27\,i = (8-54) + (36-27)i = -46 + 9\,i. \end{aligned}$$

4.3 Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί

4.3.1 Ορισμός

Ορισμός 4.3.1 - 1. *Έστω $z = \alpha + \beta i$. Τότε ο μιγαδικός αριθμός $\alpha - \beta i$ λέγεται* **συζυγής** *του z και συμβολίζεται με $\overline{z}$, δηλαδή*

$$\overline{z} = \alpha - \beta i. \tag{4.3.1 - 1}$$

Είναι προφανές ότι ισχύουν

$$z\,\overline{z} = (\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i) = \alpha^2 + \beta^2, \tag{4.3.1 - 2}$$

$$z + \overline{z} = 2\alpha. \tag{4.3.1 - 3}$$

Σημείωση 4.3.1 - 1

Ο τύπος (4.3.1−1) χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του αντίστροφου και του πηλίκου των μιγαδικών αριθμών, όταν απαιτείται οι αριθμοί αυτοί να γραφούν στη μορφή $\alpha+\beta\,i$. Συγκεκριμένα, αν ο παρονομαστής είναι ο $x+y\,i$, τότε πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τον συζυγή του $x+y\,i$, δηλαδή τον $x-y\,i$. Τότε $(x+y\,i)(x-y\,i)=x^2-y^2i^2=x^2+y^2$.

Παράδειγμα 4.3.1 - 1

Να γραφούν στη μορφή $\alpha+\beta\,i$ οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1=\frac{1}{3-i}\quad\text{και}\quad z_2=\frac{1+2\,i}{3-i}\,.$$

Λύση. Ο συζυγής του μιγαδικού $3-i$ είναι ο $3+i$. Τότε σύμφωνα με τη Σημείωση 4.3.1 - 1 διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{3-i}=\frac{1}{3-i}\frac{3+i}{3+i}=\frac{3+i}{3^2-i^2}=\frac{3+i}{3^2-(-1)}=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}\,i\,,\\ z_2 &= \frac{1+2\,i}{3-i}=\frac{1+2\,i}{3-i}\,\frac{3+i}{3+i}=\frac{(1+2\,i)(3+i)}{3^2-i^2}=\frac{1}{10}+\frac{7}{10}\,i\,. \end{aligned}$$

4.3.2 Ιδιότητες

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

i) $(\overline{-z})=-\overline{z}$,

ii) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$,

iii) $(\overline{z^\nu})=(\overline{z})^\nu\quad$ με $\quad\nu=1,2,\ldots$,

iv) $\left(\overline{z^{-1}}\right)=(\overline{z})^{-1}\quad$ με $\quad z\neq 0$,

v) $\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right)=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\quad$ με $\quad z_2\neq 0$,

vi) $\overline{\alpha z}=\alpha\,\overline{z}\quad$ για κάθε $\quad\alpha\in\mathbb{R}$,

vii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$. Η ιδιότητα γενικεύεται.

viii) $\overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$. Όμοια γενικεύεται.

Πρόταση 4.3.2 - 1. *Αν ένας μιγαδικός αριθμός είναι ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές, τότε και ο συζυγής του μιγαδικός είναι επίσης ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης.*

4.3.3 Συζυγείς μιγαδικές συντεταγμένες

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x+iy$. Επειδή σε πολλές εφαρμογές απαιτείται τα x, y να εκφραστούν συναρτήσει του z, θεωρώντας τον συζυγή μιγαδικό $\overline{z} = x - iy$ εύκολα προκύπτει ότι

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}\,. \tag{4.3.3 - 1}$$

Οι συντεταγμένες $(z, \overline{z})$, που συμπίπτουν με τις (x, y), λέγονται τότε **συζυγείς μιγαδικές συντεταγμένες** ή απλά **συζυγείς συντεταγμένες**.

4.4 Μέτρο μιγαδικών αριθμών

4.4.1 Ορισμός

Ορισμός 4.4.1 - 1. *Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$. Τότε ορίζεται ως* **μέτρο** *(modulus) ή απόλυτη τιμή του z και συμβολίζεται με $|z|$ ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός*

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{4.4.1 - 1}$$

Από την $(4.4.1 - 1)$ άμεσα προκύπτει ότι

$$|z|^2 = z\overline{z}.$$

Παράδειγμα 4.4.1 - 1

Σύμφωνα με την $(4.4.1 - 1)$ έχουμε:

i) $|1+\sqrt{3}\,i| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2,$

ii) $\dfrac{1+i}{2+3\,i} = \dfrac{1+i}{2+3\,i}\,\dfrac{2-3\,i}{2-3\,i} = \dfrac{-1+5\,i}{2^2-3^2\,i^2} = \dfrac{1}{13}\,(-1+5\,i)$, οπότε

$$\left|\frac{1+i}{2+3\,i}\right| = \frac{1}{13}\sqrt{(-1)^2+5^2} = \frac{1}{13}\sqrt{26},$$

iii) $(1+2\,i)^3 = 1^3+3\cdot 1^2\cdot 2\,i+3\cdot 1\cdot(2\,i)^2+(2\,i)^3 = 1+6\,i-12-8\,i = -11-2\,i,$

δηλαδή

$$\left|(1+2\,i)^3\right| = \sqrt{(-11)^2+(-2)^2} = \sqrt{125}.$$

Παράδειγμα 4.4.1 - 2

Να υπολογιστεί ο μιγαδικός z, όταν

$$|z-1| = |z-2| = |z-i|.$$

Λύση. Έστω $z = x + i\,y$. Τότε από τη σχέση

$$|z-1| = |z-2| \quad \text{προκύπτει ότι} \quad (x-1)^2+y^2 = (x-2)^2+y^2,$$

$$\text{οπότε} \qquad x = \frac{3}{2},$$

$$|z-1| = |z-i| \qquad (x-1)^2+y^2 = x^2+(y-1)^2,$$

$$\text{οπότε} \qquad y = \frac{3}{2}.$$

■

4.4.2 Ιδιότητες

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

i) $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$. Η ιδιότητα γενικεύεται.

ii) $||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$.

iii) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$. Όμοια γενικεύεται.

iv) $|z^\nu| = |z|^\nu$ για κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$.

v) $\left|z^{-1}\right| = |z|^{-1}$ με $z \neq 0$.

vi) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ με $z_2 \neq 0$.

Ασκήσεις

1. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y, όταν

i) $x + yi = |x - yi|$ *iii)* $x + 2yi + 5y - ix = 7 + 5i$

ii) $x + yi = (x - yi)^2$ *iv)* $\dfrac{x}{1+2i} + \dfrac{y}{3+2i} = \dfrac{5+6i}{8i-1}$.

2. Να εκφραστούν οι παρακάτω μιγαδικοί στη μορφή $\alpha + \beta i$

i) $(i-2)\left[5(1-i) - 4(1+i)^2\right]$ *iii)* $\dfrac{(2+i)(2-i)(1+i)}{(1-i)^3}$

ii) $\dfrac{\left(i^4 + i^9 + i^{16}\right)}{(2 - i^5 + i^{10} - i^{15})}$ *iv)* $\dfrac{(1-i)^4 - (1+i)^2}{(1+i)(1-i)}$.

3. Αν

$$z_1 = 1 - i, \quad z_2 = 1 + i \quad \text{και} \quad z_3 = 2 + 3i,$$

να υπολογιστούν οι παραστάσεις

i) $|2z_2 - 5z_1|^2$ *iv)* $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z_1 z_2}{z_3}\right)$

ii) $\mathrm{Re}\left(2z_1^2 + 3z_2^2 - z_3\right)$ *v)* $|z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2|$

iii) $(z_3 - z_1)^2$ *vi)* $z_3\left(\overline{z}_3\right)^{-1} + \overline{z}_3\, z_3^{-1}$.

4. Να υπολογιστεί ο μιγαδικός z, όταν

$$|z - 1| = |z - 2| = |z - i|.$$

5. Αν $z = x + iy$, να υπολογιστεί σχέση μεταξύ των x και y, όταν

$$|z - i| = |z + 2|.$$

6. Να εκφραστούν συναρτήσει των μιγαδικών συζυγών συντεταγμένων οι εξισώσεις

i) $x^2+16y^2=25$ *ii)* $x^2+y^2-5x+y-1=0$.

7. Να αποδειχθούν οι ιδιότητες των Παραγράφων 4.3.2 και 4.4.2.

Απαντήσεις

1. (i) Μετά τις πράξεις εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη προκύπτει το σύστημα $x^2-x-y=0$ και $y(1+2x)=0$, οπότε έχουμε τις λύσεις

$$(x,y)=(1,0),\quad (0,0),\quad \left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \text{και}\quad \left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(ii) Όμοια το σύστημα $x-x^2+y^2=0$ και $y(1+2x)=0$, οπότε έχουμε τις λύσεις

$$(x,y)=(1,0),\quad (0,0),\quad \left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \text{και}\quad \left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(iii) Όμοια $x+5y=7$ και $2y-x=5$, οπότε $x=-\frac{11}{7}$ και $y=\frac{12}{7}$.

(iv) Πολλαπλασιάζοντας με τους συζυγείς των παρονομαστών τελικά προκύπτει το σύστημα $13x+15y=43$ και $13x+5y=23$, οπότε $x=1$ και $y=2$.

2. (i) $3+31\,i$, (ii) $2+i$, (iii) $-\frac{5}{2}$, (iv) $-2-i$.

3. (i) Είναι $2z_2-5z_1=-3+7\,i$ κ.λπ. (ii) $\mathrm{Re}(-2-i)=-2$, (iii) $-15+8\,i$,
(iv) $\mathrm{Im}\left(\frac{4}{3}-\frac{6}{13}\,i\right)=-\frac{6}{13}$, (v) 0, (vi) $-\frac{10}{13}$.

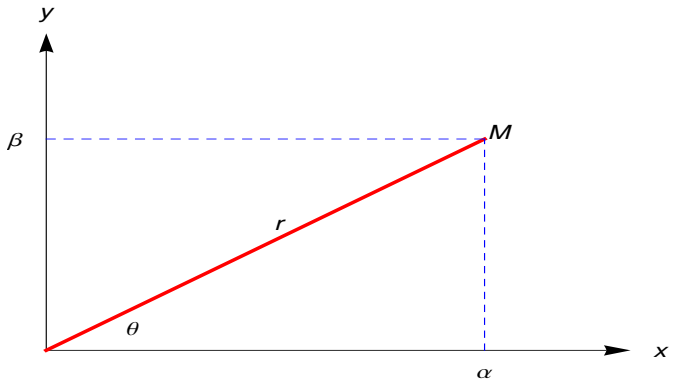
4. Έστω $z=x+i\,y$. Τότε από τη λύση του συστήματος $|z-1|^2=|z-2|^2$ και $|z-1|^2=|z-i|^2$ προκύπτει τελικά ότι $(x,y)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$. **5.** $4x+2y+3=0$ (ευθεία).

6. Αντικατάσταση των x, y με τις εκφράσεις των τύπων $(4.3.3-1)$ κ.λπ. (vii) Έστω $z_1=\alpha+\beta\,i$, $z_2=\gamma+\delta\,i$ κ.λπ.

4.5 Μορφές μιγαδικού αριθμού

4.5.1 Τριγωνομετρική μορφή

Αποδεικνύεται στα Μαθηματικά ότι υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία του μιγαδικού $z=\alpha+\beta\,i$ και του ζεύγους (α,β) στο $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Σύμφωνα με αυτή την αντιστοιχία είναι δυνατόν να γίνει μια γεωμετρική παράσταση του μιγαδικού αριθμού από ένα σημείο του επιπέδου. Συγκεκριμένα, έστω ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy (Σχ. 4.5.1 - 1) όπου στον άξονα τετμημένων Ox απεικονίζεται το πραγματικό μέρος του z, δηλαδή το α και στον άξονα τεταγμένων Oy το φανταστικό του μέρος β. Τότε προφανώς υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των μιγαδικών αριθμών $z=$



Σχήμα 4.5.1 - 1: τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού.

$\alpha+\beta\,i$ και των σημείων $M(\alpha,\beta)$ του επιπέδου Π, που οι συντεταγμένες τους ορίζονται από το σύστημα Oxy. Το επίπεδο Π λέγεται στην περίπτωση αυτή και **μιγαδικό επίπεδο** ή **επίπεδο Gauss**.

Έστω τώρα ένα [3]πολικό σύστημα συντεταγμένων (polar coordinate system) (ρ,θ) με πόλο το 0 και πολικό άξονα την ημιευθεία Ox. Τότε, αν $z=\alpha+\beta i=(\alpha,\beta)$ με $z\neq 0$, σύμφωνα με τις σχέσεις $(1.1-9)$ του Μαθήματος *Διανύσματα* θα ισχύει

$$\begin{aligned}\rho &= |z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\\ \cos\theta &= \frac{\alpha}{|z|} \quad \text{και} \quad \sin\theta=\frac{\beta}{|z|} \quad \text{με} \quad \theta\in[0,2\pi). \qquad (4.5.1\text{ - }1)\end{aligned}$$

Οι σχέσεις $(4.5.1-1)$ προσδιορίζουν τα ρ, θ, όταν είναι γνωστά τα α, β και αντίστροφα.

Επομένως το ρ ισούται με το μέτρο του z, ενώ η γωνία θ, θα υπολογίζεται από τις σχέσεις $(4.5.1-1)$ και θα λέγεται στο εξής **πρωτεύον όρισμα** (Argument)[4] του z, ενώ θα συμβολίζεται με $\mathrm{Arg}z$.

Άρα από τις σχέσεις $(4.5.1-1)$ προκύπτει ότι ο μιγαδικός $z=\alpha+\beta i$ γράφεται

$$z=|z|\,(\cos\theta+i\sin\theta)\,,\ \text{όταν}\ \theta\in[0,2\pi)\ \text{και}\ |z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}. \qquad (4.5.1\text{ - }2)$$

[3]Βλέπε Μάθημα *Διανύσματα - Βασικοί ορισμοί*.

[4]Στη βιβλιογραφία πολλές φορές ως $\mathrm{Arg}z$ θεωρείται η γωνία θ με $\theta\in[-\pi,\pi)$ ή $\theta\in(-\pi,\pi]$.

Η $(4.5.1-2)$ είναι γνωστή ως η **τριγωνομετρική μορφή** (polar form) του z.

Σημειώσεις 4.5.1 - 1

i) Σύμφωνα με γνωστή τριγωνομετρική ιδιότητα στην $(4.5.1-1)$ ο μιγαδικός αριθμός z προσδιορίζεται εκτός από το ζεύγος (ρ, θ) και από το ζεύγος $(\rho, \theta + 2k\pi)$, όταν $k \in \mathbb{Z}$. Τότε οι γωνίες $\theta + 2k\pi$ ορίζουν το **όρισμα** του μιγαδικού, που συμβολίζεται με $\arg z$.

ii) Υπενθυμίζονται οι παρακάτω βασικές ταυτότητες $(k \in \mathbb{Z})$:

$$\sin x = \sin a \iff \begin{cases} x = 2k\pi + a \\ x = 2k\pi + \pi - a, \end{cases} \qquad (4.5.1 - 3)$$

$$\cos x = \cos a \iff \begin{cases} x = 2k\pi + a \\ x = 2k\pi - a. \end{cases} \qquad (4.5.1 - 4)$$

Παράδειγμα 4.5.1 - 1

Έστω ο μιγαδικός αριθμός

$$z = -1 + i.$$

Τότε $\alpha = -1$ και $\beta = 1$, οπότε $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^1} = \sqrt{2}$. Άρα

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\,\pi}{4}\,,$$

οπότε

$$\theta = 2k\pi + \frac{3\,\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{5\,\pi}{6}\,, \quad \text{όταν} \quad k = 0 \qquad (1)$$

ή

$$\theta = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{5\,\pi}{4}\,, \quad \text{όταν} \quad k = 1. \qquad (2)$$

Επίσης $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4}$, οπότε

$$\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}\,, \quad \text{όταν} \quad k = 0 \qquad (3)$$

ή

$$\theta = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{3\,\pi}{4}\,, \quad \text{όταν} \quad k = 0\,. \tag{4}$$

Άρα $\operatorname{Arg} z = 3\,\pi/4$. Τότε σύμφωνα με την $(4.5.1-2)$ η τριγωνομετρική μορφή είναι

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\,\pi}{4} + i\sin\frac{3\,\pi}{4}\right).$$

4.5.2 Σχετικά θεωρήματα

Με την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών αποδεικνύονται τα παρακάτω χρήσιμα θεωρήματα:

Θεώρημα 4.5.2 - 1. *Έστω*

$$z_1 = |z_1|\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \textit{και} \quad z_2 = |z_2|\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\,.$$

Τότε είναι $z_1 = z_2$ *τότε και μόνον, όταν*

$$|z_1| = |z_2| \quad \textit{και} \quad \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Θεώρημα 4.5.2 - 2 (de Moivre). *Αν* $z_k = |z_k|\,(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$; $k = 1, 2, \ldots, \nu$, *τότε*

$$\begin{aligned} z_1 z_2 \ldots z_\nu \;&=\; |z_1|\,|z_2|\ldots|z_\nu|\,[\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_\nu) \\ &\quad + i\sin(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_\nu)] \end{aligned} \tag{4.5.2 - 1}$$

για κάθε $\nu = 2, 3, \ldots$.

Πόρισμα 4.5.2 - 1 (τύπος de Moivre). *Ισχύει ότι (de Moivre's formula)*

$$z^{\,\nu} = |z|^{\,\nu}\,[\cos(\nu\theta) + i\sin(\nu\theta)] \quad \textit{για κάθε} \quad \nu = 2, 3, \ldots\,. \tag{4.5.2 - 2}$$

Θεώρημα 4.5.2 - 3. *Αν* $z = |z(\cos\theta + i\sin\theta)$ *με* $z \neq 0$, *τότε*

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\,[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]\,.$$

Θεώρημα 4.5.2 - 4. *Αν* $z_1 = |z_1|\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = |z_2|\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ *με* $z_2 \neq 0$, *τότε*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right]. \qquad (4.5.2\text{ - }3)$$

Πόρισμα 4.5.2 - 2. *Ισχύει ότι*

$$\frac{1}{z^\nu} = \frac{1}{|z|^\nu}\left[\cos(-\nu\theta) + i\sin(-\nu\theta)\right]; \quad \nu = 1, 2, \ldots .$$

Παράδειγμα 4.5.2 - 1

Έστω οι μιγαδικοί

$$z_1 = = \sqrt[3]{2}(-1+i) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\sin\frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{και}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(-\sqrt{3} - i\right) = \sqrt{5}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\sin\frac{7\pi}{6}\right).$$

Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(4.5.2-1)$:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \sqrt[3]{2}\,\sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right)\right] \\ &= \sqrt[6]{2^2}\,\sqrt[6]{5^3}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\,\sin\frac{23\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{500}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\,\sin\frac{23\pi}{12}\right) \\ &\approx 2.721273 - 0.729163\,i. \end{aligned}$$

$(4.5.2-2)$:

$$\begin{aligned} z_1^4 &= \left(\sqrt[3]{2}\right)^4\left(\cos\frac{4\cdot 3\pi}{4} + i\,\sin\frac{4\cdot 3\pi}{4}\right) \\ &= 2\,\sqrt[3]{2}\,(\cos 3\pi + i\,\sin 3\pi) = -2\,\sqrt[3]{2} \approx -2.519842. \end{aligned}$$

$(4.5.2-3)$:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{5}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{7\pi}{6}\right)+i\,\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{7\pi}{6}\right)\right]\\ &= \frac{\sqrt[6]{2^2}}{\sqrt[6]{5^3}}\left(\cos\frac{-5\pi}{12}+i\,\sin\frac{-5\pi}{12}\right)=\sqrt[6]{\frac{4}{125}}\left(\cos\frac{5\pi}{12}-i\,\sin\frac{5\pi}{12}\right)\\ &\approx 0.145833-0.544255\,i.\end{aligned}$$

4.5.3 Πολική μορφή

Ορισμός 4.5.3 - 1. *Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i$, που γράφεται σε τριγωνομετρική μορφή $z=|z|\,(\cos\theta+i\sin\theta)$. Τότε η* **πολική** *μορφή (angle notation) του μιγαδικού ορίζεται από τη σχέση*

$$z=|z|^{\lfloor\theta}, \tag{4.5.3 - 1}$$

όταν η γωνία θ εκφράζεται σε μοίρες.

Παράδειγμα 4.5.3 - 1

Έστω ο μιγαδικός αριθμός

$$z=-\sqrt{3}+i.$$

Τότε $\alpha=-\sqrt{3}$ και $\beta=1$, οπότε $|z|=2$. Άρα

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\cos\frac{\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{5\,\pi}{6}\,,$$

οπότε

$$\theta=2k\pi+\frac{5\,\pi}{6}\quad\Longrightarrow\quad\theta=\frac{5\,\pi}{6}\,,\quad\text{όταν}\quad k=0 \tag{1}$$

ή

$$\theta=2k\pi-\frac{\pi}{6}\quad\Longrightarrow\quad\theta=\frac{7\,\pi}{6}\,,\quad\text{όταν}\quad k=1. \tag{2}$$

Επίσης $\sin\theta=\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{\pi}{6}$, οπότε

$$\theta=2k\pi+\frac{\pi}{6}\quad\Longrightarrow\quad\theta=\frac{\pi}{6}\,,\quad\text{όταν}\quad k=0 \tag{3}$$

ή

$$\theta = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{5\,\pi}{6}\,, \quad \text{όταν} \quad k = 0\,. \tag{4}$$

Άρα $\operatorname{Arg} z = 5\,\pi/6$. Τότε

$$-\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{5\,\pi}{6} + i\sin\frac{5\,\pi}{6}\right), \quad \text{οπότε} \quad z = 2^{\lfloor 150}.$$

4.5.4 Εκθετική μορφή

Ορισμός 4.5.4 - 1. *Έστω ο μιγαδικός $z = x + iy$. Τότε η δύναμη e^z ορίζεται ότι είναι ο μιγαδικός αριθμός*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\,(\cos y + i\sin y) \tag{4.5.4 - 1}$$

με y σε rad.

Ο Ορισμός 4.5.4 - 1, όταν $y = 0$, συμφωνεί με τον ορισμό του e^x με $x \in \mathbb{R}$, ενώ, όταν $x = 0$, ορίζει την ταυτότητα του Euler (Euler's formula)

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y. \tag{4.5.4 - 2}$$

Προφανώς τότε

$$\left|e^{iy}\right| = \sqrt{\cos^y + \sin^2 y} = 1.$$

Από τον τύπο $(4.5.1 - 2)$, που αναφέρεται στην τριγωνομετρική μορφή $z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ του μιγαδικού z και τον τύπο $(4.5.4 - 2)$, όταν γραφεί ως

$$e^{i\,\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

προκύπτει ότι

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\,\theta}.$$

Η μορφή αυτή ορίζεται στη συνέχεια ως εξής:

Ορισμός 4.5.4 - 2 *Η* **εκθετική μορφή** *ή* **μορφή Euler** *του z (complex exponential form) ορίζεται από τη σχέση*

$$z = |z|e^{i\theta}, \tag{4.5.4 - 3}$$

όταν $\theta = \operatorname{Arg} z$.

Παράδειγμα 4.5.4 - 1

Σύμφωνα με το Παράδειγμα 4.5.3 - 1 είναι

$$-\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{5\,\pi}{6}+i\sin\frac{5\,\pi}{6}\right)=2\,e^{i\,\frac{5\,\pi}{6}}.$$

Σημείωση 4.5.4 - 1

Επειδή σύμφωνα με την $(4.5.4-2)$ προφανώς ισχύουν

$$\begin{aligned} e^{i\,\theta} &= \cos\theta+i\,\sin\theta,\\ e^{-i\,\theta} &= \cos(-\theta)+i\,\sin(-\theta)=\cos\theta-i\,\sin\theta \end{aligned}$$

προσθέτοντας, αντίστοιχα αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτουν οι παρακάτω **τύποι του Euler** για το συνημίτονο, αντίστοιχα ημίτονο:

$$\cos\theta=\frac{e^{i\,\theta}+e^{-i\,\theta}}{2}\quad\text{και}\quad\sin\theta=\frac{e^{i\,\theta}-e^{-i\,\theta}}{2\,i}\,. \tag{4.5.4 - 4}$$

Ιδιότητες

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

i) $e^{z_1}\,e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$.

ii) Η δύναμη e^z είναι πάντοτε διάφορη του μηδενός.

iii) Είναι $\left|e^{ix}\right|=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iv) Αν $e^z=1$, τότε $z=2k\pi i$ με $k\in\mathbb{Z}$ και αντίστροφα.

v) Αν $e^{z_1}=e^{z_2}$, τότε $z_1-z_2=2k\pi i$ με $k\in\mathbb{Z}$ και αντίστροφα.

4.6 Ρίζα μιγαδικού αριθμού

4.6.1 Ορισμός και θεώρημα υπολογισμού

Ορισμός 4.6.1 - 1. *Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i$ με $z\neq 0$. Τότε ορίζεται ως ν-τάξης ρίζα του z κάθε μιγαδικός αριθμός $w=x+iy$ με την ιδιότητα*

$$(x+iy)^{\nu}=\alpha+\beta i,\quad \textit{όταν}\quad \nu=2,3,\ldots\,.$$

Σχετικά αποδεικνύεται ότι ισχύει:

Θεώρημα 4.6.1 - 1. *Αν $z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$, τότε οι μιγαδικοί αριθμοί*

$$z_k = \sqrt[\nu]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{\nu} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{\nu}\right); \quad k = 0,\,1,\,\ldots,\nu-1 \quad (4.6.1\text{ - }1)$$

είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και επαληθεύουν την εξίσωση $w^\nu = z$.

Παράδειγμα 4.6.1 - 1

Να υπολογιστεί η παράσταση

$$(-1-i)^{2/3}.$$

Λύση. Έστω $z = -1 - i$. Τότε $|z| = \sqrt{2}$ και

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right),$$

οπότε

$$\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ με } \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ για } k = 0$$

ή

$$\theta = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \text{ με } \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ για } k = 1$$

και

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right),$$

οπότε

$$\theta = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \text{ με } \theta = \frac{7\pi}{4} \text{ για } k = 1$$

ή

$$\theta = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \text{ με } \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ για } k = 0.$$

Άρα $\operatorname{Arg} z = 5\pi/4$, οπότε με τον τύπο $(4.5.2-2)$ του de Moivre είναι

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\sqrt{2}\right)^2\left[\cos 2\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin 2\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] \\ &= 2\left[\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Επομένως σύμφωνα με τον τύπο $(4.6.1-1)$ η 3ης τάξη ρίζα του z^2 θα είναι

$$z^{2/3} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2k\pi+\pi/2}{3} + i\sin\frac{2k\pi+\pi/2}{3}\right); \quad k=0,\,1,\,2,$$

δηλαδή οι παρακάτω 3 διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί αριθμοί:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}, \\ z_1 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}, \\ z_2 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{9\pi}{6}}. \end{aligned}$$

4.6.2 Εξίσωση διωνυμική

Ορισμός 4.6.2 - 1. *Λέγεται* **διωνυμική** *κάθε εξίσωση της μορφής* $z^\nu = \alpha$, *όπου* $\alpha \in \mathbb{C}$ *με* $\alpha \neq 0$ *και* $\nu = 1, 2, \ldots$.

Η λύση των εξισώσεων της μορφής αυτής γίνεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος 4.6.1 - 1 σύμφωνα με τα παρακάτω παραδείγματα:

Παράδειγμα 4.6.2 - 1

Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση

$$z^5 = -32\,i.$$

Λύση. Έχουμε

$$-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

οπότε

$$z^5 = -32\,i = 32\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο $(4.6.1-1)$ είναι

$$z_k = 2\left(\cos\frac{2k\pi-\pi/2}{5} + i\sin\frac{2k\pi-\pi/2}{5}\right); \quad k=0,\,1,\,2,\,3,\,4.$$

Παράδειγμα 4.6.2 - 2 (ν **- τάξης ρίζες της μονάδας**)

Όμοια να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση

$$z^{\nu} = 1, \quad \text{όταν} \quad \nu = 1, 2, \ldots .$$

Λύση. Έχουμε $z^{\nu} = 1\,(\cos 0 + i \sin 0)$, οπότε

$$z_k = \left(\cos \frac{2k\pi}{\nu} + i \sin \frac{2k\pi}{\nu}\right); \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, \nu - 1.$$

Επειδή προφανώς ισχύει

$$z_k = \left(\cos \frac{2\pi}{\nu} + i \sin \frac{2\pi}{\nu}\right)^k; \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, \nu - 1$$

έχουμε

$$\begin{aligned} z_0 &= 1,\ z_1 = \cos \frac{2\pi}{\nu} + i \sin \frac{2\pi}{\nu}, \\ z_2 &= \left(\cos \frac{2\pi}{\nu} + i \sin \frac{2\pi}{\nu}\right)^2 = z_1^2,\ z_3 = z_1^3,\ \ldots,\ z_{\nu-1} = z_1^{\nu-1}. \end{aligned}$$

Άρα οι ν-τάξης ρίζες της μονάδας είναι

$$1, \quad z_1, \quad z_1^2, \quad z_1^3, \quad \ldots, \quad z_1^{\nu-1}.$$

Γεωμετρικά απεικονίζονται στις ν κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου που εγγράφεται σε κύκλο με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα 1. Ο κύκλος αυτός έχει εξίσωση $|z| = 1$ και λέγεται **μοναδιαίος κύκλος**.

4.6.3 Εξίσωση 2ου βαθμού

Έστω στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση

$$az^2 + bz + c = 0, \quad \text{όταν } a \neq 0. \tag{4.6.3 - 1}$$

Η $(4.6.3-1)$ γράφεται $az^2+bz=-c$, οπότε διαδοχικά προκύπτουν

$$\begin{aligned} z^2+\frac{b}{a}z &= -\frac{c}{a} \quad \text{ή} \\ z^2+\frac{b}{a}z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{ή} \\ \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

Άρα

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,. \qquad (4.6.3\text{ - }2)$$

Παράδειγμα 4.6.3 - 1

Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση

$$z^2+(2i-3)z+5-i=0$$

Λύση. Είναι $a=1$, $b=2i-3$ και $c=5-i$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(4.6.3-2)$ έχουμε

$$\begin{aligned} z &= \frac{-(2i-3)+\sqrt{(2i-3)^2-4(5-i)}}{2} \\ &= \frac{3-2i\pm\sqrt{-15-8\,i}}{2}=\frac{3-2i\pm(1-4i)}{2}\,, \end{aligned}$$

δηλαδή $z_1=2-3i$ και $z_2=1+i$.

Ο υπολογισμός της παραπάνω τετραγωνικής ρίζας γίνεται με τις παρακάτω δύο μεθόδους που είναι δυνατόν να εφαρμόζονται και όταν το βασικό όρισμα του μιγαδικού αριθμού δεν συμπίπτει με γνωστές γωνίες.

Μέθοδος I

Έστω

$$-15-8\,i=\sqrt{(-15)^2+(-8)^2}\,(\cos\theta+i\,\sin\theta)=17\,(\cos\theta+i\,\sin\theta)\,,$$

όταν

$$\cos\theta = -\frac{15}{17} \quad \text{και} \quad \sin\theta = -\frac{8}{17}\,. \tag{1}$$

Τότε από τον τύπο $(4.6.1-1)$ προκύπτει ότι

$$\sqrt{-15-8\,i} = \sqrt{17}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{2} + i\,\sin\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)\,; \quad k=0,\,1.$$

Άρα οι ρίζες είναι οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_0 = \sqrt{17}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\sin\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{και} \tag{2}$$

$$z_1 = \sqrt{17}\left[\cos(\frac{\theta}{2}+\pi) + i\,\sin(\frac{\theta}{2}+\pi)\right] = \sqrt{17}\left(-\cos\frac{\theta}{2} - i\,\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= -\sqrt{17}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\sin\frac{\theta}{2}\right). \tag{3}$$

Σύμφωνα με γνωστούς τύπους της Τριγωνομετρίας έχουμε

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-15/17}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+15/17}{2}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}\,.$$

Επειδή σύμφωνα με την (1) η γωνία θ ανήκει στο 3ο τεταρτημόριο - είναι αρνητικά τα πρόσημα των $\cos\theta$ και $\sin\theta$ - πρέπει η γωνία $\theta/2$ να ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο. Άρα $\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ και $\sin\frac{\theta}{2} = +\frac{4}{\sqrt{17}}$, οπότε αντικαθιστώντας στις (2) και (3) προκύπτει ότι $z_0 = -1+4\,i$ και $z_1 = 1-4\,i$.

Μέθοδος ΙΙ

Έστω ότι οι ρίζες είναι της μορφής $x+i\,y$. Τότε

$$(x+i\,y)^2 = x^2-y^2+2xy\,i = -15-8\,i, \quad \text{οπότε} \quad x^2-y^2=-15, \quad xy=-4.$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει ότι $x=\pm1$. Τότε, αν $x=1$ είναι $y=-4$ και, όταν $x=-1$, είναι $y=4$, δηλαδή οι ρίζες είναι οι $-1+4\,i$ και $1-4\,i$ αντίστοιχα. ∎

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι παρακάτω μιγαδικοί αριθμοί και οι ρίζες να γραφούν στην πολική και την εκθετική μορφή:

i) $(-1+i)^{4/5}$ *iv)* $\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2/3}$

ii) $(-1-\sqrt{3}\,i)^{1/3}$ *v)* $\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^{1/3}$

iii) $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{2/3}$ *vi)* $(-1-i)^{1/5}$.

2. Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ οι εξισώσεις

i) $5z^2+2z+10=0$,

ii) $z^2+(i-2)z+(3-i)=0$,

iii) $z^4+z^2+1=0$.

3. Αν $z\in\mathbb{C}$ να παρασταθεί γεωμετρικά ο μιγαδικός $|z|e^{i\theta}$ όπου $\theta=\mathrm{Arg}(z)$. Τι παρατηρείτε;

4. Αν $z\in\mathbb{C}$ να παρασταθούν γεωμετρικά οι μιγαδικοί

$$\overline{z},\quad -z,\quad z^2,\quad \frac{1}{z}\quad \text{με } z\neq 0.$$

5. Όμοια τους μιγαδικούς

$$z_1+z_2,\quad z_1z_2,\quad \frac{z_1}{z_2},$$

όταν $z_1,\,z_2\in\mathbb{C}$ με $z_2\neq 0$.

6. Δείξτε ότι

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}.$$

7. Να προσδιοριστούν οι τιμές του $z\in\mathbb{C}$ για τις οποίες

i) $e^{3z}=1$ *ii)* $e^{4z}=i$.

Απαντήσεις

1. Τα αντίστοιχα βασικά ορίσματα είναι: (i) $\frac{3\pi}{4}$, (ii) $\frac{4\pi}{3}$, (iii) $\frac{5\pi}{6}$, (iv) $\frac{\pi}{3}$, (v) $\frac{5\pi}{3}$, (vi) $\frac{5\pi}{4}$.
2. (i) $z = -\frac{1}{5} \pm \frac{7}{5}\, i$, (ii) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - 2\, i$, (iii) $z = \pm(-1)^{1/3}$, $\pm(-1)^{2/3}$.
3. Να χρησιμοποιηθεί ο ορισμός της εκθετικής μορφής.
4. Έστω $z = a + i\, b$. Τότε σύμφωνα με το Σχ. 4.5.1 - 1 κ.λπ.
6. Έστω $e^{z_1} = e^{x_1}\,(\cos y_1 + i \sin y_1)$ και $e^{z_2} = e^{x_2}\,(\cos y_2 + i \sin y_2)$ κ.λπ.
7. (i) $z = 0$, $-\frac{2\pi}{3}\, i$, $\frac{2\pi}{3}\, i$. (ii) $z = \frac{\pi}{8}\, i$, $-\frac{3\pi}{8}\, i$, $\frac{5\pi}{8}\, i$, $-\frac{7\pi}{8}\, i$

4.7 Λογάριθμος μιγαδικού αριθμού

4.7.1 Ορισμός και τύπος υπολογισμού

Θεώρημα 4.7.1 - 1 (ύπαρξης). *Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$, τότε υπάρχει πάντοτε ένας άλλος μιγαδικός αριθμός, έστω w, έτσι ώστε $e^w = z$. Ένας από τους μιγαδικούς αυτούς αριθμούς w είναι της μορφής $\ln|z| + i\operatorname{Arg} z$, ενώ κάθε άλλος μιγαδικός δίνεται από τη σχέση:*

$$\ln|z| + i\,(\operatorname{Arg} z + 2k\pi) \quad \mu\varepsilon \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ορισμός 4.7.1 - 1 (λογάριθμου). *Έστω ο μιγαδικός αριθμός z με $z \neq 0$. Αν w είναι ένας μιγαδικός αριθμός τέτοιος, ώστε $e^w = z$, τότε ο w λέγεται λογάριθμος του z.*

Η ειδική τιμή του w που δίνεται από τον τύπο

$$w = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \tag{4.7.1 - 1}$$

λέγεται **αρχική τιμή** (principal value) του λογάριθμου και συμβολίζεται με $\operatorname{Ln} z$, ενώ γενικά είναι

$$\ln z = \ln|z| + i\,(\operatorname{Arg} z + 2k\pi) \quad \mu\varepsilon \quad k = 0, \pm 1, \ldots . \tag{4.7.1 - 2}$$

Παράδειγμα 4.7.1 - 1

Να υπολογιστεί η αρχική τιμή του λογάριθμου του μιγαδικού αριθμού

$$z = -2\sqrt{3} - 2i.$$

Λύση. Η τριγωνομετρική μορφή του z είναι

$$z = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right),$$

οπότε

$$\mathrm{Ln}\left(-2\sqrt{3} - 2i\right) = 2\ln 2 + i\frac{7\pi}{6}.$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί η τιμή του λογάριθμου των παρακάτω μιγαδικών αριθμών:

$i)$ $z = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{3}\,i\right)$ $\qquad$ $ii)$ $z = 1 - i.$

Απαντήσεις

(i) $Arg(z) = \frac{4\pi}{3}$, quad (ii) $Arg(z) = \frac{7\pi}{4}$ κ.λπ.

4.7.2 Μιγαδικές δυνάμεις

Με τη βοήθεια των λογαρίθμων είναι δυνατόν να οριστούν οι μιγαδικές δυνάμεις.

Ορισμός 4.7.2 - 1. *Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με $z \neq 0$. Τότε η δύναμη z^w ορίζεται από τη σχέση*

$$z^w = e^{w\mathrm{Ln}z}. \qquad (4.7.2\text{ - }1)$$

Επειδή

- $$i = 0 + 1\,i = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}, \quad \text{οπότε} \quad \mathrm{Arg}(i) = \frac{\pi}{2},$$

σύμφωνα με τον Ορισμό 4.7.2 - 1 άμεσα προκύπτει ότι[5]

$$i^{\,i} = e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} = e^{i\left(i\,\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}}, \quad \text{ενώ}$$

- $$-1 = -1 + 0\,i = \cos\pi + i\,\sin\pi, \quad \text{οπότε} \quad \mathrm{Arg}(-1) = \pi.$$

  Τότε όμοια σύμφωνα με τον Ορισμό 4.7.2 - 1 είναι

$$(-1)^i = e^{i\,\mathrm{Ln}(-1)} = e^{i(i\,\pi)} = e^{-\pi}.$$

Παρατήρηση 4.7.2 - 1

Αν ο ν είναι ακέραιος, τότε

$$z^{\,\nu} = e^{\,\nu\,\mathrm{Ln}\,z} = e^{(\nu-1)\,\mathrm{Ln}\,z}\,e^{\mathrm{Ln}\,z} = z^{\,\nu-1}z,$$

δηλαδή ο ορισμός της δύναμης, που ορίζεται με τον τύπο $(4.7.2-1)$, συμφωνεί με τον ορισμό της δύναμης μιγαδικού αριθμού της παραγράφου 4.2.

Δίνονται τώρα χωρίς απόδειξη τα παρακάτω θεωρήματα που αφορούν τον υπολογισμό των μιγαδικών δυνάμεων:

Θεώρημα 4.7.2 - 1. *Αν* $z,\ w_1,\ w_2 \in \mathbb{C}$ *με* $z \neq 0$, *τότε*

$$z^{w_1}z^{w_2} = z^{w_1+w_2}.$$

Θεώρημα 4.7.2 - 2. *Αν* $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ *με* $z_1 z_2 \neq 0$, *τότε*

$$(z_1 z_2)^w = {z_1}^w\,{z_2}^w e^{2\pi i w\,\mathrm{k}(z_1,z_2)}$$

[5] Επομένως το μαθηματικό παράδοξο: *η μιγαδική φανταστική μονάδα, όταν υψωθεί στη φανταστική μονάδα να ισούται με* πραγματικό αριθμό.

όπου

$$\mathrm{k}\left(z_1, z_2\right) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \quad -\pi & < \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \leq \quad \pi \\ 1 & \alpha\nu \quad -2\pi & < \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \leq \quad -\pi \\ -1 & \alpha\nu \quad \pi & < \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \leq \quad 2\pi \end{cases}$$

Άσκηση

Δείξτε ότι

i) $(1+i)^i = \left[\cos\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right)\right] e^{-\frac{\pi}{4}}$,

ii) $\left|(-1)^{-i}\right| = e^{\frac{3\pi}{2}}$.

4.8 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[2] Ξένος, Θ. (2008). *Μιγαδικές Συναρτήσεις*. Εκδόσεις Ζήτη. ISBN 978–960–456–092–9.

[3] Τσάγκας, Γρ. (1990). *Μαθήματα Μιγαδικών Συναρτήσεων*. Θεσσαλονίκη.

[4] Churchill, R. & Brown, J. (2005). *Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 960–7309–41–3.

[5] Spiegel, M. (2009). *Complex Variables*. Εκδότης McGraw-Hill Education – Europe. ISBN 007–060–230–1.

[6] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 5

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

5.1 Εισαγωγή

Στο μάθημα αυτό θα δοθούν οι βασικότερες έννοιες των μιγαδικών συναρτήσεων. Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία του μαθήματος [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

5.1.1 Ορισμοί

Έστω z μια μεταβλητή, που συμβολίζει τις τιμές ενός συνόλου D όπου $D \subseteq \mathbb{C}$ με $\mathbb{C}$ το σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Τότε η z θα λέγεται μιγαδική μεταβλητή ή απλά στο εξής μεταβλητή. Αν σε κάθε τιμή της μεταβλητής z αντιστοιχούν μία ή περισσότερες τιμές της μιγαδικής μεταβλητής w, τότε η w θα λέγεται ότι είναι μία **μιγαδική συνάρτηση** του z και θα γράφεται

$$w = f(z).$$

Ειδικότερα, αν στο z αντιστοιχεί μία ακριβώς τιμή του w, η f θα λέγεται μονότιμη συνάρτηση, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση πλειότιμη. Τότε το D θα ορίζει το **πεδίο ορισμού** της f, ενώ το σύνολο των τιμών της w, έστω T, το **πεδίο τιμών** της f.

Παράδειγμα 5.1.1 - 1

Η συνάρτηση

$$f(z) = z^3$$

και γενικότερα η

$$z^\nu; \quad \nu = 1, 2, \ldots \quad \text{με} \quad z \in \mathbb{C}$$

είναι μονότιμη, επειδή σύμφωνα με τον ορισμό της δύναμης[1] σε κάθε $z \in \mathbb{C}$ αντιστοιχεί ακριβώς ένας μιγαδικός z^ν. Ειδικότερα, αν

$$z = 2 - 3\,i, \quad \text{τότε} \quad z^3 = -46 - 9\,i.$$

Παράδειγμα 5.1.1 - 2

Η συνάρτηση

$$g(z) = z^{1/3}$$

και γενικότερα η

$$z^{1/\nu} \quad \nu = 2, 3, \ldots,$$

όταν $z \in \mathbb{C}$, είναι πλειότιμη, επειδή ν-τάξης ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού[2] είναι ν το πλήθος διαφορετικοί μιγαδικοί αριθμοί.

Όμοια, έστω $z = -1 + i$. Τότε

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\sin\frac{5\pi}{4}\right), \quad \text{οπότε}$$

$$z^{1/2} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}{2} + i\,\sin\frac{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}{2}\right);\ k = 0, 1.$$

Αν $w = f(z)$, τότε είναι δυνατόν το z να θεωρηθεί ως συνάρτηση του w, με την έννοια της συνάρτησης που παραπάνω δόθηκε. Στην περίπτωση αυτή γράφεται $z = f^{-1}(w)$ και η f^{-1} λέγεται στην περίπτωση αυτή **αντίστροφη συνάρτηση** της f.

---

[1] Βλέπε Μάθημα *Μιγαδικοί Αριθμοί* - Παράγραφος 4.2.
[2] Βλέπε Μάθημα *Μιγαδικοί Αριθμοί* - Παράγραφος 4.6.

5.1.2 Αναλυτική έκφραση

Έστω η συνάρτηση

$$w = f(z), \quad \text{όπου} \quad z = x + i\,y \quad \text{με} \quad x,\, y \in \mathbb{R}.$$

Τότε μετά από πράξεις η w γράφεται στη μορφή

$$w = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y) \quad \text{για κάθε } z \in D, \qquad (5.1.2\text{ - }1)$$

όπου οι $u(x,y)$ και $v(x,y)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις δύο πραγματικών μεταβλητών x και y, που λέγονται και **συνιστώσες** της f. Η $(5.1.2-1)$ ορίζει τότε την **αναλυτική έκφραση** της f.

Στην $(5.1.2-1)$ η $u(x,y)$ λέγεται το πραγματικό και η $v(x,y)$ το φανταστικό μέρος της f στο D και ορίζουν έναν **μετασχηματισμό** (transformation) στο D, με την έννοια ότι ένα σημείο του z-επιπέδου απεικονίζεται μέσω της f στο αντίστοιχο σημείο του w-επιπέδου ή σε περίπτωση πλειότιμης συνάρτησης στα αντίστοιχα σημεία του w-επιπέδου.

Παράδειγμα 5.1.2 - 1

Έστω $f(z) = z^2$. Τότε, αν $z = x + i\,y$, διαδοχικά έχουμε

$$f(z) = f(x + i\,y) = (x + i\,y)^2 = x^2 + 2xy\,i + (i\,y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\,i,$$

οπότε το πραγματικό της μέρος είναι το $u(x,y) = x^2 - y^2$ και το φανταστικό $v(x,y) = 2xy$.

5.2 Στοιχειώδεις μιγαδικές συναρτήσεις

5.2.1 Πολυωνυμική

Ορισμός 5.2.1 - 1. *Ορίζεται κάθε συνάρτηση της μορφής*

$$P(z) = P_\nu(z) = \alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 \quad \textit{για κάθε} z \in \mathbb{C}, \ (5.2.1\text{ - }1)$$

όπου $\alpha_k \in \mathbb{C}$ *για κάθε* $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, \nu$ *με* $\alpha_\nu \neq 0$.

Αν $P(z) = 0$, δηλαδή

$$f(z) = P_\nu(z) = \alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0, \qquad (5.2.1 - 2)$$

όταν $\alpha_k \in \mathbb{C}$ και $k = 0, 1, \ldots, \nu$ με $\alpha_\nu \neq 0$, τότε ορίζεται η **πολυωνυμική εξίσωση** ν - βαθμού.[3]

Από την Άλγεβρα είναι τότε γνωστό το παρακάτω θεώρημα σχετικά με τις ρίζες του πολυωνύμου $P(z)$:

Θεώρημα 5.2.1 - 1 (θεμελιώδες της Άλγεβρας). *Το πολυώνυμο P έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{C}$.*

Συνέπεια του θεωρήματος 5.2.1 - 1 είναι ότι το P έχει ν ακριβώς ρίζες στο $\mathbb{C}$, έστω $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$, που μερικές ή και όλες είναι δυνατό να συμπίπτουν. Αν οι ρίζες είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε

$$P(z) = a_\nu (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_\nu), \qquad (5.2.1 - 3)$$

ενώ στην περίπτωση που μία ρίζα, έστω η z_1, έχει πολλαπλότητα ρ, είναι

$$P(z) = (z - z_1)^\rho P_1(z), \qquad (5.2.1 - 4)$$

όπου $P_1(z_1) \neq 0$ και $\rho = 2, 3, \ldots$.

5.2.2 Ρητή

Ορισμός 5.2.2 - 2. *Ορίζεται κάθε συνάρτηση της μορφής*

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C} - \{\text{ρίζες του } Q\},$$

όπου P, Q πολυωνυμικές συναρτήσεις.

[3] Για εφαρμογή στη 2ου βαθμού και τη διώνυμη εξίσωση βλέπε Μάθημα *Μιγαδικοί Αριθμοί* - Παράγραφοι 4.6.2 και 4.6.3.

5.2.3 Εκθετική

Ορισμός 5.2.3 - 3 (εκθετικής συνάρτησης). *Αν $z = x + iy$, ορίζεται από τον τύπο*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\,(\cos y + i \sin y) \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}. \tag{5.2.3 - 5}$$

Από τον ορισμό προκύπτουν:

i) αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή $y = 0$, τότε η συνάρτηση e^z συμπίπτει με την πραγματική e^x,

ii) αν $x = 0$, ισχύει η ταυτότητα του Euler

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad \text{για κάθε } y \in \mathbb{R}. \tag{5.2.3 - 6}$$

Τότε προφανώς είναι $\left|e^{iy}\right| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$, ενώ σύμφωνα με την $(5.2.3 - 5)$ ισχύει ότι

$$|e^z| = |e^x\,(\cos y + i \sin y)| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x.$$

Ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης:

i)
$$e^{z_1}\, e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad \text{και} \quad (e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1\, z_2}$$

για κάθε z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, ενώ είναι $e^1 = e$ και $e^0 = 1$.

ii)
$$e^z \neq 0 \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

iii) Ισχύει $e^z = 1$ τότε και μόνον, όταν $z = 2k\pi\, i$ με $k \in \mathbb{Z}$.

5.2.4 Όρισμα

[4]Είναι γνωστό ότι κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται στην εκθετική του μορφή ως εξής:

$$z = |z|(\cos\theta + i\,\sin\theta) = |z|e^{i\,\theta}.$$

Τότε σύμφωνα και με τον Ορισμό 5.2.3 - 3 έχουμε:

Ορισμός 5.2.4 - 4 (συνάρτηση ορίσματος). *Για κάθε μιγαδικό αριθμό z με $|z| = 1$ ορίζεται ως συνάρτηση του ορίσματος (argument) και συμβολίζεται με $\arg z$, κάθε πραγματικός αριθμός θ για τον οποίο ισχύει $z = e^{i\theta}$, δηλαδή*

$$\theta = \arg z \quad \textit{τότε και μόνον, όταν } z = e^{i\theta}.$$

Επειδή

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta = \cos(\theta + 2k\pi) + i\,\sin(\theta + 2k\pi),$$

ενώ προφανώς $|e^{i\theta}| = 1$, από τον Ορισμό 5.2.4 - 4 προκύπτει ότι η συνάρτηση του ορίσματος $\arg z$ ενός μιγαδικού αριθμού είναι **πλειότιμη** με πεδίο ορισμού το σύνολο των σημείων της περιφέρειας του μοναδιαίου κύκλου.

Στην περίπτωση που $|z| \neq 1$ και $z \neq 0$, από τον Ορισμό 5.2.4 - 4 προκύπτει ότι:

$$\theta = \arg z = \arg\frac{z}{|z|} \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C} \text{ με } z \neq 0. \qquad (5.2.4\text{ - }7)$$

Τότε, επειδή σύμφωνα με τον τύπο $(5.2.4 - 7)$ και τον Ορισμό 5.2.4 - 4 είναι $e^{i\theta} = z/|z|$, πρέπει, αν $z = x + iy$, το όρισμα να προκύπτει ως η κοινή λύση του παρακάτω συστήματος εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \quad \text{και} \\ \sin\theta &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \qquad (5.2.4\text{ - }8) \end{aligned}$$

με άγνωστο το θ.

[4]Βλέπε Μάθημα *Μιγαδικοί Αριθμοί* - Παράγραφος 4.5.1.

Από το σύνολο αυτό των τιμών θ της συνάρτησης $\arg z$ στην $(5.2.4-8)$ υπάρχει ακριβώς μία τιμή, έστω

$$\theta_0 = \mathrm{Arg} z \quad \text{με} \quad \theta_0 \in [0, 2\pi), \tag{5.2.4 - 9}$$

που λέγεται **βασικό όρισμα** του z και η οποία ορίζει μία **μονότιμη** συνάρτηση. Τότε προφανώς ισχύει

$$\arg z = \mathrm{Arg}\, z + 2k\pi \quad \text{για κάθε } k = 0, \pm 1, \ldots, \tag{5.2.4 - 10}$$

ενώ είναι

$$z = |z|\, e^{i\theta} = |z|\, e^{i \arg z} = |z|\, e^{i\,(\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi)}. \tag{5.2.4 - 11}$$

Σημείωση 5.2.4 - 1

Αντί του διαστήματος $[0, 2\pi)$ χρησιμοποιείται επίσης και το διάστημα $[-\pi, \pi)$, είναι όμως δυνατόν να χρησιμοποιηθεί και κάθε άλλο διάστημα πλάτους 2π.

5.2.5 Λογαριθμική

Ορισμός 5.2.5 - 5 (φυσικού λογάριθμου). *Έστω $z \neq 0$. Τότε ορίζεται ως φυσικός λογάριθμος του z και συμβολίζεται με $\log_e z$ ή συνήθως με $\ln z$, κάθε μιγαδικός αριθμός w που επαληθεύει την εξίσωση $e^w = z$.*

Επειδή σύμφωνα με την $(5.2.4-11)$ είναι

$$z = |z|\, e^{i\,\theta} = |z| e^{i(\theta + 2k\pi)} = |z| e^{i(\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi)} \quad \text{για κάθε} \quad k = 0, \pm 1, \ldots,$$

από τον ορισμό του λογάριθμου προκύπτει ότι

$$e^w = |z| e^{i(\mathrm{Arg} z + 2k\pi)} \quad \text{για κάθε} \quad k = 0, \pm 1, \ldots,$$

δηλαδή ο λογάριθμος ορίζεται από τη σχέση

$$\ln z = \ln |z| + i\,(\mathrm{Arg} z + 2k\pi) \quad \text{για κάθε } k = 0, \pm 1, \ldots \tag{5.2.5 - 12}$$

και είναι μια **πλειότιμη** συνάρτηση. Τότε για $k = 0$ ορίζεται η **αρχική** του τιμή, που συμβολίζεται με

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln |z| + i\, \mathrm{Arg}\, z \tag{5.2.5 - 13}$$

και είναι τότε μία **μονότιμη** συνάρτηση.

5.2.6 Γενίκευση εκθετικής συνάρτησης

Έχοντας υπόψη τους Ορισμούς 5.2.3 - 3 και 5.2.5 - 5 δίνεται η παρακάτω γενίκευση της εκθετικής συνάρτησης:[5]

Ορισμός 5.2.6 - 6. *Η συνάρτηση* a^z *με* $a \in \mathbb{C}$ *και* $a \neq 0$, *ορίζεται από τη σχέση*

$$a^z = e^{z \ln a} \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}$$

με αρχική τιμή την

$$a^z = e^{z \,\mathrm{Ln} a} \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Τότε η a^z είναι μια πλειότιμη συνάρτηση, ενώ η αρχική της μονότιμη.

Ιδιότητες

Από τον Ορισμό 5.2.6 - 6 προκύπτουν οι ιδιότητες:

- $a^{z_1}\, a^{z_2} = a^{z_1+z_2}$, και
- $(a^{z_1})^{z_2} = a^{z_1\, z_2}$ για κάθε $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$,

ενώ είναι $a^1 = a$ και $a^0 = 1$.

Ο Ορισμός 5.2.6 - 6 γενικεύεται ως εξής:

Ορισμός 5.2.6 - 7 *Για κάθε* $z \in \mathbb{C}$ *με* $f(z) \neq 0$ *η δύναμη* $[f(z)]^{g(z)}$ *ορίζεται από τη σχέση*

$$[f(z)]^{g(z)} = e^{g(z) \ln f(z)}. \qquad (5.2.6 - 14)$$

Είναι προφανές ότι στην περίπτωση αυτή έχουμε επίσης μία πλειότιμη συνάρτηση, ενώ η αρχική τιμή της είναι

$$[f(z)]^{g(z)} = e^{g(z) \mathrm{Ln} f(z)}. \qquad (5.2.6 - 15)$$

[5] Βλέπε Μάθημα *Πραγματικές Συναρτήσεις* - Παράγραφος 3.3.7 (αντίστοιχη πραγματική εκθετική συνάρτηση a^x) και Μάθημα *Μιγαδικοί Αριθμοί* - Παράγραφος 4.7.

Άσκηση

Να αποδειχθούν οι ιδιότητες των Παραγράφων 5.2.3 και 5.2.6.

5.2.7 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις αυτές ορίζονται με τη βοήθεια των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων ως εξής:

Ημίτονο	$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$	Συνημίτονο	$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
Εφαπτομένη	$\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$	Συνεφαπτομένη	$\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$

με κατάλληλους περιορισμούς στο z, όπου αυτό απαιτείται.

Σημείωση 5.2.7 - 2

Στις εφαρμογές χρησιμοποιούνται επίσης οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \quad \text{και} \quad \csc z = \frac{1}{\sin z} = \frac{2\,i}{e^{iz} - e^{-iz}}\,.$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Αν $w = \sin z$, η αντίστροφη συνάρτηση που συμβολίζεται με $z = \sin^{-1} w$ ή επίσης και $z = \arc\sin w$, ορίζει το **τόξο ημιτόνου** z και προφανώς είναι μία πλειότιμη συνάρτηση.

Όμοια ορίζονται οι αντίστροφες των άλλων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Αποδεικνύεται ότι οι αρχικές τιμές των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων δίνονται από τους τύπους

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\,\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \qquad \tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)$$

$$\cos^{-1} z = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \qquad \cot^{-1} z = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)$$

με κατάλληλους περιορισμούς στο z, όπου αυτό απαιτείται.

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι

i) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,

ii) $\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z, \quad \tan(-z) = -\tan z$,

iii) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$.

2. Όμοια ότι

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right).$$

3. Δείξτε ότι οι

$$\sin z, \quad \tan z \quad \text{και} \quad \cot z$$

είναι περιττές συναρτήσεις, ενώ η $\cos z$ άρτια συνάρτηση.

4. Να υπολογιστούν τα

$$\sin^{-1} 2 \quad \text{και} \quad \cos^{-1} i.$$

5. Δείξτε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι

$$\overline{\sin z} = \sin \overline{z}, \quad \overline{\cos z} = \cos \overline{z} \quad \text{και} \quad \overline{\tan z} = \tan \overline{z}.$$

Απαντήσεις

1. Αντικατάσταση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με τις αντίστοιχες εκφράσεις τους.

2. Έστω

$$w = \tan z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \Big/ \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \text{οπότε γράφοντας} \quad e^{-iz} = \frac{1}{e^{iz}}$$

και λύνοντας ως προς z προκύπτει λογαριθμίζοντας την τελική σχέση η αποδεικτέα.

3. Εφαρμογή του ορισμού των περιττών, αντίστοιχα άρτιων συναρτήσεων στις εκφράσεις των συναρτήσεων.

4. Είναι $\sin^{-1} z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$, οπότε θέτοντας $z = 2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sin^{-1} 2 &= \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(2\,i + \sqrt{1-2^2}\right) = \ldots = \frac{1}{i}\left[\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + i\,\frac{\pi}{2}\right] \\ &= 1.570\,796 - 1.316\,958\,i. \end{aligned}$$

Όμοια

$$\begin{aligned}\cos^{-1} i &= \frac{1}{i}\,\mathrm{Ln}\left(i+\sqrt{i^2-1}\right) = \ldots = \frac{1}{i}\left[\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+i\,\frac{\pi}{2}\right]\\ &= 1.570\,796 - 0.881\,374\,i.\end{aligned}$$

5. Θα δειχθεί ότι $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$. Έστω $z = x + i\,y$, οπότε $\overline{z} = x - i\,y$. Τότε

$$\sin \overline{z} = \frac{e^{i(x-i\,y)} - e^{-i(x-i\,y)}}{2i} = \ldots = \frac{e^{y}\,(\cos x + i\,\sin x) - e^{-y}\,(\cos x - i\,\sin x)}{2i}\,, \qquad (1)$$

ενώ

$$\overline{\sin z} = \frac{\overline{e^{-y+i\,x} - e^{y-i\,x}}}{\overline{2i}} = \ldots = \frac{e^{y}\,(\cos x + i\,\sin x) - e^{-y}\,(\cos x - i\,\sin x)}{2i}\,. \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει η αποδεικτέα. Όμοια και οι άλλες δύο περιπτώσεις.

5.2.8 Υπερβολικές συναρτήσεις

Όμοια, όπως και στις πραγματικές συναρτήσεις, ορίζονται οι υπερβολικές συναρτήσεις με τη βοήθεια των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων ως εξής:

Ημίτονο	$\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$	Συνημίτονο	$\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$
Εφαπτομένη	$\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$	Συνεφαπτομένη	$\coth z = \dfrac{\cosh z}{\sinh z}$

με κατάλληλους περιορισμούς στο z όπου αυτό απαιτείται.

Σημείωση 5.2.8 - 3

Επίσης στις εφαρμογές χρησιμοποιούνται οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$\mathrm{sech} z = \frac{1}{\cosh z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} \quad \text{και} \quad \mathrm{csch} z = \frac{1}{\sinh z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}}\,.$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Αποδεικνύεται ότι οι αρχικές τιμές των αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων δίνονται από τους τύπους

$$\sinh^{-1} z = \mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right) \qquad \tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$\cosh^{-1} z = \mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right) \qquad \coth^{-1} z = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

με κατάλληλους περιορισμούς στο z.

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι

i) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$,

ii) $\sinh(-z) = -\sinh z, \quad \cosh(-z) = \cosh z, \quad \tanh(-z) = -\tanh z$,

iii) $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$,

iv) $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \mp \sinh z_1 \sinh z_2$.

2. Όμοια ότι

$$\sinh^{-1} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

με κατάλληλους περιορισμούς στο z.

3. Να υπολογιστεί το $\sinh^{-1} i$.

Απαντήσεις

1. Αντικατάσταση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με τις αντίστοιχες εκφράσεις τους.

2. Έστω

$$w = \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \text{οπότε γράφοντας} \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z},$$

λύνοντας ως προς z και λογαριθμίζοντας προκύπτει τελικά η αποδεικτέα.

3. Είναι $\sinh^{-1} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{1-z^2}\right)$, οπότε θέτοντας $z = i$ προκύπτει ότι

$$\sinh^{-1} i = \operatorname{Ln}\left(i + \sqrt{i^2+1}\right) = \ldots = \operatorname{Ln} i = \ln 1 + i\,\frac{\pi}{2} = i\,\frac{\pi}{2}.$$

5.3 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[2] Ξένος, Θ. (2008). *Μιγαδικές Συναρτήσεις*. Εκδόσεις Ζήτη. ISBN 978–960–456–092–9.

[3] Τσάγκας, Γρ. (1990). *Μαθήματα Μιγαδικών Συναρτήσεων*. Θεσσαλονίκη.

[4] Bak, J. & Newman, D. (2004). *Μιγαδική Ανάλυση*. Εκδόσεις Leader Books. ISBN: 978–960–790–140–8.

[5] Churchill, R. & Brown, J. (2005). *Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 960–7309–41–3.

[6] Spiegel, M. (2009). *Complex Variables*. Εκδότης McGraw-Hill Education – Europe. ISBN 007–060–230–1.

[7] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 6

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

6.1 Πίνακες

Η επίλυση διαφόρων προβλημάτων των Μαθηματικών και γενικότερα των εφαρμοσμένων επιστημών οδήγησε μεταξύ των άλλων στην ανάγκη ομαδοποίησης των διαφόρων δεδομένων. Κύριος στόχος της ομαδοποίησης αυτής ήταν αφενός η εύκολη πρόσβαση σε αυτά και αφετέρου η ευκολία των μεταξύ τους πράξεων. Στην περίπτωση που τα δεδομένα αυτά είναι πραγματικοί ή γενικότερα μιγαδικοί αριθμοί, η παραπάνω ομαδοποίηση γίνεται με την έννοια του πίνακα, μια έννοια που εισάγεται στη συνέχεια αυτού του μαθήματος, ενώ για μία γενικότερη αντιμετώπιση του προβλήματος, ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] και
https : //en.wikipedia.org/wiki/Matrix_(mathematics).

6.1.1 Ορισμοί

Ορισμός 6.1.1 - 1 (πίνακα). *Λέγεται πίνακας (matrix) τάξης* (m, n) *μία διάταξη* mn *στοιχείων από το σύνολο* $\mathbb{R}$ *ή το* $\mathbb{C}$*, που είναι διατεταγμένα σε* m*-γραμμές και* n*-στήλες, έτσι ώστε κάθε στοιχείο της να ανήκει ακριβώς σε μία γραμμή και μία στήλη.*

Οι πίνακες θα συμβολίζονται στο εξής με κεφαλαία γράμματα, όπως A, B, C κ.λπ., ενώ ένας πίνακας A με στοιχεία από το $\mathbb{R}$ τάξης (m,n) θα συμβολίζεται με $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και με $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, όταν έχει στοιχεία από το $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 6.1.1 - 1

Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow \text{1η γραμμή} \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{matrix} \qquad \text{είναι τάξης} \quad (3,2),$$

$$\uparrow$$

1η στήλη

επειδή έχει 3 γραμμές και 2 στήλες.

Στο παραπάνω παράδειγμα αν τα στοιχεία του πίνακα A συμβολιστούν με το γράμμα, έστω a, τότε για να καθοριστούν τα στοιχεία αυτά στις επιμέρους θέσεις του πίνακα, απαιτούνται δύο δείκτες, που ένας να δείχνει τη γραμμή και ο άλλος τη στήλη στην οποία ανήκει το κάθε στοιχείο. Αν δεχθούμε ότι στο εξής ο πρώτος δείκτης, έστω i, θα συμβολίζει τις γραμμές (rows) του πίνακα και ο δεύτερος, έστω j, τις στήλες (columns), τότε ο παραπάνω πίνακας A γράφεται ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = (a_{ij}), \quad \text{όταν} \quad \begin{matrix} i & = & 1,2,3 \text{ και} \\ j & = & 1,2. \end{matrix}$$

Γενικότερα ένας πίνακας A τάξης (m,n) γράφεται

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}) \ ; \ 1 \le i \le m \, , \, 1 \le j \le n. \quad (6.1.1 - 1)$$

Αν $n = 1$, δηλαδή υπάρχει μια μόνο στήλη, τότε ο πίνακας λέγεται **πίνακας διάνυσμα** ή απλά **διάνυσμα**.

Παράδειγμα 6.1.1 - 2

Οι παρακάτω πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \overrightarrow{a} = \mathbf{a} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \overrightarrow{b} = \mathbf{b}$$

είναι πίνακες διανύσματα τάξης $(2, 1)$ και $(3, 1)$ αντίστοιχα.

Αν $m = n$, τότε ο πίνακας λέγεται **τετραγωνικός πίνακας** τάξης (n, n) ή εν συντομία τάξης n.

Παράδειγμα 6.1.1 - 3

Οι παρακάτω πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

είναι τετραγωνικοί τάξης 2 και 3 αντίστοιχα. Τότε γράφεται $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, όταν τα στοιχεία των πινάκων είναι πραγματικοί αριθμοί, αντίστοιχα γράφεται $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ και $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, όταν είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Τα στοιχεία $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ενός τετραγωνικού πίνακα τάξης n ορίζουν την **κύρια** ή **πρωτεύουσα διαγώνιο**, ενώ τα $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ τη δευτερεύουσα διαγώνιο.

Παρατήρηση 6.1.1 - 1

Στο εξής στις διάφορες εφαρμογές θα χρησιμοποιείται μόνον η κύρια διαγώνιος.

Παράδειγμα 6.1.1 - 4

Στον τετραγωνικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ & \swarrow & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \end{bmatrix}$$

τα στοιχεία a_{11}, a_{22}, a_{33} ορίζουν την κύρια και τα a_{13}, a_{22}, a_{31} τη δευτερεύουσα διαγώνιο.

Ορισμός 6.1.1 - 2 *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τετραγωνικός πίνακας. Τότε το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου ορίζει το* **ίχνος** *(trace) του A, που συμβολίζεται με $\mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{trace}\,(A)$, δηλαδή*

$$\mathrm{tr}\,(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Επομένως, αν

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad \mathrm{tr}(A) = -1 + 2 + 5 = 6.$$

Ορισμός 6.1.1 - 3 (διαγώνιος πίνακας). *Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Αν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i \neq j$, τότε ο A λέγεται διαγώνιος (diagonal) και συμβολίζεται με $A = diag\,(a_{ii})$; $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Παράδειγμα 6.1.1 - 5

Οι πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

είναι διαγώνιοι, ενώ οι πίνακες

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

δεν είναι.

Η δημιουργία με το MATHEMATICA ενός διαγώνιου πίνακα, έστω του A_2, γίνεται με την παρακάτω εντολή [7]:

Πρόγραμμα 6.1.1 - 1 (δημιουργία πίνακα διαγώνιου)

```
DiagonalMatrix[{2,0,-1,-2}]//MatrixForm
```

Ορισμός 6.1.1 - 4 (μοναδιαίος πίνακας). *Ένας διαγώνιος πίνακας* $A = (a_{ij})$ *τάξης* n *θα λέγεται μοναδιαίος (identity) και θα συμβολίζεται με* I_n *ή απλά* I, *όταν* $a_{ii} = 1$ *για κάθε* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Επομένως οι πίνακες

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{I} = \mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{I} = \mathrm{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι μοναδιαίοι, ενώ οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν είναι.

Όμοια η δημιουργία ενός μοναδιαίου πίνακα τάξης, έστω 3, με το MATHEMATICA γίνεται με την εντολή:

Πρόγραμμα 6.1.1 - 2 (δημιουργία πίνακα μοναδιαίου)

```
IdentityMatrix[3]//MatrixForm
```

6.1.2 Αλγεβρική δομή

Δίνεται στη συνέχεια η αλγεβρική δομή στο σύνολο των πινάκων.

Ισότητα

Ορισμός 6.1.2 - 1. *Έστω οι πίνακες* $A = (a_{ij})$ *και* $B = (b_{ij})$ *τάξης* (m, n). *Οι πίνακες* A *και* B *θα είναι ίσοι τότε και μόνον, όταν* $a_{ij} = b_{ij}$ *για κάθε* $i = 1, 2, \ldots, m$ *και* $j = 1, 2, \ldots, n$.

Άρα, αν

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad \begin{array}{llll} a = -1 & b = 0 \\ c = 3 & d = 2. \end{array}$$

Είναι προφανές ότι η ισότητα ορίζει στο σύνολο των πινάκων τάξης (m, n) μία σχέση ισοδυναμίας, δηλαδή αν A, B, C είναι πίνακες τάξης (m, n), τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

- $A = A$ αυτοπαθής,
- αν $A = B$, τότε και $B = A$ συμμετρική,
- αν $A = B$ και $B = C$, τότε και $A = C$ μεταβατική.

Πίνακες διαφορετικοί

Ορισμός 6.1.2 - 2. *Έστω οι πίνακες* $A = (a_{ij})$ *και* $B = (b_{ij})$ *τάξης* (m, n). *Οι πίνακες* A *και* B *θα είναι διαφορετικοί και θα συμβολίζεται αυτό με* $A \neq B$ *τότε και μόνον, όταν* $a_{ij} \neq b_{ij}$ *για ένα τουλάχιστον* $i = 1, 2, \ldots, m$ *ή* $j = 1, 2, \ldots, n$.

Επομένως, αν

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{1} \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad A \neq B.$$

Παρατήρηση 6.1.2 - 1

Η έννοια της διάταξης, δηλαδή της $>$, αντίστοιχα της $<$, δεν ορίζεται στους πίνακες.

Πρόσθεση

Ορισμός 6.1.2 - 3. *Έστω οι πίνακες $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ τάξης (m, n). Τότε ορίζεται ως άθροισμά τους ο πίνακας $A + B = (c_{ij})$ όμοια τάξης (m, n), όπου $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Επομένως, αν

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -1+2 & 3+1 \\ -2+3 & 1+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της πρόσθεσης και θεωρώντας ότι οι πίνακες είναι της **ίδιας τάξης**, αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

Ιδιότητες

i) **αντιμεταθετική** (commutative) $\quad A + B = B + A,$

ii) **προσεταιριστική** (associative) $\quad (A + B) + C = A + (B + C),$

iii) υπάρχει ένας ακριβώς πίνακας, έστω M, που λέγεται **μηδενικός** (null matrix) και του οποίου τα στοιχεία είναι όλα ίσα με το μηδέν τέτοιος, ώστε $A + M = A$ για κάθε πίνακα A.

Άρα, αν

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

iv) Για κάθε πίνακα A υπάρχει ακριβώς ένας πίνακας, που λέγεται **αντίθετος** του A και συμβολίζεται με $-A$, έτσι ώστε $A + (-A) = M$.

Άρα, αν

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε προφανώς} \quad -A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

v) Αν $A + X = B + X$, τότε $A = B$ για κάθε πίνακα A, B και X (**νόμος της διαγραφής**).

vi) Για κάθε πίνακα A, B και X η εξίσωση $A + X = B$ έχει ακριβώς μία λύση τη

$$X = B - A.$$

Η λύση της εξίσωσης λέγεται **διαφορά** του πίνακα B από τον A, ενώ η πράξη με την οποία υπολογίζεται η διαφορά αυτή λέγεται **αφαίρεση**.

Επομένως, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1+(-3) & -2+1 \\ 5+2 & 3+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Η απόδειξη των ιδιοτήτων αφήνεται ως άσκηση.

Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα

Ορισμός 6.1.2 - 4. *Έστω ο πίνακας* $A = (a_{ij})$ *τάξης* (m, n) *και* $\lambda \in \mathbb{R}$, *αντίστοιχα* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Τότε το γινόμενο* λA *ορίζεται ότι είναι ο πίνακας* $\lambda A = \lambda\,(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$ *τάξης* (m, n) *για κάθε* $i = 1, 2, \ldots, m$ *και* $j = 1, 2, \ldots, n$.

Επομένως, αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \lambda = 3, \quad \text{τότε}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-4) \\ 3 \cdot (-5) & 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -15 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται αν το λ αντικατασταθεί με ένα βαθμωτό μέγεθος, έστω $\phi(x)$.

Παρατήρηση 6.1.2 - 2

Γράφεται λA και όχι $A\lambda$.

Όμοια βάσει του ορισμού και θεωρώντας ότι οι πίνακες είναι της ίδιας τάξης, αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

Ιδιότητες

i) $1A = A \quad$ και $\quad 0A = M$, όταν M ο μηδενικός πίνακας,

ii) επιμεριστική ως προς την πρόσθεση πινάκων

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B,$$

iii) επιμεριστική ως προς την πρόσθεση αριθμών

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A,$$

iv) προσεταιριστική ως προς το γινόμενο αριθμών

$$\lambda(\mu A) = \mu(\lambda A) = (\lambda\mu)A.$$

Η απόδειξη των ιδιοτήτων αφήνεται ως άσκηση.

Πολλαπλασιασμός πινάκων

Ορισμός 6.1.2 - 5. *Έστω ο πίνακας $A = (a_{ij})$ τάξης (m, n) και ο πίνακας $B = (b_{ij})$ τάξης (n, ρ). Τότε ορίζεται ως γινόμενό τους ο πίνακας $AB = (c_{ij})$ τάξης (m, p) όπου*

$$\begin{aligned} c_{ij} &= [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}. \end{aligned} \qquad (6.1.2 - 1)$$

Παρατήρηση 6.1.2 - 3

Συμβολικά η σχέση $(6.1.2 - 2)$ προκύπτει ως εξής:

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1j} & \ldots & c_{1\rho} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \ldots & \mathbf{c_{ij}} & \ldots & c_{i\rho} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \ldots & c_{m2} & \ldots & c_{m\rho} \end{bmatrix} \qquad (6.1.2 - 2)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \ldots & \mathbf{a_{in}} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & \mathbf{b_{1j}} & \ldots & b_{1\rho} \\ b_{21} & \ldots & \mathbf{b_{2j}} & \ldots & b_{2\rho} \\ & & \vdots & & \\ b_{n1} & \ldots & \mathbf{b_{nj}} & \ldots & b_{n\rho} \end{bmatrix}$$

Επομένως σύμφωνα με τον Ορισμό 6.1.2 - 5 και την $(6.1.2 - 2)$ θα έχουμε

i)

$$\underset{(2,3)}{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{(3,2)}{\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$= \underset{(2,2)}{\begin{bmatrix} 3\cdot 4+1\cdot 2+2\cdot(-3) & 3\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot 2 \\ -1\cdot 4+4\cdot 2+0\cdot(-3) & -1\cdot 1+4\cdot 1+0\cdot 2 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},$$

ii)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot x_1 & + & (-1)\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 \\ 0\cdot x_1 & + & 1\cdot x_2 & + & 5\cdot x_3 \\ -2\cdot x_1 & + & 4\cdot x_2 & + & 1\cdot x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 \\ & & x_2 & + & 5x_3 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 \end{bmatrix},$$

iii)

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot a_1 & + & 3\cdot a_2 & + & (-2)\cdot a_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2a_1 & + & 3a_2 & - & 2a_3 \end{bmatrix} \quad \text{κ.λπ.}$$

Ο υπολογισμός του παραπάνω παραδείγματος (i) με το MATHEMATICA γίνεται ως εξής:

Πρόγραμμα 6.1.2 - 1 (πολλαπλασιασμού πινάκων)

```
A={{3,1,2},{-1,4,0};
B={{4,1},{2,1},{-3,2}};
A.B//MatrixForm
```

Θεωρώντας ότι οι πίνακες έχουν τάξη, τέτοια ώστε να είναι δυνατόν να οριστούν οι αντίστοιχες πράξεις, αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

Ιδιότητες

i) προσεταιριστική

$$A(BC) = (AB)C,$$

ii) επιμεριστική (distributive) ως προς την πρόσθεση πινάκων

$$A(B+C) = AB + AC \text{ και } (B+C)A = BA + CA,$$

iii) προσεταιριστική ως προς τον πολλαπλασιασμό με αριθμό

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B),$$

iv) στο σύνολο των τετραγωνικών πινάκων τάξης n, υπάρχει ακριβώς ένα ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, που είναι ο μοναδιαίος πίνακας I_n ή εν συντομία I, δηλαδή

$$A\,\mathrm{I} = \mathrm{I}\,A = A \quad \text{για κάθε τετραγωνικό πίνακα } A.$$

Επομένως, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

v) Η σχέση

$$AB = M,$$

όπου M ο μηδενικός πίνακας, δεν συνεπάγεται πάντοτε ότι

$$A = M \quad \text{ή} \quad B = M,$$

όπως αυτό φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η απόδειξη των ιδιοτήτων αφήνεται ως άσκηση.

Παρατήρηση 6.1.2 - 4

Γενικά **δεν** ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή

$$AB \neq BA.$$

6.1.3 Δύναμη πίνακα

Σύμφωνα με τον ορισμό του γινομένου των πινάκων και την προσεταιριστική ιδιότητά του η δύναμη ενός πίνακα ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 6.1.3 - 1. *Έστω A τετραγωνικός πίνακας. Τότε επαγωγικά ορίζεται η δύναμη A^ν ως εξής:*

$$A^\nu = A^{\nu-1}A \quad \textit{για κάθε } \nu = 2, 3, \ldots,$$

όταν $A^1 = A$. Ειδικά ορίζεται ότι $A^0 = \mathrm{I}$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας.

Παράδειγμα 6.1.3 - 1

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε}$$

$$A^2 = A\,A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -15 \\ 10 & -6 \end{bmatrix}.$$

Στο Πρόγραμμα 6.1.3 - 1 υπολογίζονται οι παραπάνω δυνάμεις με το MATHEMATICA.

Πρόγραμμα 6.1.3 - 1 (δύναμης πίνακα)

```
A={{1,3},{-2,0}};
MatrixForm[A]
MatrixPower[A,2]//MatrixForm              (2η δύναμη του A)
MatrixPower[A,3]//MatrixForm              (3η δύναμη του A)
```

Παράδειγμα 6.1.3 - 2

Όμοια, αν

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε}$$

$$A^2 = A\,A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{bmatrix},$$

και γενικά

$$A^\nu = A^{\nu-1}A = \begin{bmatrix} (-1)^{\nu-1} & 0 \\ 0 & 3^{\nu-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^\nu & 0 \\ 0 & 3^\nu \end{bmatrix}.$$

Ιδιότητες

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A και ν, $\mu = 1, 2, \ldots$ ισχύουν

i) $A^{\nu}A^{\mu} = A^{\nu+\mu}$,

ii) $(A^{\nu})^{\mu} = A^{\nu\mu}$.

Παρατηρήσεις 6.1.3 - 1

i) Σύμφωνα με τον Ορισμό 6.1.3 - 1 η δύναμη πίνακα με διαφορετικό αριθμό γραμμών και στηλών δεν ορίζεται.

ii) Δυνάμεις με αρνητικούς ή και κλασματικούς εκθέτες δεν ορίζονται.

6.1.4 Πίνακες ειδικής μορφής

Δίνονται τώρα οι ορισμοί πινάκων ειδικής μορφής που είναι χρήσιμοι στα επόμενα.

Ορισμός 6.1.4 - 1 (διαγώνια ορισμένος πίνακας).
Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε ο A λέγεται διαγώνια ορισμένος (diagonally dominant), όταν

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \qquad \text{για κάθε } i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ορισμός 6.1.4 - 2 (αυστηρά διαγώνια ορισμένος πίνακας).
Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε ο A λέγεται αυστηρά διαγώνια ορισμένος (strictly diagonally dominant), όταν

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \text{για κάθε } i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Παράδειγμα 6.1.4 - 1

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς στον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ισχύει} \quad \begin{array}{l} |a_{11}| \geq |a_{12}| + |a_{13}| \\ |a_{22}| \geq |a_{21}| + |a_{23}| \\ |a_{33}| \geq |a_{31}| + |a_{32}| \end{array},$$

δηλαδή ο A είναι διαγώνια ορισμένος, ενώ στον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{ισχύει} \quad \begin{aligned} |b_{11}| &> |b_{12}| + |b_{13}| \\ |b_{22}| &> |b_{21}| + |b_{23}| \\ |b_{33}| &> |b_{31}| + |b_{32}| \,, \end{aligned}$$

οπότε ο B είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος.

Ορισμός 6.1.4 - 3 (θετικός πίνακας). *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Τότε ο A λέγεται θετικός (positive), όταν $a_{ij} > 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Ορισμός 6.1.4 - 4 (μη αρνητικός πίνακας). *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Τότε ο A λέγεται μη αρνητικός (non-negative), όταν $a_{ij} \geq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Ορισμός 6.1.4 - 5 (ανάστροφος πίνακας). *Έστω ο πίνακας $A = (a_{ij})$ τάξης (m, n). Τότε ορίζεται ως ανάστροφος (transpose) πίνακας ο $A^\top = (b_{ij})$ τάξης (n, m) όπου $b_{ij} = a_{ji}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Άρα οι γραμμές του A είναι οι στήλες του $A^\top$.

Παράδειγμα 6.1.4 - 2

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ο υπολογισμός του παραδείγματος με το MATHEMATICA γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 6.1.4 - 1 (ανάστροφου πίνακα)

```
A={{1,-4,2},{3,-2,5}};Transpose[A]//MatrixForm
```

Ορισμός 6.1.4 - 6 (συμμετρικός πίνακας). *Ο τετραγωνικός πίνακας A με $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται συμμετρικός (symmetric), όταν $A = A^\top$.*

Παράδειγμα 6.1.4 - 3

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & -5 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ τότε προφανώς } \quad A^\top = A.$$

Ο έλεγχος με το MATHEMATICA γίνεται ως εξής:

Πρόγραμμα 6.1.4 - 2 (συμμετρικού πίνακα)

```
A={{1,3,5},{3,-5,2},{5,2,4}};
SymmetricMatrixQ[A]                    (true)
```

Ορισμός 6.1.4 - 7 (αντισυμμετρικός πίνακας). *Ο τετραγωνικός πίνακας A με $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται αντισυμμετρικός (skew-symmetric), όταν $A = -A^\top$.*

Παρατήρηση 6.1.4 - 1

Σύμφωνα με τον ορισμό, αν $A^\top = (b_{ij})$, πρέπει $b_{ij} = -a_{ij}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Αλλά από τον ορισμό του ανάστροφου πίνακα προκύπτει ότι $b_{ij} = a_{ji}$, οπότε $a_{ji} = -a_{ij}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Τότε όμως για $i = j$ θα είναι $a_{ii} = -a_{ii}$, δηλαδή $a_{ii} = 0$. Επομένως τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ενός αντισυμμετρικού πίνακα είναι μηδέν, ενώ τα στοιχεία που βρίσκονται σε συμμετρική θέση ως προς την κύρια διαγώνιο είναι αντίθετα.

Ορισμός 6.1.4 - 8 (συζυγής πίνακας). *Αν $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$, τότε ορίζεται ως συζυγής (conjugate) ο πίνακας $\overline{A} = (\overline{a}_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$.*

Άρα ο $\overline{A}$ αποτελείται από τα συζυγή στοιχεία του A.

Παρατήρηση 6.1.4 - 2

Αν είναι $A = \overline{A}$, τότε προφανώς ο A έχει στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, ενώ, αν είναι $A = -\overline{A}$, ο A έχει στοιχεία φανταστικούς αριθμούς.

Ορισμός 6.1.4 - 9 (συζυγής ανάστροφος πίνακας). *Έστω* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$. *Τότε ορίζεται ως συζυγής ανάστροφος (conjugate transpose)* $A^* = \left(\overline{A}\right)^\top = \overline{A^\top}$ *ή Ερμιτιανός ανάστροφος (Hermitian transpose)* A^{H} *ο πίνακας*

$$A^{\mathrm{H}} = A^* = (\overline{a}_{ji}) \in \mathbb{C}^{n\times m}.$$

Συνεπώς οι γραμμές του A είναι στήλες του A^{H} και επιπλέον ο A^{H} αποτελείται από τα συζυγή μιγαδικά στοιχεία του A.

Παράδειγμα 6.1.4 - 4

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -i & 0 \\ 2 & 3-2i & i \end{bmatrix}, \text{ τότε}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-i & i & 0 \\ 2 & 3+2i & -i \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$A^{\mathrm{H}} = (\overline{A})^\top = \overline{A^\top} = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ i & 3+2i \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 6.1.4 - 3 (συζυγή ανάστροφου πίνακα)

```
A={{1+I,-I,0},{2,3-2I,I}};
Conjugate[A]//MatrixForm
ConjugateTranspose[A]//MatrixForm
```

Ορισμός 6.1.4 - 10 (Ερμιτιανός πίνακας). *Ο τετραγωνικός πίνακας* A *με* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *λέγεται Ερμιτιανός (Hermitian), όταν* $A^{\mathrm{H}} = A$.

Άμεσα προκύπτει τότε ότι $a_{ii} = \overline{a}_{ii}$ για κάθε με $i = 1, 2, \ldots, n$, δηλαδή ότι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι πραγματικοί αριθμοί.

Παράδειγμα 6.1.4 - 5

Σύμφωνα με τον ορισμό, αν

$$A=\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix}, \text{ τότε } A^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix}=A.$$

Ο έλεγχος με το MATHEMATICA γίνεται με την εντολή:

Πρόγραμμα 6.1.4 - 4 (Ερμιτιανού πίνακα)

```
A={{1,I,1+I},{-I,-5,2-I},{1-I,2+I,3}};
HermitianMatrixQ[A]                          (true)
```

Ορισμός 6.1.4 - 11 (αντιερμιτιανός πίνακας). *Ο τετραγωνικός πίνακας A με $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ λέγεται αντιερμιτιανός (skew-Hermitian), όταν $A^{\mathrm{H}}=-A$.*

Παράδειγμα 6.1.4 - 6

Αν

$$A=\begin{bmatrix} i & 4+i \\ -4+i & 2i \end{bmatrix}, \quad \text{τότε } A^{\mathrm{H}}=-A.$$

Ορισμός 6.1.4 - 12 (τριγωνικός άνω πίνακας). *Έστω $A=(a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε ο A λέγεται άνω ή δεξιά τριγωνικός (upper triangular) και συμβολίζεται συνήθως με R ή συνήθως με U, όταν $a_{ij}=0$ για κάθε $i>j$.*

Άρα στην περίπτωση αυτή τα στοιχεία που βρίσκονται αριστερά και κάτω της κύριας διαγωνίου είναι ίσα με το μηδέν.

Ορισμός 6.1.4 - 13 (αυστηρά τριγωνικός άνω πίνακας). *Έστω $A=(a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε ο A λέγεται άνω τριγωνικός (strictly upper triangular), όταν $a_{ij}=0$ για κάθε $i\geq j$.*

Όμοια ορίζεται ο κάτω ή αριστερά τριγωνικός (lower triangular) πίνακας, όταν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i < j$ και συμβολίζεται συνήθως με L, αντίστοιχα ο καθαρά κάτω τριγωνικός, όταν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i \leq j$.

Άρα οι πίνακες

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}, \text{ αντίστοιχα } L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

είναι άνω, αντίστοιχα κάτω τριγωνικοί, ενώ οι

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ & 0 & 1 & -3 \\ & & 0 & -2 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \text{ αντίστοιχα } \tilde{L} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 3 & 0 & & \\ -3 & 2 & 0 & \\ -1 & 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

είναι αυστηρά άνω, αντίστοιχα αυστηρά κάτω τριγωνικοί.

Οι παρακάτω εντολές δημιουργούν με το MATHEMATICA έναν άνω τριγωνικό, αντίστοιχα έναν καθαρά άνω τριγωνικό πίνακα τάξης 3:

Πρόγραμμα 6.1.4 - 5 (τριγωνικού πίνακα)

```
A={{a11,a12,a13},{a21,a22,a23},{a31,a32,a33}};
UpperTriangularize[A]//MatrixForm
UpperTriangularize[A,1]//MatrixForm
```

Όμοια έναν κάτω τριγωνικό, αντίστοιχα έναν καθαρά κάτω τριγωνικό πίνακα:

```
A={{a11,a12,a13},{a21,a22,a23},{a31,a32,a33}};
LowerTriangularize[A]//MatrixForm
LowerTriangularize[A,-1]//MatrixForm
```

Η παρακάτω εντολή δημιουργεί έναν κάτω τριγωνικό πίνακα με μονάδες στη διαγώνιο.

```
A={{a11,a12,α13},{α21,α22,α23},{α31,α32,α33}};
LowerTriangularize[A,-1]
+IdentityMatrix[3]//MatrixForm
```

Ασκήσεις

1. Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης 3, δείξτε ότι

i) $\operatorname{tr}(kA+\lambda B) = k\operatorname{tr}(A)+\lambda\operatorname{tr}(B)$, όταν k, λ σταθερές,

ii) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\ \operatorname{tr}(B)$,

iii) $\operatorname{tr}\left(A^{\top}\right) = \operatorname{tr}(A)$.

2. Έστω A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης n. Εξετάστε αν ισχύει

$$(AB)^2 = A^2B^2$$

και δικαιολογήστε την απάντησή σας. Στη συνέχεια υπολογίστε τα αναπτύγματα

$$(A+B)^2 \quad \text{και} \quad (A+B)^3.$$

3. Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης n και $AB = BA$, δείξτε ότι

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \quad \text{και} \quad (AB)^2 = B^2A^2.$$

4. Έστω $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ αντίστοιχα $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^3$. Δείξτε ότι[1]

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\top}\mathbf{y}.$$

5. Αν A, $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ δείξτε ότι

i) $(A+B)^{\top} = A^{\top} + B^{\top}$

ii) $(\lambda A)^{\top} = \lambda A^{\top}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

iii) $\left(A^{\top}\right)^{\top} = A$

iv) $(AB)^{\top} = B^{\top}A^{\top}$.

6. Όμοια, αν A, $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ ότι

i) $(A+B)^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{H}} + B^{\mathrm{H}}$

ii) $(\lambda A)^{\mathrm{H}} = \overline{\lambda}A^{\mathrm{H}}$ με $\lambda \in \mathbb{C}$

iii) $\left(A^{\mathrm{H}}\right)^{\mathrm{H}} = A$

iv) $(AB)^{\mathrm{H}} = B^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}$.

7. Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, δείξτε ότι οι πίνακες $A + A^{\top}$, $AA^{\top}$ είναι συμμετρικοί και ο $A - A^{\top}$ αντισυμμετρικός, ενώ αν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, τότε ο πίνακας $A + A^{\mathrm{H}}$ είναι Ερμιτιανός και ο $A - A^{\mathrm{H}}$ αντιερμιτιανός.

8. Να δειχθεί ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας A με $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ γράφεται ως

$$A = \frac{1}{2}\left(A - A^{\top}\right) + \frac{1}{2}\left(A + A^{\top}\right),$$

[1] Βλέπε Μάθημα *Διανύσματα - Εσωτερικό γινόμενο.*

ενώ αν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, τότε

$$A = \frac{1}{2}\left(A - A^{\mathrm{H}}\right) + \frac{1}{2}\left(A + A^{\mathrm{H}}\right).$$

9. Δείξτε ότι όλα τα στοιχεία ενός αντιερμιτιανού πίνακα είναι φανταστικοί αριθμοί.

10. Να δειχθεί ότι κάθε Ερμιτιανός πίνακας, έστω A, γράφεται στη μορφή $A = B + iD$, όπου B είναι ένας συμμετρικός και D ένας αντισυμμετρικός πίνακας.

11. Αν A, B αντιερμιτιανοί πίνακες, δείξτε ότι ο πίνακας $kA+\lambda B$ είναι όμοια αντιερμιτιανός για κάθε k, $\lambda \in \mathbb{R}$.

12. Αν ο A είναι ένας αντιερμιτιανός πίνακας, δείξτε ότι ο πίνακας iA είναι Ερμιτιανός, ενώ ο A^{ν} είναι Ερμιτιανός, αν ο ν είναι άρτιος και αντιερμιτιανός, αν ο ν είναι περιττός αριθμός.

13. Να προσδιοριστούν τα α, β και γ, έτσι ώστε ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} -1 & \alpha & -\beta \\ 3-5i & 0 & \gamma \\ i & 2+4i & 2 \end{bmatrix}$$

να είναι Ερμιτιανός.

14. Δείξτε ότι οι παρακάτω πίνακες του Pauli

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

επαληθεύουν τις σχέσεις $A^2 = B^2 = C^2 = I$, $BC = -CB = iA$, $CA = -AC = iB$ και $AB = -BA = iC$.

Απαντήσεις

1. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{21} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια εφαρμογή του Ορισμού 6.1.1 - 2 σε καθένα μέλος των $(i)-(iii)$.
2. Είναι

$$(AB)^2 = A\overbrace{BA}^{\neq AB}B \neq A^2B^2 = AABB,$$

επειδή σύμφωνα με την Παρατήρηση 6.1.2 - 4 γενικά είναι $AB \neq BA$. Στη συνέχεια εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα έχουμε

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = A^2+AB+BA+B^2,\\ (A+B)^3 &= (A+B)(A+B)^2 = (A+B)\left(A^2+AB+BA+B^2\right) \quad \text{κ.λπ.}\end{aligned}$$

3. Εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα έχουμε

$$(A+B)(A-B) = A^2\overbrace{-AB+BA}^{-AB+AB=0}-B^2 = A^2-B^2.$$

Όμοια $(AB)^2 = B^2A^2$. **4.** Έστω

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{y} = \overrightarrow{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Τότε το εσωτερικό γινόμενο είναι $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y} = x_1y_1+\ldots+x_ny_n$, ενώ προφανώς το γινόμενο των πινάκων είναι επίσης $\mathbf{x}^\top\mathbf{y} = x_1y_1+\ldots+x_ny_n$. Ανάλογα οι υπόλοιπες ασκήσεις.

6.2 Ορίζουσες

[2]Η έννοια της ορίζουσας είναι θεμελιώδους σημασίας για τα προβλήματα της Γραμμικής Άλγεβρας, επειδή η γνώση της δίνει λύση σε πολλά από αυτά, όπως είναι η μελέτη ύπαρξης λύσης γραμμικών συστημάτων κ.λπ., ενώ έχει και άλλες γενικότερες εφαρμογές στις θετικές επιστήμες.

6.2.1 Ορισμός

Ορισμός 6.2.1 - 1 (ορίζουσας). *Έστω $A = (a_{ij})$ ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε η ορίζουσα (determinant) του A συμβολίζεται με $|A|$ ή*

[2]Βλέπε βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] και:
https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant

det (A) *και ισούται με τον αριθμό* [3]

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}, \qquad (6.2.1 - 1)$$

όταν $i = 1$ *ή* $2, \ldots$ *ή* n*, αντίστοιχα* [4]

$$\det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}, \qquad (6.2.1 - 2)$$

όταν $j = 1$ *ή* $2, \ldots$ *ή* n *και* M_{ij} *είναι η* **ελάσσονα ορίζουσα** *(minor determinant) του στοιχείου* a_{ij} *που προκύπτει, όταν διαγραφεί η* i*-γραμμή και η* j*-στήλη του πίνακα* A*.*

Όταν $n = 2$ η ορίζουσα ισούται με

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad (6.2.1 - 3)$$

ενώ για $n = 1$ είναι $|A| = a_{11}$.

Οι τύποι $(6.2.1 - 1)$ και $(6.2.1 - 2)$ είναι γνωστοί ως **τύποι του Laplace**.

Η ελάσσονα ορίζουσα M_{ij} λέγεται και 1η ελάσσονα ορίζουσα (first minor), ενώ αυτή που προκύπτει με διαγραφή δύο γραμμών και δύο στηλών 2η ελάσσονα (second minor) κ.λπ. Η τάξη της ορίζουσας ορίζεται ίση με την τάξη του πίνακα A, δηλαδή ίση με n, ενώ προφανώς η τάξη της πρώτης ελάσσονας ορίζουσας είναι $n - 1$.

Επομένως, σύμφωνα με τον Ορισμό 6.2.1 - 1, το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας 3ης τάξης ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής $(i = 1)$ σε ορίζουσες 2ης τάξης

[3] Ανάπτυγμα ως προς την 1η γραμμή.
[4] Ανάπτυγμα ως προς την 1η στήλη.

και στη συνέχεια ο υπολογισμός της σύμφωνα με την $(6.2.1-3)$ θα είναι:

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} M_{13} \\
&= a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13} \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) .
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 6.2.1 - 1

Να υπολογιστούν οι ορίζουσες

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} \quad \text{και} \quad |B| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} .$$

Λύση. Διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 12 - (-3) \cdot 1 = 27, \\
|B| &= \begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-5) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 3(1 \cdot 4 - (-1) \cdot 0) + 5(2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1) + 3(2 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = 54.
\end{aligned}$$

Ο υπολογισμός της παραπάνω ορίζουσας με το MATHEMATICA γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 6.2.1 - 1 (ορίζουσας)

```
A={{3,-5,3},{2,1,-1},{1,0,4}};
Det[A]
```

6.2.2 Ιδιότητες των οριζουσών

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, που δίνονται στη συνέχεια με τη μορφή προτάσεων:

Πρόταση 6.2.2 - 1. *Αν οι γραμμές γίνουν στήλες και οι στήλες γραμμές, τότε η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται.*

Παράδειγμα 6.2.2 - 2

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = A^{\top}.$$

Πρόταση 6.2.2 - 2. *Αν αντιμετατεθούν δύο γραμμές ή δύο στήλες, τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο.*

Παράδειγμα 6.2.2 - 3

Εναλλαγή 1ης και 2ης γραμμής:

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Πρόταση 6.2.2 - 3. *Αν δύο γραμμές ή δύο στήλες είναι ίσες ή ανάλογες, τότε η ορίζουσα ισούται με το μηδέν.*

Η ιδιότητα αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 6.2.2 - 4. *Όταν τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό, τότε και η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό αυτόν.*

Παράδειγμα 6.2.2 - 4

Πολλαπλασιασμός 1ης γραμμής ή 2ης στήλης: αν

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5,$$

τότε

$$3|A| = \begin{vmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3\cdot 2 \\ 4 & 3\cdot 3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-5) = -15.$$

Πρόταση 6.2.2 - 5. *Αν τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης είναι άθροισμα m προσθετέων, τότε η ορίζουσα αναλύεται σε άθροισμα m άλλων οριζουσών.*

Όμοια αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 6.2.2 - 6. *Αν σε μία γραμμή ή στήλη προστεθούν μία ή περισσότερες γραμμές ή στήλες που η καθεμία πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό, η ορίζουσα που προκύπτει είναι ίση με την αρχική.*

Παράδειγμα 6.2.2 - 5

$$\begin{vmatrix} -6 & 21 & -30 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6+1\cdot 7 & 21-3\cdot 7 & -30+5\cdot 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1-1 & -3-0 & 5-5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 42.$$

Πρόταση 6.2.2 - 7. *Όταν μία γραμμή ή μία στήλη είναι γραμμική έκφραση των άλλων γραμμών ή στηλών, τότε η ορίζουσα ισούται με το μηδέν.*

Όμοια αφήνεται ως άσκηση.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι ορίζουσες

i) $\begin{vmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{vmatrix}$

ii) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

iii) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

iv) $\begin{vmatrix} 16 & 22 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 12 & 25 & 2 \end{vmatrix}$

v) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 15 & 3 & 6 \\ 10 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

vi) $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

2. Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης 2, αντίστοιχα 3, δείξτε ότι

$$|AB| = |A||B|.$$

3. Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης n δείξτε ότι

ii) $\left|A^\top\right| = |A|$ *iii)* $|\lambda A| = \lambda^n |A|$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Αν $A = (a_{ij})$ είναι ένας άνω αντίστοιχα κάτω τριγωνικός πίνακας τάξης 4, δείξτε ότι

$$|A| = \prod_{i=1}^{4} a_{ii}.$$

3. Δείξτε ότι η ορίζουσα ενός Ερμιτιανού πίνακα τάξης 2, αντίστοιχα 3 είναι πραγματικός αριθμός.

Απαντήσεις

1. i) 1, ii) 24,, iii) $(b-a)(a-c)(b-c)$, iv) 0, v) 180, vi) $4a^2b^2c^2$. Ανάλογα οι υπόλοιπες ασκήσεις.

6.3 Αντίστροφος πίνακας

6.3.1 Ορισμοί

Ορισμός 6.3.1 - 1 (αλγεβρικό συμπλήρωμα πίνακα). *Έστω $A = (a_{ij})$ ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε το αλγεβρικό συμπλήρωμα (cofactor) του στοιχείου a_{ij} ορίζεται ως ο αριθμός*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \qquad (6.3.1 - 1)$$

όπου M_{ij} η ελάσσονα ορίζουσα του a_{ij}.

Ο πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων συμβολίζεται τότε με C και είναι επίσης τάξης n.

Παράδειγμα 6.3.1 - 1

Να υπολογιστεί ο συμπληρωματικός πίνακας του

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Αρχικά υπολογίζονται τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του A.

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} = a_{22} = 4, \\ C_{12} &= (-1)^{1+2} M_{12} = -a_{21} = -2, \\ C_{21} &= (-1)^{2+1} M_{21} = -a_{12} = -1, \\ C_{22} &= (-1)^{2+2} M_{11} = a_{11} = 3. \end{aligned}$$

Άρα

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

■

Ορισμός 6.3.1 - 2 (συμπληρωματικού πίνακα). *Ορίζεται ως συμπληρωματικός πίνακας (adjugate ή adjoint matrix) του τετραγωνικού πίνακα A τάξης n και συμβολίζεται με* $\text{adj}(A) = C^\top$, *ο πίνακας*

$$\text{adj}\,(A) = C^\top = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (6.3.1\text{ - }2)$$

όταν C_{ij} τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του A.

Παράδειγμα 6.3.1 - 2

Να υπολογιστεί ο συμπληρωματικός πίνακας του A του Παραδείγματος 6.3.1 - 1.

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο 6.3.1 - 2 είναι

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

οπότε

$$\mathrm{adj}(A) = C^{\top} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 6.3.1 - 1 (συμπληρωματικού πίνακα)

```
A={{3,1},{2,4}};
Needs[Combinatorica];Cofactor[A,{i,j}]
```

■

Ορισμός 6.3.1 - 3 (αντίστροφου πίνακα). *Ο τετραγωνικός πίνακας A τάξης n θα είναι αντιστρέψιμος (invertible ή nonsingular) τότε και μόνον, όταν υπάρχει άλλος τετραγωνικός πίνακας ίδιας τάξης, που συμβολίζεται με A^{-1}, έτσι ώστε*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{I}_n = \mathrm{I}. \qquad (6.3.1\text{ - }3)$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση ο A θα λέγεται **μη αντιστρέψιμος** (singular).[5]

Πρόταση 6.3.1 - 1. *Ο αντίστροφος πίνακας του A, όταν υπάρχει, είναι μονοσήμαντα ορισμένος.*

Απόδειξη. Έστω A^{-1}, $\tilde{A}^{-1}$ δύο διαφορετικοί αντίστροφοι πίνακες του A. Τότε $A\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}A = \mathrm{I}$, οπότε

$$A^{-1} = A^{-1}\mathrm{I} = A^{-1}\left(A\tilde{A}^{-1}\right) = \left(A^{-1}A\right)\tilde{A}^{-1} = \mathrm{I}\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}.$$

■

Σημείωση 6.3.1 - 1

Θα πρέπει στο σημείο αυτό να τονιστεί ότι ο αντίστροφος πίνακας για **μη τετραγωνικούς πίνακες δεν ορίζεται**.

[5] Βλέπε βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] και:
https : //en.wikipedia.org/wiki/Invertible_matrix

6.3.2 Υπολογισμός αντίστροφου πίνακα

Σχετικά με τον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 6.3.2 - 1. *Έστω A αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A). \qquad (6.3.2\text{ - }1)$$

Πόρισμα 6.3.2 - 1. *Ο τετραγωνικός πίνακας A θα είναι αντιστρέψιμος, αν $|A| \neq 0$, ενώ αν $|A| = 0$ μη αντιστρέψιμος.*

Παράδειγμα 6.3.2 - 1

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος πίνακας του Παραδείγματος 6.3.1 - 1.
Λύση. Είναι

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

ενώ σύμφωνα με το Παράδειγμα 6.3.1 - 2

$$\mathrm{adj}(A) = C^{\top} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Επειδή $|A| = 10$, σύμφωνα με τον τον τύπο $(6.3.2-1)$ θα είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

■

Στο παρακάτω πρόγραμμα δίνονται οι εντολές υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα του Παραδείγματος 6.3.2 - 1 με το MATHEMATICA.

Πρόγραμμα 6.3.2 - 1 (αντίστροφου πίνακα)

```
A={{3,1},{2,4}};MatrixForm[A]
Inverse[A]//MatrixForm                    (αντίστροφος του A)
```

Παράδειγμα 6.3.2 - 2

Όμοια του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Επειδή $|A| = 10 \neq 0$ σύμφωνα με το Πόρισμα 6.3.2 - 1 υπάρχει ο A^{-1}. Αρχικά ο A γράφεται ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του A (βλέπε επίσης Παράδειγμα 6.3.1 - 1). Διαδοχικά έχουμε ότι:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -8 & 13 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} = -15$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = -8$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} 6 & -11 \\ -8 & 13 \end{vmatrix} = 10$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} -3 & -11 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} 6 & -11 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -8$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} -3 & -11 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -15$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -6.$$

Άρα

$$C = \begin{bmatrix} -4 & -15 & -8 \\ 10 & 5 & 0 \\ -8 & -15 & -6 \end{bmatrix},$$

οπότε σύμφωνα με τον τύπο 6.3.1 - 2 είναι

$$\operatorname{adj}(A) = C^{\top} = \begin{bmatrix} -4 & 10 & -8 \\ -15 & 5 & -15 \\ -8 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Τότε από την 6.3.2 - 1 προκύπτει ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\,\mathrm{adj}\,(A) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -4 & 10 & -8 \\ -15 & 5 & -15 \\ -8 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.0 & -0.8 \\ -1.5 & 0.5 & -1.5 \\ -0.8 & 0 & -0.6 \end{bmatrix}.$$

■

6.3.3 Σχετικές προτάσεις

Πρόταση 6.3.3 - 1. *Αν A, B αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}. \tag{6.3.3 - 2}$$

Απόδειξη. Επειδή οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι, από την $(6.3.2-1)$ αντικαθιστώντας όπου A το $A\,B$ διαδοχικά έχουμε

$$A\,A^{-1} = \mathrm{I} \quad \text{ή} \quad A\,B\,(A\,B)^{-1} = \mathrm{I}.$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία ισότητα από αριστερά με A^{-1} προκύπτει ότι

$$\overbrace{A^{-1}\,A}^{\mathrm{I}}\,B\,(A\,B)^{-1} = A^{-1}\,\mathrm{I} = A^{-1} \quad \text{ή} \quad B\,(A\,B)^{-1} = A^{-1}$$

και όμοια από αριστερά με B^{-1} τελικά

$$\overbrace{B^{-1}\,B}^{\mathrm{I}}\,(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \text{ή} \quad (A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1},$$

δηλαδή η αποδεικτέα. ■

Η παραπάνω πρόταση γενικεύεται ως εξής:

Πρόταση 6.3.3 - 2. *Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε*

$$(A_1\,A_2\,\cdots\,A_{n-1}\,A_n)^{-1} = A_n^{-1}\,A_{n-1}^{-1}\,\cdots\,A_2^{-1}\,A_1^{-1}. \tag{6.3.3 - 3}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση 6.3.3 - 3. *Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης n, τότε*

i) $\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj}(B)\operatorname{adj}(A)$ *ii)* $\operatorname{adj}(A)\,A = |A|\mathrm{I} = A$

iii) $|\operatorname{adj}(A)| = |A|^{n-1}$ *iv)* $\operatorname{adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1}\operatorname{adj}(A);\ \lambda \in \mathbb{R}.$

Πρόταση 6.3.3 - 4. *Αν ο πίνακας A με $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι Ερμιτιανός, τότε και ο* $\operatorname{adj}(A)$ *είναι όμοια Ερμιτιανός.*

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι αντίστροφοι πίνακες των

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

2. Όμοια των πινάκων

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{όταν} \quad abc \neq 0.$$

3. Δείξτε ότι

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

4. Αν A αντιστρέψιμος πίνακας, δείξτε ότι ο πίνακας είναι όμοια λA είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$.

5. Αν $A = \operatorname{diag}(a_{ii})$ με $a_{ii} \neq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, δείξτε ότι

$$A^{-1} = \operatorname{diag}\left(a_{ii}^{-1}\right).$$

Απαντήσεις

1.

$$A_1^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad A_3^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

2.

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3, **4** και **5.** Οι αποδείξεις γίνονται με μεθοδολογία ανάλογη των αποδείξεων της Παραγράφου 6.3.3.

6.4 Γραμμικά συστήματα

[6]Στην παράγραφο αυτή θα γίνει μια εισαγωγή στην έννοια του γραμμικού συστήματος και της λύσης του που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη θεωρία της Παραγράφου 6.3.

6.4.1 Ορισμός

Ορισμός 6.4.1 - 1. *Η γενική μορφή ενός* **γραμμικού συστήματος** *(linear system) m-εξισώσεων με n-αγνώστους x_1, x_2, ..., x_n είναι*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \cdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \qquad (6.4.1 - 1)$$

όπου τα a_{ij} με $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ είναι οι συντελεστές του συστήματος και τα b_i; $i = 1, 2, \ldots, m$ είναι γνωστοί αριθμοί.

Σημείωση 6.4.1 - 1

Όπως προκύπτει από την $(6.4.1 - 1)$, κάθε εξίσωση είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των αγνώστων, δηλαδή οι άγνωστοι πολλαπλασιάζονται μόνο με σταθερές. Αν σε μια τουλάχιστον εξίσωση ένας άγνωστος, έστω ο x_1, είναι στη μορφή x_1^2 ή $x_1\,x_2$ ή $\sin x_1$, κ.λπ., τότε το σύστημα $(6.4.1 - 1)$ λέγεται **μη γραμμικό** (nonlinear).

[6]Ο αναγνώστης, για μια γενικότερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11], στα βιβλία Α. Μπράτσος [3] Κεφ. 8 και Α. Μπράτσος [4] Κεφ. 3 και: *https://en.wikipedia.org/wiki/System_of_linear_equations*

Παράδειγμα 6.4.1 - 1

Σύμφωνα με τον Ορισμό 6.4.1 - 1 το

$$\begin{aligned} 3x_1 &+ x_2 = 1 \\ 2x_1 &+ 4x_2 = -6 \end{aligned} \qquad (6.4.1 - 2)$$

είναι ένα γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους ($m = n = 2$), το

$$\begin{aligned} -3x_1 &+ 6x_2 - 11x_3 = 4 \\ 3x_1 &- 4x_2 + 6x_3 = -5 \\ 4x_1 &- 8x_2 + 13x_3 = -7 \end{aligned} \qquad (6.4.1 - 3)$$

3 εξισώσεων με 3 αγνώστους ($m = n = 3$), το

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 10x_3 &= -6 \\ -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 11 \end{aligned} \qquad (6.4.1 - 4)$$

4 εξισώσεων ($m = 4$) με 3 αγνώστους ($n = 3$) και το

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 &= 5 \end{aligned} \qquad (6.4.1 - 5)$$

3 εξισώσεων ($m = 3$) με 5 αγνώστους ($n = 5$).

Αν $b_i = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$, τότε το σύστημα $(6.4.1 - 1)$ λέγεται **ομογενές** και μία προφανής λύση του είναι η $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, ενώ, όταν ένα τουλάχιστον από τα b_i; $i = 1, 2, \ldots, m$ είναι διάφορο του μηδενός, τότε λέγεται **μη ομογενές**.

Με τη βοήθεια των πινάκων το σύστημα $(6.4.1-1)$ γράφεται

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\vec{x} \text{ ή } \mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\vec{b} \text{ ή } \mathbf{b}},$$

δηλαδή

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{όπου } A \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ και } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \tag{6.4.1 - 6}$$

όπου A ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων. Αντίστοιχη μορφή της $(6.4.1-6)$ ισχύει για στοιχεία από το $\mathbb{C}$ αντί του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 6.4.1 - 2

Ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων για το σύστημα $(6.4.1-2)$, αντίστοιχα $(6.4.1-3)$ είναι

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \tag{6.4.1 - 7}$$

αντίστοιχα

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{bmatrix}. \tag{6.4.1 - 8}$$

Μια μέθοδος υπολογισμού της λύσης του συστήματος $(6.4.1-2)$, όταν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, δηλαδή ο αριθμός των εξισώσεων ισούται με τον αριθμό των αγνώστων, δίνεται στην Παράγραφο 6.4.2 που ακολουθεί, ενώ στην Παράγραφο 6.4.4 για τις περιπτώσεις όπου $m < n$ ή $m > n$.

6.4.2 Μέθοδος του Cramer

[7]Η λύση του συστήματος $(6.4.1-2)$ στην περίπτωση αυτή θα προκύψει, αν η $(6.4.1-2)$ είναι δυνατόν να γραφεί σε ισοδύναμη μορφή $\mathbf{x} = \mathbf{c}$, όταν $\mathbf{c}$ το

[7]Υπενθυμίζεται το ανάλογο γνωστό πρόβλημα της λύσης της εξίσωσης $a\,x = b$, όταν $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε, αν

διάνυσμα με τις τιμές της λύσης. Αυτό θα συμβεί μόνον, όταν ο πίνακας A απαλειφθεί από αριστερά, έτσι ώστε να απομονωθεί το $\mathbf{x}$. Διαφορετικά, όταν η $(6.4.1-2)$ πολλαπλασιαστεί από αριστερά με τον αντίστροφο πίνακα A^{-1} του A. Είναι όμως γνωστό από το [8]Πόρισμα 6.3.2 - 1 ότι ο A^{-1} υπάρχει, όταν $|A| \neq 0$.

Επομένως τότε διαδοχικά έχουμε

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{ή} \quad \overbrace{A^{-1}A}^{\mathrm{I}}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \quad \text{ή} \quad \mathrm{I}\,\mathbf{x} = \overbrace{A^{-1}\mathbf{b}}^{\mathbf{c}},$$

δηλαδή

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}. \tag{6.4.2 - 1}$$

Αποδεικνύεται ότι η $(6.4.2-1)$ συναρτήσει των αγνώστων $x_1, x_2, \ldots, x_n$ τελικά γράφεται

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}; \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.4.2 - 2}$$

όταν με $|A_i|$ συμβολίζεται η ορίζουσα που προκύπτει, αν η i-στήλη του πίνακα A αντικατασταθεί από τις συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{b}$.

Η μέθοδος αυτή, που είναι γνωστή ως η **μέθοδος του Cramer**, έχει θεωρητικό μόνον ενδιαφέρον, επειδή λόγω του μεγάλου αριθμού των πράξεων και των υπεισερχομένων σφαλμάτων στρογγυλοποίησης (round-off errors) που προκύπτουν από αυτές, οι λύσεις σε μεγάλο αριθμό εξισώσεων δεν είναι ακριβείς.

Παράδειγμα 6.4.2 - 1

Έστω το σύστημα $(6.4.1-2)$

$$\begin{aligned} 3x_1 &+ x_2 &&= 1 \\ 2x_1 &+ 4x_2 &&= -6 \end{aligned}$$

- $a \neq 0$, η εξίσωση έχει **ακριβώς μια λύση** την $x = a^{-1}b = \dfrac{a}{b}$.
- $a = 0$, έχουμε τις εξής περιπτώσεις: αν και
  - $a = 0$, είναι **αόριστη**, ενώ, αν
  - $a \neq 0$, είναι **αδύνατη**.

[8] *Ο τετραγωνικός πίνακας A θα είναι αντιστρέψιμος, αν $|A| \neq 0$, ενώ αν $|A| = 0$ μη αντιστρέψιμος.*

του Παραδείγματος 6.4.1 - 1 όπου $\mathbf{b} = [1, -6]^\top$. Τότε, όπως προκύπτει από την $(6.4.1-7)$, είναι

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{οπότε} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10.$$

Επειδή σύμφωνα με το Παράδειγμα 6.3.2 - 1 είναι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix},$$

από την $(6.4.2-1)$ έχουμε

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 + 0.6 \\ -0.2 - 1.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

δηλαδή $x_1 = 1$ και $x_2 = -2$.

Η λύση σύμφωνα με την $(6.4.2-2)$ υπολογίζεται επίσης ως εξής:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad \text{οπότε} \quad x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 1, \ \text{και}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -20, \quad \text{οπότε} \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = -2.$$

Παράδειγμα 6.4.2 - 2

Όμοια έστω το σύστημα $(6.4.1-3)$

$$\begin{array}{rcrcrcr} -3x_1 & + & 6x_2 & - & 11x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & = & -5 \\ 4x_1 & - & 8x_2 & + & 13x_3 & = & -7 \end{array}$$

του Παραδείγματος 6.4.1 - 2 όπου $\mathbf{b} = [4, -5, -7]^\top$. Τότε, όπως προκύπτει από την $(6.4.1-7)$, είναι

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{bmatrix}, \quad \text{οπότε} \quad |B| = \begin{vmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{vmatrix} = 10.$$

Επειδή σύμφωνα με το Παράδειγμα 6.3.2 - 2 είναι

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.0 & -0.8 \\ -1.5 & 0.5 & -1.5 \\ -0.8 & 0 & -0.6 \end{bmatrix},$$

από την $(6.4.2-1)$ έχουμε

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.0 & -0.8 \\ -1.5 & 0.5 & -1.5 \\ -0.8 & 0 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

δηλαδή $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ και $x_3 = 1$.

Η λύση σύμφωνα με την $(6.4.2-2)$ υπολογίζεται επίσης ως εξής:

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -11 \\ -5 & -4 & 6 \\ -7 & -8 & 13 \end{vmatrix} = -10, \quad \text{οπότε} \quad x_1 = \frac{|B_1|}{|B|} = -1,$$

$$|B_2| = \begin{vmatrix} -3 & 4 & -11 \\ 3 & -5 & 6 \\ 4 & -7 & 13 \end{vmatrix} = 20, \quad \text{οπότε} \quad x_2 = \frac{|B_2|}{|B|} = 2, \quad \text{και}$$

$$|B_3| = \begin{vmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 3 & -4 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{vmatrix} = 10, \quad \text{οπότε} \quad x_3 = \frac{|B_3|}{|B|} = 1.$$

6.4.3 Μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Έστω το παρακάτω γραμμικό σύστημα των n-εξισώσεων και n-αγνώστων $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \cdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \qquad (6.4.3\text{ - }1)$$

Γενικά η προτεινόμενη μέθοδος λύσης του συστήματος $(6.4.3-1)$ από τον Gauss, ειδικότερα όπως είναι γνωστή ως μέθοδος **απαλοιφής του Gauss** (Gauss elimination), βασίζεται στον μετασχηματισμό του συστήματος σε άλλο ισοδύναμό του, όπου μια εξίσωσή του θα είναι τελικά με έναν άγνωστο, δηλαδή της μορφής $ax = b$, οπότε λύνεται $(x = b/a)$ και στη συνέχεια διαδοχικά αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στις υπόλοιπες εξισώσεις θα προκύψει τελικά η λύση του συστήματος.[9]

Στο μάθημα αυτό από το σύνολο των μεθόδων απαλοιφής του Gauss θα εξεταστεί μόνο η μέθοδος **χωρίς διάταξη** (pivoting)[10], που περιγράφεται από τα παρακάτω **βήματα** (steps):

1ο βήμα

Έστω ότι οι εξισώσεις του συστήματος $(6.4.3-1)$ έχουν διαταχθεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε $a_{11} \neq 0$. Το a_{11} λέγεται και **οδηγό στοιχείο** (pivot).

[9] Η μεθοδολογία αυτή έχει ήδη πρακτικά εφαρμοστεί στη λύση για παράδειγμα ενός συστήματος 2-εξισώσεων με 2-αγνώστους, όταν πολλαπλασιάζοντας κατάλληλα τις εξισώσεις και προσθέτοντας προκύπτει μια εξίσωση με έναν άγνωστο. Τότε λύνοντας την εξίσωση αυτή υπολογίζεται ο ένας άγνωστος, οπότε στη συνέχεια αντικαθιστώντας την τιμή του αγνώστου σε μια εξίσωση του συστήματος υπολογίζεται και ο άλλος άγνωστος.

[10] Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [4] Κεφ. 3.

Τότε ο άγνωστος x_1 απαλείφεται από τη 2η, 3η, ..., n-εξίσωση, αφαιρώντας:

$$\begin{aligned}
m_{21} &= \frac{a_{21}}{a_{11}} \quad \text{φορές την} \quad 1\eta \quad \text{από τη} \quad 2\eta \text{ εξίσωση} \\
m_{31} &= \frac{a_{31}}{a_{11}} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 3\eta \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
m_{n1} &= \frac{a_{n1}}{a_{11}} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad n - \text{εξίσωση},
\end{aligned}$$

όταν τα $m_{21}, m_{31}, \ldots, m_{n1}$ είναι οι πολλαπλασιαστές του Gauss για το 1ο βήμα. Η μορφή του συστήματος στο τέλος του 1ου βήματος είναι

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad &\vdots \\
a_{n2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)},
\end{aligned} \qquad (6.4.3\text{ - }2)$$

όπου με $a_{ij}^{(k)}$, $b_i^{(k)}$; $k = 1, 2, \ldots, n-1$ θα συμβολίζεται στο εξής η νέα τιμή των a_{ij} και b_i στο τέλος του k-βήματος γενικά.

2ο βήμα

Όμοια, έστω ότι οι εξισώσεις του συστήματος $(6.4.3 - 2)$ έχουν διαταχθεί κατά τέτοιον τρόπο, ώστε $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Τότε ο άγνωστος x_2 απαλείφεται από την 3η, ..., n-εξίσωση, αφαιρώντας

$$\begin{aligned}
m_{32} &= \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad \text{φορές τη} \quad 2\eta \quad \text{από την} \quad 3\eta \text{ εξίσωση} \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
m_{n2} &= \frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad n - \text{εξίσωση}.
\end{aligned}$$

Η μορφή του συστήματος στο τέλος του 2ου βήματος θα είναι

$$\begin{array}{rcccccccl} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & a_{22}^{(1)}x_2 & + & a_{23}^{(1)}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\ & & & a_{33}^{(2)}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}^{(2)}x_n & = & b_3^{(2)} \\ & & & \vdots & & & & & & \vdots \\ & & & a_{n3}^{(2)}x_3 & + & \ldots & + & a_{nn}^{(2)}x_n & = & b_n^{(2)}. \end{array} \qquad (6.4.3\text{ - }3)$$

n-1 βήμα

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο στο τέλος και του $n-1$ βήματος, η μορφή του αρχικού συστήματος $(6.4.3-1)$ τελικά θα είναι

$$\begin{array}{rcccccl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}^{(2)}x_n & = & b_3^{(2)} \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & & a_{nn}^{(n-1)}x_n & = & b_n^{(n-1)}, \end{array} \qquad (6.4.3\text{ - }4)$$

όπου προφανώς το σύστημα $(6.4.3-4)$, επειδή σε κάθε βήμα διατηρείται μια εξίσωση του αρχικού συστήματος, είναι ισοδύναμο με το αρχικό.

Το σύστημα $(6.4.3-4)$ γράφεται απλούστερα ως

$$\begin{array}{rcccccccl} u_{11}x_1 & + & u_{12}x_2 & + & u_{13}x_3 & + & \cdots & + & u_{1n}x_n & = & c_1 \\ & & u_{22}x_2 & + & u_{23}x_3 & + & \cdots & + & u_{2n}x_n & = & c_2 \\ & & & & u_{33}x_3 & + & \cdots & + & u_{3n}x_n & = & c_3 \\ & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & & & & & u_{nn}x_n & = & c_n \end{array}$$

ή με τη βοήθεια των πινάκων

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

δηλαδή

$$U\mathbf{x} = \mathbf{c} \quad \text{με} \quad U \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{6.4.3 - 5}$$

όπου ο U είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας.

Η λύση του συστήματος $(6.4.3-5)$ γίνεται με ανάδρομη αντικατάσταση (backward substitution), δηλαδή από την τελευταία προς την πρώτη εξίσωση ως εξής:

$$\begin{aligned} x_n &= c_n/u_{nn} \\ x_{n-1} &= [c_{n-1} - u_{n-1,\,n}\, x_n]\,/u_{n-1,\,n-1} \\ &\vdots \\ x_1 &= \left[c_1 - \sum_{j=2}^{n} u_{1j}\, x_j\right] / u_{11}\,. \end{aligned} \tag{6.4.3 - 6}$$

Παράδειγμα 6.4.3 - 1

Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 &+ x_2 - x_3 &= 8 \\ 3x_1 &+ x_2 - 2x_3 &= 11 \\ 2x_1 &- x_2 - 2x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Τότε διαδοχικά έχουμε:

1ο βήμα

$$\begin{aligned}
\text{Εξίσωση } 2: &= \text{Εξίσωση } 2 - m_{21} * \text{Εξίσωση } 1\,; \quad m_{21} = \frac{3}{2}\\
\text{Εξίσωση } 3: &= \text{Εξίσωση } 3 - m_{31} * \text{Εξίσωση } 1\,; \quad m_{31} = 1,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}
\text{Εξίσωση } 2: \quad & 3x_1 + x_2 - 2x_3 - \frac{3}{2}(2x_1 + x_2 - x_3) = 11 - \frac{3\cdot 8}{2}\\
\text{Εξίσωση } 3: \quad & 2x_1 - x_2 - 2x_3 - (2x_1 + x_2 - x_3) = 3 - 8,
\end{aligned}$$

οπότε το σύστημα τελικά μετά και την αλλαγή των προσήμων γράφεται

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - x_3 &= 8\\
\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= 1\\
2x_2 + x_3 &= 5.
\end{aligned}$$

2ο βήμα

$$\text{Εξίσωση } 3: = \text{Εξίσωση } 3 - m_{32} * \text{Εξίσωση } 2\,; \quad m_{32} = 4,$$

δηλαδή

$$\text{Εξίσωση } 3: \quad 2x_2 + x_3 - 4\left(\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right) = 5 - 4\cdot 1.$$

Άρα τελικά

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - x_3 &= 8\\
\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= 1\\
- x_3 &= 1,
\end{aligned}$$

οπότε σύμφωνα με τη διαδικασία $(6.4.3-6)$ έχουμε ότι:

$$x_3 = -1, \quad x_2 = 3 \quad \text{και} \quad x_1 = 2.$$

6.4.4 Γραμμικά συστήματα γενικής μορφής

Έχει ήδη γραφεί στην αρχή της Παραγράφου 6.4 ότι οι περιπτώσεις συστημάτων με περισσότερες, αντίστοιχα λιγότερες εξισώσεις είναι πέραν των ορίων του μαθήματος αυτού και ότι ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία για μια περαιτέρω μελέτη. Κρίνεται όμως σκόπιμο στο σημείο αυτό για καθεμιά από τις δύο αυτές περιπτώσεις να δοθεί στη συνέχεια η μορφή της λύσης με ένα παράδειγμα.

Περίπτωση Ι: λιγότερες εξισώσεις από αγνώστους $(m < n)$

Παράδειγμα 6.4.4 - 1

Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1+ \quad x_2- \quad 2x_3+ \quad x_4+ \quad 3x_5 \quad &= 2 \\ 2x_1- \quad x_2+ \quad 2x_3+ \quad 2x_4+ \quad 6x_5 \quad &= 3 \\ 3x_1+ \quad 2x_2- \quad 4x_3- \quad 3x_4- \quad 9x_5 \quad &= 5. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε 3 εξισώσεις $(m = 3)$ με 5 αγνώστους $(n = 5)$. Επειδή η λύση είναι δυνατή μόνο για συστήματα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους, θεωρούμε ότι 2 άγνωστοι, έστω οι x_3 και x_5, είναι γνωστοί με αυθαίρετες τιμές $x_3 = u$ και $x_5 = v$.

Τότε το σύστημα γράφεται

$$\begin{aligned} x_1 \quad + \quad x_2 \quad + \quad x_4 \quad &= \quad 2 + 2x_3 - 3x_5 \\ 2x_1 \quad - \quad x_2 \quad + \quad 2x_4 \quad &= \quad 3 - 2x_3 - 6x_5 \\ 3x_1 \quad + \quad 2x_2 \quad - \quad 3x_4 \quad &= \quad 5 + 4x_3 + 9x_5. \end{aligned}$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει ότι

$$x_1 = \frac{14}{9}, \quad x_2 = \frac{1+6u}{3} \quad \text{και} \quad x_3 = \frac{1-27v}{9},$$

δηλαδή έχουμε άπειρες λύσεις, που προκύπτουν δίνοντας αυθαίρετες τιμές στις παραμέτρους u, v.

Επομένως τα συστήματα της κατηγορίας αυτής, όταν επιλύονται, έχουν μια **απειρία λύσεων**, που προκύπτει εκφράζοντας ορισμένους αγνώστους **παραμετρικά**.

Περίπτωση II: περισσότερες εξισώσεις από αγνώστους $(m > n)$

Παράδειγμα 6.4.4 - 2

Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1+ \;\; 5x_2+ \;\; 10x_3 &= -6 \\ -5x_1+ \;\; 2x_2- \;\; 3x_3 &= 2 \\ 4x_1+ \;\; x_2+ \;\; 4x_3 &= -1 \\ 4x_1+ \;\; 3x_2- \;\; 4x_3 &= 11, \end{aligned}$$

όπου $m = 4$ και $n = 3$.

Όμοια θεωρώντας το παρακάτω 3×3 σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1+ \;\; 5x_2+ \;\; 10x_3 &= -6 \\ -5x_1+ \;\; 2x_2- \;\; 3x_3 &= 2 \\ 4x_1+ \;\; x_2+ \;\; 4x_3 &= -1 \end{aligned}$$

έχουμε τη λύση

$$x_1 = \frac{3}{4}, \quad x_2 = 1 \quad \text{και} \quad x_3 = -\frac{5}{4}.$$

Οι λύσεις αυτές προφανώς επαληθεύουν ή διαφορετικά είναι συμβατές με την 4η εξίσωση $4x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 11$ του συστήματος. Επομένως έχουμε ένα **συμβατό** σύστημα. Σε περίπτωση που δεν υπήρχε επαλήθευση της 4ης εξίσωσης το σύστημα λέγεται ασυμβίβαστο.

Ασκήσεις

1. Να λυθούν με τη μέθοδο του Cramer και του Gauss τα παρακάτω συστήματα:

$i)$
$$\begin{aligned}(1-3i)x_1 &+ x_2 &= 1+i\\ 2x_1 &+ (1+3i)x_2 &= 0,\end{aligned}$$

$ii)$
$$\begin{aligned}x_1 - x_2 - x_3 &= -2\\ - x_2 + x_3 &= -1\\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 6,\end{aligned}$$

$iii)$
$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 2\\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 11\\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -7,\end{aligned}$$

$iv)$
$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 + x_3 &= -4\\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 9+7i\\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1+i.\end{aligned}$$

2. Να γραφεί πρόγραμμα λύσης των συστημάτων της Άσκησης 1 με το MATHEMATICA, αντίστοιχα το MATLAB.

Απαντήσεις

1.

(i) $x_1 = -\frac{1}{4}+\frac{i}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{4}-\frac{i}{4}$,

(ii) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$,

(iii) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$,

(iv) $x_1 = 1+i$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1-i$.

6.5 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων έχουν μεγάλη σημασία στα διάφορα προβλήματα των εφαρμογών και η γνώση τους καθορίζει τη λύση πολλών από αυτά. Στην παράγραφο αυτή δίνονται οι κυριότερες μέθοδοι υπολογισμού τους.[11]

6.5.1 Χαρακτηριστικά μεγέθη πίνακα

Έστω $S^{n\times n}$ το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων τάξης n με στοιχεία από το σύνολο S, όπου S το σύνολο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Ορισμός 6.5.1 - 1 (ιδιοτιμής). *Ο αριθμός λ θα είναι μια ιδιοτιμή (eigenvalue) του πίνακα A με $A \in S^{n\times n}$ τότε και μόνον, όταν υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x}$ με $\mathbf{x} \in S^n$ τέτοιο, ώστε*

$$A\,\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \qquad (6.5.1 - 1)$$

Τότε το $\mathbf{x}$ θα λέγεται το ιδιοδιάνυσμα (eigenvector) του A, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Άμεσα προκύπτει ότι, αν ο λ είναι πραγματικός αντίστοιχα μιγαδικός αριθμός, το ίδιο θα συμβαίνει και με τις συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{x}$.

6.5.2 Υπολογισμός ιδιοτιμών

Η σχέση $(6.5.1 - 1)$ γράφεται

$$(A - \lambda\,\mathrm{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}, \qquad (6.5.2 - 1)$$

[11] Ο αναγνώστης, για μια γενικότερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11], στα βιβλία Α. Μπράτσος [3] Κεφ. 8 και Α. Μπράτσος [4] Κεφ. 3 και: *https://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalues_and_eigenvectors*

όπου I ο μοναδιαίος πίνακας τάξης n. Τότε το ομογενές σύστημα $(6.5.2-1)$ λέγεται το **χαρακτηριστικό σύστημα** του πίνακα A, ο πίνακας

$$A-\lambda \mathrm{I}=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \qquad (6.5.2\text{ - }2)$$

χαρακτηριστικός πίνακας του A και η ορίζουσα

$$|A-\lambda \mathrm{I}| \qquad (6.5.2\text{ - }3)$$

χαρακτηριστική ορίζουσα του A.

Μια προφανής λύση του συστήματος $(6.5.2-1)$ είναι η $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Επειδή όμως σύμφωνα με τον Ορισμό 6.5.1 - 1 θα πρέπει το διάνυσμα $\mathbf{x}$ να είναι μη μηδενικό, ο αριθμός λ θα είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα A τότε και μόνον, όταν το σύστημα $(6.5.2-1)$ έχει και μη μηδενικές λύσεις, δηλαδή έχει **άπειρες λύσεις**. Τότε όμως σύμφωνα με γνωστό θεώρημα πρέπει

$$|A-\lambda \mathrm{I}|=0.$$

Άρα έχει αποδειχθεί ότι:

Πρόταση 6.5.2 - 1. *Ο αριθμός λ θα είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα A τότε και μόνον, όταν ο πίνακας $A-\lambda \mathrm{I}$ είναι μη αντιστρέψιμος ή ισοδύναμα, όταν $|A-\lambda \mathrm{I}|=0$.*

Η εξίσωση

$$|A-\lambda I|=0 \qquad (6.5.2\text{ - }4)$$

ορίζει τη **χαρακτηριστική εξίσωση** (characteristic equation) του πίνακα A και οι ρίζες της δίνουν τις ιδιοτιμές του A.

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα $(6.5.2-4)$ προκύπτει ένα πολυώνυμο, έστω $\varphi(\lambda)$, που έχει γενικά τη μορφή

$$\varphi(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_0. \qquad (6.5.2\text{ - }5)$$

Το $\varphi(\lambda)$ που, όταν αναφέρεται στον πίνακα A, συμβολίζεται επίσης και $\varphi_A(\lambda)$, λέγεται τότε το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** (characteristic polynomial) του A.

Ορισμός 6.5.2 - 1. *Ορίζεται ως* **φάσμα** *(spectrum) ενός τετραγωνικού πίνακα A τάξης n και συμβολίζεται με $\sigma(A)$, το σύνολο των ιδιοτιμών του, δηλαδή*

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}. \qquad (6.5.2 - 6)$$

Ορισμός 6.5.2 - 2. *Η* **φασματική ακτίνα** *(spectral radius) ενός τετραγωνικού πίνακα A με $A \in S^{n\times n}$ συμβολίζεται με $\varrho(A)$ και ισούται με*

$$\varrho(A) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|, \qquad (6.5.2 - 7)$$

όταν λ_i; $i = 1, 2, \ldots, n$ οι ιδιοτιμές του A.

Ορισμός 6.5.2 - 3. *Το σύνολο των ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων ενός τετραγωνικού πίνακα ορίζει τα* **χαρακτηριστικά μεγέθη** *του.*

Παράδειγμα 6.5.2 - 1

Να υπολογιστούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

δηλαδή

$$(3 - \lambda)(1 + \lambda) = 0$$

με ρίζες

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = -1,$$

που ορίζουν και τις ιδιοτιμές του.

Ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$

Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα προσδιορίζεται από την $(6.5.1-1)$ ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} 3x_1 + \ & 0\,x_2 = 3x_1 \\ 8x_1 - \ & x_2 = 3x_2, \end{aligned}$$

οπότε από τη 2η εξίσωση προκύπτει ότι

$$8x_1 - 4x_2 = 0. \tag{1}$$

Δίνοντας μια αυθαίρετη τιμή στον άγνωστο x_1 με $x_1 \neq 0$, έστω $x_1 = 1$, από την (1) προκύπτει ότι $x_2 = 2$. Άρα το ιδιοδιάνυσμα, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$, είναι το $[1, 2]^\top$.

Ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$

Όμοια από την $(6.5.1-1)$ ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} 3x_1 + \ & 0\,x_2 = -x_1 \\ 8x_1 - \ & x_2 = -x_2, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$4x_1 + 0x_2 = 0. \tag{2}$$

Δίνοντας μια αυθαίρετη τιμή στον άγνωστο x_2 με $x_2 \neq 0$, έστω $x_2 = 1$, από την εξίσωση (2) προκύπτει $x_1 = 0$. Άρα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ είναι το $[0, 1]^\top$.

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές:

Πρόγραμμα 6.5.2 - 1 (ιδιοτιμών - ιδιοδιανυσμάτων)

```
A = {{3,0}, {8,-1}};MatrixForm[A]
Print["Eigenvalues  A = ", Eigenvalues[A]]
Print["Eigenvectors A = ", Eigenvectors[A]]
```

■

Παράδειγμα 6.5.2 - 2

Όμοια του πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

με ρίζες

$$\lambda_1 = 1 + i \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 1 - i$$

που ορίζουν και τις ιδιοτιμές του.

Ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1 + i$

Από την $(6.5.1 - 1)$ προκύπτει

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (1+i) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} ix_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - ix_2 &= 0, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$x_1 - i\,x_2 = 0. \tag{3}$$

Δίνοντας μια αυθαίρετη τιμή στον άγνωστο x_2 με $x_2 \neq 0$, έστω $x_2 = 1$, από την εξίσωση (3) προκύπτει $x_1 = i$. Άρα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1 + i$ είναι το $[\,i, 1\,]^\top$.

Ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1 - i$

Από την $(6.5.1 - 1)$ προκύπτει

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (1-i) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} ix_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + ix_2 &= 0, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$x_1 + i\,x_2 = 0. \tag{4}$$

Δίνοντας μια αυθαίρετη τιμή στον άγνωστο x_2 με $x_2 \neq 0$, έστω $x_2 = 1$, από την εξίσωση (4) προκύπτει $x_1 = -i$. Άρα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1 - i$ είναι το $[-i, 1]^\top$. ∎

Παράδειγμα 6.5.2 - 3

Όμοια του πίνακα

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

με ρίζα $\lambda = 1$ **διπλή**.

Στη διπλή ρίζα αντιστοιχούν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, που υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ δηλαδή τελικά } 0\,x_1 + 0\,x_2 = 0. \qquad (5)$$

Έστω αυθαίρετα $x_1 = 1$. Τότε από την (5) έχουμε $x_2 = 0$. Άρα το 1ο ιδιοδιάνυσμα είναι το $[1, 0]^\top$.

Όμοια, έστω αυθαίρετα $x_2 = 1$, οπότε από την (5) προκύπτει $x_1 = 0$. Επομένως το 2ο ιδιοδιάνυσμα είναι το $[0, 1]^\top$. ∎

Έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι ο υπολογισμός των ιδιοτιμών σε πίνακες τάξης μεγαλύτερης του 4 είναι δύσκολος και συνήθως μη ακριβής. Για τον λόγο αυτό ο υπολογισμός των γίνεται με προσεγγιστικές μεθόδους. Υπάρχει όμως μια ειδική κατηγορία πινάκων, που ο υπολογισμός είναι εύκολος και ακριβής. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι ισχύει:

Πρόταση 6.5.2 - 2. *Έστω ότι ο $U = (u_{ij})$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$ είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Τότε ο αριθμός λ θα είναι μία ιδιοτιμή του U τότε και μόνον, όταν $\lambda = u_{ii}$ για κάποιο $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη των πινάκων

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2+i \end{bmatrix}.$$

2. Όμοια των

$$B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Να υπολογιστούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη των μοναδιαίων πινάκων τάξης 2 και 3.

Απαντήσεις

1. A_1: ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}_1 = [1,1]^\top$, $\lambda_2 = 2$ με $\mathbf{v}_2 = [2,1]^\top$.
A_2: $\lambda_1 = -2+4\,i$ με $\mathbf{v}_1 = [-i,1]^\top$, $\lambda_2 = -2-4\,i$ με $\mathbf{v}_2 = [i,1]^\top$.
A_3: $\lambda_1 = 2+i$ διπλή με $\mathbf{v}_1 = [0,1]^\top$, $\mathbf{v}_2 = [1,0]^\top$.
2. B_1: $\lambda_1 = 1$ με $\mathbf{v}_1 = [-2,-1,1]^\top$, $\lambda_{2,3} = -3$ διπλή με $\mathbf{v}_2 = [-2,0,1]^\top$, $\mathbf{v}_3 = [-1,1,0]^\top$.
B_2: $\lambda_1 = 2$ με $\mathbf{v}_1 = [1,1,1]^\top$, $\lambda_{2,3} = -1$ διπλή με $\mathbf{v}_2 = [-1,0,1]^\top$, $\mathbf{v}_3 = [-1,1,0]^\top$.
3. I_2: $\lambda_1 = 1$ διπλή με $\mathbf{v}_1 = [0,1]^\top$, $\mathbf{v}_2 = [1,0]^\top$.
I_3: $\lambda_1 = 1$ τριπλή με $\mathbf{v}_1 = [0,0,1]^\top$, $\mathbf{v}_2 = [0,1,0]^\top$ και $\mathbf{v}_3 = [1,0,0]^\top$.

6.6 Βιβλιογραφία

[1] Βάρσος, Δ., Δεριζιώτης, Δ., Εμμανουήλ, Ι., Μαλιάκας, Μ., Μελάς, Α. & Ταλέλλη, Ο. (2012). *Μια Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*. Εκδόσεις Σοφία. ISBN: 978–960–670–636–3.

[2] Καδιανάκης, Ν. & Καρανάσιος, Σ. (2008). *Γραμμική Άλγεβρα, Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές*. ISBN: 960–917–250–4.

[3] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[4] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[5] Ξένος, Θ. (2004). *Γραμμική Άλγεβρα*. Εκδόσεις Ζήτη. ISBN 960–431–904–3.

[6] Σχοινάς, Χρ. (2009). *Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας*. Εκδόσεις Γκιούρδας. ISBN 960–387–748–4.

[7] Don, E. (2006). *Schaum's Outlines – Mathematica*. Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN 978–960–461–000–6.

[8] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[9] Golub, G. H. & Van Loan, C. F. (1996). *Matrix Computations*. Baltimore: Johns Hopkins (3rd ed.). ISBN 978–0–8018–5414–9.

[10] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

[11] Strang, G. (2005). *Γραμμική Άλγεβρα και εφαρμογές*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 960–730–970–7.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 7

ΟΡΙΑΚΗ ΤΙΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Στο μάθημα αυτό θα δοθεί η έννοια του ορίου μιας πραγματικής συνάρτησης με τρόπο προσαρμοσμένο στις απαιτήσεις των διαφόρων εφαρμογών, που απαιτούνται στην επιστήμη του. Ο αναγνώστης, για μια αυστηρά μαθηματική μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3].

7.1 Γενικές έννοιες και ορισμοί

7.1.1 Σύγκλιση σε σημείο

Είναι ήδη γνωστός[1] ο παρακάτω ορισμός της πραγματικής συνάρτησης:

Ορισμός 7.1.1 - 1 (συνάρτησης). *Έστω D και T δύο τυχόντα μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Τότε λέγεται συνάρτηση, μία* **μονοσήμαντη** *απεικόνιση, έστω f, του συνόλου D στο T, δηλαδή*

$$f: \qquad D \ni x \longrightarrow f(x) = y \in T, \qquad (7.1.1 - 1)$$

[1] Βλέπε Μάθημα *Πραγματικές Συναρτήσεις.*

Πίνακας 7.1.1 - 1: Παράδειγμα 7.1.1 - 1.

x	1.7	1.8	1.9	1.99	2	2.01	2.1	2.2	2.3
$f(x)$	5.8	6.2	6.6	6.96	7	7.04	7.4	7.8	8.2

όταν το D είναι το πεδίο ορισμού και το T πεδίο τιμών της συνάρτησης f.

Σύμφωνα με τον ορισμό, αν x_0 σημείο του πεδίου ορισμού D, τότε η αντίστοιχη τιμή $f(x_0)$ της συνάρτησης υπολογίζεται αντικαθιστώντας στον τύπο $f(x)$ όπου x το x_0.

Παράδειγμα 7.1.1 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = 4x - 1 \quad \text{με πεδίο ορισμού το} \quad \mathbb{R}.$$

Τότε, αν $x = x_0 = 2$, είναι $f(x_0) = f(2) = 7$ κ.λπ.

Ορίζεται στη συνέχεια η έννοια της περιοχής ενός σημείου ως εξής:

Ορισμός 7.1.1 - 2 (περιοχής). *Η περιοχή ενός σημείου x_0 με ακτίνα δ, συμβολίζεται με $\varpi(x_0, \delta)$ και ορίζεται από το σύνολο των σημείων για τα οποία ισχύει ότι, αν $x \in \varpi(x_0, \delta)$, τότε*[2]

$$|x - x_0| < \delta. \tag{7.1.1 - 2}$$

Υποθέτουμε ότι στο Παράδειγμα 7.1.1 - 1 οι τιμές στη μεταβλητή x δίνονται πλησίον του 2 και είναι μικρότερες, αντίστοιχα μεγαλύτερες κατά 0.3 ή διαφορετικά λαμβάνοντας υπόψη και τον Ορισμό 7.1.1 - 2 ότι ανήκουν σε μια περιοχή του 2 με ακτίνα $\delta = 0.3$, δηλαδή $x \in \varpi(2, \delta)$. Τότε από τις αντίστοιχες τιμές της $f(x)$ προκύπτουν οι τιμές του Πίνακα 7.1.1 - 1.

[2] Είναι: $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ ή $-\delta < x - x_0 < \delta$.

Επομένως στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$2-\delta<x<2+\delta \;\Leftrightarrow\; -\delta<x-2<\delta \;\Leftrightarrow\; |x-2|<\delta, \qquad (7.1.1\text{ - }3)$$

ενώ για τις αντίστοιχες τιμές της $f(x)$, που θα είναι όμοια σε μια απόσταση έστω ε από την τιμή $f(2)=7$ ότι

$$7-\varepsilon<f(x)<7+\varepsilon \;\Leftrightarrow\; -\varepsilon<f(x)-f(2)<\varepsilon,$$

δηλαδή

$$|f(x)-f(2)|<\varepsilon. \qquad (7.1.1\text{ - }4)$$

Θα δειχθεί τώρα ότι η σχέση $(7.1.1-4)$ ισχύει για κάθε $\varepsilon>0$, όταν το x παίρνει τιμές, που επαληθεύουν την $(7.1.1-3)$. Πράγματι, αν

$$|f(x)-f(2)|<\varepsilon, \quad \text{δηλαδή} \quad |(4x-1)-7|<\varepsilon \quad \text{ή} \quad 4|x-2|<\varepsilon,$$

τότε

$$|x-2|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Επομένως η $(7.1.1-4)$ ισχύει για κάθε ε, όταν στην $(7.1.1-3)$ είναι $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$.

Εφαρμόζοντας το συμπέρασμα αυτό, αν $\varepsilon=10^{-2}$, τότε ο x πρέπει να παίρνει τιμές, έτσι ώστε

$$|x-2|<\frac{10^{-2}}{4}=0.0025 \quad \text{ή} \quad 2-0.0025<x<2+0.0025,$$

δηλαδή $x\in(1.9975,2.0025)$, ενώ ανάλογα διαστήματα μεταβολών του x θα προκύψουν[3] **για κάθε** $\varepsilon>0$, όπως $\varepsilon=10^{-10}, 10^{-50},\ldots$. Άρα, αν θεωρηθεί ότι το $\varepsilon\to 0$, δηλαδή, αν η περιοχή περί το σημείο $f(2)$ τείνει να έχει ακτίνα 0 ή διαφορετικά ότι οι τιμές της $f(x)$ τείνουν στην τιμή $f(2)$, τότε πάντοτε υπάρχει κατάλληλη περιοχή του x ακτίνας $\delta=\delta(\varepsilon)$, που να το εξασφαλίζει.

Η ιδιότητα αυτή στα Μαθηματικά εκφράζεται λέγοντας ότι, όταν ο x τείνει προς τον αριθμό 2, η συνάρτηση $f(x)=4x-1$ έχει οριακή τιμή ή όριο τον αριθμό 7, ενώ συμβολικά στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$\lim_{x\to 2} f(x)=7. \qquad (7.1.1\text{ - }5)$$

[3] Ο όρος **για κάθε** $\varepsilon>0$ είναι απαραίτητος, διαφορετικά τα συμπεράσματα που ακολουθούν δεν ισχύουν.

Παρατηρήσεις 7.1.1 - 1

i) Το lim αποτελεί συγκοπή της λέξης limes, που σημαίνει όριο.

ii) Σύμφωνα και με τον Πίνακα 7.1.1 - 1, όταν στην $(7.1.1-5)$ γράφεται $x \to 2$, αυτό σημαίνει ότι το x τείνει στο 2 από μικρότερες (συμβολικά $x \to 2-0$ ή $x \to 2^-$), αντίστοιχα μεγαλύτερες (συμβολικά $x \to 2+0$ ή $x \to 2^+$) τιμές.

iii) Στα επόμενα, όταν απαιτείται ο υπολογισμός ορίων της μορφής $(7.1.1-5)$, δεν θα γίνεται απόδειξη ότι μια σχέση της μορφής $(7.1.1-4)$ ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$.

Δίνεται στη συνέχεια ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 7.1.1 - 3. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $[a, x_0) \cup (x_0, b] \subset \mathbb{R}$. Τότε θα λέγεται ότι η f είναι* **συγκλίνουσα** *για $x \to x_0$ ή διαφορετικά ότι υπάρχει το όριο της f στο x_0 και θα συμβολίζεται αυτό με $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ τότε και μόνον, όταν* **για κάθε** *$\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε (Σχ. 7.1.1 - 1)*

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } x \in [a, x_0) \cup (x_0, b] \ \text{ με } \ |x - x_0| < \delta \qquad (7.1.1 - 6)$$

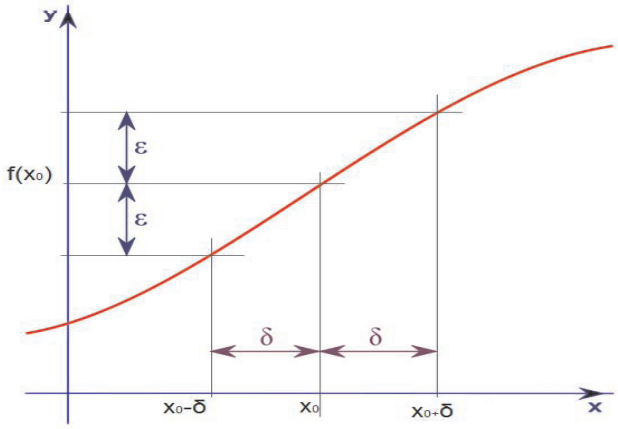
Στην περίπτωση που $l = 0$, η f θα λέγεται **μηδενική** στο x_0.

Σημείωση 7.1.1 - 1

Στα Μαθηματικά δίνονται αναλυτικότερα οι παρακάτω ορισμοί:

Ορισμός 7.1.1 - 4. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $(x_0, b] \subset \mathbb{R}$. Τότε θα λέγεται ότι η f είναι* **συγκλίνουσα** *για $x \to x_0^+$ ή διαφορετικά ότι υπάρχει το δεξιό όριο της f στο x_0 και θα συμβολίζεται αυτό με*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$



Σχήμα 7.1.1 - 1: Ορισμός 7.1.1 - 3 με $l = f(x_0)$: αν $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ *υπάρχει πραγματικός αριθμός* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *έτσι ώστε*

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \textit{για κάθε} \quad x \in (x_0, b] \quad \textit{με} \quad 0 < x - x_0 < \delta \qquad (7.1.1 - 7)$$

Ορισμός 7.1.1 - 5. *Έστω η συνάρτηση* $f(x)$ *με πεδίο ορισμού* $[a, x_0) \subset \mathbb{R}$. *Τότε θα λέγεται ότι η* f *είναι* **συγκλίνουσα** *για* $x \to x_0^-$ *ή διαφορετικά ότι υπάρχει το αριστερό όριο της* f *στο* x_0 *και θα συμβολίζεται αυτό με*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ *υπάρχει πραγματικός αριθμός* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *έτσι ώστε*

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \textit{για κάθε} \quad x \in [a, x_0) \quad \textit{με} \quad 0 < x_0 - x < \delta \qquad (7.1.1 - 8)$$

Τα όρια αυτά λέγονται και **μονόπλευρα** όρια της f στο x_0.

Παρατήρηση 7.1.1 - 1

Η οριακή τιμή $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει, όταν υπάρχουν το αριστερό, αντίστοιχα δεξιό όριό της στο x_0 και είναι ίσα μεταξύ τους. Σε κάθε άλλη περίπτωση η οριακή τιμή δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 7.1.1 - 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x + \frac{|x|}{x} \quad \text{με πεδίο ορισμού} \quad D = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Τότε, αν $x < 0$, είναι $|x| = -x$, οπότε

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x + \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = 0 - 1 = -1,$$

ενώ

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x + \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 0 + 1 = 1,$$

δηλαδή

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x),$$

οπότε η οριακή τιμή $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 7.1.1 - 3

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} \quad \text{με πεδίο ορισμού} \quad D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

Είναι προφανές ότι, αν οι τιμές του x τείνουν στην τιμή 1, τότε ενδεικτικά έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 7.1.1 - 2.

Ανάλογα με την απόδειξη στην (7.1.1−4) είναι δυνατόν και στην περίπτωση αυτή να αποδειχθεί ότι, για κάθε αριθμό $M > 0$ υπάρχει ένα αντίστοιχο διάστημα τιμών του x στην περιοχή του 1, για το οποίο να ισχύει ότι

$$\frac{4}{(x-1)^2} > M. \qquad (7.1.1 - 9)$$

Πίνακας 7.1.1 - 2: Παράδειγμα 7.1.1 - 3.

x	0	0.5	0.99	1.02	1.5
$f(x)$	4	16	4×10^4	10^4	16

Πράγματι, διαδοχικά από την ανισότητα $(7.1.1-9)$ προκύπτει

$$\frac{4}{(x-1)^2} > M \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{4} < \frac{1}{M} \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 < \frac{4}{M}$$

$$|x-1| < \frac{2}{\sqrt{M}} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2}{\sqrt{M}} < x < 1 + \frac{2}{\sqrt{M}}\,.$$

Επομένως, αν $M = 10^4$, για να είναι $f(x) > 10^4$, πρέπει σύμφωνα με την τελευταία παραπάνω ανισότητα ο x να παίρνει τιμές στο διάστημα

$$1 - \frac{2}{100} < x < 1 + \frac{2}{100}\,, \quad \text{δηλαδή} \quad 0.98 < x < 1.02.$$

Η ανισότητα $(7.1.1-4)$, όταν χρησιμοποιηθεί ο αριθμός ε με $\varepsilon > 0$ γράφεται ως εξής:

$$\frac{4}{(x-1)^2} > \frac{1}{\varepsilon}\,. \tag{7.1.1 - 10}$$

Η παραπάνω ιδιότητα εκφράζεται στα Μαθηματικά λέγοντας: όταν ο x τείνει στον αριθμό 1, η συνάρτηση $f(x)$ τείνει στο $+\infty$ ή ότι έχει όριο το $+\infty$, ενώ συμβολικά γράφεται

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty.$$

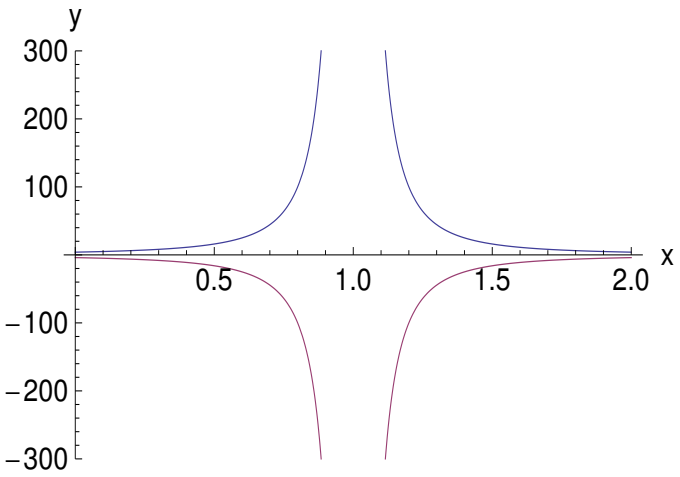
Όμοια για τη συνάρτηση

$$g(x) = -\frac{4}{(x-1)^2} \quad \text{είναι} \quad \lim_{x \to 1} g(x) = -\infty.$$

Η ανάλογη ανισότητα της $(7.1.1-10)$ στην περίπτωση αυτή είναι η

$$-\frac{4}{(x-1)^2} < -\frac{1}{\varepsilon}\,. \tag{7.1.1 - 11}$$

Τα διαγράμματα των συναρτήσεων f και g δίνονται στο Σχ. 7.1.1 - 2.



Σχήμα 7.1.1 - 2: Παράδειγμα 7.1.1 - 3: η συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2}$ μπλε και η $g(x) = -\frac{4}{(x-1)^2}$ κόκκινη καμπύλη.

Σημείωση 7.1.1 - 2

Στο εξής δεν θα γίνεται υπολογισμός των τιμών της μεταβλητής για τις οποίες ισχύει η $(7.1.1-10)$, αντίστοιχα η $(7.1.1-11)$, αλλά θα χρησιμοποιούνται μόνον τα συμπεράσματά των.

Παράδειγμα 7.1.1 - 4

Να υπολογιστεί η οριακή τιμή

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}\,.$$

Λύση. Προφανώς είναι $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Άρα σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.1.1 - 1 πρέπει να εξεταστούν οι παρακάτω δύο οριακές τιμές:

i)
$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1}\,.$$

Τότε $x \in (-\infty, 1)$, οπότε $x < 1$, δηλαδή $x - 1 < 0$. Επομένως

$$\frac{1}{x-1} < 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in (-\infty, 1),$$

οπότε σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.1.1 - 2 είναι:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty\,.$$

ii)

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x-1}\,.$$

Τότε $x \in (1, +\infty)$, οπότε

$$x > 1, \quad \text{δηλαδή} \quad x - 1 > 0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{x-1} > 0$$

και επομένως

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1} = +\infty\,.$$

Άρα το όριο $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$ δεν υπάρχει (Σχ. 7.1.1 - 3).

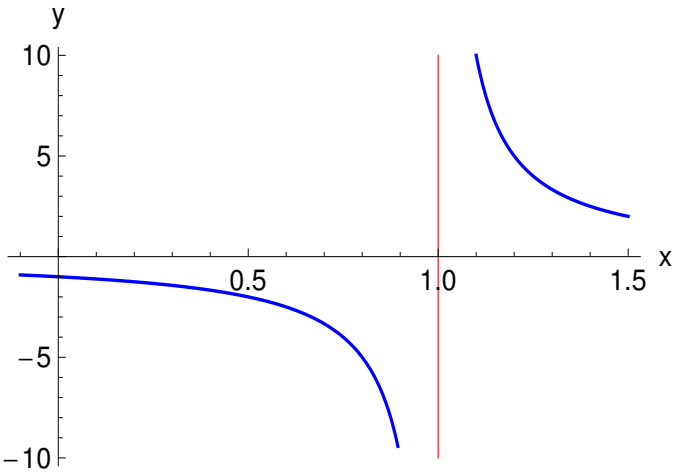
Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 7.1.1 - 1 (οριακής τιμής)

```
Limit[1/x-1),x->1,Direction->1]          x->1-0
Limit[1/(x-1),x->1,Direction->-1]        x->1+0
```

ενώ το Σχ. 7.1.1 - 3 με τις:

```
f[x_] := 1/(x - 1)
fgr1 = Plot[f[x], {x, -0.1, 0.95},
   PlotStyle -> {Blue, Thickness[0.005]},
   BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 12},
   AxesLabel -> {"x", "y"}, AxesOrigin -> {0, 0}];
fgr2 = Plot[f[x], {x, 1.1, 1.5},
   PlotStyle -> {Blue, Thickness[0.005]},
   BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 12},
   AxesLabel -> {"x", "y"}, AxesOrigin -> {0, 0}];
line = Line[{{1, -10}, {1, 10}}];
fgr3 = Graphics[{Red, Thick, line}];
fgr = Show[fgr1, fgr2, fgr3, PlotRange -> All, Axes -> True,
  AxesLabel -> {"x", "y"},
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 12},
  AxesOrigin -> {0, 0}]
```



Σχήμα 7.1.1 - 3: Παράδειγμα 7.1.1 - 4: το διάγραμμα της συνάρτησης $\frac{1}{x-1}$ - μπλε καμπύλη και η ευθεία $x = 1$ - κόκκινη καμπύλη, που αντιστοιχεί στην οριακή τιμή.

■

Παρατήρηση 7.1.1 - 2

Στα Μαθηματικά, όταν η οριακή της συνάρτησης απειρίζεται, λέγεται ότι η συνάρτηση συγκλίνει **κατ' εκδοχή**.

Δίνεται τώρα ο ορισμός της κατ' εκδοχή σύγκλισης για την περίπτωση που η μεταβλητή τείνει σε σημείο ως εξής:

Ορισμός 7.1.1 - 6. *Έστω η συνάρτηση* $f(x)$ *με πεδίο ορισμού* $[a, x_0) \cup (x_0, b]$. *Τότε θα ισχύει:*

i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *τότε και μόνον, όταν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *έτσι ώστε*

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \qquad (7.1.1 - 12)$$

για κάθε $x \in [a, x_0) \cup (x_0, b]$ *με* $|x - x_0| < \delta$.

ii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ *τότε και μόνον, όταν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *έτσι ώστε*

$$f(x) < -\frac{1}{\varepsilon} \qquad (7.1.1 - 13)$$

για κάθε $x \in [a, x_0) \cup (x_0, b]$ *με* $|x - x_0| < \delta$.

7.1.2 Σύγκλιση στο άπειρο

Αρχικά κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό να δοθεί ο παρακάτω χρήσιμος για τα επόμενα μαθήματα ορισμός:

Ορισμός 7.1.2 - 1. *Η συνάρτηση* $f(x)$ *με πεδίο ορισμού* $[a, +\infty)$ *θα λέγεται ότι είναι* **φραγμένη** *στην περιοχή του* $+\infty$ *τότε και μόνον, όταν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί* $M \geq 0$ *και* $\theta > 0$, *έτσι ώστε*

$$|f(x)| < \theta \quad \textit{για κάθε} \quad x \in [a, +\infty) \quad \textit{και} \quad x > M. \qquad (7.1.2 - 1)$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία της Παραγράφου 7.1.1 είναι δυνατόν να οριστεί ανάλογα η οριακή τιμή μιας συνάρτησης, έστω $f(x)$, όταν $x \to \infty$.

Παράδειγμα 7.1.2 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{με πεδίο ορισμού} \quad (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η $f(x)$ παίρνει τιμές απολύτως μικρότερες από οποιονδήποτε αριθμό ε με $\varepsilon > 0$, όταν η μεταβλητή x παίρνει τιμές απολύτως μεγαλύτερες από κατάλληλα οριζόμενο κάθε φορά αριθμό N με $N > 0$.

Πράγματι, έστω ε με $\varepsilon > 0$. Τότε, αν $\frac{1}{x-1} < \varepsilon$, διαδοχικά έχουμε

$$\frac{1}{x-1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > \dfrac{1}{\varepsilon} \\ \text{ή} \\ x - 1 < -\dfrac{1}{\varepsilon} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 1 + \dfrac{1}{\varepsilon} \\ \text{ή} \\ x < 1 - \dfrac{1}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Επομένως, αν $\varepsilon = \frac{1}{10^3}$, τότε για να ισχύει $\frac{1}{x-1} < \frac{1}{10^3}$, αρκεί οι τιμές του x να είναι μεγαλύτερες του $1 + \frac{1}{\varepsilon} = 1 + 10^3 = 1001$ ή μικρότερες του $1 - \frac{1}{\varepsilon} = 1 - 10^3 = -999$.

Η παραπάνω ιδιότητα εκφράζεται στα Μαθηματικά λέγοντας ότι η συνάρτηση $f(x)$ έχει όριο το 0, όταν $x \to +\infty$ ή $x \to -\infty$ και συμβολικά γράφεται

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Επίσης χρησιμοποιείται και ο γενικότερος συμβολισμός $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Παράδειγμα 7.1.2 - 2

Όμοια συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \left(2 + \frac{1}{x-1}\right) = 2$$

και

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = 1.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω δίνεται ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 7.1.2 - 2. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $[a, +\infty)$. Τότε θα λέγεται ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι* **συγκλίνουσα** *για $x \to +\infty$ και θα συμβολίζεται αυτό με $f(x) \to l$, όταν $x \to +\infty$ ή ισοδύναμα*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

τότε και μόνον, όταν η συνάρτηση $f(x) - l$ είναι μηδενική, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $N = N(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad x \in [a, +\infty) \quad \text{με} \quad x > N. \qquad (7.1.2 - 2)$$

Ορισμός 7.1.2 - 3. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $(-\infty, a]$. Τότε θα λέγεται ότι η συνάρτηση f είναι* **συγκλίνουσα** *για $x \to -\infty$ και θα συμβολίζεται αυτό με $f(x) \to l$, όταν $x \to -\infty$ ή ισοδύναμα*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

τότε και μόνον, όταν η συνάρτηση $f(x)-l$ *είναι μηδενική, δηλαδή για κάθε* $\varepsilon>0$ *υπάρχει πραγματικός αριθμός* $N=N(\varepsilon)>0$*, έτσι ώστε*

$$|f(x)-l|<\varepsilon \quad \textit{για κάθε} \quad x\in(-\infty,a] \quad \textit{με} \quad x<-N \qquad (7.1.2\text{ - }3)$$

Ο ορισμός της μηδενικής συνάρτησης στις παραπάνω δύο περιπτώσεις είναι προφανής.

Παράδειγμα 7.1.2 - 3

Έστω η συνάρτηση

$$g(x)=25\,x^2.$$

Τότε για οποιονδήποτε αριθμό M με $M>0$, υπάρχει πάντοτε ένας άλλος θετικός αριθμός, έστω N, έτσι ώστε για τιμές του x (θετικές ή αρνητικές) με $|x|>N$ να είναι $g(x)=25\,x^2>M$.

Πράγματι, έστω M με $M>0$. Τότε, αν $25\,x^2>M$, διαδοχικά έχουμε

$$25\,x^2>M \;\Leftrightarrow\; |x|>\frac{\sqrt{M}}{5} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x>\dfrac{\sqrt{M}}{5} \\ \text{ή} \\ x<-\dfrac{\sqrt{M}}{5}\,. \end{cases}$$

Επομένως, αν $M=9\times10^4$, τότε για να ισχύει

$$25\,x^2>9\times10^4=\left(3\times10^2\right)^2,$$

αρκεί οι τιμές του x να είναι μεγαλύτερες των $\frac{300}{5}=60$ ή μικρότερες του $-\frac{300}{5}=-60$.

Η παραπάνω ιδιότητα όμοια εκφράζεται στα Μαθηματικά λέγοντας ότι η συνάρτηση $g(x)$ έχει όριο το $+\infty$, όταν $x\to+\infty$ ή $x\to-\infty$ και συμβολικά γράφεται

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty.$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι:

- αν $\tilde{g}(x) = -25\,x^2$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty} \tilde{g}(x) = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to-\infty} \tilde{g}(x) = +\infty, \quad \text{ενώ}$$

- αν $\hat{g}(x) = x^3$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty} \hat{g}(x) = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to-\infty} \hat{g}(x) = -\infty.$$

Σημείωση 7.1.2 - 1

Ανάλογα όπως στη Σημείωση 7.1.2 - 1 στο εξής δεν θα γίνεται υπολογισμός των τιμών της μεταβλητής για τις οποίες ισχύουν οι παραπάνω περιπτώσεις, αλλά θα χρησιμοποιούνται μόνον τα συμπεράσματά των.

Ο ορισμός της κατ' εκδοχή σύγκλισης μιας συνάρτησης στην περίπτωση αυτή γράφεται ως εξής:

Ορισμός 7.1.2 - 4. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $[a,+\infty)$. Τότε θα ισχύει:*

i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $N = N(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε*

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{για κάθε} \quad x \in [a,+\infty) \quad \text{με} \quad x > N. \qquad (7.1.2 - 4)$$

ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ *τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $N = N(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε*

$$f(x) < -\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{για κάθε} \quad x \in [a,+\infty) \quad \text{με} \quad x > N. \qquad (7.1.2 - 5)$$

Ορισμός 7.1.2 - 5. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $(-\infty,a]$. Τότε θα ισχύει*

i) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $N = N(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε*

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{για κάθε} \quad x \in (-\infty,a] \quad \text{με} \quad x < -N. \qquad (7.1.2 - 6)$$

Πίνακας 7.1.3 - 1: ιδιοτήτων συγκλινουσών συναρτήσεων όπου με ΑΜ συμβολίζεται η απροσδιόριστη μορφή.

f	g	$f+g$	$f\,g$	f/g
f_0	g_0	f_0+g_0	$f_0\,g_0$	$f_0/g_0 \quad (g_0 \neq 0)$
f_0	∞	∞	$\infty \quad (f_0 \neq 0)$	0
∞	g_0	∞	$\infty \quad (g_0 \neq 0)$	∞
0	0	0	0	ΑΜ
0	∞	∞	ΑΜ	0
∞	0	∞	ΑΜ	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ΑΜ
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ΑΜ
$+\infty$	$-\infty$	ΑΜ	$-\infty$	ΑΜ
$-\infty$	$+\infty$	ΑΜ	$-\infty$	ΑΜ

ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ *τότε και μόνον, όταν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει πραγματικός αριθμός* $N = N(\varepsilon) > 0$, *έτσι ώστε*

$$f(x) < -\frac{1}{\varepsilon} \quad \textit{για κάθε} \quad x \in (-\infty, a] \quad \textit{με} \quad x < -N \qquad (7.1.2\text{ - }7)$$

7.1.3 Ιδιότητες συγκλινουσών συναρτήσεων

Δίνονται τώρα στον Πίνακα 7.1.3 - 1 περιληπτικά όλες οι ιδιότητες των συγκλινουσών συναρτήσεων με την έννοια της σύγκλισης, όπως παραπάνω έχει δοθεί, για δύο συναρτήσεις, έστω f και g με αντίστοιχες οριακές τιμές f_0 και g_0.

Σημειώσεις 7.1.3 - 1

- Οι συναρτήσεις f, g υποτίθεται ότι έχουν κοινό πεδίο ορισμού και ότι έχουν όριο έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό ή έναν προσημειωμένο άπειρο, όταν $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ ή $x \to \pm\infty$.
- Στις ιδιότητες του Πίνακα 7.1.3 - 1 συμπεριλαμβάνεται και η εξής:
  Αν οι συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$ και $h(x)$ έχουν κοινό πεδίο ορισμού, έστω D και ισχύει
  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l, \quad \text{ενώ} \quad f(x) \le g(x) \le h(x)$$
  για κάθε $x \in D$, τότε και $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$.
- Όταν η πράξη δεν είναι επιτρεπτή (απροσδιόριστη μορφή), τότε έχει τεθεί η ένδειξη ΑΜ.

Παρατήρηση 7.1.3 - 1

Τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$ δεν πρέπει σε καμιά περίπτωση να θεωρούνται ως αριθμοί.

Παράδειγμα 7.1.3 - 1

Να υπολογιστεί η οριακή τιμή $\lim_{x \to \infty} f(x)$, όταν
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}\,.$$

Λύση. Η $f(x)$ γράφεται
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$
Άρα
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{0+0}{1+0} = 0.$$

∎

Παράδειγμα 7.1.3 - 2

Όμοια των συναρτήσεων

$$g(x) = \frac{4x^2+5x-2}{2x^2+4x+4} \quad \text{και} \quad h(x) = \frac{2x^3+x+1}{x^2+x+1} \quad \text{όταν} \quad x \to -\infty.$$

Λύση. Διαδοχικά έχουμε

$$g(x) = \frac{4x^2+5x-2}{2x^2+4x+4} = \frac{x^2\left(4+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{4+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{4+0}{2+0} = 2$$

και

$$h(x) = \frac{2x^3+x+1}{x^2+x+1} = \frac{x^3\left(2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = x\,\frac{2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} x\,\frac{\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = (-\infty)\frac{2+0}{1+0} = -\infty.$$

■

Παρατήρηση 7.1.3 - 2

Από το παραπάνω παράδειγμα προκύπτουν τα εξής: Όταν έχουμε να υπολογίσουμε την οριακή τιμή μιας ρητής συνάρτησης για $x \to \pm\infty$, τότε, αν

- ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή, το όριο είναι το 0,
- ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με τον βαθμό του παρονομαστή, το όριο ισούται με το πηλίκο του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου στον αριθμητή προς τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του παρονομαστή, και
- ο αριθμητής είναι μεγαλύτερου βαθμού από τον παρονομαστή, τότε το όριο είναι ένα προσημειωμένο άπειρο ($+\infty$, αντίστοιχα $-\infty$).

Παράδειγμα 7.1.3 - 3

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} \quad \text{με πεδίο ορισμού} \quad D = \mathbb{R} - \{-2, 1\}.$$

Να υπολογιστούν οι οριακές τιμές $\lim_{x \to 1} f(x)$ και $\lim_{x \to -2} f(x)$.

Λύση. Έστω αρχικά ο υπολογισμός της οριακής τιμής $\lim_{x \to 1} f(x)$. Επειδή η τιμή $x = 1$ μηδενίζει τον αριθμητή και τον παρονομαστή, δεν εφαρμόζεται η ιδιότητα του πηλίκου του Πίνακα 7.1.3 - 1. Τότε στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$f(x) = \frac{(x-1)\left(x^2+1\right)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2+1}{x+2} \quad \text{για κάθε} \quad x \in D,$$

οπότε

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{\lim_{x \to 1}\left(x^2+1\right)}{\lim_{x \to 1}(x+2)} = \frac{2}{3}.$$

Όταν $x \to -2$, τότε $\lim_{x \to -2}\left(x^2+1\right) = 5$, ενώ το $x+2$ τείνει στο 0 μέσω αρνητικών τιμών, όταν $x \to -2-0$ και μέσω θετικών, όταν $x \to -2+0$. Άρα

$$\lim_{x \to -2-0} f(x) = \lim_{x \to -2-0} \frac{x^2+1}{x+2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2+0} f(x) = \lim_{x \to -2+0} \frac{x^2+1}{x+2} = +\infty.$$

■

7.1.4 Όριο σύνθετης συνάρτησης

Ο υπολογισμός των οριακών τιμών των Παραγράφων 7.1.1 - 7.1.3 αναφέρεται σε απλές συναρτήσεις. Σε περιπτώσεις που η συνάρτηση είναι σύνθετη, δηλαδή της μορφής $f(g(x))$, τότε ο υπολογισμός του ορίου $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$, όταν $x \in D$ με D το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g, γίνεται ως εξής:

- Η συνάρτηση γράφεται στη μορφή $f(u)$ όπου $u = g(x)$.
- Υπολογίζεται, εφόσον υπάρχει, το $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$, και στη συνέχεια, όμοια εφόσον υπάρχει, το $\lim_{u \to u_0} f(u)$.

Παράδειγμα 7.1.4 - 1

Να υπολογιστεί η οριακή τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = e^{-x^2}$$

στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

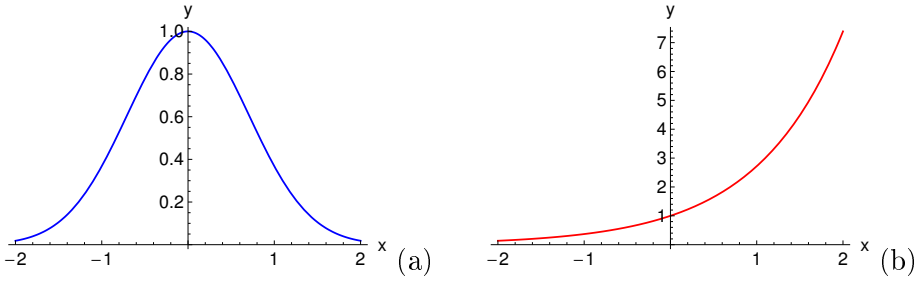
Λύση. Το πεδίο ορισμού της f είναι προφανώς το $\mathbb{R}$. Η f είναι σύνθετη συνάρτηση και γράφεται ως εξής:

$$f(u) = e^u, \quad \text{όταν} \quad u = g(x) = -x^2.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pm\infty} g(x) &= \lim_{x \to \pm\infty} \left(-x^2\right) = -\infty, \quad \text{οπότε} \\ \lim_{u \to -\infty} f(u) &= \lim_{x \to -\infty} e^u = 0. \end{aligned}$$

Άρα $\lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0$ (Σχ. 7.1.4 - 1). ∎



Σχήμα 7.1.4 - 1: Παράδειγμα 7.1.4 - 1 (a) Συνάρτηση e^{-x^2} και (b) e^x.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι οριακές τιμές των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^4+1}$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x+1}$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-1}{4x^2+5}$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+x^2+1}{2x^2+1}$

v) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(5x^2-x+1\right)$

vi) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2x^3+x^2+1\right)$

vii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$

viii) $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x}}$.

2. Όμοια των συναρτήσεων

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+x}{-x^3+27}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \cos^2\left(x^2+\dfrac{\pi}{4}\right)$

iv) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\left(x^2+1\right)$

v) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}$

vi) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|+x^2-3x+2}{x-2}$

vii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x|x|}$

viii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-8}{|x|}$.

Απαντήσεις

1. i) 0, ii) 0, iii) $\frac{1}{4}$, iv) $+\infty$, v) $+\infty$ vi) $-\infty$, vii) $+\infty$,
viii) $\lim_{x\to 0_-} \exp(-1/x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0_+} \exp(-1/x) = 0$.

2. i) 0, ii) -1, iii) $\frac{1}{2}$, iv) $+\infty$, v) $-\infty$, όταν $x \to 2-0$ και $+\infty$, όταν $x \to 2+0$, vi) 0, όταν $x \to 2-0$ και 2, όταν $x \to 2+0$, vii) $-\infty$, όταν $x \to 0_-$ και $+\infty$, όταν $x \to 0_+$, viii) $-\infty$.

7.2 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[2] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[3] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Βιβλιογραφία για περαιτέρω μελέτη

Παπαδημητράκης, Μ. (2015). *Ανάλυση: Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής* *http://fourier.math.uoc.gr/papadim/analysis_n.pdf*
Πανεπιστήμιο Κρήτης: Τμήμα Μαθηματικών.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://eclass.uoa.gr/courses/MATH130/ θέση Έγγραφα
- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 8

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Όμοια, όπως και στο Μάθημα *Οριακή τιμή συνάρτησης*, δίνονται περιληπτικά οι βασικότεροι ορισμοί και θεωρήματα που αναφέρονται στη συνέχεια μιας πραγματικής συνάρτησης, ενώ ο αναγνώστης για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [2, 3, 4].

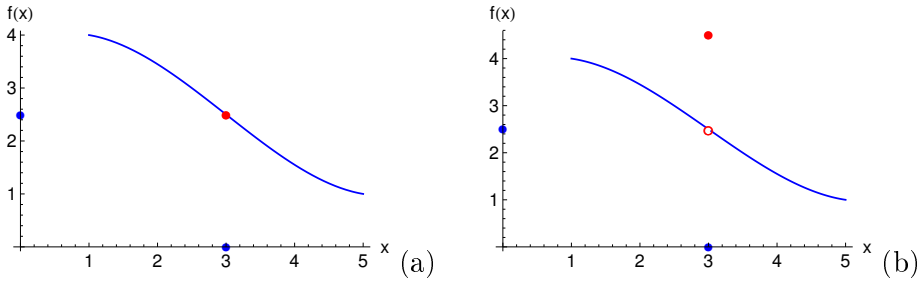
8.1 Γενικές έννοιες και ορισμοί

8.1.1 Ορισμός συνέχειας

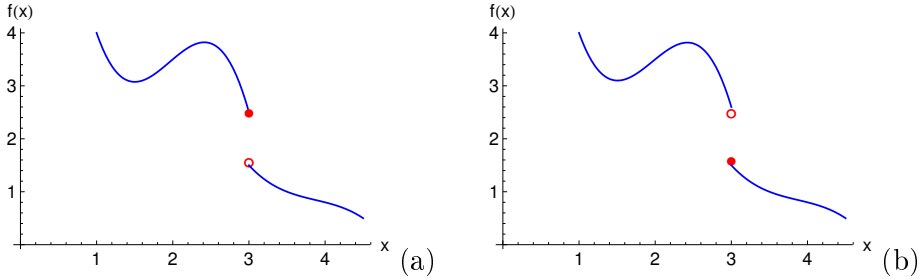
Ορισμός 8.1.1 - 1 (συνέχειας). *Έστω η συνάρτηση $f|D$ και σημείο $x_0 \in D$. Τότε η f θα λέγεται συνεχής (continuous) στο σημείο $x_0 \in D$ τότε και μόνον, όταν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ και ισχύει (Σχ. 8.1.1 - 1a)*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{8.1.1 - 1}$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση θα λέγεται ασυνεχής στο σημείο x_0 (Σχ. 8.1.1 - 1b και Σχ. 8.1.1 - 2).



Σχήμα 8.1.1 - 1: (a) Συνάρτηση συνεχής στο $x_0 = 3$. Ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. (b) Ασυνεχής στο $x_0 = 3$. Υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ και είναι διαφορετικό από το $f(x_0)$.



Σχήμα 8.1.1 - 2: Συνάρτηση ασυνεχής στο $x_0 = 3$, επειδή $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$. (a) Αριστερά συνεχής και (b) δεξιά συνεχής στο $x_0 = 3$.

Ορισμός 8.1.1 - 2 (πλευρικής συνέχειας). *Η συνάρτηση $f|D$ θα λέγεται αριστερά, αντίστοιχα δεξιά συνεχής στο σημείο $x_0 \in D$ τότε και μόνον, όταν*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

(Σχ. 8.1.1 - 2a), αντίστοιχα

$$\lim_{x -> x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

(Σχ. 8.1.1 - 2b).

Εύκολα αποδεικνύεται σύμφωνα με τον Ορισμό 8.1.1 - 1 ότι οι συναρτήσεις ax^ν, οι τριγωνομετρικές και η e^x είναι συνεχείς συναρτήσεις.

8.1.2 Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Δίνονται στη συνέχεια οι ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων με τη μορφή προτάσεων.[1]

Πρόταση 8.1.2 - 1. *Αν $f, g\,|\,D$ συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο $x_0 \in D$, τότε και οι συναρτήσεις $f \pm g$ και fg είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 \in D$.*

Πρόταση 8.1.2 - 2. *Αν $f, g\,|\,D$ συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο $x_0 \in D$ και $f(x_0) \neq 0$, τότε υπάρχει περιοχή $\varpi(x_0)$, τέτοια ώστε $f(x_0) \neq 0$ για κάθε $x \in \varpi(x_0)$, οπότε η συνάρτηση $1/f$ έχει έννοια για κάθε $x \in D \cap \varpi(x_0)$ και είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in D$.*

Σύμφωνα με τις ιδιότητες αυτές οι πολυωνυμικές, ρητές, υπερβολικές συναρτήσεις είναι συνεχείς συναρτήσεις στα πεδία ορισμού των.

8.1.3 Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

Θεώρημα 8.1.3 - 1 (σύνθετης συνάρτησης). *Έστω ότι η συνάρτηση $u = g(x)|D$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in D$ και η συνάρτηση $f(u)|g(D)$ είναι συνεχής στο σημείο $u_0 = g(x_0) \in g(D)$. Τότε η σύνθετη συνάρτηση $h(x) = f(g(x))|D$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in D$.*

Παράδειγμα 8.1.3 - 1

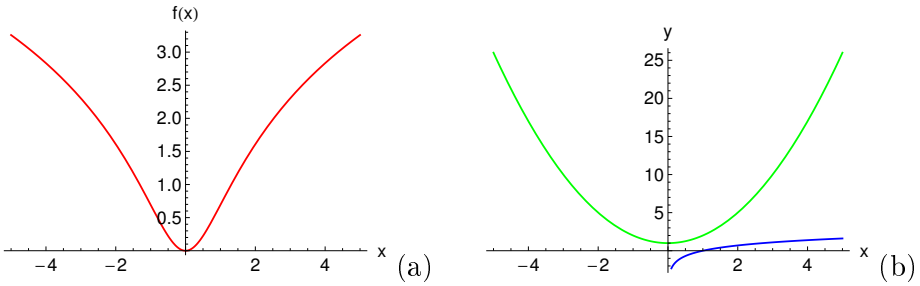
Η συνάρτηση

$$f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$$

είναι συνεχής, επειδή είναι σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων (Σχ. 8.1.3 - 1)

$$f(u) = \ln u, \quad \text{όταν} \quad u = g(x) = 1 + x^2.$$

[1] Για τον ορισμό της περιοχής ενός σημείου βλέπε Μάθημα *Οριακή τιμή συνάρτησης*.



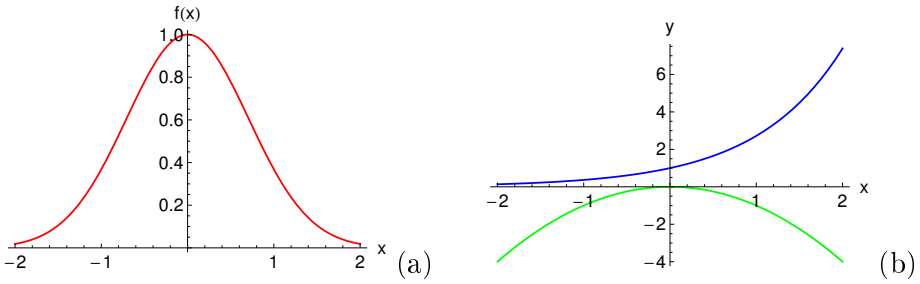
Σχήμα 8.1.3 - 1: (a) Συνάρτηση $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$, όταν $x \in [-5,5]$. (b) Συνάρτηση $1+x^2$ πράσινη και $\ln x$ μπλε καμπύλη.

Παράδειγμα 8.1.3 - 2

Όμοια η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ είναι συνεχής, επειδή είναι σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων (Σχ. 8.1.3 - 2)

$$f(u) = e^u, \quad \text{όταν} \quad u = -x^2.$$

Δίνονται στη συνέχεια χωρίς απόδειξη τα κυριότερα θεωρήματα επί των



Σχήμα 8.1.3 - 2: (a) Συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$, όταν $x \in [-2,2]$. (b) Συνάρτηση $-x^2$ πράσινη και e^x μπλε καμπύλη.

συνεχών συναρτήσεων.

Θεώρημα 8.1.3 - 2 (αντίστροφης συνάρτησης). *Έστω ότι η συνάρτηση $f|D$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in D$. Τότε, αν υπάρχει η αντίστροφή της συνάρτηση $f^{-1}|f(D)$, η f^{-1} θα είναι συνεχής στο σημείο $\eta_0 = g(x_0) \in g(D)$.*

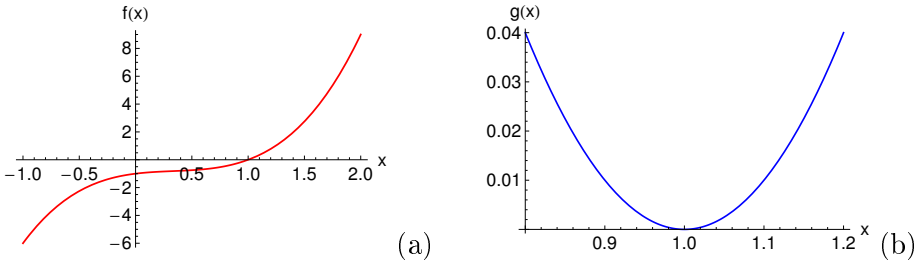
Σύμφωνα με το Θεώρημα 8.1.3 - 2 η λογαριθμική, οι αντίστροφες τριγωνομετρικές και οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Θεώρημα 8.1.3 - 3 (Bolzano). *Έστω ότι η συνάρτηση* $f(x)|[a,b]$ *είναι συνεχής για κάθε* $x \in [a,b]$. *Τότε, αν* $f(a)f(b) < 0$, *υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο* ξ *με* $\xi \in (a,b)$, *έτσι ώστε* $f(\xi) = 0$. *(Σχ. 8.1.3 - 3a)*

Εφαρμογές του θεωρήματος γίνονται στην προσεγγιστική λύση των εξισώσεων.[2]

Παρατήρηση 8.1.3 - 1

Αν η ρίζα ξ είναι πολλαπλή με βαθμό πολλαπλότητας άρτιο αριθμό, τότε το Θεώρημα 8.1.3 - 3 δεν ισχύει (Σχ. 8.1.3 - 3b).



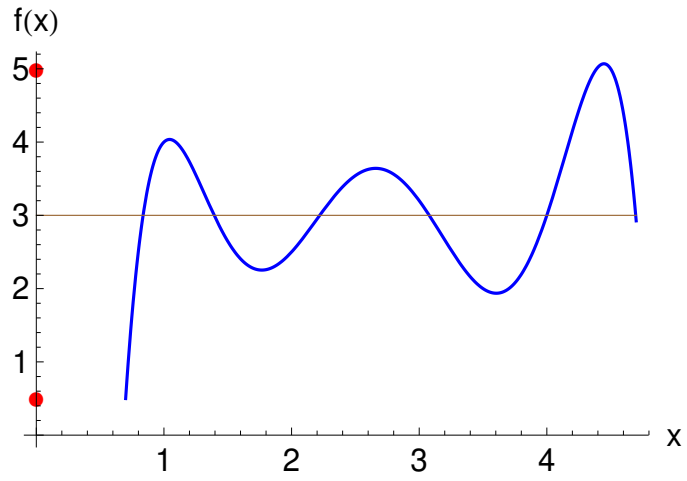
Σχήμα 8.1.3 - 3: (a) Θεώρημα 8.1.3 - 3 του Bolzano: $f(x) = -1+x-2x^2+2x^3$ διάστημα $[-1,2]$ και $\xi = 1$. (b) $g(x) = (x-1)^2$ όπου η ρίζα $\xi = 1$ έχει πολλαπλότητα 2 και το θεώρημα δεν εφαρμόζεται.

Θεώρημα 8.1.3 - 4 (γενίκευση Bolzano ή ενδιάμεσων τιμών). *Έστω* $f|[a,b]$ *μία συνεχής συνάρτηση και* $f(a) = \eta_1$, $f(b) = \eta_2$ *με* $\eta_1 \neq \eta_2$. *Αν υποτεθεί χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι* $\eta_1 < \eta_2$, *τότε για κάθε* $\eta \in (\eta_1, \eta_2)$, *υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο* $\xi \in (\eta_1, \eta_2)$, *έτσι ώστε* $f(\xi) = \eta$.

Το θεώρημα γεωμετρικά σημαίνει ότι κάθε ευθεία με εξίσωση $y = \eta$, τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε ένα τουλάχιστον σημείο (Σχ. 8.1.3 - 4).

Σύμφωνα τώρα με το Θεώρημα 8.1.3 - 4 αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα της Άλγεβρας:

[2] Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στο βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 5.



Σχήμα 8.1.3 - 4: Γενίκευση του θεωρήματος του Bolzano.

Θεώρημα 8.1.3 - 5. *Αν ένα πολυώνυμο* $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_\nu x^\nu$ *με* $a_\nu \neq 0$ *είναι περιττού βαθμού* $\nu \geq 1$, *ενώ οι συντελεστές του πραγματικοί αριθμοί, τότε υπάρχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα του.*

Θεώρημα 8.1.3 - 6 (μέγιστης και ελάχιστης τιμής). *Έστω ότι η συνάρτηση* $f(x) \,|\, [a,b]$ *είναι συνεχής για κάθε* $x \in [a,b]$. *Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο* $\gamma \in [a,b]$, *αντίστοιχα σημείο* $\delta \in [a,b]$, *έτσι ώστε (Σχ. 8.1.3 - 5)*

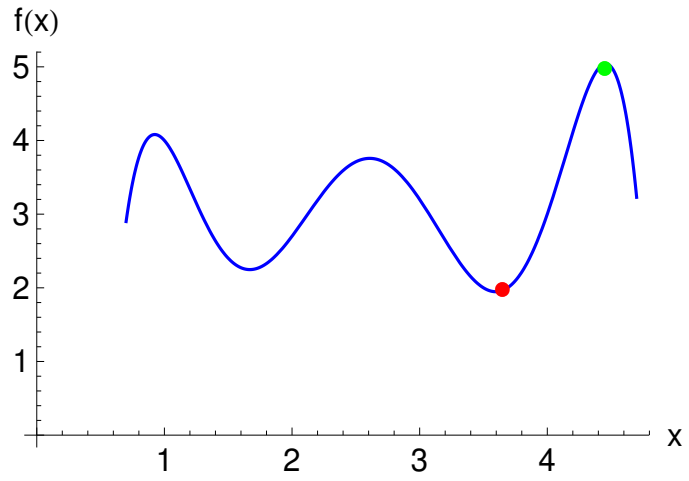
$$f(\gamma) = \min_{x\in[a,b]} f(x), \quad \textit{αντίστοιχα} \quad f(\delta) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

8.1.4 Ασυνέχεια συνάρτησης

Στην παράγραφο αυτή θα εξεταστούν τα είδη ασυνέχειας μιας συνάρτησης (discontinuous function), που κύρια εμφανίζονται στις εφαρμογές.

Ασυνέχεια 1ου είδους

Ορισμός 8.1.4 - 1. *Η συνάρτηση* $f|D$ *θα παρουσιάζει στο σημείο* $x_0 \in D$ **ασυνέχεια 1ου είδους** *τότε και μόνον, όταν υπάρχουν οι πλευρικές οριακές*



Σχήμα 8.1.3 - 5: Θεώρημα 8.1.3 - 6: μέγιστο στο $(4.45, 5.0)$ πράσινο και ελάχιστο στο $(3.65, 2.0)$ κόκκινο σημείο.

τιμές της f στο $x_0 \in D$ (ή απειρίζονται) και μία τουλάχιστον από αυτές είναι διάφορη από την τιμή της συνάρτησης (Σχ. 8.1.1 - 2).

Παρατηρήσεις 8.1.4 - 1

Σύμφωνα με τον Ορισμό 8.1.4 - 1 έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

I) η ασυνέχεια να **διορθώνεται** ή να απαλείφεται, όταν (Σχ. 8.1.4 - 1)[3]

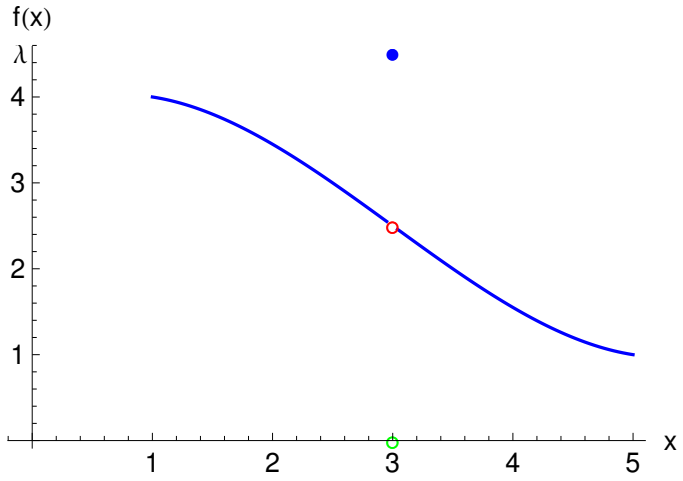
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lambda \qquad (8.1.4 - 1)$$

με λ πεπερασμένο αριθμό, δηλαδή υπάρχει η οριακή τιμή της συνάρτησης $f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$ και είναι διαφορετική από την τιμή της συνάρτησης στο σημείο x_0.

II) Η συνάρτηση f να παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in D$ πεπερασμένο άλμα με τιμή, έστω d, όπου

$$d = \left| \lim_{x \to x_0^-} f(x) - \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right|, \qquad (8.1.4 - 2)$$

[3] Στα σχήματα το ○ στον x-άξονα θα ορίζει το πιθανό σημείο ασυνέχειας.



Σχήμα 8.1.4 - 1: Παρατηρήσεις 8.1.4 - 1 (Ι) με ασυνέχεια στο $x_0 = 3$ πράσινο και $\lim_{x \to 3} f(x) = \lambda$ κόκκινο σημείο.

δηλαδή υπάρχουν οι πλευρικές οριακές τιμές, είναι πεπερασμένες και διαφορετικές μεταξύ τους.

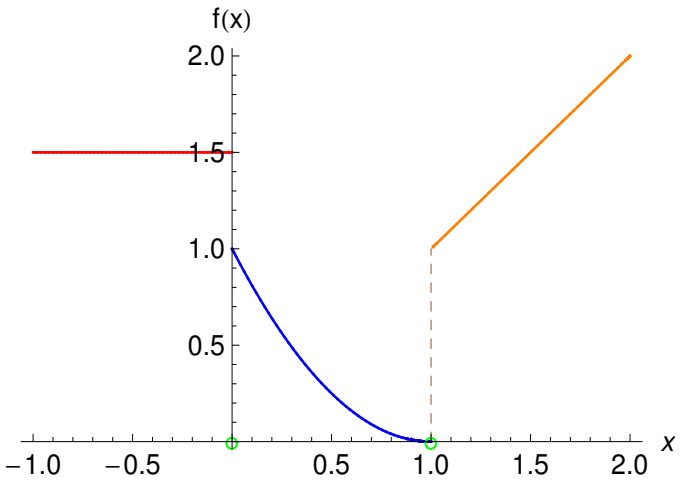
Παράδειγμα 8.1.4 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1.5 & \text{αν} \quad x \leq 0 \\ (x-1)^2 & \text{αν} \quad 0 < x \leq 1 \\ x & \text{αν} \quad 1 < x < 2. \end{cases}$$

Θα εξεταστεί η συνέχειά της μόνο στα σημεία που αλλάζει ο τύπος της, δηλαδή στα 0 και 1, επειδή σε όλο το άλλο πεδίο ορισμού της η f είναι συνεχής (Σχ. 8.1.4 - 2). Τότε:

α. Σημείο $x_0 = 0$
Είναι $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1.5 \neq 1 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, δηλαδή η f παρουσιάζει ασυνέχεια 1ου είδους στο σημείο 0 με άλμα $d = 0.5$,



Σχήμα 8.1.4 - 2: Παρατηρήσεις 8.1.4 - 1 (II) Παράδειγμα 8.1.4 - 1.

που **διορθώνεται** (Περίπτωση I), αν τεθεί

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad x \leq 0 \\ (x-1)^2 & \text{αν} \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

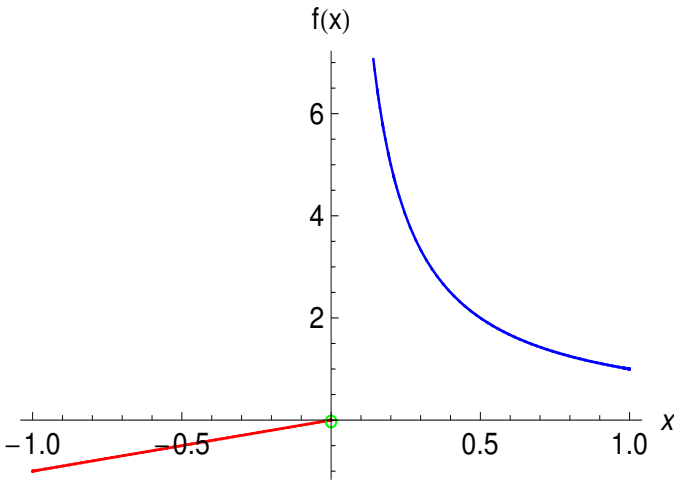
b. Σημείο $x_0 = 1$
$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \to 1^+} f(x)$, δηλαδή η f παρουσιάζει όμοια ασυνέχεια 1ου είδους στο σημείο 1 με άλμα $d = 1$, που **δεν διορθώνεται**, επειδή απαιτείται η αλλαγή του τύπου της f, σε αντίθεση με την περίπτωση (a) που απαιτείται η αλλαγή μόνον μιας σταθεράς.

iii) Η f να παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in D$ **άπειρο άλμα** τότε και μόνον, όταν οι πλευρικές οριακές τιμές είναι διαφορετικές μεταξύ τους και η μία τουλάχιστον από αυτές απειρίζεται.

Παράδειγμα 8.1.4 - 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{αν} \quad x > 0. \end{cases}$$



Σχήμα 8.1.4 - 3: Παρατηρήσεις 8.1.4 - 1 (III) Παράδειγμα 8.1.4 - 2.

Εξετάζεται η συνέχειά της μόνο στο σημείο που αλλάζει ο τύπος της, δηλαδή στο 0, επειδή σε όλο το άλλο πεδίο ορισμού της η f είναι συνεχής. Τότε

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \neq +\infty = \lim_{x\to 0^+} f(x),$$

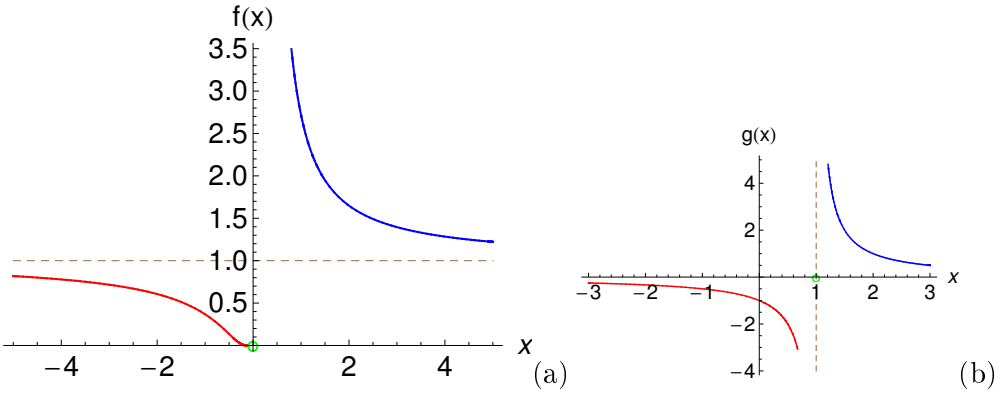
δηλαδή η f παρουσιάζει ασυνέχεια 1ου είδους στο σημείο 0 με άπειρο άλμα, που δεν διορθώνεται (Σχ. 8.1.4 - 3). Η f είναι αριστερά συνεχής στο σημείο 0 - **πλευρική συνέχεια** - επειδή $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$.

Παράδειγμα 8.1.4 - 3

Όμοια οι συναρτήσεις (Σχ. 8.1.4 - 4)

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{αν} \quad x < 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{αν} \quad x > 0. \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{αν} \quad x < 1 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{αν} \quad x > 1. \end{cases}$$

Η μελέτη των γίνεται ανάλογα με εκείνη του Παραδείγματος 8.1.4 - 2.



Σχήμα 8.1.4 - 4: Παρατηρήσεις 8.1.4 - 1 (III): ασυνέχεια με άπειρο άλμα. (a) Συνάρτηση $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$: σημείο ασυνέχειας $x_0 = 0$. Το διάγραμμα της f, όταν $x < 0$ κόκκινη και $x > 0$ μπλε καμπύλη, ενώ η ευθεία $y = 1$ - καφέ καμπύλη - ορίζει την τιμή $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e^0 = 1$. (b) Όμοια η $g(x) = \frac{1}{x-1}$ με σημείο ασυνέχειας $x_0 = 1$ (καφέ ευθεία) και διάγραμμα της g, όταν $x < 1$ κόκκινη και $x > 1$ μπλε καμπύλη.

Ασυνέχεια 2ου είδους

Ορισμός 8.1.4 - 2. *Η συνάρτηση $f|D$ θα παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in D$ ασυνέχεια του 2ου είδους τότε και μόνον, όταν δεν ορίζεται η οριακή τιμή της f στο σημείο $x_0 \in D$.*

Παράδειγμα 8.1.4 - 4

Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής για κάθε $x \neq 0$ ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\frac{1}{x}$ και $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$- Σχ. 8.1.4 - 5. Για τη συνέχεια στο 0 εξετάζονται τα πλευρικά όρια της f.[4] Έστω οι ακολουθίες

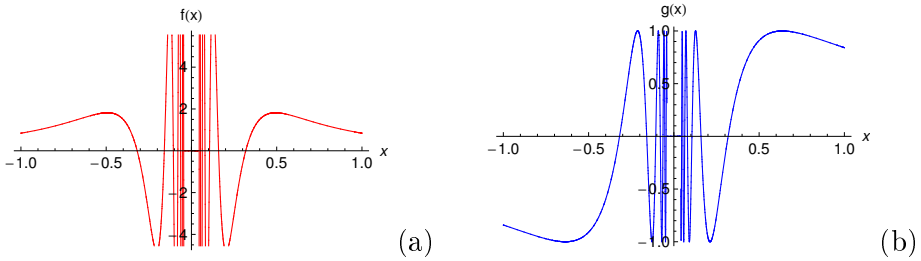
$$a_\nu = \frac{1}{2\nu\pi - \pi/2} \text{ με } \nu = 1, 2, \ldots \text{ και } b_\nu = \frac{1}{2\nu\pi + \pi/2} \text{ με } \nu = 1, 2, \ldots$$

[4] Βλέπε Μάθημα *Σειρές* - Ακολουθίες.

όπου $\lim a_\nu = \lim b_\nu = 0$. Τότε

$$\begin{aligned} \lim f\,(a_\nu) &= \left(2\nu\pi - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2\nu\pi - \frac{\pi}{2}\right) = +\infty\cdot(-1) = -\infty, \text{ ενώ} \\ \lim f\,(b_\nu) &= \left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right) = +\infty\cdot(+1) = +\infty, \end{aligned}$$

δηλαδή για την ίδια συνάρτηση έχουμε διαφορετικά όρια στο σημείο 0, που είναι άτοπο σύμφωνα με την ιδιότητα του μονοσήμαντου του ορίου και επομένως έχουμε στο 0 ασυνέχεια του 2ου είδους.



Σχήμα 8.1.4 - 5: (a) Συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. (b) $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Ασκήσεις

1. Να εξεταστούν ως προς τη συνέχεια σε όλο το πεδίο ορισμού των οι παρακάτω συναρτήσεις $f(x)$:

$i)$ $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4} & ; \quad |x| \neq 2 \\ 0 & ; \quad |x| = 2 \end{cases}$

$ii)$ $\begin{cases} \dfrac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 1 & ; \quad x = 0 \end{cases}$

$v)$ $\begin{cases} x & ; \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ \dfrac{1}{2} + x & ; \quad x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$

$vi)$ $\begin{cases} \cos x & ; \quad x \in [-\pi, 0) \\ 1 & ; \quad x \in [0, 1) \\ \dfrac{1}{x} & ; \quad x \in [1, 2] \end{cases}$

iii) $\begin{cases} \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|} & ; \quad x \neq 0 \\ 2 & ; \quad x = 0 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} \sin x + \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} & ; \quad x \neq 0 \\ \sqrt{2} & ; \quad x = k\pi, \end{cases}$

vii) $\begin{cases} x + \dfrac{|x|}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 1 & ; \quad x = 0 \end{cases}$

viii) $\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{-1/x}} & ; \quad x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & ; \quad x = 0 \end{cases}$

2. Όμοια των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$ και να γίνει η μορφή του διαγράμματος στα άκρα του πεδίου ορισμού των

i) e^{-x^2}

ii) $\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$

iii) $\exp\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

iv) $\sinh\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

v) $\ln(\sin x)$

vi) $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3. Όμοια των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$

i) $\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$

ii) $(1+x)\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)$

iii) $e^{1/(1-x)}$

iv) $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

v) e^{-1/x^2}

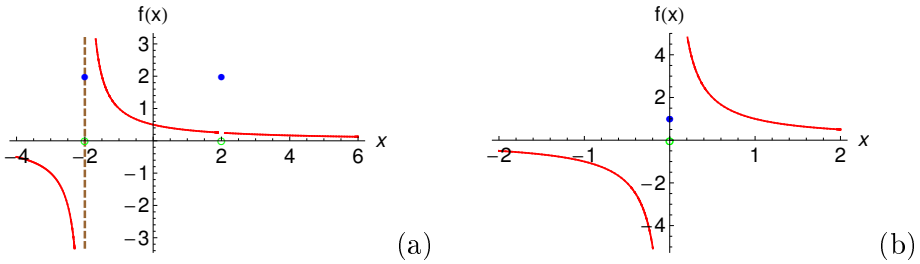
vi) $\ln|\cos x|$

4. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

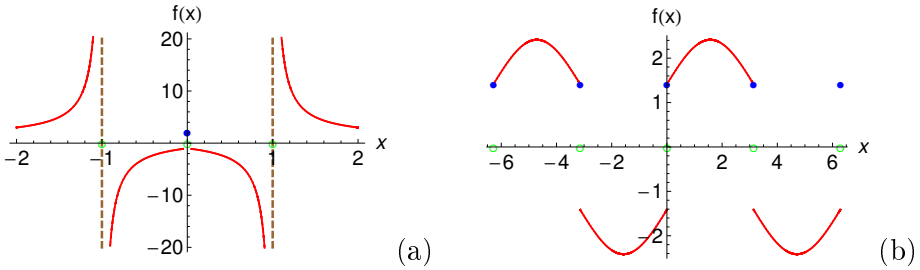
Απαντήσεις

1-3: Οι απαντήσεις στις Ασκήσεις προκύπτουν από τα διαγράμματα, που ακολουθούν. Τα πιθανά σημεία ασυνέχειας x_0 απεικονίζονται με ∘, τα αντίστοιχα σημεία $(x_0, f(x_0))$ με •. Οι ευθείες $x = x_0$ με διακεκομμένες πράσινες, ενώ οι $y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ με διακεκομμένες

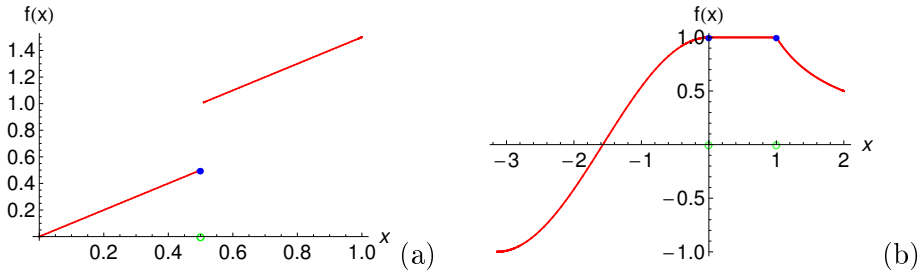
καφέ γραμμές. **4.** Εφαρμογή του Θεωρήματος του Bolzano.



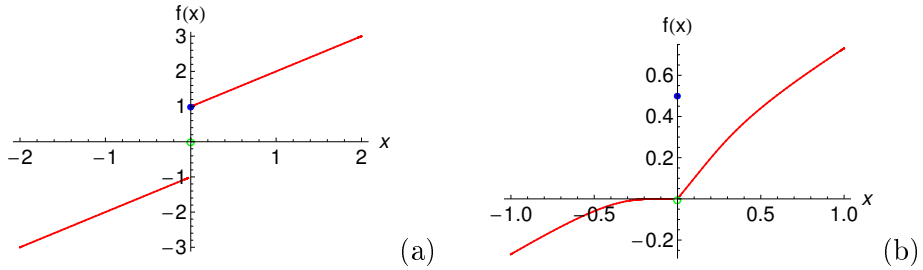
Σχήμα 8.1.4 - 6: Άσκηση: (a) 1i, (b) 1ii.



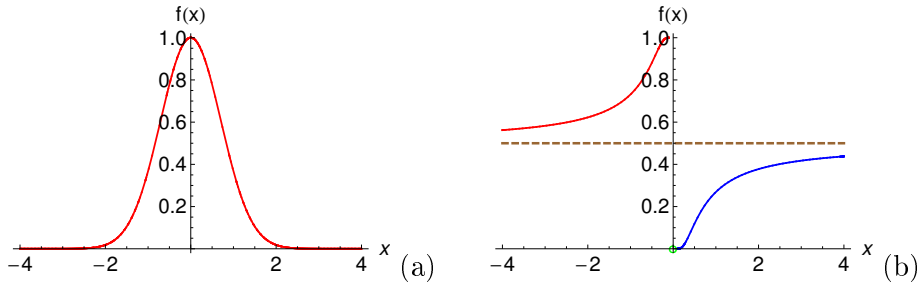
Σχήμα 8.1.4 - 7: Άσκηση: (a) 1iii, (b) 1v.



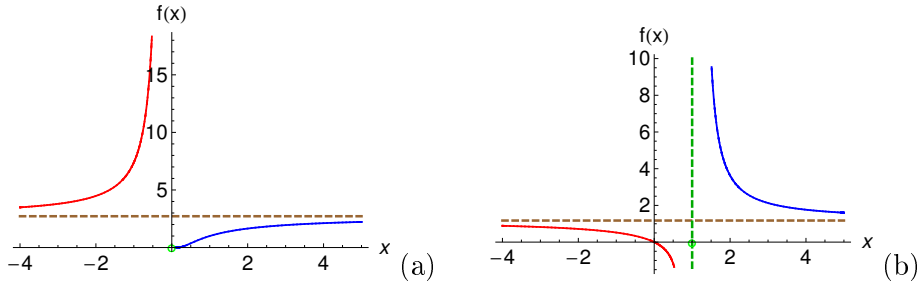
Σχήμα 8.1.4 - 8: Άσκηση: (a) $1v$, (b) $1vi$.



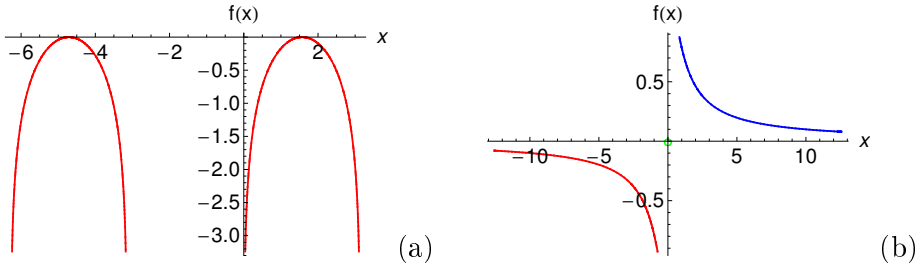
Σχήμα 8.1.4 - 9: Άσκηση: (a) $1vii$, (b) $1viii$.



Σχήμα 8.1.4 - 10: Άσκηση: (a) $2i$, (b) $2ii$.

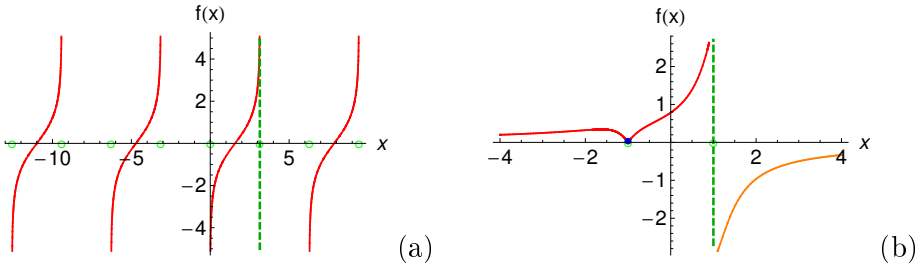


Σχήμα 8.1.4 - 11: Άσκηση: (a) $2iii$, (b) $2v$.



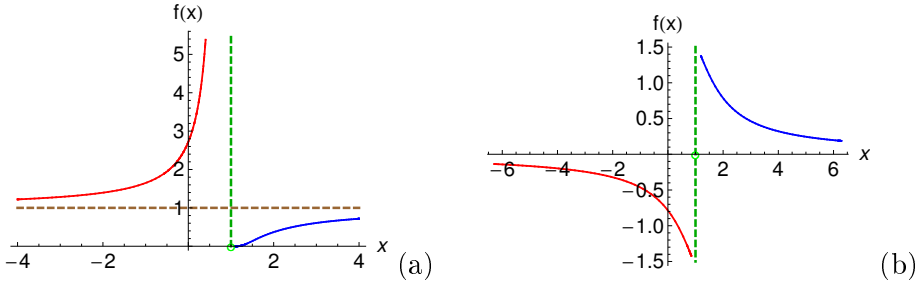
(a) (b)

Σχήμα 8.1.4 - 12: Άσκηση: (a) $2v$, (b) $2vi$.



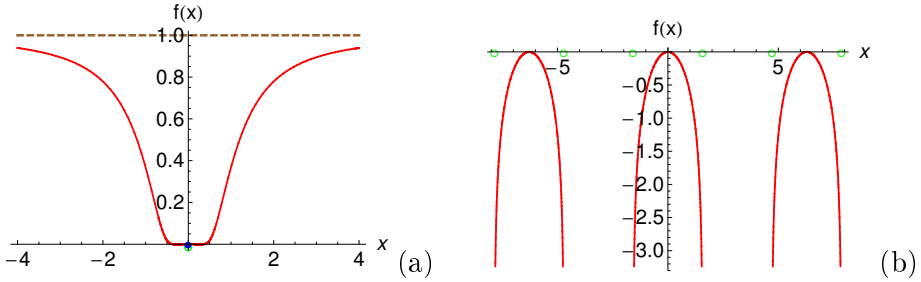
(a) (b)

Σχήμα 8.1.4 - 13: Άσκηση: (a) $3i$, (b) $3ii$.



(a) (b)

Σχήμα 8.1.4 - 14: Άσκηση: (a) $3iii$, (b) $3iv$.



(a) (b)

Σχήμα 8.1.4 - 15: Άσκηση: (a) $3v$, (b) $3vi$.

8.2 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[4] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Βιβλιογραφία για περαιτέρω μελέτη

Παπαδημητράκης, Μ. (2015). *Ανάλυση: Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής* *http://fourier.math.uoc.gr/papadim/analysis_n.pdf*
Πανεπιστήμιο Κρήτης: Τμήμα Μαθηματικών.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://eclass.uoa.gr/courses/MATH130/ θέση Έγγραφα
- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/

- http://eom.springer.de/

Μάθημα 9

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη του μαθήματος, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [2, 3, 4].

9.1 Ορισμοί και σχετικά θεωρήματα

9.1.1 Ορισμός παραγώγου

Αρχικά ορίζεται η κλίση μιας συνάρτησης ως εξής:[1]

Ορισμός 9.1.1 - 1 (κλίσης). *Έστω η συνάρτηση* $f \mid (a,b)$ *και σημείο* $x_0 \in (a,b)$. *Τότε για κάθε* $x \in (a,b) - \{x_0\}$ *με τον τύπο*

$$K_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (9.1.1 - 1)$$

ορίζεται μία συνάρτηση, που λέγεται πηλίκο διαφορών ή κλίση της f *στο σημείο* x_0.

Αν $x = x_0 + \Delta x$, οπότε

$$\Delta x = x - x_0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in (a,b) - \{x_0\}, \qquad (9.1.1 - 2)$$

[1] Βλέπε ανάλογο ορισμό στο Μάθημα *Αναλυτική Γεωμετρία*.

τότε ο τύπος $(17.3.1-1)$ γράφεται

$$K_{x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\,. \qquad (9.1.1\text{ - }3)$$

Ορισμός 9.1.1 - 2 (παραγώγου). *Έστω η συνάρτηση $f\,|\,(a,b)$ και σημείο $x_0 \in (a,b)$. Τότε θα λέγεται ότι η f παραγωγίζεται στο σημείο x_0 τότε και μόνον, όταν η οριακή τιμή*

$$\lim_{x\to x_0} K_{x_0}(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (9.1.1\text{ - }4)$$

υπάρχει.

Η $(17.3.1-4)$ θα λέγεται τότε η 1ης τάξης παράγωγος (ή πολλές φορές απλά παράγωγος) της f στο x_0 και θα συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Έχοντας υπόψη την $(17.3.1-2)$, η $(17.3.1-4)$ ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} && (9.1.1\text{ - }5)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\,. && (9.1.1\text{ - }6) \end{aligned}$$

Ορισμός 9.1.1 - 3. *Έστω η συνάρτηση $f\,|\,(a,b)$ Τότε θα λέγεται ότι η f παραγωγίζεται στο (a,b) τότε και μόνον, όταν υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)$ για κάθε $x_0 \in (a,b)$.*

Στην περίπτωση αυτή συμβολικά γράφεται

$$f'(x) = f^{(1)}(x) = \frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{d\,y}{dx} = D^1 f(x) = D\,f(x), \qquad (9.1.1\text{ - }7)$$

όπου το σύμβολο (τελεστής) $D = D^1 = \frac{d}{dx}$ θα συμβολίζει στο εξής την 1ης τάξης παράγωγο μιας συνάρτησης με μεταβλητή x.

Παρατηρήσεις 9.1.1 - 1

Από τους Ορισμούς 17.3.1 - 2 και 17.3.1 - 3 προκύπτουν τα εξής:

i) η $f'(x_0)$, εφόσον υπάρχει, είναι πραγματικός αριθμός, ενώ

ii) η $f'(x)$ είναι συνάρτηση.

Ορισμός 9.1.1 - 4. *Έστω ότι της συνάρτησης* $f\,|\,(a,b)$ *υπάρχει η* $f'(x)$ *για κάθε* $x \in (a,b)$. *Τότε θα λέγεται ότι υπάρχει η* **2ης τάξης** *παράγωγος της* f *στο* (a,b) *τότε και μόνον, όταν υπάρχει η παράγωγος της* $f'(x)$ *για κάθε* $x \in (a,b)$.

Στην περίπτωση αυτή συμβολικά γράφεται

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\,f(x)}{dx}\right) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = D^2 f(x), \qquad (9.1.1 - 8)$$

όπου το $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ συμβολίζει τον τελεστή της 2ης τάξης παραγώγου μιας συνάρτησης με μεταβλητή x. Διευκρινίζεται ότι $\frac{d^2}{dx^2} \neq \left(\frac{d}{dx}\right)^2$.

Ανάλογα ορίζονται οι παράγωγοι:

3ης τάξης:

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3} = D^3 f(x), \qquad (9.1.1 - 9)$$

όπου το $D^3 = \frac{d^3}{dx^3}$ συμβολίζει τον τελεστή της 3ης τάξης παραγώγου μιας συνάρτησης με μεταβλητή x, και γενικά η

ν - τάξης:

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{\nu-1} f(x)}{dx^{\nu-1}}\right) = \frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu} = D^\nu f(x), \qquad (9.1.1 - 10)$$

όπου όμοια ο τελεστής $D^\nu = \frac{d^\nu}{dx^\nu}$ συμβολίζει την ν-τάξης παράγωγο μιας συνάρτησης με μεταβλητή x.

Ειδικά ορίζεται ότι

$$f^{(0)}(x) = f(x). \qquad (9.1.1 - 11)$$

Σύμφωνα με τον τύπο $(17.3.1 - 5)$ αποδεικνύονται οι παράγωγοι των κυριότε-ρων στοιχειωδών συναρτήσεων του Πίνακα 9.1.1 - 1.

9.1.2 Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου

Έστω η συνάρτηση $y = f(x)|\,(a,b)$. Τότε όπως είναι γνωστό, αν Oxy είναι ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, το σύνολο των σημείων του επιπέδου

$$G_f = \{(x, f(x)) \quad \text{με} \quad x \in (a,b)\} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad (9.1.2 - 1)$$

Πίνακας 9.1.1 - 1: παραγώγων των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων.

α / α	Συνάρτηση	Παράγωγος
1	x^a με a ρητό	ax^{a-1}
2	e^x	e^x
3	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
4	$\sin x$	$\cos x$
5	$\cos x$	$-\sin x$
6	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
7	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
8	$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
9	$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10	$\cos^{-1} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$\sinh x$	$\cosh x$
12	$\cosh x$	$\sinh x$
13	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = \left[1 - \tanh^2 x\right]$
14	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} = \left[1 - \coth^2 x\right]$

ορίζει το διάγραμμα της συνάρτησης f. Έστω τώρα τα σημεία $x_0 \in (a,b)$ και $x_1 = x_0 + \Delta x \in (a,b)$, όταν το Δx δίνεται από την $(17.3.1-2)$, με αντίστοιχα σημεία στο διάγραμμα της f τα $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ και $B\left(x_0+\Delta x, f\left(x_0+\Delta x\right)\right)$. Η ευθεία AB λέγεται τότε και τέμνουσα ευθεία (secant line) του διαγράμματος της f στα σημεία A και B. Στο Σχ. 9.1.2 - 1 είναι $AB = \Delta x$ και $CB = f\left(x_0+\Delta x\right) - f\left(x_0\right) = \Delta y$. Η κλίση ή διαφορετικά ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB θα δίνεται τότε από τη σχέση[2]

$$\lambda = \tan\theta = \frac{f\left(x_0+\Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,,$$

οπότε η εξίσωση της τέμνουσας ευθείας θα είναι

$$y - f\left(x_0\right) = \lambda\left(x - x_0\right). \qquad (9.1.2\text{ - }2)$$

Ο τύπος $(9.1.2-2)$ τότε για όλα τα Δx με $\Delta x \neq 0$ και $x_0 + \Delta x \in D$ ορίζει το σύνολο όλων των ευθειών που τέμνουν το διάγραμμα της f στο σημείο $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$.

Έστω τώρα ότι το Δx τείνει στο μηδέν, δηλαδή το σημείο C τείνει στο A. Τότε το σημείο B κινούμενο επί του διαγράμματος της f τείνει να συμπέσει όμοια με το σημείο A, η κάθετη πλευρά CB του τριγώνου ABC τείνει να λάβει μία οριακή τιμή, έστω dy, ενώ η τέμνουσα ευθεία AB τείνει να γίνει η εφαπτομένη του διαγράμματος της f στο σημείο $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$. Υποθέτοντας τώρα ότι υπάρχει η παράγωγος $f'\left(x_0\right)$ έχουμε στην περίπτωση αυτή ότι[3]

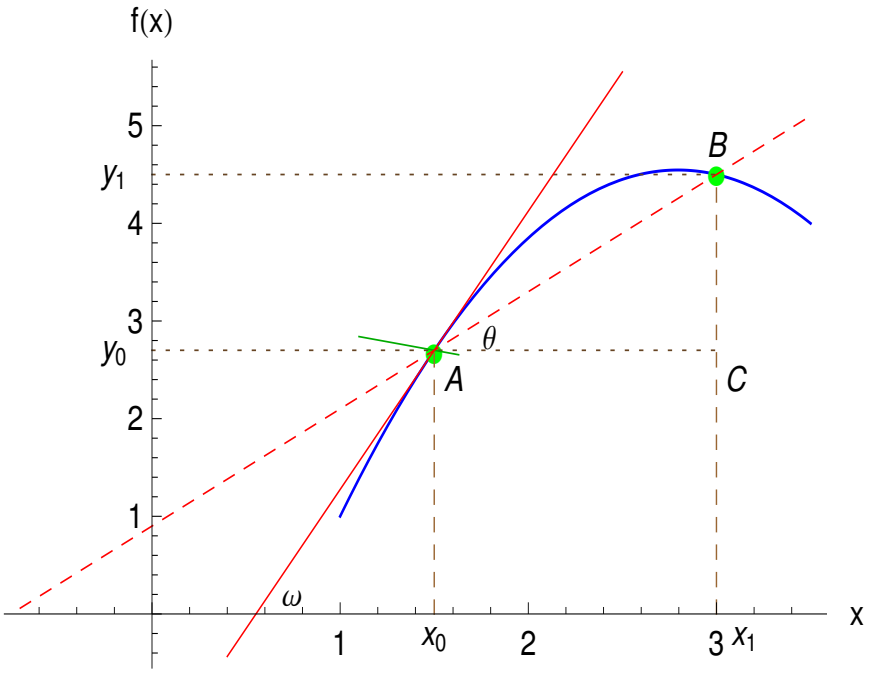
$$\begin{aligned} f'\left(x_0\right) = \tan\omega &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0+\Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x} \\ &= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{d\,f(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \end{aligned} \qquad (9.1.2\text{ - }3)$$

όπου $\tan\omega$ είναι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας του διαγράμματος της f στο σημείο $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$. Άρα έχει αποδειχθεί η πρόταση:

---

[2] Βλέπε όμοια Μάθημα *Αναλυτική Γεωμετρία*.

[3] Ο συμβολισμός dx οφείλεται στον Leibniz. Στα μαθηματικά συμβολίζει το **απειροστό** ή το ελάχιστο δυνατό x. Τότε στο απειροστό αυτό dx αντιστοιχεί η απειροστή μεταβολή dy της συνάρτησης $y = f(x)$.



Σχήμα 9.1.2 - 1: Γεωμετρική σημασία παραγώγου: σημεία x_0, $y_0 = f(x_0)$, $x_1 = x_0 + \Delta x$ και $y_1 = f(x_0 + \Delta x)$. Εφαπτόμενη η κόκκινη συνεχής και κάθετη η πράσινη ευθεία.

Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου

Πρόταση 9.1.2 - 1. *Η παράγωγος $f'(x_0)$ μιας συνάρτησης $y = f(x) \,|\, (a,b)$ στο σημείο $x_0 \in (a,b)$ ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ή διαφορετικά με τον* **συντελεστή διεύθυνσης** *της εφαπτομένης του διαγράμματος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.*

Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση της **εφαπτόμενης ευθείας** (tangent line) θα δίνεται από τον τύπο

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \tag{9.1.2 - 4}$$

ενώ της **κάθετης ευθείας** (normal tangent line) του διαγράμματος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, εφόσον $(x_0, f(x_0)) \neq 0$, από τον

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{9.1.2 - 5}$$

Παρατήρηση 9.1.2 - 1

Αν $f'(x_0) = 0$, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 9.1.2 - 1 η εφαπτόμενη θα είναι **παράλληλη** στον x-άξονα ή θα συμπίπτει με αυτόν, τότε η εξίσωσή της είναι

- $$y = f(x_0), \quad \text{ενώ} \tag{9.1.2 - 6}$$
- της κάθετης ευθείας
$$x = x_0. \tag{9.1.2 - 7}$$

Παράδειγμα 9.1.2 - 1

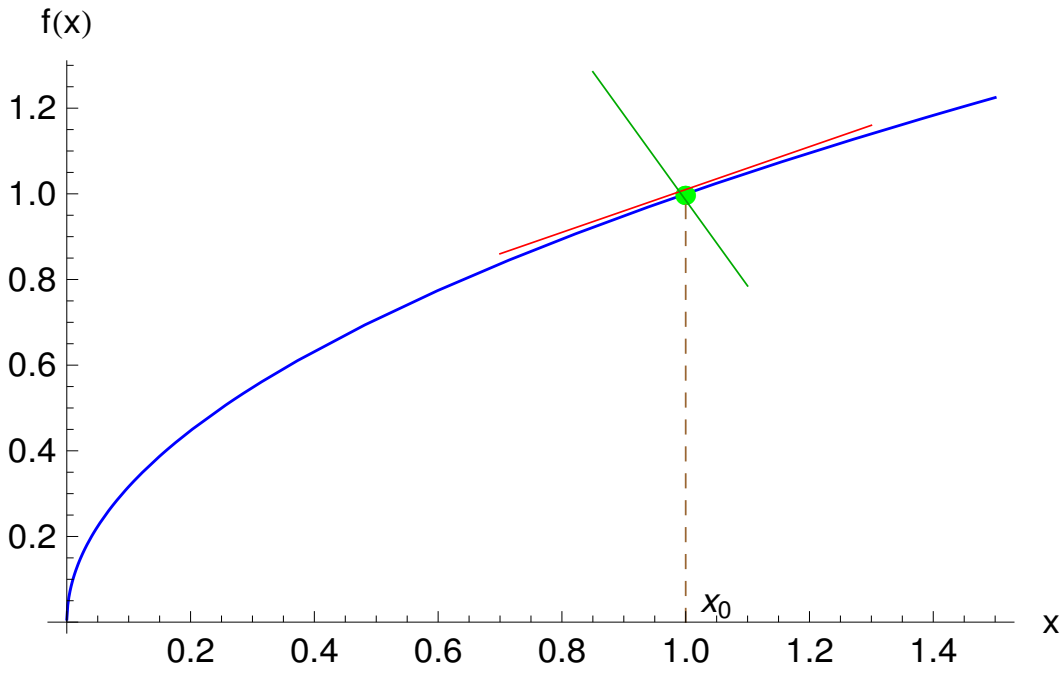
Να υπολογιστεί η εξίσωση της εφαπτόμενης και της κάθετης σε αυτή ευθείας στην παραβολή με εξίσωση

$$y = f(x) = x^{1/2}$$

στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ (Σχ. 9.1.2 - 2).

Λύση. Επειδή

$$x_0 = 1 \quad \text{είναι} \quad y_0 = f(x_0) = \sqrt{x_0} = 1.$$



Σχήμα 9.1.2 - 2: Παράδειγμα 9.1.2 - 2 με σημείο $x_0 = 1$. Εφαπτόμενη η κόκκινη συνεχής και κάθετη η πράσινη ευθεία.

Τότε σύμφωνα με τον τύπο 1 του Πίνακα 9.1.1 - 1 όπου $x^a = x^{1/2}$, δηλαδή $a = 1/2$, προκύπτει ότι

$$f'(x) = \frac{1}{2}\, x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{οπότε} \quad f'(x_0) = \frac{1}{2}\,.$$

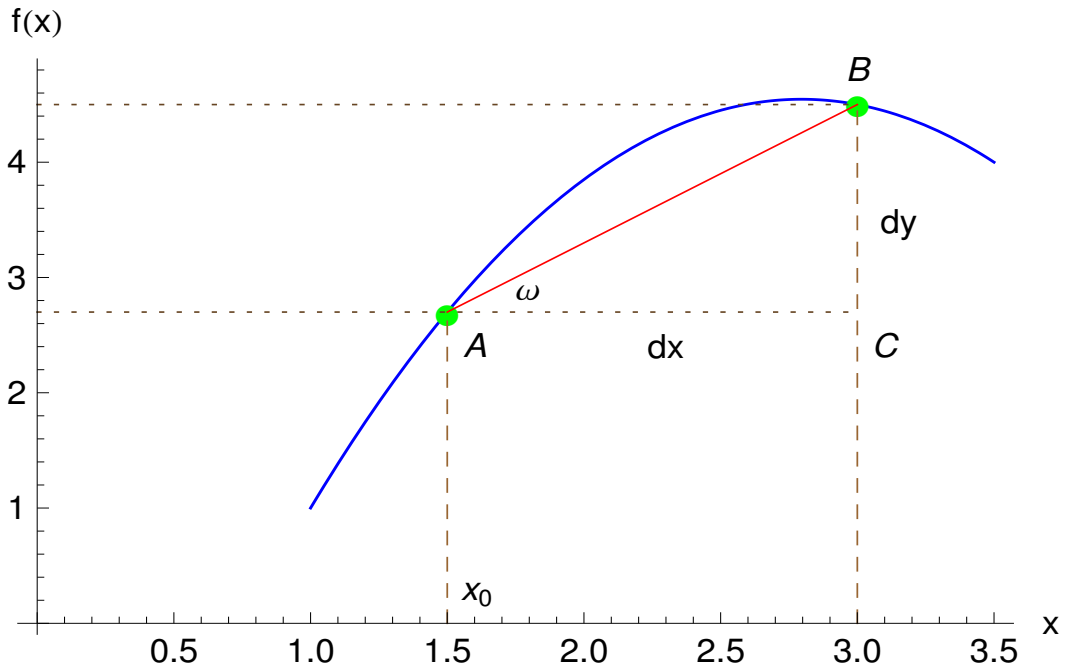
Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο $(9.1.2-4)$, η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$y - 1 = \frac{1}{2}\,(x-1), \quad \text{δηλαδή} \quad x - 2y + 1 = 0,$$

ενώ με τον τύπο $(9.1.2-5)$ της κάθετης

$$y - 1 = -2\,(x-1), \quad \text{δηλαδή} \quad 2x + y - 3 = 0.$$

■



Σχήμα 9.1.3 - 1: Γεωμετρική ερμηνεία διαφορικού στο σημείο x_0, όταν $\tan\omega = f'(x_0)$.

9.1.3 Διαφορικό συνάρτησης

Ορισμός 9.1.3 - 1. *Έστω η συνάρτηση* $f\,|\,(a,b)$ *και σημείο* $x_0 \in (a,b)$. *Τότε, αν υπάρχει η* $f'(x_0)$, *το διαφορικό (differential)* 1*ης τάξης της* f *στο* x_0 *συμβολίζεται* $d\,f(x)|_{x=x_0}$ *και ισούται με*

$$d\,f(x)|_{x=x_0} = f'(x_0)\,dx. \qquad (9.1.3\text{ - }1)$$

Γεωμετρικά το διαφορικό 1ης τάξης dy ισούται με την οριακή τιμή της πλευράς CB (Σχ. 9.1.3 - 1), όταν το σημείο C τείνει στο A, δηλαδή η πλευρά CA τείνει στο μηδέν, οπότε ελαχιστοποιείται λαμβάνοντας μια ελάχιστη ή όπως έχει ήδη γραφεί στη γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου (Υποσημείωση 3) την απειροστή τιμή dx. Το dx λέγεται και απειροστό της μεταβλητής.

Ορισμός 9.1.3 - 2. *Έστω ότι η συνάρτηση* $y = f(x)$ *παραγωγίζεται για κάθε* $x \in (a,b)$. *Τότε το διαφορικό* 1*ης τάξης της* f *στο* (a,b) *συμβολίζεται* $d\,f(x)$ *ή* dy *και ισούται με*

$$dy = d\,f(x) = f'(x)\,dx \quad \textit{για κάθε} \quad x \in (a,b). \tag{9.1.3 - 2}$$

Σημείωση 9.1.3 - 1

Εφαρμογές του τύπου (9.1.3−2) θα δοθούν στο Μάθημα *Αόριστο Ολοκλήρωμα*.

Υποθέτοντας τώρα ότι υπάρχουν στο (a,b) οι παράγωγοι της f μέχρι και ν-τάξης, είναι δυνατόν να οριστεί επαγωγικά το ν-τάξης διαφορικό της συνάρτησης $f(x)$ ως εξής:

$$d^{\nu}y = d\left(d^{\nu-1}y\right) = f^{(\nu)}(x)dx^{\nu} \tag{9.1.3 - 3}$$

για κάθε $\nu = 2,\, 3,\, \ldots$.

9.1.4 Κανόνες παραγώγισης

Δίνονται στη συνέχεια χωρίς απόδειξη οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης:

Πρόταση 9.1.4 - 1 (παράγωγος σταθεράς συνάρτησης). *Έστω η συνάρτηση* $f\,|\,\mathbb{R}$ *όπου* $f(x) = c$ *σταθερά για κάθε* $x \in \mathbb{R}$. *Τότε*

$$f'(x) = 0 \quad \textit{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Πρόταση 9.1.4 - 2. *Έστω ότι οι συναρτήσεις* $f,\, g\,|\,(a,b)$ *είναι παραγωγίσιμες στο* (a,b). *Τότε ισχύει*

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad \textit{για κάθε} \quad x \in (a,b). \tag{9.1.4 - 1}$$

Πόρισμα 9.1.4 - 1 (γενίκευση παραγώγου αθροίσματος). *Έστω ότι οι συναρτήσεις* $f_1, \ldots, f_\nu \,|\, (a,b)$ *είναι παραγωγίσιμες στο* (a,b). *Τότε*

$$[f_1(x) + \ldots + f_\nu(x)]' = f_1'(x) + \ldots + f_\nu'(x) \qquad (9.1.4 - 2)$$

για κάθε $x \in (a,b)$.

Πρόταση 9.1.4 - 3 (παράγωγος γινομένου). *Έστω ότι οι συναρτήσεις* $f,\, g \,|\, (a,b)$ *είναι παραγωγίσιμες στο* (a,b). *Τότε ισχύει*

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in (a,b). \qquad (9.1.4 - 3)$$

Πόρισμα 9.1.4 - 2. *Έστω ότι οι συναρτήσεις* $f,\, g,\, h \,|\, (a,b)$ *είναι παραγωγίσιμες στο* (a,b). *Τότε*

$$\begin{aligned}[f(x)\, g(x)\, h(x)]' \;&=\; f'(x)\, g(x)\, h(x) + f(x)\, g'(x)\, h(x) \\ &\quad + f(x)\, g(x)\, h'(x) \qquad (9.1.4 - 4)\end{aligned}$$

για κάθε $x \in (a,b)$.

Η Πρόταση 9.1.4 - 3 επίσης γενικεύεται.

Επειδή προφανώς ισχύει

$$(\lambda f(x))' = \lambda f'(x), \quad \text{όταν} \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ σταθερά},$$

από τις Προτάσεις 9.1.4 - 1 και 9.1.4 - 3 προκύπτει η παρακάτω **γραμμική ιδιότητα**

$$[k\, f(x) + \lambda g(x)]' = k\, f'(x) + \lambda\, g'(x) \qquad (9.1.4 - 5)$$

για κάθε $x \in (a,b)$, που επίσης γενικεύεται.

Πρόταση 9.1.4 - 4 (παράγωγος πηλίκου). *Αν η συνάρτηση* $f \,|\, (a,b)$ *παραγωγίζεται στο* (a,b) *και επιπλέον υπάρχει* $x_0 \in (a,b)$, *έτσι ώστε* $f'(x_0) \neq 0$, *τότε*

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]'_{x=x_0} = -\frac{f'(x_0)}{f^{\,2}(x)}\,. \qquad (9.1.4 - 6)$$

Πόρισμα 9.1.4 - 3. *Έστω ότι οι συναρτήσεις* $f,\, g\,|\,(a,b)$ *είναι παραγωγίσιμες στο* (a,b) *και επιπλέον* $g'(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in (a,b)$. *Τότε ισχύει*

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{για κάθε} \quad x \in (a,b). \qquad (9.1.4 - 7)$$

Πόρισμα 9.1.4 - 4. *Αν η* $f\,|\,(a,b)$ *είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο* (a,b), *τότε*

$$[f^{\,\nu}(x)]' = \nu f^{\,\nu-1}(x) f'(x) \qquad (9.1.4 - 8)$$

για κάθε $x \in D$ *με* $\nu = 2,\, 3,\, \ldots$.

Απόδειξη. Η απόδειξη του τύπου $(9.1.4 - 8)$ προκύπτει ή επαγωγικά ή από τον τύπο $(9.1.4 - 4)$, αν τεθεί

$$f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_\nu(x) = f(x).$$

■

9.1.5 Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Θεώρημα 9.1.5 - 1. *Έστω οι συναρτήσεις* $y = f(w)\,|\,D_1$ *και* $w = g(x)\,|\,D_2$, *όπου* $g\,(D_2) \subseteq D_1$ *και* $D_1,\, D_2$ *ανοικτά διαστήματα και η προκύπτουσα σύνθετη συνάρτηση* $F(x) = (f \circ g)\,(x) = f(g(x))$ *για κάθε* $x \in D_2$. *Έστω επίσης ότι για ένα σημείο* $x_0 \in D_2$ *υπάρχουν οι παράγωγοι* $g'\,(x_0) = w_0'$ *και* $y_0' = f'\,(w_0)$. *Τότε υπάρχει και η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης* $F(x)|D_2$ *στο σημείο* $x_0 \in D_2$ *και ισχύει*

$$\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x\,=\,x_0} = \left.\frac{df(w)}{dw}\right|_{w\,=\,w_0} \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x\,=\,x_0} = y_0'\; w_0'. \qquad (9.1.5 - 1)$$

Σημείωση 9.1.5 - 1

Ο τύπος $(9.1.5 - 1)$ είναι γνωστός ως ο **αλυσιδωτός κανόνας** (chain rule) παραγώγισης και, όταν ισχύει για κάθε $x \in D_2$, γράφεται

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)}\,\frac{dg(x)}{dx} = f_g\, g_x. \qquad (9.1.5 - 2)$$

Πίνακας 9.1.5 - 1: παραγώγων των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων.

α / α	Συνάρτηση	Παράγωγος
1	$f^a(x)$	$af'(x)f^{a-1}(x)$
2	$e^{f(x)}$	$f'(x)e^{f(x)}$
3	$\ln f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
4	$\sin f(x)$	$f'(x)\cos f(x)$
5	$\cos f(x)$	$-f'(x)\sin f(x)$
6	$\tan f(x)$	$\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
7	$\cot f(x)$	$-\frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$
8	$\tan^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$
9	$\sin^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
10	$\cos^{-1} f(x)$	$-\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
11	$\sinh f(x)$	$f'(x)\cosh f(x)$
12	$\cosh f(x)$	$f'(x)\sinh f(x)$
13	$\tanh f(x)$	$\frac{f'(x)}{\cosh^2 f(x)} = f'(x)\left[1-\tanh^2 f(x)\right]$
14	$\coth f(x)$	$-\frac{f'(x)}{\sinh^2 f(x)} = f'(x)\left[1-\coth^2 f(x)\right]$

Οι παράγωγοι των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων δίνονται στη συνέχεια χωρίς απόδειξη στον Πίνακα 14.2.2 - 1.

Παράδειγμα 9.1.5 - 1

Έστω

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Τότε σύμφωνα με τον τύπο (2) του Πίνακα 14.2.2 - 1 θα είναι

$$f'(x) = \left(-x^2\right)' e^{-x^2} = -2xe^{-x^2},$$

ενώ σύμφωνα και με τον κανόνα παραγώγισης γινομένου

$$f''(x) = (-2x)'e^{-x^2} - 2x\left(e^{-x^2}\right)' = -2\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}.$$

Όμοια υπολογίζεται ότι

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= -4x\, e^{-x^2}\left(-3+2x^2\right), \quad \text{και} \\ f^{(4)}(x) &= 4e^{-x^2}\left(3-12x^2+4x^4\right). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.1.5 - 2

Έστω

$$f(x) = \sin^2 3x = (\sin 3x)^2.$$

Όμοια από τους τύπους (1) και (4) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sin 3x)^{2-1}(\sin 3x)' = 2\sin 3x\, \cos 3x\, (3x)' \\ &= 3\cdot \overbrace{2\sin 3x\, \cos 3x}^{\sin 6x} = 3\sin 6x, \quad \text{και} \\ f''(x) &= (3\sin 6x)' = 3\,(6x)'\sin 6x = 18\sin 6x. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.1.5 - 3

Έστω

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad \text{όπου} \quad -1 < x < 1.$$

Από τον τύπο (3) και το Πόρισμα 9.1.4 - 3, έχουμε

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1-x^2}$$

και

$$f''(x) = -\frac{\left(1-x^2\right)'}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2},$$

ενώ σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου είναι

$$f^{(3)}(x) = 2\,\frac{x'\left(1-x^2\right)^2 - \overbrace{\left[\left(1-x^2\right)^2\right]'}^{2\left(1-x^2\right)^2(-2x)}}{\left(1-x^2\right)^4} = -\frac{2\left(1+3x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^3}.$$

Παράδειγμα 9.1.5 - 4

Έστω

$$f(x) = \sqrt[3]{1-x^2} = \left(1-x^2\right)^{1/3}.$$

Τότε σύμφωνα με το τύπο (1) είναι

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{-2/3}\left(1-x^2\right)' = -\frac{2}{3}x\left(1-x^2\right)^{-2/3}.$$

Παράδειγμα 9.1.5 - 5

Αν

$$f(x) = \ln(1+x) + \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

να υπολογιστεί η $f'(1)$.

Λύση. Σύμφωνα με τους τύπους (3) και (9) έχουμε ότι

$$f'(x) = \frac{(1+x)'}{1+x} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}},$$

οπότε

$$f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

■

Παράδειγμα 9.1.5 - 6

Να υπολογιστεί η 2ης τάξης παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = \tan^{-1} 2x.$$

Λύση. Αρχικά σύμφωνα με τον τύπο (8) είναι

$$f'(x) = \frac{(2x)'}{1+(2x)^2} = \frac{2}{1+4x^2}\,,$$

οπότε σύμφωνα με το Πόρισμα 9.1.4 - 3, έχουμε

$$f''(x) = -2\,\frac{\overbrace{\left(1+4x^2\right)'}^{4\cdot 2x}}{\left(1+4x^2\right)^2} = -\frac{16x}{\left(1+4x^2\right)^2}\,.$$

■

Παράδειγμα 9.1.5 - 7

Να υπολογιστεί η ν-τάξης παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = 2^x.$$

Λύση. Από την ταυτότητα

$$a^x = e^{x\ln a} \quad \text{με } a>0 \text{ και } x\in\Re,$$

προκύπτει ότι

$$f'(x) = \left(e^{x\ln 2}\right)' = (x\ln 2)'\ e^{x\ln 2} = 2^x\ln 2.$$

Όμοια $f''(x) = 2^x(\ln 2)^2$ και γενικά

$$f^{(\nu)}(x) = 2^x(\ln 2)^\nu \quad \text{με} \quad \nu = 1,\,2,\,\ldots\,.$$

■

Παράδειγμα 9.1.5 - 8

Έστω

$$f(x) = \text{sech}x.$$

Τότε, επειδή

$$\text{sech}x = \frac{1}{\cosh x},$$

σύμφωνα με το Πόρισμα 9.1.4 - 3, έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{(\cosh x)'}{\cosh^2 x} = -\frac{\sinh x}{\cosh^2 x} \\ &= -\frac{1}{\cosh x}\frac{\sinh x}{\cosh x} = -\text{sech}x\,\tanh x. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.1.5 - 9

Έστω

$$f(x) = \tanh 2x.$$

Τότε σύμφωνα με τον τύπο (13) είναι

$$f'(x) = \frac{(2x)'}{\cosh^2 2x} = \frac{2}{\cosh^2 2x} = 2\,\text{sech}^2 2x.$$

Αν $x = 0$, είναι

$$f'(0) = 2\left(\frac{2}{e^{2\cdot 0} + e^{-2\cdot 0}}\right)^2 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της εφαπτομένης και της καθέτου των παρακάτω καμπυλών στα έναντι σημεία:

i) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ στο σημείο $x_0 = -2$,

ii) $y = (x-1)^{1/3}$ στο $x_0 = 2$,

iii) $y = \tan^{-1} 2x$ στο $x_0 = 0$,

iv) $y = e^{1-x^2}$ στο σημείο τομής με την ευθεία $y = 1$,

v) $y = \sin^{-1}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$ στο σημείο τομής με τον x-άξονα,

vi) $y = \cos^{-1} 3x$ στο σημείο τομής με τον y-άξονα.

2. Να υπολογιστεί το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της καμπύλης $y = x^2 - 7x + 3$ είναι παράλληλη στην ευθεία $5x + y - 3 = 0$.

3. Να προσδιοριστούν τα σημεία στα οποία οι εφαπτόμενες της καμπύλης

$$y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$$

είναι παράλληλες στον x-άξονα.

4. Να υπολογιστούν οι 1ης τάξης παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$:

i) $\ln(\sin 2\,x)$

ii) $e^{-x}\,(2\sin 2x - \cos 2x)$

iii) $\cos^3 \omega\, x$

iv) $\ln\left(x^2 + x + 1\right)$

v) $x^2 \tan 2x$

vi) $\sin^2 \omega\, x$

vii) $\cos x^2$

viii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

ix) 2^{-x}

x) $\left(1 - x^2\right)^{1/2}$

xi) $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

xii) $\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

xiii) $\tan^{-1}\left(\sqrt{x}\,\right)$

xiv) $\sin^{-1}\dfrac{x}{2}\,.$

5. Να υπολογιστούν οι 2ης τάξης παράγωγοι των αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων.

6. Όμοια οι 2ης τάξης παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$:

i) $\dfrac{1-x}{1+x}$

ii) $\tan^{-1} 2x$

iii) e^{-x^2}

iv) $x\, e^{-3x}$

v) $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

vi) $\sin^2 \omega x$

vii) 3^x

viii) $\cosh\left(\dfrac{x}{2}\right).$

7. Όμοια οι ν-τάξης παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

i) e^{-3x} *iii)* $\ln x$

ii) $a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *iv)* $\dfrac{1}{1-x}$.

8. Δείξτε ότι η παράγωγος μιας άρτιας συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση, ενώ η παράγωγος μιας περιττής είναι άρτια συνάρτηση.

9. Δείξτε ότι η παράγωγος μιας περιοδικής συνάρτησης είναι όμοια περιοδική συνάρτηση.

10. Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις επαληθεύονται από τις έναντι συναρτήσεις:

i) $L\dfrac{d\,i}{d\,t} + Ri = E$ από την $i = i(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-R\,t/L}\right)$,

ii) $L\dfrac{d^2 i}{d\,t^2} + R\dfrac{d\,i}{d\,t} + \dfrac{i}{C} = 0$ από την $i = i(t) = (c_1 + t c_2)\, e^{-R\,t/(2L)}$,

όταν $R^2 = 4L/C$,

iii)

$$x^2 y'' + (1 - 2\nu)xy' + \left(1 + \nu^2\right) y = 0$$

από την $y = x^\nu\,[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)]$.

11. Να δειχθεί ότι

i) η 3ης τάξης παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = e^{1/x}$ με $x \neq 0$ είναι της μορφής

$$f^{(3)}(x) = (-1)^3 P_2(x) x^{-2\cdot 3}\, e^{1/x},$$

όπου $P_2(x)$ πολυώνυμο βαθμού 2,

ii) η 2ης τάξης παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \left(1 + x^2\right)^{-1/2}$ είναι της μορφής

$$f^{(2)}(x) = \left(1 + x^2\right)^{-2-1/2}\; P_2(x),$$

όπου $P_2(x)$ πολυώνυμο βαθμού 2.

Απαντήσεις

1. Ανάλογα με το Παράδειγμα 9.1.2 - 1 έχουμε τα εξής:
(i) αν $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, τότε $x_0 = -2$, $y_0 = f(-2) = 5$ και $f'(0) = 0$. Άρα σύμφωνα με τον τύπο $(9.1.2-6)$ η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας είναι $y = 5$, ενώ με τον τύπο $(9.1.2-7)$ της κάθετης $x = -2$.
(ii) Όμοια είναι $f(x) = (x-1)^3$, $x_0 = 2$, $y_0 = f(2) = 1$ και $f'(2) = 3$, οπότε σύμφωνα με τον τύπο $(9.1.2-4)$ η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας είναι $y - 3x + 5 = 0$, ενώ με τον τύπο $(9.1.2-5)$ της κάθετης $3y + x - 5 = 0$.
(iii) $f(x) = \tan 2x$, $x_0 = 0$, $y_0 = f(0) = 0$ και $f'(2) = 2$, οπότε από τον τύπο $(9.1.2-4)$ η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας είναι $y - 2x = 0$, ενώ από τον $(9.1.2-5)$ της κάθετης $2y + x = 0$.
(iv) Τα κοινά σημεία υπολογίζονται θέτοντας $f(x) = e^{1-x^2} = 1 = e^0$, οπότε $1 - x^2 = 0$, δηλαδή $x = \pm 1$. Τότε αν

- $x_0 = 1$, $y_0 = f(1) = 1$ και $f'(1) = -2$, οπότε από τον τύπο $(9.1.2-4)$ η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας είναι $y + 2x - 3 = 0$, ενώ από τον $(9.1.2-5)$ της κάθετης $2y - x - 1 = 0$,
- $x_0 = -1$, $y_0 = f(-1) = 1$ και $f'(1) = 2$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας είναι $y - 2x - 3 = 0$, ενώ της κάθετης $2y + x - 1 = 0$,

(v) Τα κοινά σημεία υπολογίζονται θέτοντας $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) = 0$, οπότε $x_0 = 1$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο 9 του Πίνακα 14.2.2 - 1 είναι $f'(x) = \left(3 + 2x - x^2\right)^{-1/2}$ και άρα $f'(1) = \frac{1}{2}$, οπότε από τον τύπο $(9.1.2-4)$ η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας είναι $2y - x + 1 = 0$, ενώ από τον $(9.1.2-5)$ της κάθετης $y + 2x - 2 = 0$.
(vi) Στο σημείο τομής με τον y-άξονα πρέπει $x = 0$. Έστω $f(x) = \cos^{-1} 3x$, οπότε $y_0 = f(0) = \frac{\pi}{2}$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο 10 του Πίνακα 14.2.2 - 1 είναι $f'(x) = -3\left(1 - 9x^2\right)^{-1/2}$ και άρα $f'(0) = -3$, οπότε από τον τύπο $(9.1.2-4)$ η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας είναι $2y + 6x - \pi = 0$, ενώ από τον $(9.1.2-5)$ της κάθετης $6y - 2x - 3\pi = 0$.

2. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι $\lambda = -A/B$ (βλέπε Μάθημα *Αναλυτική Γεωμετρία*), οπότε για την $5x + y - 3 = 0$ έχουμε $\lambda = -5$. Έστω $f(x) = x^2 - 7x + 3$. Τότε λόγω της παραλληλίας πρέπει $f'(x) = -5$ και συνεπώς τελικά το σημείο είναι το $(1, -3)$.

3. Λόγω της παραλληλίας με τον x-άξονα πρέπει $y' = 0$, οπότε $x_0 = -2,\ 0,\ 1$.

4. (i) $2\cot 2x$, (ii) $5e^{-x}\cos 2x$, (iii) $-3\omega\cos^2\omega x \sin\omega x$, (iv) $\frac{1+2x}{1+x+x^2}$,
(v) $\frac{2x}{1+4x^2} + \tan^{-1} 2x$, (vi) $\omega \sin 2\omega x$, (vii) $-2x\sin x^2$, (viii) $-\frac{1}{1+x^2}$, (ix) $-2^{-x}\ln 2$,
(x) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, (xi) $-\frac{\sqrt{1+x}}{(1+x)^2\sqrt{1-x}}$, (xii) $\frac{1}{x(x+1)}$, (xiii) $\frac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}$, (xiv) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

5. $(\sinh^{-1} x)'' = -\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$, $(\cosh^{-1} x)'' = -\frac{x}{(x-1)^{3/2}(x+1)^{3/2}}$,
$(\tanh^{-1} x)'' = \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$, $(\coth^{-1} x)'' = \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$.

6. (i) $\frac{4}{(1+x)^3}$, (ii) $-\frac{16x}{\left(1+4x^2\right)^2}$, (iii) $2\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}$, (iv) $3(3x-2)e^{-3x}$,

(v) $-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$, (vi) $2\omega^2\cos 2\omega x$, (vii) $3^x\,\ln^2 3$ (viii) $\frac{1}{4}\cosh\frac{x}{2}$.
7. (i) $(-1)^\nu 3^\nu e^{-3x}$, (ii) $a_\nu\,\nu!$, (iii) $(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!x^{-\nu}$, (iv) $\frac{\nu!}{(1-x)^{\nu+1}}$.
8. Είναι $[f(-t)]' = (-t)'f(-t) = -f(-t)$ κ.λπ. **9.** Όμοια με 8.
10. Υπολογισμός των παραγώγων και αντικατάσταση στην αποδεικτέα.
11. (i) $P_2(x) = 6x^2+6x+1$, (ii) $P_2(x) = 2x^2-1$.

9.1.6 Παραμετρική παράγωγος

Έστω ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ έχει την παρακάτω παραμετρική μορφή:[4]

$$\begin{aligned} x &= \phi(t) \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \quad \text{όταν} \quad t\in[a,b] \qquad (9.1.6\text{ - }1)$$

και οι συναρτήσεις ϕ, ψ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες για κάθε $t\in(a,b)$.

Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1.5 - 1 και τον τύπο (9.1.5−2) αποδεικνύεται ότι για την παράγωγο[5] (parametric derivative), εφόσον $dx/dt = x_t \neq 0$, ισχύουν:

1ης τάξης παράγωγος

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

δηλαδή

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \text{ή και} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y_t}{x_t}. \qquad (9.1.6\text{ - }2)$$

2ης τάξης παράγωγος

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \left[\frac{\psi''(t)\phi'(t)-\psi'(t)\phi''(t)}{[\phi'(t)]^2}\right]\frac{1}{\phi'(t)}, \end{aligned}$$

[4] Για γεωμετρικές εφαρμογές των παραμετρικών παραστάσεων βλέπε Μάθημα *Αναλυτική Γεωμετρία*.
[5] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Parametric_derivative*

δηλαδή

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\phi'(t) - \psi'(t)\phi''(t)}{[\phi'(t)]^3} \quad \text{ή και}$$

$$= \frac{y_{tt}\, x_t - y_t\, x_{tt}}{x_t^3} \qquad (9.1.6 - 3)$$

Παράδειγμα 9.1.6 - 1

Έστω η συνάρτηση με παραμετρική μορφή

$$\begin{aligned} x &= 3\cos t = \phi(t) \\ y &= 2\sin t = \psi(t). \end{aligned} \qquad (9.1.6 - 4)$$

Τότε

$$\phi'(t) = x_t = -3\sin t, \quad \phi''(t) = x_{tt} = -3\cos t$$

$$\psi'(t) = y_t = 2\cos t, \quad \psi''(t) = y_{tt} = -2\sin t,$$

οπότε σύμφωνα με τον τύπο $(9.1.6-2)$ τότε είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos t}{-3\sin t} = -\frac{2}{3}\cot t,$$

ενώ με τον τύπο $(9.1.6-3)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-2\sin t)(-3\sin t) - 2\cos t(-3\cos t)}{(-3\sin t)^3} = \frac{2}{9\sin^3 t}\,.$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση $y = f(x)$ από την οποία έχει προκύψει η $(9.1.6-4)$ υπολογίζεται απαλείφοντας το t μεταξύ των x, y υψώνοντας στο τετράγωνο τις σχέσεις των, δηλαδή

$$x^2 = 9\cos^2 t \quad \text{και} \quad y^2 = 4\sin^2 t$$

και στη συνέχεια προσθέτοντας κατά μέλη, οπότε τελικά προκύπτει

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Επομένως πρόκειται για έλλειψη με κέντρο το $(0,0)$ και ημιάξονες $a = 3$ και $b = 2$.

Ο υπολογισμός των παραγώγων με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές:

Πρόγραμμα 9.1.6 - 1 (παραμετρική παράγωγος)

```
x[t_] := 3 Cos[t]
y[t_] := 2 Sin[t]
Print["Derivative dy/dx = ", Simplify[D[y[t], t]/D[x[t], t]]]
Print["Derivative d^2y/dx^2 = ",
 Simplify[(D[y[t], {t, 2}] D[x[t], t] -
    D[y[t], t] D[x[t], {t, 2}])/(D[x[t], t])^3]]
```

Άσκηση

Των παρακάτω παραμετρικών συναρτήσεων να γίνει η γραφική παράσταση και στη συνέχεια η 1ης και η 2ης τάξης παράγωγος:

$i)$ $\begin{aligned} x &= \ln t \\ y &= t^2 \end{aligned}$

$ii)$ $\begin{aligned} x &= \cos 2t \\ y &= \sin^2 t \end{aligned}$

$iii)$ $\begin{aligned} x &= a\left(\sin t - t\cos t\right) \\ y &= a\left(\cos t + t\sin t\right) \end{aligned}$

$iv)$ $\begin{aligned} x &= t - \sin t \\ y &= t - \cos t \end{aligned}$

$v)$ $\begin{aligned} x &= \sin^{-1} t \\ y &= \left(1-t^2\right)^{1/2} \end{aligned}$

$vi)$ $\begin{aligned} x &= \tan^{-1} t \\ y &= t \end{aligned}$

$vii)$ $\begin{aligned} x &= e^t \cos t \\ y &= e^t \sin t \end{aligned}$ αν $t = \dfrac{\pi}{3}$

$viii)$ $\begin{aligned} x &= \ln\left(1+t^2\right) \\ y &= t^2 \end{aligned}$ αν $t = 1$.

Απαντήσεις

(i) $\frac{dy}{dx} = 2t^2$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 4t^2$. Η γραφική παράσταση, όταν $t \in [0, e]$, γίνεται με την εντολή του MATHEMATICA:

```
ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0.1, E}]
```

(ii) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, (iii) $\frac{dy}{dx} = \cot t$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a\,t\sin^3 t}$,

(iv) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+\sin t}{1-\cos t}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1-\cos t+\sin t}{(\cos t-1)^3}$,

(v) $\frac{dy}{dx} = -t$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sqrt{1-t^2}$ (vi) $\frac{dy}{dx} = 1+t^2$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2t\left(1+t^2\right)$,

(vii) $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\pi/2} = \frac{-\cos t+\sin t}{\cos t+\sin t}\Big|_{t=\pi/2} = 1, \quad \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\pi/2} = -\frac{2e^t}{(\cos t+\sin t)^3}\Big|_{t=\pi/2} = -2e^{\pi/2},$

(viii) $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=1} = 1+t^2\big|_{t=1} = 2, \quad \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1} = 1+t^2\big|_{t=1} = 2.$

9.1.7 Πεπλεγμένη παράγωγος

Όταν η σχέση μεταξύ της ανεξάρτητης μεταβλητής x και της συνάρτησης $y = y(x)$ δίνεται με τη μορφή

$$f(x, y) = 0, \tag{9.1.7 - 1}$$

τότε λέγεται ότι έχουμε μία **πεπλεγμένη** συνάρτηση (implicit function). Η εύρεση της παραγώγου[6] (implicit derivative) μιας πεπλεγμένης συνάρτησης στις απλούστερες των περιπτώσεων είναι δυνατόν να υπολογιστεί ως εξής:

i) υπολογίζεται η παράγωγος με μεταβλητή x στο αριστερό μέλος της $(9.1.7-1)$, θεωρώντας το y ως συνάρτηση του x, δηλαδή υπολογίζεται η παράγωγος

$$\frac{df(x,y)}{dx} = 0\,, \tag{9.1.7 - 2}$$

ii) λύνεται η $(9.1.7-2)$ ως προς y'.

Παράδειγμα 9.1.7 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$x\,y + e^y = 0 \quad \text{όπου} \quad y = y(x).$$

Τότε παραγωγίζοντας έχουμε

$$x'y + x\,y' + y'e^y = 0 \quad \text{ή} \quad y + (x + e^y)\,y' = 0,$$

οπότε λύνοντας ως προς y' προκύπτει ότι

$$y' = -\frac{y}{x + e^y}\,.$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 9.1.7 - 1 (πεπλεγμένη παράγωγος)

```
f = D[x  y[x] + Exp[y[x]], x]
Solve[f == 0, y'[x]]
```

[6] Βλέπε βιβλιογραφία και
https : //en.wikipedia.org/wiki/Implicit_function#Implicit_differentiation

Άσκηση

Να υπολογιστούν οι 1ης τάξης παράγωγοι των παρακάτω πεπλεγμένων συναρτήσεων $y = y(x)$:

i) $x^3 + y^3 = a^3$

ii) $a\cos^2(x+y) = \beta$

iii) $xy = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

iv) $\tan y = x + y$

v) $\sqrt{x^2+y^2} + y = 0$

vi) $e^{-\left(x^2+y^2\right)} = 1.$

Απαντήσεις

(i) $y' = -\frac{x^2}{y^2}$,, (ii) $y' = -1$, (iii) $y' = -\frac{y\left(-1+x^2+y^2\right)}{x\left(1+x^2+y^2\right)}$, (iv) $y' = \frac{1}{-1+\sec y^2}$, όταν $\sec y^2 = \frac{1}{\cos y^2}$, (v) $y' = -\frac{x}{y+\sqrt{x^2+y^2}}$, (vi) $y' = -\frac{x}{y}$.

9.1.8 Υπολογισμός οριακών τιμών

Είναι ήδη γνωστό από την Παράγραφο 7.1.3 ότι αν οι συναρτήσεις $f, g \,|\, D$ είναι ορισμένες για κάθε $x \in D$ εκτός από ένα σημείο, έστω $x_0 \in D$, όπου

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = k \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l \quad \text{με} \quad k, l \in \mathbb{R},$$

τότε υπάρχουν οι παρακάτω οριακές τιμές του:

i) αθροίσματος

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = k + l,$$

ii) γινομένου

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = k\,l,$$

iii) πηλίκου

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{k}{l}, \quad \text{όταν} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l \neq 0.$$

Οι παραπάνω οριακές τιμές δεν υπάρχουν, όταν οι τιμές των k και l ανάγουν σε μια από τις **μη επιτρεπτές πράξεις** στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, που είναι οι εξής:

$$\frac{0}{0}\,,\quad \frac{\infty}{\infty}\,,\quad 0\,\infty\,,\quad \infty\,0\,,\quad \infty-\infty\,,\quad 0^0\,,\quad 1^\infty\,,\quad \infty^0. \qquad (9.1.8\text{ - }1)$$

Διευκρινίζεται ότι μια πράξη είναι μη επιτρεπτή, όταν το αποτέλεσμά της δεν είναι **μονοσήμαντα ορισμένο**, διαφορετικά η πράξη αυτή δίνει διαφορετικά αποτελέσματα ανάλογα με τις εκάστοτε συναρτήσεις f και g.

Στις περιπτώσεις αυτές πολλές φορές υπάρχει η οριακή τιμή και υπολογίζεται με κανόνες, που είναι γνωστοί σαν **κανόνες de L'Hôpital** (De L'Hôpital's rule)[7] και οι οποίοι δίνονται στη συνέχεια με μορφή θεωρημάτων.

Μορφή $\frac{0}{0}$

Θεώρημα 9.1.8 - 1. *Αν* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *και* $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, *όταν* $x_0 \in \mathbb{R}$ *ή* $x_0 = \pm\infty$ *και υπάρχει η οριακή τιμή* $\lim_{x\to x_0}[f'(x)/g'(x)]$, *τότε υπάρχει και η οριακή τιμή του πηλίκου των συναρτήσεων και ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\,. \qquad (9.1.8\text{ - }2)$$

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται ως εξής:

Θεώρημα 9.1.8 - 2. *Αν* $\lim_{x\to x_0} f^{(k)}(x) = 0$ *και* $\lim_{x\to x_0} g^{(k)}(x) = 0$, *όταν* $x_0 \in \mathbb{R}$ *ή* $x_0 = \pm\infty$ *για κάθε* $k = 0, 1, \ldots, \nu-1$ *και υπάρχει η οριακή τιμή* $\lim_{x\to x_0}\left[f^{(\nu)}(x)/g^{(\nu)}(x)\right]$, *τότε υπάρχει και η οριακή τιμή του πηλίκου των συναρτήσεων και ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{g^{(\nu)}(x_0)}\,. \qquad (9.1.8\text{ - }3)$$

[7] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/L%27Hôpital%27s_rule*

Παράδειγμα 9.1.8 - 1

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 9.1.8 - 1 έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.1.8 - 2

Όμοια εφαρμόζοντας το Θεώρημα 9.1.8 - 2 έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x^2)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x+x\sin x-\cos x}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(x\sin x)'}{(2x)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{2}=0.\end{aligned}$$

Μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Θεώρημα 9.1.8 - 3. *Αν* $\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ *και* $\lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$, *όταν* $x_0\in\mathbb{R}$ *ή* $x_0=\pm\infty$ *και υπάρχει η οριακή τιμή* $\lim_{x\to x_0}[f'(x)/g'(x)]$, *τότε υπάρχει και η οριακή τιμή του πηλίκου των συναρτήσεων και ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \qquad (9.1.8\text{ - }4)$$

Όμοια γενικεύεται ως εξής:

Θεώρημα 9.1.8 - 4. *Αν* $\lim_{x\to x_0} f^{(k)}(x)=\pm\infty$ *και* $\lim_{x\to x_0} g^{(k)}(x)=\pm\infty$, *όταν* $x_0\in\mathbb{R}$ *ή* $x_0=\pm\infty$ *για κάθε* $k=0,1,\ldots,\nu-1$ *και υπάρχει η*

οριακή τιμή $\lim_{x\to x_0}\left[f^{(\nu)}(x)/g^{(\nu)}(x)\right]$, *τότε υπάρχει και η οριακή τιμή του πηλίκου των συναρτήσεων και ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{g^{(\nu)}(x_0)}\,. \qquad (9.1.8\text{ - }5)$$

Παράδειγμα 9.1.8 - 3

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 9.1.8 - 3 έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} &= \left(\text{μορφή }\frac{+\infty}{+\infty}\right)\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot 0=0.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.1.8 - 4

Όμοια εφαρμόζοντας το Θεώρημα 9.1.8 - 4 έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty.\end{aligned}$$

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν οι παρακάτω οριακές τιμές:

i) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x+\ln x}$

ii) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-2x}}{x^2}$

iii) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}$

iv) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x^2}$

Απαντήσεις

i) $+\infty$, ii) $+\infty$, iii) 0, iv) $-\frac{1}{2}$.

Μορφή $0 \cdot (\pm\infty)$

Έστω ότι

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Τότε η μορφή αυτή ανάγεται στην

- $\dfrac{0}{0}$, όταν γραφεί ως
$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}.$$
- $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, όταν
$$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}.$$

Παράδειγμα 9.1.8 - 5

Να υπολογιστεί το $\lim_{x \to 0^+} (x \ln x)$.

Λύση. Είναι της μορφής $0 \cdot (-\infty)$. Τότε διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} (x \ln x) &= \left(\text{μορφή } \frac{-\infty}{+\infty}\right) \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0^+} x = 0. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 9.1.8 - 6

Όμοια το $\lim_{x \to 0^+} (x \cot x)$.

Λύση. Είναι της μορφής $0 \cdot (+\infty)$, οπότε διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} (x \cot x) &= \left(\text{μορφή } \frac{0}{0}\right) \lim_{x \to 0^+} \frac{(x)'}{(\tan x)'} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to 0^+} \cos^2 x = 1. \end{aligned}$$

■

Μορφή $(\pm\infty)-(\pm\infty)$

Έστω ότι

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty.$$

Τότε ανάγεται στη μορφή

I. $\dfrac{0}{0}$, όταν $f(x)g(x)\neq 0$ και γραφεί ως

$$f(x)-g(x) = \frac{f(x)-g(x)}{1}=\frac{\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)g(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}.$$

II. $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, ή $0\cdot(\pm\infty)$, όταν $f(x)\neq 0$ και γραφεί ως

$$f(x)g(x)=f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right).$$

Παράδειγμα 9.1.8 - 7

Να υπολογιστεί το $\lim_{x\to+\infty}(x-e^x)$.

Λύση. Είναι της μορφής $(+\infty)-(+\infty)$ και ανάγεται στη μορφή II ως εξής:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-e^x) = \lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^x \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{e^x}\right).$$

Επειδή είναι

- $$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty, \quad \text{και}$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{e^x}\right) = 1-\overbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}}^{\text{μορφή }+\infty/+\infty} = 1-\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'}$$
$$= 1-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 1-0=1,$$

τελικά έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}(x-e^x) = (+\infty)\cdot 1 = +\infty.$$

■

Παράδειγμα 9.1.8 - 8

Όμοια το

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right).$$

Λύση. Είναι της μορφής $(+\infty)-(+\infty)$ και ανάγεται στη μορφή I ως εξής:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) &= \lim_{x\to1^+}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\\ &= \lim_{x\to1^+}\frac{(\ln x-x+1)'}{[(x-1)\ln x]'}\\ &= \lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{x\ln x+x-1}\\ &= \lim_{x\to1^+}\frac{(1-x)'}{(x\ln x+x-1)'}\\ &= \lim_{x\to1^+}\frac{-1}{\ln x+2} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

■

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν οι παρακάτω οριακές τιμές:

i) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$,

ii) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,\ln x$.

Απαντήσεις

i) $\frac{1}{2}$, ii) 0.

Μορφές 0^0, $1^{\pm\infty}$ και $(\pm\infty)^0$

Έστω ότι οι παραπάνω μορφές προκύπτουν από την παρακάτω οριακή τιμή:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\,g(x)}. \qquad (9.1.8\text{ - }1)$$

Τότε η $(9.1.8-1)$ ανάγεται στην $0(\pm\infty)$, αντίστοιχα $(\pm\infty)0$ με την παρακάτω διαδικασία:

- η $[f(x)^{\,g(x)}$ μετασχηματίζεται σύμφωνα με την ταυτότητα

$$f(x)^{g(x)} = e^{\,g(x)\,\ln f(x)}. \qquad (9.1.8\text{ - }2)$$

- Επειδή η συνάρτηση e^x είναι συνεχής, ο υπολογισμός της οριακής τιμής $(9.1.8-1)$ βάσει της $(9.1.8-2)$ γίνεται τότε ως εξής:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{\,g(x)} &= \lim_{x\to x_0} e^{\,g(x)\,\ln f(x)}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}. \qquad (9.1.8\text{ - }3)\end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.1.8 - 9

Να υπολογιστεί η οριακή τιμή

$$\lim_{x\to 0^+} x^x.$$

Λύση. Είναι της μορφής 0^0, οπότε σύμφωνα και με την παραπάνω διαδικασία έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)} = e^0 = 1,$$

επειδή $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, όπως έχει ήδη αποδειχθεί στο Παράδειγμα 9.1.8 - 5. ∎

Παράδειγμα 9.1.8 - 10

Όμοια η οριακή τιμή

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x, \quad \text{όταν} \quad k=1,2,\ldots.$$

Λύση. Είναι της μορφής $1^{+\infty}$. Αρχικά σύμφωνα με την $(9.1.8-2)$ έχουμε ότι

$$\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^{x\,\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)}$$

όπου

$$\begin{aligned}\overbrace{\lim_{x\to+\infty}\left[x\,\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\right]}^{\text{μορφή } 0(+\infty)} &= \left(\text{μορφή } \frac{0}{0}\right)\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\left(1+\frac{k}{x}\right)'}{1+\frac{k}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\frac{k}{x^2}}{1+\frac{k}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{k}{1+\frac{k}{x}} = k.\end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^{\lim_{x\to+\infty}\left[x\,\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\right]} = e^k.$$

■

Παράδειγμα 9.1.8 - 11

Όμοια η οριακή τιμή

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}.$$

Λύση. Είναι της μορφής $(+\infty)^0$. Σύμφωνα με την $(9.1.8-2)$ έχουμε ότι

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\,\ln x},$$

οπότε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} &= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}}\\ &= e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1.\end{aligned}$$

■

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν οι παρακάτω οριακές τιμές:

i) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ *iii)* $\lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$

ii) $\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x}$ *iv)* $\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\sin x}$.

Απαντήσεις

i) 1, ii) 1, iii) e, iv) 1.

9.1.9 Διωνυμικός συντελεστής

Ορισμός 9.1.9 - 1 (διωνυμικός συντελεστής). *Το σύμβολο* $\binom{n}{k}$ *που παριστάνει το πλήθος όλων των διαφόρων μεταξύ τους συνδυασμών των* n *στοιχείων ανά* k*, λέγεται διωνυμικός συντελεστής*[8] *(binomial coefficient) και ορίζεται από τη σχέση*

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \quad k=0;\ n=1,2,\ldots \\ \dfrac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k\,!} & \alpha\nu \quad k=1,2,\ldots,n. \end{cases} \qquad (9.1.9\text{ - }1)$$

Σημειώσεις 9.1.9 - 1

- Υπενθυμίζεται ότι είναι

$$k\,! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots k, \quad \text{ενώ} \quad 0\,! = 1. \qquad (9.1.9\text{ - }2)$$

- Ο διωνυμικός συντελεστής διαβάζεται n ως προς k ή αναλυτικότερα οι συνδυασμοί των n ως προς k.

Γενικότερα η $(9.1.9-1)$ ορίζεται ως εξής:

[8] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_coefficient*

Ορισμός 9.1.9 - 2 (γενίκευση διωνυμικού συντελεστή)

$$\binom{a}{k} = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \quad k = 0; \ a \in \mathbb{R} \\ \dfrac{a(a-1)\cdots[a-(k-1)]}{k\,!} & \alpha\nu \quad k = 1, 2, \ldots \\ & \kappa\alpha\iota \ a \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad (9.1.9 - 3)$$

Επειδή σύμφωνα με τον τύπο $(9.1.9-3)$ είναι

$$\binom{0}{0} = 1, \qquad \binom{a}{0} = 1 \quad \mu\varepsilon \quad a \in \mathbb{R},$$

$$\binom{k}{k} = 1 \quad \mu\varepsilon \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (9.1.9 - 4)$$

η $(9.1.9-3)$, οπότε και η $(9.1.9-1)$, θα παριστάνουν πάντοτε πραγματικό αριθμό.

Ιδιότητες

Αποδεικνύεται ότι:

I. αν n **ακέραιος** με $n = 0, 1, \ldots$ με $k \leq n$, τότε

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k\,!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}. \qquad (9.1.9 - 5)$$

II.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \qquad (9.1.9 - 6)$$

Παράδειγμα 9.1.9 - 1

Σύμφωνα με τον τύπο $(9.1.9-1)$ είναι

$$\binom{4}{3} = \frac{4(4-1)(4-2)}{3\,!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4,$$

επειδή $n = 4$, $k = 3$ και $k - 1 = 2$, ενώ με τον τύπο $(9.1.9 - 3)$ είναι

$$\binom{5.3}{4} = \frac{5.3(5.3-1)(5.3-2)(5.3-3)}{4!} = \frac{5.3 \cdot 4.3 \cdot 3.3 \cdot 2.3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 7.207\,337,$$

επειδή $a = 5.3$, $k = 4$ και $k - 1 = 3$.

Στην 1η περίπτωση, επειδή ο n είναι ακέραιος, ο υπολογισμός γίνεται επίσης με τον τύπο $(9.1.9 - 5)$ ως εξής:

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\underbrace{(4-3)!}_{=1}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4.$$

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι

$$\binom{5}{2} = 10, \quad \binom{7}{3} = 35, \quad \binom{10}{4} = 210.$$

2. Όμοια ότι

$$\binom{5.3}{3} = 12.5345, \quad \binom{9.5}{7} = 67.659\,670.$$

9.1.10 Τρίγωνο του Pascal - Κανόνας του Leibniz

Διωνυμικό θεώρημα

Είναι γνωστό από την Άλγεβρα ότι ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 9.1.10 - 1 (διωνυμικό). *Για κάθε x, y και $n = 0, 1, 2, \ldots$ ισχύει ότι (binomial theorem)*[9]

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \qquad (9.1.10 - 1)$$

[9] Βλέπε: M. Abramowitz and I. A. Stegun (Eds) (1972). *Handbook of Mathematical Functions and Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* New York: Dover, 9η έκδοση, σελίδα 10.

Πίνακας 9.1.10 - 1: Τρίγωνο του Pascal.

n												
0						1						
1					1		1					
2				1		2		1				
3			1		3		3		1			
4		1		4		6		4		1		
5	1		5		10		10		5		1	
6	1		6		15		20		15		5		1

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται.[10]

Σύμφωνα με τον τύπο $(9.1.10-1)$ και τους τύπους $(9.1.9-1)$, $(9.1.9-4)$ διαδοχικά έχουμε το παρακάτω ήδη γνωστό ανάπτυγμα:

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}x^k y^{3-k}\\ &= \binom{3}{0}x^0y^{3-0}+\binom{3}{1}x^1y^{3-1}+\binom{3}{2}x^2y^{3-2}+\binom{3}{3}x^3y^{3-3}\\ &= y^3+3xy^2+3x^2y+x^3.\end{aligned}$$

Ο υπολογισμός των συντελεστών $\binom{n}{k}$ στον τύπο $(9.1.10-1)$ για μεγαλύτερες τιμές του n γίνεται με το **τρίγωνο του Pascal** (Pascal's triangle), που δίνεται στον Πίνακα 9.1.10 - 1 για ανάπτυγμα μέχρι και βαθμού $n=6$. Η λογική των συντελεστών των αναπτυγμάτων που παρουσιάζονται στον πίνακα βασίζεται στην ιδιότητα ότι *κάθε συντελεστής ισούται με το άθροισμα των δύο ακριβώς προηγούμενων αυτού εκατέρωθεν συντελεστών*, δηλαδή, έστω για παράδειγμα ο πρώτος συντελεστής 6 στην τελευταία γραμμή με εκατέρωθεν προηγούμενούς τους 1 και 5, οπότε $6=1+5$, όμοια ο $15=5+10$ κ.λπ.

[10] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_theorem* και επίσης *mathworld.wolfram.com/BinomialTheorem.html*

Σύμφωνα με το τρίγωνο του Pascal είναι:

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4,\\ (x+y)^6 &= x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6.\end{aligned}$$

Κανόνας του Leibniz

Ο υπολογισμός των παραγώγων του γινομένου συναρτήσεων γίνεται με τον γενικευμένο κανόνα του Leibniz (general Leibniz rule).[11] Στην περίπτωση του γινομένου δύο συναρτήσεων ο κανόνας διατυπώνεται με τη μορφή της παρακάτω πρότασης:[12]

Πρόταση 9.1.10 - 1. *Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν παραγώγους μέχρι και n-τάξη, τότε ισχύει*

$$[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)\, g^{(k)}(x), \qquad (9.1.10 - 2)$$

όταν $n = 0, 1, 2, \ldots$ και

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ο διωνυμικός συντελεστής.

[11] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/General_Leibniz_rule*

[12] Για απόδειξη βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 6.

Παράδειγμα 9.1.10 - 1

Σύμφωνα με τον κανόνα του Leibniz έχουμε

$$\begin{aligned}
\left(x^4 e^x\right)^{(3)} &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \left(x^4\right)^{(3-k)} \left(e^x\right)^k \\
&= \binom{3}{0} \left(x^4\right)^{(3)} \left(e^x\right)^{(0)} + \binom{3}{1} \left(x^4\right)^{(3-1)} \left(e^x\right)^{(1)} \\
&\quad + \binom{3}{2} \left(x^4\right)^{(3-2)} \left(e^x\right)^{(2)} + \binom{3}{3} \left(x^4\right)^{(3-3)} \left(e^x\right)^{(3)} \\
&= \left(24x + 24x^2 + 12x^3 + x^4\right) e^x.
\end{aligned}$$

Άσκηση

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Leibniz να υπολογιστούν οι παράγωγοι 4ης τάξης των συναρτήσεων

i) $x^4 e^x$

ii) $x\, e^{-x^2}$

iii) $x^2 \cos x$

iv) $e^{-x} \sin \omega x$

v) $x\, \sin \omega x$

vi) $x^4 \ln x$.

Απαντήσεις

i) $e^x \left(24 + 96x + 72x^2 + 16x^3 + x^4\right)$, ii) $4xe^{-x^2} \left(15 - 20x^2 + 4x^4\right)$,
iii) $\left(x^2 - 12\right) \cos x + 8x \sin x$, iv) $e^{-x} \left[4\omega \left(\omega^2 - 1\right) \cos \omega x + \left(\omega^4 - 6\omega^2 + 1\right) \sin \omega x\right]$,
v) $\omega^3 \left(\omega x \sin \omega x - 4 \cos \omega x\right)$, vi) $50 + 24 \ln x$.

9.2 Πολυώνυμα ειδικής μορφής

Δίνονται στη συνέχεια μια κατηγορία πολυωνύμων με σημαντικές εφαρμογές στις θετικές επιστήμες.

9.2.1 Πολυώνυμα Bernstein

Ορισμός 9.2.1 - 1. *Τα $n+1$ βασικά πολυώνυμα* **Bernstein**[13] *(Bernstein basis polynomials) βαθμού n ορίζονται από τον τύπο*

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad \text{όταν} \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{9.2.1 - 1}$$

όταν

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

ο διωνυμικός συντελεστής.

Σύμφωνα με τον τύπο $(9.2.1-1)$, όταν $x \in [0,1]$, τα βασικά πολυώνυμα Bernstein βαθμού:

- $n = 1$ είναι (Σχ. 9.2.1 - 1):

$$\begin{aligned} B_{0,1}(x) &= 1-x, \\ B_{1,1}(x) &= x. \end{aligned} \tag{9.2.1 - 2}$$

Το Σχ. 9.2.1 - 1 έγινε με τις παρακάτω εντολές του MATHEMATICA:

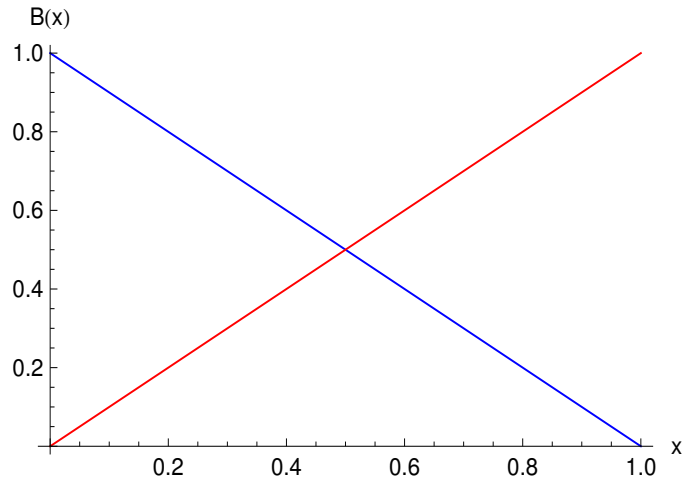
Πρόγραμμα 9.2.1 - 1 (βασικά πολυώνυμα Bernstein)

```
f1 = Plot[BernsteinBasis[1, 0, x], {x, 0, 1},
   PlotStyle -> {Blue, Thickness[0.003]}];
f2 = Plot[BernsteinBasis[1, 1, x], {x, 0, 1},
   PlotStyle -> {Red, Thickness[0.003]}, PlotRange -> All];
fgr = Show[f1, f2,
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 10},
  AxesLabel -> {"x", "B(x)"}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
```

ενώ τα βασικά πολυώνυμα Bernstein βαθμού $n = 1$ με την εντολή

```
Table[PiecewiseExpand@BernsteinBasis[1, k, x], {k, 0, 1}]
```

[13] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Bernstein_polynomials*



Σχήμα 9.2.1 - 1: Πολυώνυμα βασικά Bernstein βαθμού $n = 1$: $B_{0,1}$ μπλε και $B_{1,1}$ κόκκινη καμπύλη, όταν $x \in [0, 1]$.

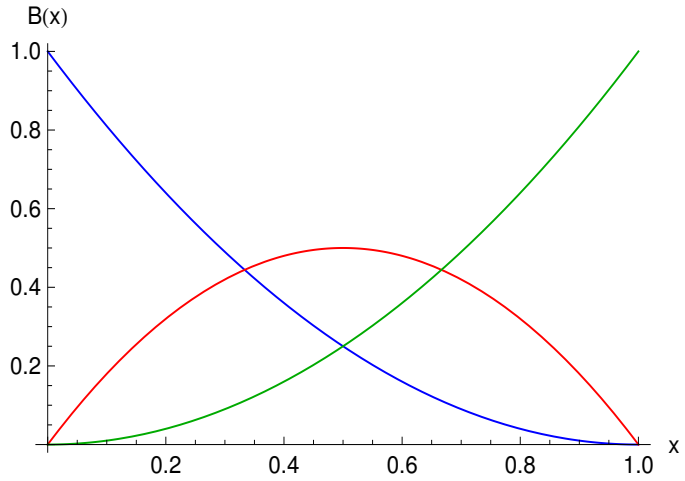
- $n = 2$ (Σχ. 9.2.1 - 2):

$$\begin{aligned} B_{0,2}(x) &= (1-x)^2, \\ B_{1,2}(x) &= 2x(1-x), \\ B_{2,2}(x) &= x^2. \end{aligned} \qquad (9.2.1 - 3)$$

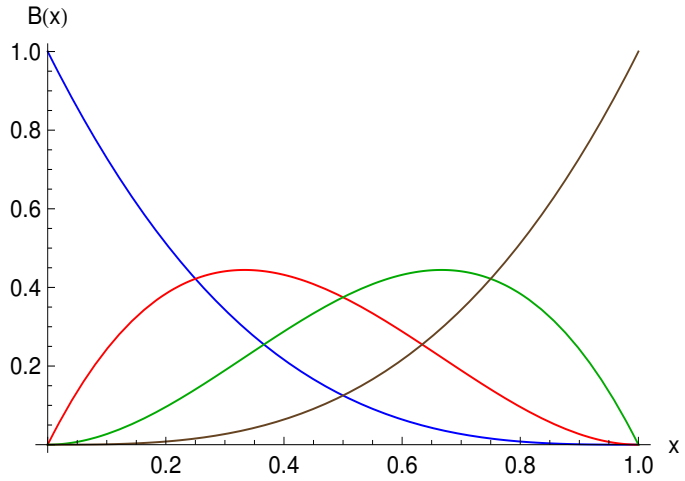
- $n = 3$ (Σχ. 9.2.1 - 3):

$$\begin{aligned} B_{0,3}(x) &= (1-x)^3, \\ B_{1,3}(x) &= 3x(1-x)^2, \\ B_{2,3}(x) &= 3x^2(1-x), \\ B_{3,3}(x) &= x^3. \end{aligned} \qquad (9.2.1 - 4)$$

Όμοια υπολογίζονται και τα άλλα πολυώνυμα.



Σχήμα 9.2.1 - 2: Πολυώνυμα βασικά Bernstein βαθμού $n = 2$: $B_{0,2}$ μπλε, $B_{1,2}$ κόκκινη και $B_{2,2}$ πράσινη καμπύλη, όταν $x \in [0, 1]$.



Σχήμα 9.2.1 - 3: Πολυώνυμα βασικά Bernstein βαθμού $n = 3$: $B_{0,3}$ μπλε, $B_{1,3}$ κόκκινη, $B_{2,3}$ πράσινη και $B_{3,3}$ καφέ καμπύλη, όταν $x \in [0, 1]$.

Ορισμός 9.2.1 - 2. *Το n βαθμού* **πολυώνυμο Bernstein** *(Bernstein polynomial) ορίζεται από τον γραμμικό συνδυασμό*

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \, B_{i,n}(x), \qquad (9.2.1 - 5)$$

όταν $B_{i,n}(x)$ τα βασικά πολυώνυμα Bernstein και β_i οι συντελεστές Bernstein ή Bézier.

Δίνονται στη συνέχεια οι κυριότερες ιδιότητες των βασικών πολυωνύμων Bernstein με τη μορφή προτάσεων.

Πρόταση 9.2.1 - 1. *Τα $B_{i,n}(x)$; $i = 0, 1, \ldots, n$ βασικά πολυώνυμα Bernstein βαθμού n εκφράζονται συναρτήσει των $n-1$ βαθμού αντίστοιχων πολυωνύμων με την παρακάτω αναδρομική σχέση:*

$$B_{i,n}(x) = (1-x)B_{i,n-1}(x) + xB_{i-1,n-1}(x). \qquad (9.2.1 - 6)$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με τις $(9.2.1 - 1)$ και $(9.1.9 - 6)$ διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}
B_{i,n}(x) &= (1-x)B_{i,n-1}(x) + xB_{i-1,n-1}(x) \\
&= (1-x)\binom{n-1}{i}x^i(1-x)^{n-1-i} \\
&\quad + x\binom{n-1}{i-1}x^{i-1}(1-x)^{n-1-(i-1)} \\
&= \binom{n-1}{i}x^i(1-x)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1}x^i(1-x)^{n-i} \\
&= \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right]x^i(1-x)^{n-i} \\
&= \binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} = B_{i,n}(x).
\end{aligned}$$

■

Πρόταση 9.2.1 - 2. *Για τα $B_{i,n}(x)$; $i = 0, 1, \ldots, n$ βασικά πολυώνυμα Bernstein βαθμού n ισχύει ότι*

$$B_{i,n}(x) \geq 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in [0,1]. \tag{9.2.1 - 7}$$

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση τα πολυώνυμα είναι **μη αρνητικά** στο $[0,1]$.

Πρόταση 9.2.1 - 3 (διαμέριση μονάδας). *Το άθροισμα των $i+1$ βασικών πολυωνύμων Bernstein βαθμού n ισούται με τη μονάδα.*

Η ιδιότητα αυτή είναι σημαντική στη χρήση των πολυωνύμων στη γεωμετρική μοντελοποίηση και των γραφικών με υπολογιστή.

Πρόταση 9.2.1 - 4. *Κάθε βασικό πολυώνυμο Bernstein βαθμού $n-1$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των αντίστοιχων βασικών πολυωνύμων Bernstein βαθμού n.*

Πρόταση 9.2.1 - 5. *Κάθε βασικό πολυώνυμο Bernstein βαθμού n εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $1, x, \ldots, x^n$*

Παράγωγος βασικών πολυωνύμων Bernstein

Πρόταση 9.2.1 - 6. *Η παράγωγος των βασικών πολυωνύμων Bernstein βαθμού n εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των αντίστοιχων βασικών πολυωνύμων Bernstein βαθμού $n-1$ σύμφωνα με τη σχέση*

$$B'_{i,n}(x) = \frac{dB_{i,n}(x)}{dx} = n\left[B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x)\right]. \tag{9.2.1 - 8}$$

Παράδειγμα 9.2.1 - 1

Σύμφωνα με τον τύπο $(9.2.1-8)$ και την $(9.2.1-2)$ είναι

$$B'_{1,2}(x) = 2\left[B_{0,1}(x) - B_{1,1}(x)\right] = 2[(1-x) - x] = 2(1-x).$$

Το αποτέλεσμα επαληθεύεται, επειδή σύμφωνα με την $(9.2.1-3)$ είναι $B_{1,2}(x)=2x(1-x)$, οπότε

$$B'_{1,2}(x)=[2x(1-x)]'=2(1-2x).$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA γίνεται με την εντολή:

```
Table[PiecewiseExpand@D[BernsteinBasis[2, k, x], x], {k, 1, 1}]
```

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η παράγωγος των βασικών πολυωνύμων Bernstein $B_{i,4}(x)$; $i=0,\ldots,4$.
2. Να δειχθούν οι Προτάσεις 9.2.1 - 2 μέχρι και 9.2.1 - 6.

Απαντήσεις

1. $B'_{4,0}(x)=4(-1+x)^3$, $B'_{4,1}(x)=-4\left(-1+6x-9x^2+4x^3\right)$,
$B'_{4,2}(x)=12\left(x-3x^2+2x^3\right)$, $B'_{4,3}(x)=-4\left(-3x^2+4x^3\right)$ και $B'_{4,4}(x)=4x^3$.
2. Ανάλογα με την απόδειξη της Πρότασης 9.2.1 - 1.

9.2.2 Πολυώνυμα Hermite

Τα πολυώνυμα Hermite[14] (Hermite polynomials) H_n βαθμού n ορίζονται από τον τύπο

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\,\frac{d^{\,n}\left(e^{-x^2}\right)}{d\,x^n};\quad n=0,\,1,\,\ldots \qquad (9.2.2-1)$$

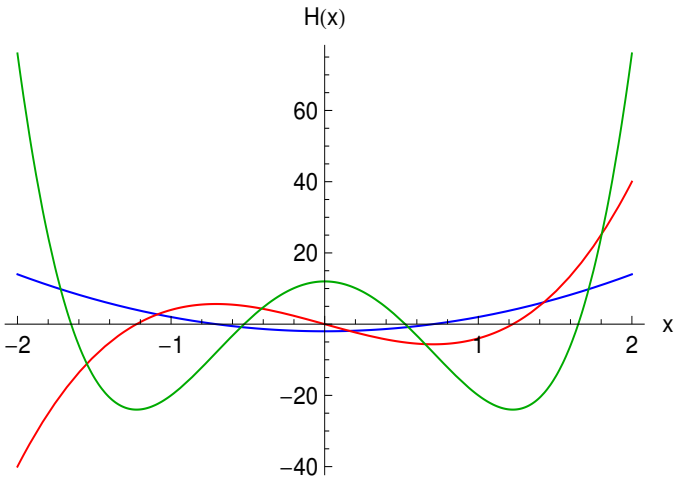
όπου $H_0(x)=1$ (Σχ. 9.2.2 - 1).

Αν $n=1$ έχουμε

$$\begin{aligned} H_1(x) &= (-1)^1 e^{x^2}\,\frac{d^{\,1}\left(e^{-x^2}\right)}{d\,x^1}=-e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)' \\ &= -e^{x^2}(-2x)\left(e^{-x^2}\right)=2x. \end{aligned}$$

Όμοια υπολογίζονται και τα άλλα πολυώνυμα.

[14] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Hermite_polynomials*



Σχήμα 9.2.2 - 1: Πολυώνυμα Hermite: H_2 μπλε, H_3 κόκκινη και H_4 πράσινη καμπύλη, όταν $x \in [-2, 2]$.

Σημείωση 9.2.2 - 1

Αποδεικνύεται ότι[15] τα πολυώνυμα Hermite επαληθεύουν τη διαφορική εξίσωση[16] (Hermite differential equation)

$$y''(x) - 2x\, y'(x) + \lambda y(x) = 0, \qquad (9.2.2 - 2)$$

όταν $y(x) = H_n(x)$.

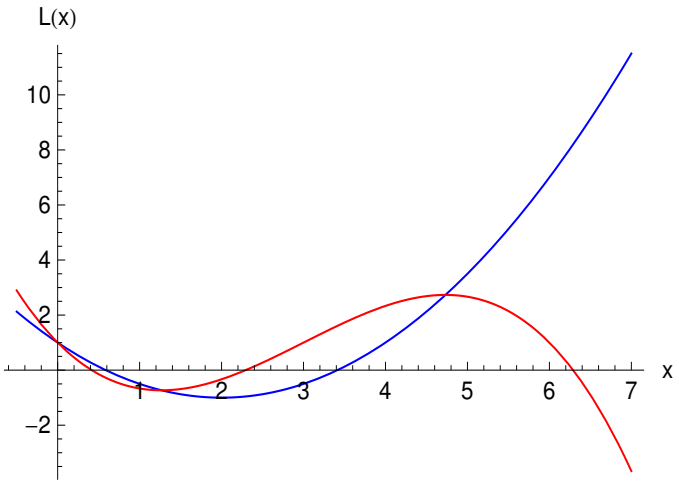
Το Σχ. 9.2.2 - 1 έγινε με τις παρακάτω εντολές του MATHEMATICA:

Πρόγραμμα 9.2.2 - 1 (πολυώνυμα Hermite)

```
f2 = Plot[HermiteH[2, x], {x, -2, 2},PlotStyle -> {Blue, Thickness[0.003]}];
f3 = Plot[HermiteH[3, x], {x, -2, 2},
   PlotStyle -> {Red, Thickness[0.003]},PlotRange -> All];
f4 = Plot[HermiteH[4, x],{x,-2,2},PlotStyle -> {Darker[Green],
   Thickness[0.003]}];
fgr = Show[f2, f3, f4,BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 10},
  AxesLabel -> {"x", "H(x)"},AxesOrigin -> {0, 0},PlotRange -> All]
```

[15] Βλέπε Υποσημείωση 14 και
mathworld.wolfram.com/HermiteDifferentialEquation.html

[16] Για διαφορική εξίσωση βλέπε Μάθημα *Διαφορικές Εξισώσεις*.



Σχήμα 9.2.3 - 1: Πολυώνυμα Laguerre: L_2 μπλε και L_3 κόκκινη καμπύλη, όταν $x \in [-0.5, 7]$.

Άσκηση

Δείξτε ότι:

- $H_2(x) = 4x^2 - 2,$
- $H_3(x) = 8x^3 - 12x,$ και
- $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$

9.2.3 Πολυώνυμα Laguerre

Τα πολυώνυμα Laguerre[17] (Laguerre polynomials) L_n βαθμού n ορίζονται από τον τύπο

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n\,!}\,\frac{d^{\,n}\,(x^n\,e^{-x})}{d\,x^n}\,; \quad n = 0,\,1,\,\ldots \tag{9.2.3 - 1}$$

όπου $L_0(x) = 1$ (Σχ. 9.2.3 - 1).

Αν $n = 1$ έχουμε

$$L_1(x) \;=\; \frac{e^x}{1\,!}\,\frac{d^{\,1}\,\left(x^1\,e^{-x}\right)}{d\,x^1} = e^x\left(xe^{-x}\right)' = 1 - x.$$

[17] Βλέπε βιβλιογραφία και *https : //en.wikipedia.org/wiki/Laguerre_polynomials*

Όμοια υπολογίζονται και τα άλλα πολυώνυμα.

Σημείωση 9.2.3 - 1

Αποδεικνύεται ότι[18] τα πολυώνυμα Laguerre επαληθεύουν τη διαφορική εξίσωση (Laguerre differential equation)

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + ny(x) = 0, \qquad (9.2.3\text{ - }2)$$

όταν $y(x) = L_n(x)$.

Το Σχ. 9.2.3 - 1 έγινε με τις παρακάτω εντολές του MATHEMATICA:

Πρόγραμμα 9.2.3 - 1 (πολυώνυμα Laguerre)

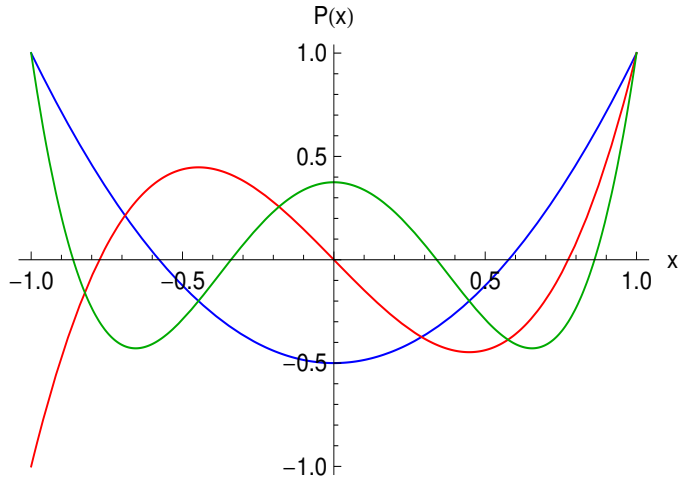
```
f2 = Plot[LaguerreL[2, x], {x, -0.5, 7},
   PlotStyle -> {Blue, Thickness[0.003]}];
f3 = Plot[LaguerreL[3, x], {x, -0.5, 7},
   PlotStyle -> {Red, Thickness[0.003]}];
fgr = Show[f2, f3, BaseStyle ->{FontFamily -> "Arial",FontSize -> 10},
   AxesLabel -> {"x", "L(x)"}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
```

Άσκηση

Δείξτε ότι:

- $L_2(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$,
- $L_3(x) = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$, και
- $L_4(x) = 1 - 4x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4$.

[18] Βλέπε Υποσημείωση 17 και
mathworld.wolfram.com/LaguerreDifferentialEquation.html



Σχήμα 9.2.4 - 1: Πολυώνυμα Legendre: P_2 μπλε, P_3 κόκκινη και P_4 πράσινη καμπύλη, όταν $x \in [-1, 1]$.

9.2.4 Πολυώνυμα Legendre

Τα πολυώνυμα Legendre[19] (Legendre polynomials) P_n βαθμού n ορίζονται από τον τύπο του Rodrigues ως εξής:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\ n!}\,\frac{d^{\,n}\left(x^2-1\right)^n}{d\,x^n}\,;\ \ n = 0,\,1,\,\ldots,\ \text{όπου}\ x \in [-1,1], \quad (9.2.4\text{ - }1)$$

όταν $P_0(x) = 1$ (Σχ. 9.2.4 - 1).

Αν $n = 1$ έχουμε

$$P_1(x) \ \ = \ \ \frac{1}{2^1\ 1!}\,\frac{d^{\,1}\left(x^2-1\right)^1}{d\,x^1} = \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)' = x.$$

Όμοια υπολογίζονται και τα άλλα πολυώνυμα.

Σημείωση 9.2.4 - 1

Αποδεικνύεται ότι[20] τα πολυώνυμα Legendre επαληθεύουν τη διαφορική εξίσωση

[19] Βλέπε Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 9 και *https : //en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials*

[20] Βλέπε Υποσημείωση 19 και
mathworld.wolfram.com/LegendreDifferentialEquation.html

(Legendre differential equation)

$$\left(1-x^2\right) y''(x) - 2x\, y'(x) + n(n+1)y(x) = 0, \qquad (9.2.4\text{ - }2)$$

όταν $y(x) = P_n(x)$.

Το Σχ. 9.2.2 - 1 έγινε με τις παρακάτω εντολές του MATHEMATICA:

Πρόγραμμα 9.2.4 - 1 (πολυώνυμα Hermite)

```
f2 = Plot[LegendreP[2, x], {x, -1, 1},
   PlotStyle -> {Blue, Thickness[0.003]}];
f3 = Plot[LegendreP[3, x], {x, -1, 1},
   PlotStyle -> {Red, Thickness[0.003]}, PlotRange -> All];
f4 = Plot[LegendreP[4, x], {x, -1, 1},
   PlotStyle -> {Darker[Green], Thickness[0.003]}];
fgr = Show[f2, f3, f4,
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 10},
  AxesLabel -> {"x", "P(x)"}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
```

Άσκηση

Δείξτε ότι:

- $P_2(x) = \dfrac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$,
- $P_3(x) = \dfrac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$, και
- $P_4(x) = \dfrac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$.

9.2.5 Τύποι των Taylor και Maclaurin

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο ν-βαθμού. Τότε

$$f(x) = P_\nu(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_\nu(x-a)^\nu,$$

οπότε εύκολα προκύπτει ότι

$$a_0 = f(a), \quad a_1 = f'(a), \quad \ldots, \quad a_\nu = f^{(\nu)}(a).$$

Άρα, όταν η συνάρτηση είναι πολυωνυμική, έχουμε

$$f(x) = P_\nu(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1\,!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2\,!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu\,!}(x-a)^\nu.$$

Γενικότερα, όταν έχουμε γενικά μία συνάρτηση $f \,|\, (a,b)$ με γνωστές τις τιμές των παραγώγων της σε ένα σημείο $\xi \in (a,b)$, αποδεικνύεται ότι ισχύει ο παρακάτω **τύπος του Taylor**:

$$\begin{aligned} f(x) \;\approx\; & f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1\,!}(x-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2\,!}(x-\xi)^2 \\ & + \ldots + \frac{f^{(\nu)}(\xi)}{\nu\,!}(x-\xi)^\nu, \end{aligned} \qquad (9.2.5\text{ - }1)$$

όπου το 2ο μέλος της $(12.4.5-1)$ είναι το ν - βαθμού πολυώνυμο του Taylor, που προσεγγίζει την f, ενώ οι αριθμοί $f(\xi)$, $f'(\xi)$, ..., $f^{(\nu)}(\xi)$ είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου.

Όταν $\xi = 0$, ο τύπος $(12.4.5-1)$ γράφεται στην παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned} f(x) \;=\; & f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 \\ =\; & + \ldots + \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu\,!}x^\nu \end{aligned} \qquad (9.2.5\text{ - }2)$$

που είναι γνωστός ως **τύπος του Maclaurin**, ενώ οι αριθμοί $f(0)$, $f'(0)$, ..., $f^{(\nu)}(0)$ είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου.

Παράδειγμα 9.2.5 - 1

Με τον τύπο του Maclaurin να υπολογιστεί το πολυώνυμο ν - βαθμού που προσεγγίζει τη συνάρτηση $f(x) = e^{-ax}$.

Λύση. Έχουμε

$f(x) = e^{-ax}$	$f(0) = 1$
$f'(x) = -a\,e^{-ax}$ $f'(0) = -a$	
$f''(x) = a^2 e^{-ax}$	$f''(0) = a^2$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(\nu)}(x) = (-1)^\nu a^\nu e^{-ax}$	$f^{(\nu)}(0) = (-1)^\nu a^\nu$.

Άρα

$$e^{-ax} \approx 1 - ax + \frac{a^2}{2!}x^2 - \ldots + (-1)^\nu \frac{a^\nu}{\nu!}x^\nu$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu}(-1)^k \frac{a^k}{k!}x^k. \qquad \blacksquare$$

Παράδειγμα 9.2.5 - 2

Όμοια με τον τύπο του Taylor για $\xi = 1$ το πολυώνυμο ν-βαθμού που προσεγγίζει τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$.

Λύση. Έχουμε

$f(x) = \ln x$	$f(1) = 0$
$f'(x) = x^{-1}$	$f'(1) = 1$
$\ldots$	$\ldots$
$f^{(4)}(x) = -2 \cdot 3x^{-4} = -3!\,x^{-4}$	$f^{(4)}(1) = -3!$
$\ldots$	$\ldots$
$f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\,x^{-\nu}$	$f^{(\nu)}(1) = (-1)^{\nu-1}(\nu-1)!$.

Άρα

$$\ln x \approx x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} - \ldots + (-1)^{\nu-1}\frac{(x-1)^\nu}{\nu}$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}. \qquad (9.2.5\text{ - }3)$$

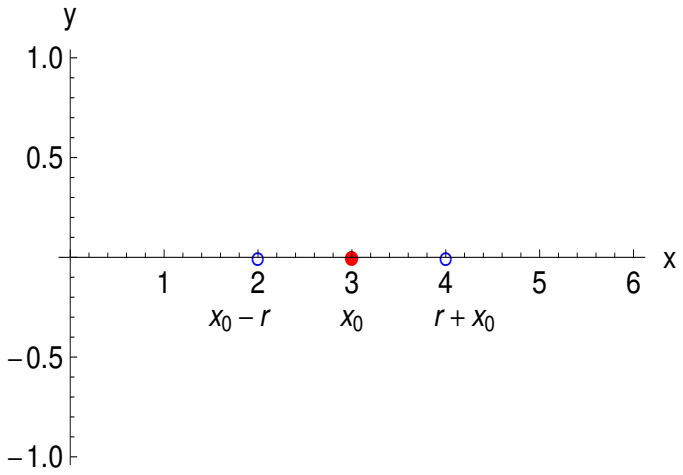
$\blacksquare$

Θα πρέπει επίσης στο σημείο αυτό να γραφεί ότι το πολυώνυμο του Taylor αντίστοιχα του Maclaurin, όταν χρησιμοποιείται για την προσέγγιση μιας συνάρτησης, παρουσιάζει κυρίως τα παρακάτω μειονεκτήματα:

i) δεν έχει ακρίβεια που να αυξάνεται πάντοτε ανάλογα με τον βαθμό του πολυωνύμου,

ii) απαιτείται η γνώση του κέντρου ξ,

iii) απαιτείται ο υπολογισμός των παραγώγων, κάτι που όμως δεν είναι εύκολο να γίνεται πάντοτε.



Σχήμα 9.3.1 - 1: Περιοχή του σημείου $x_0 = 3$ με ακτίνα $r = 1$. Τότε $\varpi(3,1) = \varpi(3) = (2,4)$.

Άσκηση

Δείξτε τα αναπτύγματα του Πίνακα 9.2.5 - 1.

9.3 Ακρότατα και σχετικά θεωρήματα

9.3.1 Ακρότατα

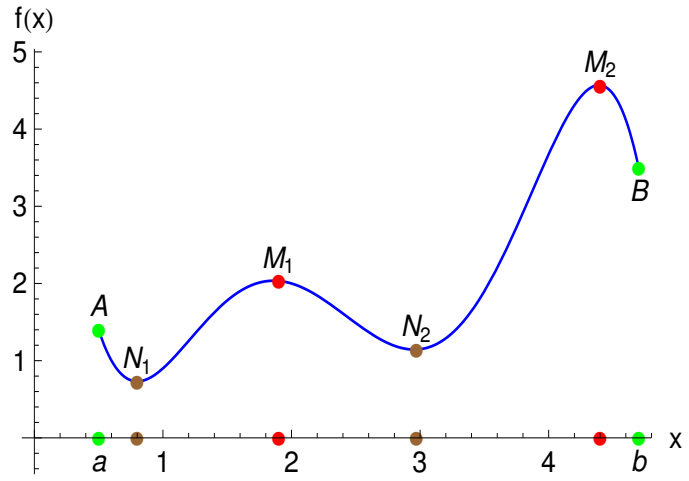
Ορισμός 9.3.1 - 1 (περιοχής). *Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $r > 0$. Τότε ορίζεται ως περιοχή του σημείου x_0 με ακτίνα r και συμβολίζεται με $\varpi(x_0, r)$ ή απλά $\varpi(x_0)$ το ανοικτό διάστημα $(x_0 - r, x_0 + r)$ (Σχ. 9.3.1 - 1).*

Ορισμός 9.3.1 - 2 (τοπικό ακρότατο). *Έστω μία συνάρτηση $f|D$ και σημείο $x_0 \in D$. Τότε θα λέγεται ότι η f παρουσιάζει στο x_0 ένα τοπικό μέγιστο, αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο τότε και μόνον, όταν υπάρχει $\varpi(x_0)$, έτσι ώστε $f(x) \leq f(x_0)$, αντίστοιχα $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in \varpi(x_0) \cap D$.*

Ορισμός 9.3.1 - 3 (ολικό ακρότατο). *Έστω μία συνάρτηση $f|D$ και σημείο $x_0 \in D$. Τότε θα λέγεται ότι η f παρουσιάζει στο x_0 ένα ολικό μέγιστο,*

Πίνακας 9.2.5 - 1: των κυριότερων αναπτυγμάτων κατά Maclaurin.

α/α	συνάρτηση	ανάπτυγμα
1	$\tan x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$
2	$\tanh x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots$
3	$\tanh x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots$
4	$\sin^{-1} x$	$x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \dots$
5	$e^{\sin x}$	$1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + \dots$
6	$e^{\cos x}$	$e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{31x^6}{720} + \dots\right)$
7	$e^x \sin x$	$x + x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^5}{90} + \dots$
8	$e^x \cos x$	$1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \dots$
9	$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
10	$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
11	$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^{\nu} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$
12	a^x	$\sum_{k=0}^{\nu} \frac{(x \ln a)^k}{k!}$
13	$\sin^2 x$	$\sum_{k=1}^{\nu} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}$
14	$\cos^2 x$	$\sum_{k=1}^{\nu} (-1)^{k} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}$
15	$\tanh^{-1} x$	$\sum_{k=0}^{\nu} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$
16	$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\nu} x^k$



Σχήμα 9.3.1 - 2: Τα σημεία N_2, B, αντίστοιχα τα A, M_1 είναι θέσεις τοπικού ελάχιστου, αντίστοιχα τοπικού μέγιστου, ενώ το σημείο N_1, αντίστοιχα το M_2 είναι θέση ολικού ελάχιστου, αντίστοιχα ολικού μέγιστου.

αντίστοιχα ολικό ελάχιστο τότε και μόνον, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ *αντίστοιχα* $f(x) \geq f(x_0)$ *για κάθε* $x \in D$.

Ορισμός 9.3.1 - 4 (θέση ακρότατου). *Ένα σημείο* $x_0 \in D$ *στο οποίο η συνάρτηση* f *παρουσιάζει μέγιστη, αντίστοιχα ελάχιστη τιμή, θα λέγεται θέση ακρότατου (extremum) της* f *(Σχ. 9.3.1 - 2).*

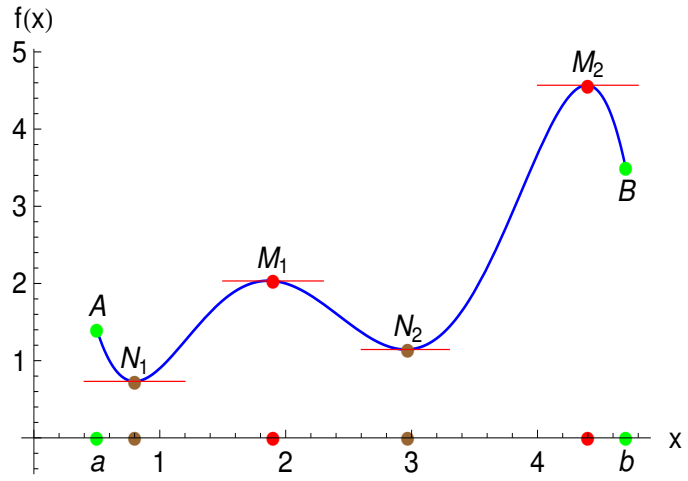
9.3.2 Σχετικά θεωρήματα

Θεώρημα 9.3.2 - 1 (Fermat). *Αν μία συνάρτηση* $f|D$ *με* D *ανοικτό διάστημα παρουσιάζει στο σημείο* $x_0 \in D$ *ένα τοπικό ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) και επιπλέον υπάρχει η παράγωγος της* f *στο* x_0, *τότε ισχύει* $f'(x_0) = 0$.

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει πάντοτε.

Παρατηρήσεις 9.3.2 - 1

i) Αν το σημείο x_0 είναι άκρο του διαστήματος D, τότε η παράγωγος $f'(x)$ δεν μηδενίζεται πάντοτε, όπως αυτό φαίνεται στη συνάρτηση $f(x)$ του Σχ. 9.3.2 - 1 με πεδίο ορισμού $[0.5, 4.7]$.



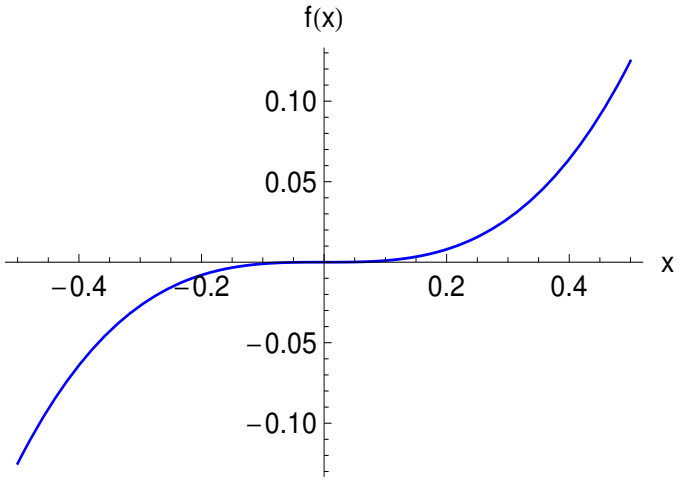
Σχήμα 9.3.2 - 1: Συνάρτηση $f(x) = -0.2614695(-4.964911+x)(9.648431-6.07417x+x^2)(0.6597672-1.46998x+x^2)$. Η $f'(x)=0$ στα σημεία N_1, M_1, N_2, M_2, ενώ είναι $f'(a)=f'(0.5)=-5.11353$ και $f'(b)=f'(4.7)=-7.810628$, δηλαδή το Θεώρημα του Fermat δεν εφαρμόζεται.

ii) Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης $f|D$ μηδενίζεται σε ένα εσωτερικό σημείο $x_0 \in D$, τότε δεν συνεπάγεται πάντοτε ότι το σημείο αυτό είναι θέση ακρότατου, όπως αυτό φαίνεται στη συνάρτηση $f(x)=x^3$, όπου $f'(x)=3x^2$ και η οποία μηδενίζεται στο σημείο $x_0=0$, ενώ η f ανέρχεται στο σημείο αυτό, δηλαδή δεν παρουσιάζει ακρότατο (Σχ. 9.3.2 - 2).

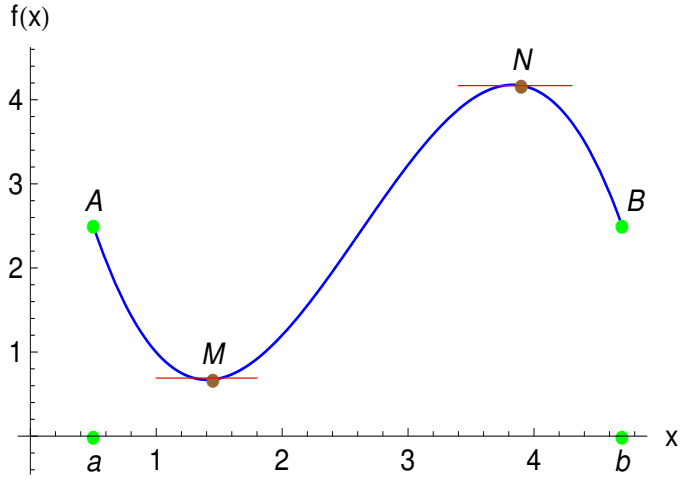
iii) Τα σημεία που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος λέγονται και **κρίσιμα σημεία** (critical points) της συνάρτησης.

Δίνονται τώρα χωρίς απόδειξη τα παρακάτω θεμελιώδη θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού:

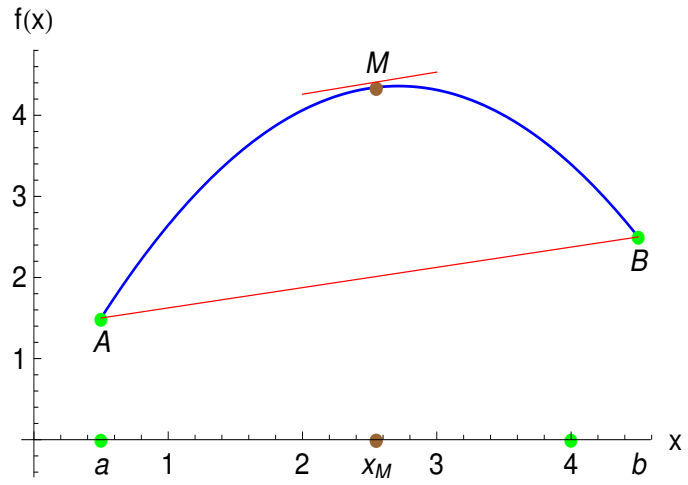
Θεώρημα 9.3.2 - 2 (Rolle). *Έστω ότι η συνάρτηση $f|[a,\beta]$ είναι συνεχής για κάθε $x \in [a,\beta]$ και επιπλέον ότι υπάρχει η $f'(x)$ ή απειρίζεται για κάθε $x \in (a,\beta)$. Αν $f(a)=f(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi \in (a,\beta)$, έτσι ώστε $f'(\xi)=0$. (Σχ. 9.3.2 - 3)*



Σχήμα 9.3.2 - 2: Συνάρτηση $f(x) = x^3$. Η $f'(x) = 3x^2$ μηδενίζεται στο σημείο $x_0 = 0$, αλλά η f δεν έχει ακρότατο στο x_0.



Σχήμα 9.3.2 - 3: Θεώρημα του Rolle. Συνάρτηση $f(x) = -0.4917695(-5.140385 + x)(2.201698 - 2.712335x + x^2)$. Η $f'(x) = 0$ στα σημεία $x_M = 1.45$ και $x_N = 4.7$.



Σχήμα 9.3.2 - 4: Θεώρημα της μέσης τιμής. Συνάρτηση $f(x) = -0.5833333(-5.448237 + x)(0.0196656 + x)$. Η εφαπτομένη στο σημείο M όπου $\xi = x_M = 2.55$ είναι παράλληλη της ευθείας AB.

Θεώρημα 9.3.2 - 3 (μέσης τιμής). *Έστω ότι η συνάρτηση $f\,|\,[a,\beta]$ είναι συνεχής για κάθε $x \in [a,\beta]$ και επιπλέον ότι για κάθε $x \in (a,\beta)$ υπάρχει η $f'(x)$ ή απειρίζεται. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi \in (a,\beta)$ (Σχ. 9.3.2 - 4), έτσι ώστε*

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}\,. \qquad (9.3.2\text{ - }1)$$

9.4 Μελέτη συνάρτησης

Στην παράγραφο αυτή θα δοθούν οι κυριότεροι ορισμοί και θεωρήματα που εφαρμόζονται για τη μελέτη και τη γραφική παράσταση του διαγράμματος μιας συνάρτησης. Συνιστάται στον αναγνώστη εκτός από τη θεωρητική μελέτη, να κάνει και εφαρμογή των ασκήσεων που λύνονται στο μάθημα με μαθηματικά πακέτα, όπως είναι το MATHEMATICA, MATLAB κ.λπ.

9.4.1 Μονοτονία συνάρτησης

Αρχικά γίνεται υπενθύμιση του ορισμού της μονοτονίας μιας συνάρτησης, που δόθηκε στο Μάθημα *Πραγματικές Συναρτήσεις*. Το πεδίο ορισμού D των συναρτήσεων θα θεωρείται ότι είναι ένα ανοικτό διάστημα, εκτός και αν διαφορετικά ορίζεται.

Ορισμός 9.4.1 - 1 (μονοτονίας). *Έστω η συνάρτηση $f|D$ και $x_1, x_2 \in D$, όπου χωρίς να περιορίζεται η γενικότητα υποτίθεται ότι $x_1 < x_2$. Τότε αν:*

i) $f(x_1) \leq f(x_2)$ *η f θα λέγεται αύξουσα και θα συμβολίζεται με $\uparrow$.*

ii) $f(x_1) \geq f(x_2)$ *η f θα λέγεται φθίνουσα και θα συμβολίζεται με $\downarrow$. Και στις δύο περιπτώσεις η συνάρτηση θα λέγεται* μονότονη.

iii) $f(x_1) < f(x_2)$ *η f θα λέγεται γνήσια αύξουσα και θα συμβολίζεται με $\Uparrow$.*

iv) $f(x_1) > f(x_2)$ *η f θα λέγεται γνήσια φθίνουσα και θα συμβολίζεται με $\Downarrow$. Στις περιπτώσεις (iii) και (iv) η συνάρτηση θα λέγεται* γνήσια μονότονη.

Θεωρήματα σχετικά με τη μονοτονία

Θεώρημα 9.4.1 - 1. *Αν η συνάρτηση $f|D$ παραγωγίζεται για κάθε $x \in D$ και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in D$, τότε η f έχει σταθερή τιμή στο D και αντίστροφα.*

Πόρισμα 9.4.1 - 1. *Έστω ότι οι συναρτήσεις $f, g \,|\, D$ είναι παραγωγίσιμες για κάθε $x \in D$. Τότε οι συναρτήσεις θα έχουν ίσες παραγώγους τότε και μόνον, όταν η διαφορά τους είναι μία σταθερή συνάρτηση στο D.*

Θεώρημα 9.4.1 - 2 (έλεγχος μονοτονίας). *Έστω ότι η συνάρτηση $f \,|\, D$ παραγωγίζεται για κάθε $x \in D$. Τότε*

i) *αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in D$, η f είναι γνήσια αύξουσα,*

ii) *αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in D$, η f είναι αύξουσα,*

iii) *αν* $f'(x) < 0$ *για κάθε* $x \in D$, *η* f *είναι γνήσια φθίνουσα,*

iv) *αν* $f'(x) \leq 0$ *για κάθε* $x \in D$, *η* f *είναι φθίνουσα.*

Παράδειγμα 9.4.1 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^2(x-2) \quad \text{με} \quad f'(x) = x(3x-4).$$

Οι ρίζες της f είναι $x_1 = 0$ με πολλαπλότητα 2 και $x_2 = 2$ με πολλαπλότητα 1, ενώ τα κρίσιμα σημεία της f είναι $c_1 = 0$ και $c_2 = \frac{4}{3}$. Τα πρόσημα της πρώτης παραγώγου δίνονται στον Πίνακα 9.4.1 - 1, ενώ η γραφική παράσταση της $f(x)$ στο Σχ. 9.4.1 - 1, όπου προφανώς από τον τύπο της $f(x)$ προκύπτει ότι

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

9.4.2 Υπολογισμός ακρότατων

Δίνονται στη συνέχεια τα θεωρήματα σύμφωνα με τα οποία υπολογίζονται τα ακρότατα μιας συνάρτησης, όταν υπάρχουν.

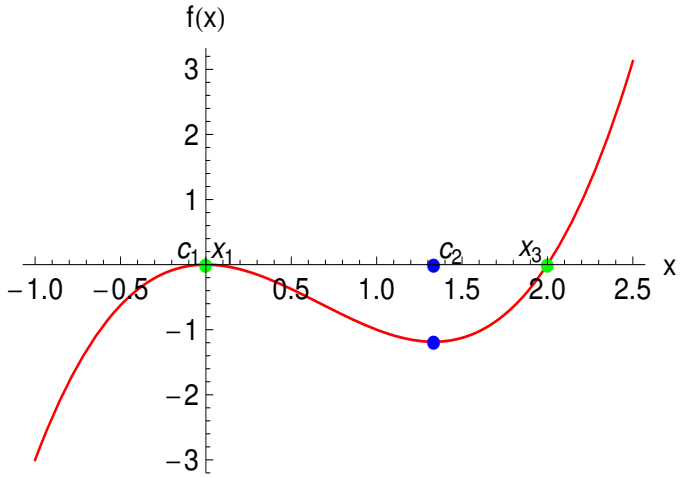
Θεώρημα 9.4.2 - 1. *Αν η συνάρτηση* $f|(a,b)$ *είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για κάθε* $x \in (a,b)$, *τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

i) *η συνάρτηση* f *παρουσιάζει στο σημείο* $x_0 \in (a,b)$ *ακρότατο,*

ii) *η παράγωγος της* f *παρουσιάζει στο σημείο* x_0 *αλλαγή προσήμου.*

Παρατήρηση 9.4.2 - 1

Επειδή το πρόσημο της πρώτης παραγώγου συνδέεται με τη μονοτονία της συνάρτησης, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 9.4.2 - 1, όταν η συνάρτηση είναι αύξουσα αριστερά του σημείου x_0 και φθίνουσα δεξιά του, το σημείο x_0 θα είναι θέση μεγίστου, ενώ, όταν είναι φθίνουσα αριστερά του σημείου x_0 και αύξουσα δεξιά του, το x_0 θα είναι θέση ελαχίστου.



Σχήμα 9.4.1 - 1: Παράδειγμα 9.4.1 - 1.

Πίνακας 9.4.1 - 1

Συνάρτηση	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
f'		$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$		$+$	
f		$\nearrow$	$\circ$	$\searrow$		$\nearrow$	$\circ$	$\nearrow$	
ακρότατα			max		min				

Παράδειγμα 9.4.2 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^2(x-2)$$

του Παραδείγματος 9.4.1 - 1. Τότε σύμφωνα με την Παρατήρηση 9.4.2 - 1 και τον Πίνακα 9.4.1 - 1, η συνάρτηση πρέπει να παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x = 0$, επειδή στο σημείο αυτό από αύξουσα γίνεται φθίνουσα και ελάχιστο στο $x = \frac{4}{3}$, επειδή από φθίνουσα γίνεται αύξουσα (Σχ. 9.4.1 - 1).

Θεώρημα 9.4.2 - 2. *Έστω η συνάρτηση $f|D$, τέτοια ώστε να υπάρχει η $f'(x)$ στο D και να είναι συνεχής, ενώ για ένα σημείο $x_0 \in D$ να ισχύει $f'(x_0) = 0$ (κρίσιμο σημείο). Τότε, αν υπάρχει και η $f''(x)$ στο D και ισχύει $f''(x_0) < 0$, αντίστοιχα $f''(x_0) > 0$, η f παρουσιάζει στο x_0 μέγιστο, αντίστοιχα ελάχιστο.*

Παράδειγμα 9.4.2 - 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Από τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης προφανώς προκύπτει ότι

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Επίσης είναι

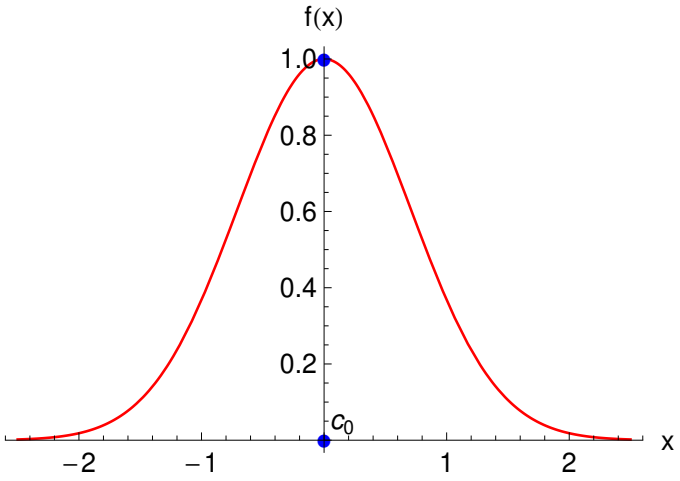
$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \quad \text{με ρίζα (κρίσιμο σημείο)} \quad c_0 = 0.$$

Τότε, επειδή

$$f''(x) = -2\left(1 - 2x^2\right)e^{-x^2} \quad \text{και} \quad f''(c_0) = f''(0) = -2 < 0,$$

η f σύμφωνα με το Θεώρημα 9.4.2 - 2 θα παρουσιάζει στο σημείο $c_0 = 0$ μέγιστο (ολικό) με τιμή $f(c_0) = f(0) = 1$ (Σχ. 9.4.2 - 1).

Πολλές φορές η ρίζα της 1ης παραγώγου είναι και ρίζα της 2ης παραγώγου κ.λπ. Στην περίπτωση αυτή ο έλεγχος της ύπαρξης ακρότατου γίνεται με το παρακάτω θεώρημα:



Σχήμα 9.4.2 - 1: Παράδειγμα 9.4.2 - 2: το διάγραμμα της συνάρτησης $f(x) = e^{-x^2}$.

Θεώρημα 9.4.2 - 3. *Έστω η συνάρτηση $f|D$ όπου D ανοικτό διάστημα, τέτοια ώστε να υπάρχουν οι παράγωγοι της f στο D μέχρι και τάξης $2\nu-1$. Έστω επίσης ότι για κάποιο $x_0 \in D$ ισχύει ότι $f^{(k)}(x_0) = 0$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots, 2\nu-1$. Αν η συνάρτηση $f^{(2\nu-1)}(x)$ είναι συνεχής στο D και υπάρχει η $f^{(2\nu)}(x)$ και είναι $f^{(2\nu)}(x_0) < 0$, αντίστοιχα $f^{(2\nu)}(x_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει στο σημείο x_0 μέγιστο, αντίστοιχα ελάχιστο.*

Παράδειγμα 9.4.2 - 3

Η συνάρτηση

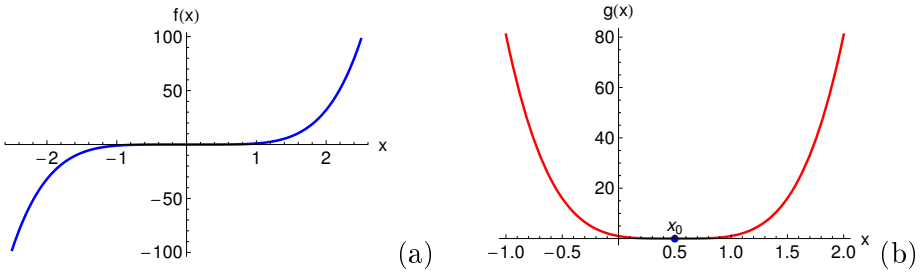
$$f(x) = x^5$$

δεν παρουσιάζει στο σημείο $x_0 = 0$ ακρότατο (Σχ. 9.4.2 - 2 a), επειδή $f^{(5)}(x_0) = 120$, δηλαδή η τάξη της μη μηδενικής τιμής της παραγώγου της f είναι 5 (περιττός αριθμός), οπότε δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα 9.4.2 - 3, ενώ η

$$g(x) = (2x-)^4$$

παρουσιάζει στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$ ακρότατο, επειδή είναι $g^{(4)}(x_0) = 384$, δηλαδή η τάξη της μη μηδενικής τιμής της παραγώγου είναι 4 (άρτιος αριθμός). Άρα το

Θεώρημα 9.4.2 - 3 εφαρμόζεται και, επειδή $g^{(4)}(x_0) = 384 > 0$, το ακρότατο είναι ελάχιστο (Σχ. 9.4.2 - 2 b).



Σχήμα 9.4.2 - 2: (α) Συνάρτηση $f(x) = x^5$ και (b) η $g(x) = (2x-1)^4$ με $x_0 = 0.5$.

9.4.3 Υπολογισμός σημείων καμπής, ασύμπτωτων ευθειών

Έστω τώρα ότι η συνάρτηση $f \mid D$ έχει 2ης τάξης παράγωγο στο D. Η μελέτη του προσήμου της f'' δίνει πρόσθετες πληροφορίες για τη γραφική παράσταση της f και συγκεκριμένα για την **καμπυλότητά** της (curvature ή concavity). Ειδικότερα τα σημεία στα οποία η 2η παράγωγος αλλάζει πρόσημο, ορίζουν τα λεγόμενα **σημεία καμπής** (inflection points) του διαγράμματος της f. Συγκεκριμένα στην περίπτωση αυτή ισχύουν:

i) Αν

$$f''(x) > 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in D, \tag{9.4.3 - 1}$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 9.4.1 - 2, αν τεθεί $g(x) = f'(x)$ και $g'(x) = (f'(x))' = f''(x) > 0$, πρέπει η $g(x)$, δηλαδή η $f'(x)$ να είναι αύξουσα στο D και αντίστροφα. Τότε όμως, καθώς το x αυξάνει στο D, ο αντίστοιχος συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο σημείο $(x, f(x))$ θα αυξάνει επίσης. Αυτό έχει ως συνέπεια η γραφική παράσταση της f να βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη ευθεία ή όπως συνήθως λέγεται, η f στρέφει τα **κοίλα άνω** (concave upwards) στο D ή διαφορετικά ότι είναι **κυρτή**.

ii) Όμοια, αν

$$f''(x) < 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in D, \tag{9.4.3 - 2}$$

τότε η f στρέφει τα **κοίλα κάτω** (concave downwards) στο D ή διαφορετικά ότι είναι **κοίλη**.

Παρατηρήσεις 9.4.3 - 1

i) Προφανώς στα σημεία καμπής είναι $f''(x) = 0$, ενώ γενικά οι ρίζες της 2ης παραγώγου είναι πιθανά σημεία καμπής, δηλαδή υπάρχει περίπτωση οι ρίζες της 2ης παραγώγου να μην είναι σημεία καμπής.[21] Επομένως η συνθήκη $f''(x) = 0$ είναι *αναγκαία, αλλά όχι και ικανή.*

ii) Τα σημεία καμπής είναι επίσης δυνατόν να κατηγοριοποιηθούν από τον αντίστοιχο μηδενισμό ή μη της 1ης παραγώγου. Συγκεκριμένα, έστω ότι x_0 είναι ένα σημείο καμπής, οπότε $f''(x_0) = 0$. Τότε:

   α. αν είναι επίσης $f'(x_0) = 0$, το x_0 λέγεται **σταθερό** (stationary) ή **σαγματικό** (saddle) **σημείο καμπής**, ενώ αν

   β. $f'(x_0) \neq 0$, το σημείο x_0 λέγεται **μη σταθερό** (non-stationary) σημείο καμπής.

ii) Αν είναι $f''(x_0) = 0$, ενώ στο x_0 η f'' δεν αλλάζει πρόσημο, τότε το x_0 λέγεται **σημείο κυματισμού** (undulation ή hyperflex point) του διαγράμματος.[22]

Παράδειγμα 9.4.3 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^3\left(x^2 - 1\right)$$

με ρίζες

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0 \quad \text{με πολλαπλότητα} \quad 3 \quad \text{και} \quad x_3 = 1.$$

Η f είναι περιττή, οπότε το διάγραμμά της θα είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων O.

[21] Βλέπε Θεώρημα 9.4.2 - 3 και Παράδειγμα 9.4.2 - 3.
[22] Βλέπε σημείο $x_0 = 0.5$ στο Σχ. 9.4.2 - 2 b.

Η 1η παράγωγός της είναι

$$f'(x) = x^2\left(5x^2 - 3\right)$$

με ρίζες (κρίσιμα σημεία)

$$c_1 \approx -0.78, \quad c_2 = 0 \quad \text{με πολλαπλότητα} \quad 2 \quad \text{και} \quad c_3 \approx 0.78,$$

ενώ η 2η παράγωγός της

$$f''(x) = 2x\left(10x^2 - 3\right)$$

με ρίζες

$$d_1 \approx -0.6, \quad d_2 = 0 \quad \text{και} \quad d_3 \approx 0.6.$$

Τότε υπολογίζοντας τις τιμές της 2ης παραγώγου στα κρίσιμα σημεία, διαφορετικά εξετάζοντας τη μονοτονία της f, προκύπτει ότι:

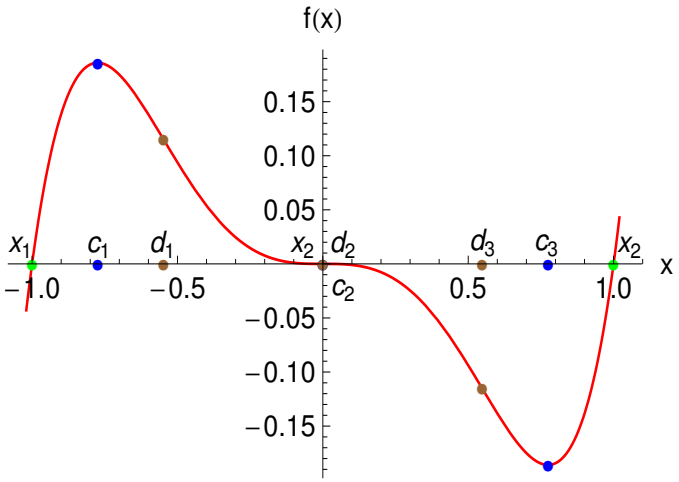
- η f παρουσιάζει στο σημείο $c_1 \approx -0.8$ μέγιστο, επειδή $f''(-0.8) < 0$, διαφορετικά επειδή η f από αύξουσα γίνεται φθίνουσα,
- στο $c_3 \approx 0.8$ ελάχιστο, επειδή $f''(0.8) > 0$, διαφορετικά επειδή η f από φθίνουσα γίνεται αύξουσα, ενώ
- για το σημείο 0 έχουμε $f''(0) = 0$, ενώ $f^{(3)}(0) = -24 < 0$ (περιττή τάξη), οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 9.4.2 - 3 δεν υπάρχει ακρότατο της f.

Από το πρόσημο της 2ης παραγώγου προκύπτει ότι το διάγραμμα της f έχει σημεία καμπής τα $d_1 \approx -0.6$, $d_2 = 0$ και $d_3 \approx 0.6$, επειδή η f'' αλλάζει πρόσημο στα σημεία αυτά και επιπλέον:

- στρέφει τα κοίλα κάτω στα διαστήματα $(-\infty, -0.6)$ και $(0, 0.6)$, επειδή στα αντίστοιχα διαστήματα είναι $f''(x) < 0$ (βλέπε σχέση 9.4.3 - 2), ενώ
- στα $(-0.6, 0)$ και $(0.6, \infty)$ προς τα άνω,, επειδή είναι $f''(x) > 0$ (Σχ. 9.4.3 - 1) και σχέση 9.4.3 - 1.
- Τέλος, επειδή το σημείο $d_2 = 0$ είναι ρίζα και της 1ης παραγώγου, σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 9.4.3 - 1 (iia) το σημείο αυτό θα είναι σταθερό ή σαγματικό σημείο καμπής.

Πίνακας 9.4.3 - 1: Παράδειγμα 9.4.3 - 1.

	$-\infty$	-1		-0.8		-0.6		0		0.6		0.8		1	$+\infty$
f'	+		+	○	-		-	○	-		-	○	+		+
f''	-		-		-	○	+	○	-	○	+		+		+
f	-	○	+		+		+	○	-		-		-	○	+
	↗		↗		↘		↘		↘		↘		↗		↗
				max								min			



Σχήμα 9.4.3 - 1: Παράδειγμα 9.4.3 - 1.

Ασύμπτωτες ευθείες

Δίνονται στη συνέχεια οι παρακάτω ορισμοί, που αφορούν τις λεγόμενες ασύμπτωτες (asymptotes) ευθείες του διαγράμματος μιας συνάρτησης:

Ορισμός 9.4.3 - 1 (οριζόντια ασύμπτωτη). *Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού της μορφής $(-\infty, \gamma)$, αντίστοιχα $(\gamma, +\infty)$. Τότε η ευθεία $y = ax + b$ θα λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη (horizontal asymptote) του διαγράμματος της f, όταν*

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0\,, \quad \textit{αντίστοιχα} \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Τότε από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] \tag{9.4.3 - 3}$$

Όμοια ορίζεται και η **πλάγια ασύμπτωτη** (oblique ή slant) ευθεία

$$y = ax + b, \quad \text{όταν} \quad a \neq 0,$$

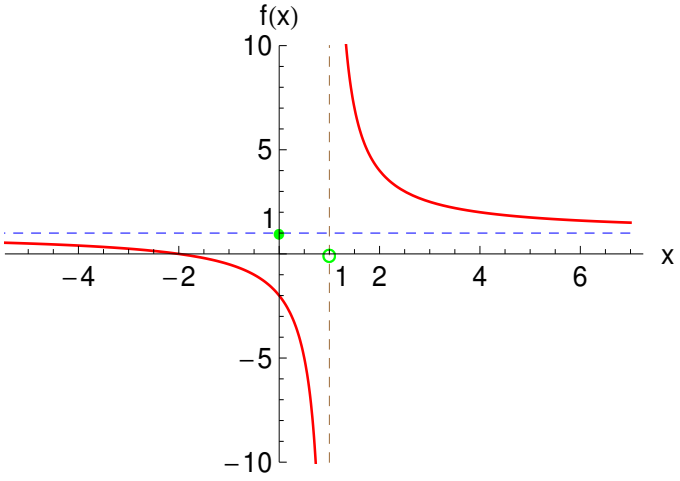
ενώ ισχύουν ανάλογοι τύποι υπολογισμού των a, b.

Ορισμός 9.4.3 - 2 (κατακόρυφη ασύμπτωτη ευθεία). *Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα τουλάχιστον ανοικτό διάστημα της μορφής (γ, δ). Τότε η ευθεία $x = \gamma$ αντίστοιχα $x = \delta$ θα λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη (vertical asymptote) του διαγράμματος της f, όταν*

$$\lim_{x \to \gamma + 0} f(x) = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to \gamma + 0} f(x) = -\infty, \tag{9.4.3 - 4}$$

αντίστοιχα

$$\lim_{x \to \delta + 0} f(x) = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to \delta + 0} f(x) = -\infty. \tag{9.4.3 - 5}$$



Σχήμα 9.4.3 - 2: Παράδειγμα 9.4.3 - 2: Συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$. Η διακεκομμένη καφέ $x = 1$ είναι η κάθετη και η διακεκομμένη μπλε $y = 1$ η οριζόντια ασύμπτωτη ευθεία.

Παράδειγμα 9.4.3 - 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

με πεδίο ορισμού $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Τότε η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f, επειδή

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = +\infty,$$

ενώ

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1,$$

που σημαίνει ότι η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f (Σχ. 9.4.3 - 2).

Ασκήσεις

1. Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι παρακάτω συναρτήσεις $f(x)$:

i) $3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

ii) $x^3 - 3x^2 - 144x + 432$

iii) $e^{-x}\sin x$, όταν $x \in [0, 2\pi]$

iv) $\exp\left[-\dfrac{1}{x}\right]$

v) $\exp\left[-\dfrac{1}{x^2}\right]$

vi) $x - \ln(x-2)$

vii) $x - \dfrac{1}{x}$

viii) $(1-x)\,e^{-x}$

ix) $x^2 \ln x$

x) $x\sqrt{1+x}$

xi) $\tan^{-1}(e^{-x})$

xii) $\dfrac{\sin x}{x}$

2. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η αντίστροφη υπερβολική εφαπτομένη $\tanh^{-1} x$, όταν

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,.$$

3. Δύο αντίθετα ηλεκτρικά φορτία q_1 και q_2 είναι τοποθετημένα στα σημεία A και B αντίστοιχα, όπου $(AB) = d$ σταθερά. Στο σημείο M με $|AM| = x$ της ευθείας AB η ένταση E του ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{x^2} + \frac{q_2}{(d-x)^2}\right].$$

Να υπολογιστεί το σημείο εκείνο της ευθείας AB για το οποίο η ένταση E είναι ελάχιστη.

4. Το καλώδιο υποθαλάσσιου τηλέγραφου αποτελείται από δέσμη συρμάτων χαλκού με μονωτικό υλικό εξωτερικά (τομή κυκλική). Έστω x ο λόγος της ακτίνας της δέσμης προς το πάχος του μονωτικού. Τότε η ταχύτητα διάδοσης των σημάτων δίνεται από τη σχέση

$$v = -ax^2\,\ln x \quad \text{με} \quad a > 0.$$

Να υπολογιστεί η τιμή του x, έτσι ώστε η ταχύτητα να είναι μέγιστη.

5. Η ισχύς P που παράγεται από ένα ηλεκτρικό στοιχείο σταθερής ηλεκτρεγερτικής δύναμης E και σταθερής εσωτερικής αντίστασης r, όταν διέρχεται ρεύμα διαμέσου σταθερής εξωτερικής αντίστασης R, είναι

$$P = \frac{E^2 R}{(r+R)^2}\,.$$

Να υπολογιστεί η τιμή του R, που καθιστά την ισχύ μέγιστη.

Απαντήσεις

1. (i) Ρίζες οι: 0 διπλή, 2 και 3. Κρίσιμα σημεία: 0 min, $\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)$ max και $\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$ min. Σημεία καμπής: $\frac{1}{2}\left(2\pm\sqrt{2}\right)$.
(ii) Ρίζες οι: 3 διπλή και ± 12. Κρίσιμα σημεία: -6 max και 8 min. Σημείο καμπής: 1.
(iii) Ρίζες στο $[0,2\pi]$ οι: 0, π, 2π. Είναι $f'(x)=e^{-x}(\cos x-\sin x)$, οπότε τα κρίσιμα σημεία είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $\cos x-\sin x=0$, δηλαδή τα: $\frac{\pi}{4}$ max και $\frac{5\pi}{4}$ min. Επίσης είναι: $f''(x)=-2e^{-x}\cos x$, οπότε τα σημεία καμπής προκύπτουν από την εξίσωση $\cos x=0$, δηλαδή είναι τα σημεία: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$.
(iv) Δεν υπάρχουν ρίζες. Είναι $f'(x)=\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, ενώ $f''(x)=-\frac{e^{-\frac{1}{x}}(1+2x)}{x^4}$, οπότε σημείο καμπής είναι το: $\frac{1}{2}$. Οριζόντια ασύμπτωτη η $y=1$ και κάθετη η $x=0$.
(v) Όμοια δεν υπάρχουν ρίζες. Είναι $f'(x)=\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$, οπότε η $f(x)$ γνήσια φθίνουσα για κάθε $x<0$ και γνήσια αύξουσα για κάθε $x>0$. Είναι $f''(x)=-2\,\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}(-2+3x^2)}{x^6}$, οπότε τα σημεία καμπής είναι τα: $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Οριζόντια ασύμπτωτη η $y=1$, ενώ είναι $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.
(vi) Όμοια δεν υπάρχουν ρίζες. Είναι $f'(x)=\frac{x-3}{x-2}$ με κρίσιμο σημείο το 3 min. Επίσης είναι: $f''(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$, οπότε δεν υπάρχουν σημεία καμπής. Στα άκρα του πεδίου ορισμού ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

(vii) Ρίζες οι: ± 1. Είναι $f'(x)=\frac{1+x^2}{x^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, οπότε η f είναι γνήσια αύξουσα. Επίσης είναι $f''(x)=-\frac{2}{x^3}$, οπότε δεν υπάρχουν σημεία καμπής. Στα άκρα του πεδίου ορισμού ισχύει ότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to 0-} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty\quad\text{και}\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

Κατακόρυφη ασύμπτωτη η ευθεία $x=0$.
(viii) Ρίζα το 1. Είναι $f'(x)=e^{-x}(x-2)$, οπότε κρίσιμο σημείο είναι το 2 min. Επίσης είναι $f''(x)=e^{-x}(x-3)$ με σημείο καμπής το 3. Στα άκρα του πεδίου ορισμού ισχύει ότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\quad\text{και}\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

(ix) Ρίζα το 1. Είναι $f'(x) = x(1+2\ln x)$, οπότε κρίσιμο σημείο είναι το: $e^{-1/2}$ min. Επίσης είναι $f''(x) = 3+2\ln x$ με σημείο καμπής το $e^{-3/2}$. Στα άκρα του πεδίου ορισμού ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

(x) Ρίζα το 0. Είναι $f'(x) = \frac{2+3x}{2\sqrt{1+x}}$, οπότε κρίσιμο σημείο είναι το: $-\frac{2}{3}$ min. Επίσης είναι $f''(x) = \frac{4+3x}{4(1+x)^{3/2}}$ με σημείο καμπής το $-\frac{4}{3}$. Στα άκρα του πεδίου ορισμού ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

(xi) Πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τιμών, επειδή $e^{-x} > 0$, το $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Είναι $f'(x) = -\frac{e^x}{1+e^{2x}} < 0$, οπότε η f είναι γνήσια φθίνουσα. Επίσης είναι $f''(x) = \frac{e^x\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$ με σημείο καμπής το 0. Στα άκρα του πεδίου ορισμού ισχύει ότι

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$

(xii) Συνάρτηση άρτια με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Στο σημείο $x=0$ ισχύει (κανόνας de L'Hôspital): $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ max. Είναι

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \quad \text{και} \quad f''(x) = -\frac{2x\cos x - 2\sin x + x^2\sin x}{x^3},$$

που δεν λύνονται αλγεβρικά, οπότε δεν είναι δυνατόν να υπολογιστούν τα κρίσιμα σημεία και τα σημεία καμπής (ο υπολογισμός τους γίνεται μόνον προσεγγιστικά - βλέπε Μαθήματα *Εφαρμοσμένων Μαθηματικών* Κεφ. *Προσεγγιστική Λύση Εξισώσεων*).

2. Πεδίο ορισμού το $(-1,1)$ και ρίζα το 0. Είναι $f'(x) = \frac{1}{1-x^2} > 0$, οπότε η f είναι γνήσια αύξουσα για κάθε $x \in (-1,1)$. Επίσης είναι $f''(x) = \frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}$, οπότε σημείο καμπής είναι το 0. Στα άκρα του πεδίου ορισμού ισχύει ότι

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1-0} f(x) = +\infty.$$

3. Έστω $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, οπότε $E'(x) = 2k\,\frac{q_2}{(d-x)^3} - 2k\,\frac{q_1}{x^3}$. Υπενθυμίζεται ότι η εξίσωση $x^3 = a^3$ έχει μια μόνον πραγματική ρίζα την $x=a$. Επομένως, αν $E'(x)=0$, τότε διαδοχικά έχουμε

$$\frac{x^3}{(d-x)^3} = \frac{q1}{q_2} \quad \text{ή} \quad \left(\frac{x}{d-x}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt[3]{q_1}}{\sqrt[3]{q_2}}\right)^3, \quad \text{οπότε κρίσιμο σημείο είναι το}$$

$$x_0 = \frac{d\,\sqrt[3]{q_1}}{\sqrt[3]{q_1}+\sqrt[3]{q_2}}.$$

Τότε είναι

$$E''(x_0) = 6k\,\frac{q_2}{(d-x)^4} + 6k\,\frac{q_1}{x^4}\bigg|_{x=x_0} = \frac{6k\left(\sqrt[3]{q_1}+\sqrt[3]{q_2}\right)^5}{d^4\,\sqrt[3]{q_1}\,\sqrt[3]{q_2}} > 0,$$

δηλαδή έχουμε ελάχιστο.

4. Έστω $v = v(x) = -ax^2\ln x$ με a, $x>0$. Τότε $v'(x) = -ax\,(1+2\ln x)$, οπότε κρίσιμο σημείο το $x_0 = e^{-1/2}$. Τότε είναι

$$v''(x_0) = -a(3+2\ln x)\big|_{x=e^{-1/2}} = -2a < 0, \quad \text{δηλαδή έχουμε μέγιστο.}$$

5. Έστω $P = P(R) = \frac{E^2 R}{(r+R)^2}$, οπότε $P'(r) = \frac{E^2(r-R)}{(r+R)^3}$. Άρα το κρίσιμο σημείο είναι το $R_0 = r$. Τότε

$$P''(R) = \left.\frac{2E^2(R-2r)}{(r+R)^4}\right|_{R=r} = -\frac{E^2}{8r^3}\,, \quad \text{δηλαδή μέγιστο.}$$

9.5 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[4] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Βιβλιογραφία για περαιτέρω μελέτη

Παπαδημητράκης, Μ. (2015). *Ανάλυση: Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής* *http://fourier.math.uoc.gr/papadim/analysis_n.pdf*
Πανεπιστήμιο Κρήτης: Τμήμα Μαθηματικών.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://eclass.uoa.gr/courses/MATH130/ θέση Έγγραφα
- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/

- http://eom.springer.de/

Μάθημα 10

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

10.1 Εισαγωγικές έννοιες

Στο μάθημα αυτό θα δοθούν οι κυριότεροι κανόνες ολοκλήρωσης, που κύρια εμφανίζονται στις τεχνολογικές εφαρμογές. Διευκρινίζεται ότι ακολουθώντας μία αυστηρά μαθηματική σειρά το μάθημα αυτό κανονικά πρέπει να ακολουθεί αυτό του ορισμένου ολοκληρώματος, που δίνεται στο επόμενο κεφάλαιο.[1]

10.1.1 Παράγουσα συνάρτηση

Ορισμός 10.1.1 - 1 (αόριστο ολοκλήρωμα). *Έστω οι συναρτήσεις f και F με κοινό πεδίο ορισμού D, όπου $D \subseteq \mathbb{R}$. Τότε η F θα λέγεται ότι είναι μία παράγουσα (antiderivative) ή αρχική συνάρτηση (primitive integral) ή διαφορετικά ένα αόριστο ολοκλήρωμα (indefinite integral) της συνάρτησης f στο D και θα συμβολίζεται αυτό με*

$$\int f(x)dx = F(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in D \tag{10.1.1 - 1}$$

[1] Ο αναγνώστης για μια εκτενέστερη μελέτη των εννοιών και των κανόνων ολοκλήρωσης που θα δοθούν, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [2, 3], στο βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 7 και στη διεύθυνση *https://en.wikipedia.org/wiki/Antiderivative*

τότε και μόνον, όταν υπάρχει η παράγωγος της F στο D και ισχύει

$$F'(x) = f(x) \quad \textit{για κάθε} \quad x \in D. \tag{10.1.1 - 2}$$

Συνεπώς

$$\int f(x)dx = F(x) \quad \text{τότε και μόνον, όταν} \quad F'(x) = f(x) \tag{10.1.1 - 3}$$

για κάθε $x \in D$ και αντίστροφα.

Αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα 10.1.1 - 1. *Αν F και G είναι δύο παράγουσες της συνάρτησης f στο D, τότε αυτές θα διαφέρουν κατά μία σταθερά συνάρτηση.*

Σύμφωνα με το Θεώρημα 10.1.1 - 1 ο τύπος $(10.1.1 - 3)$ τελικά γράφεται

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad \text{για κάθε} \quad x \in D, \tag{10.1.1 - 4}$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά.

Στο παρακάτω παράδειγμα δίνονται τα αόριστα ολοκληρώματα ορισμένων συναρτήσεων, ενώ στον Πίνακα 10.1.1 - 1 των κυριότερων στοιχειωδών συναρτήσεων:

Παράδειγμα 10.1.1 - 1

- $$\int x^3\,dx \;=\; \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c\,, \quad \text{επειδή} \quad \left(\frac{x^4}{4} + c\right)' = x^3.$$
- $$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c\,, \quad \text{επειδή} \quad (\ln|x| + c)' = \frac{1}{x}\,, \quad \text{όταν} \quad x > 0.$$
- $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c\,, \quad \text{επειδή} \quad (\tan x + c)' = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$
- $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c\,, \quad \text{επειδή} \quad \left(\tan^{-1} x + c\right)' = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Πίνακας 10.1.1 - 1: αόριστα ολοκληρώματα των κυριότερων στοιχειωδών συναρτήσεων.

α/α	$f(x)$	$F(x)$	α/α	$f(x)$	$F(x)$
1	$x^a;\ a \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	7	e^x	e^x
2	$\sin x$	$-\cos x$	8	$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
3	$\cos x$	$\sin x$	9	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
4	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x$	10	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\cot x$
5	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x$	11	$\cosh x$	$\sinh x$
6	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos^{-1} x$	12	$\sinh x$	$\cosh x$

10.1.2 Ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος

Δίνονται στη συνέχεια με τη μορφή θεωρημάτων οι ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος.

Θεώρημα 10.1.2 - 1. *Αν f είναι μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο D και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε*

$$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx. \qquad (10.1.2\text{ - }1)$$

Θεώρημα 10.1.2 - 2. *Αν f, g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο D, τότε*

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx. \qquad (10.1.2\text{ - }2)$$

Από τις (10.1.2−1) και (10.1.2−2) προκύπτει τότε η παρακάτω γραμμική ιδιότητα:

$$\int [kf(x) + \lambda g(x)]\, dx = k \int f(x)\, dx + \lambda \int g(x)\, dx, \qquad (10.1.2\text{ - }3)$$

όταν k, $\lambda \in \mathbb{R}$. Η γραμμική ιδιότητα γενικεύεται για ν το πλήθος συναρτήσεις.

Παράδειγμα 10.1.2 - 1

$$\begin{aligned}
\int \left(2x^2 + 5\sin x - e^x\right)\, dx &= 2\int x^2\, dx + 5\int \sin x\, dx - \int e^x\, dx \\
&= 2\,\frac{x^3}{3} + 5\,(-\cos x) - e^x + c \\
&= \frac{2\,x^3}{3} - 5\,\cos x - e^x + c.
\end{aligned}$$

Όμοια

$$\begin{aligned}
\int \left(2\tan x - \sqrt[3]{x} + \frac{4}{x}\right)\, dx &= 2\int \tan x\, dx + \int x^{1/3} dx + 4\int \frac{dx}{x} \\
&= 2\,\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + 4\ln|x| + c \\
&= \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{4}\,x^{\frac{4}{3}} + 4\ln|x| + c.
\end{aligned}$$

10.2 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Δίνονται στη συνέχεια ορισμένες μέθοδοι ολοκλήρωσης, που απαιτούνται στη λύση των διαφόρων προβλημάτων, που κύρια εμφανίζονται στις διάφορες τεχνολογικές εφαρμογές. Στο εξής υποτίθεται ότι οι συναρτήσεις που εξετάζονται είναι ολοκληρώσιμες στο πεδίο ορισμού τους.

10.2.1 Ολοκλήρωση με δημιουργία του διαφορικού

Ο Πίνακας 10.1.1 - 1 των ολοκληρωμάτων της παραγράφου 10.1.2 δεν εφαρμόζεται, όταν η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι σύνθετη. Έχοντας υπόψη τον

Πίνακα των παραγώγων και τον αλυσιδωτό κανόνα παραγώγισης του Μαθήματος *Παράγωγος Συνάρτησης*, είναι δυνατόν να δημιουργήσουμε τον παρακάτω Πίνακα 10.2.1 - 1 με τα αόριστα ολοκληρώματα των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων.

Παράδειγμα 10.2.1 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \sqrt{2x-5}\,dx.$$

Λύση. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση γράφεται $(2x-5)^{1/2} = f^{1/2}(x)$, όπου $f(x) = 2x-5$ και $f'(x) = 2$. Τότε εφαρμόζοντας τον τύπο 1 του Πίνακα 10.2.1 - 1 για $a = 1/2$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\int (2x-5)^{1/2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \overbrace{(2x-5)'}^{f'(x)=2}(2x-5)^{1/2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{(2x-5)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{3}(2x-5)^{3/2} + c.\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 10.2.1 - 2

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{5x+2}.$$

Λύση. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση ανάγεται με κατάλληλο μετασχηματισμό στη μορφή $f'(x)/f(x)$, όπου $f(x) = 5x+2$ και $f'(x) = 5$ (δημιουργία σταθεράς). Τότε σύμφωνα με τον τύπο 3 του Πίνακα 10.2.1 - 1 έχουμε

$$\int \frac{dx}{3x+5} = \frac{1}{5}\int \frac{\overbrace{(5x+2)'}^{f'(x)=5}}{5x+2}\,dx = \frac{1}{5}\ln|5x+2| + c.$$

■

Πίνακας 10.2.1 - 1: αόριστα ολοκληρώματα των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων.

α / α	Συνάρτηση	Αόριστο ολοκλήρωμα
1	$f'(x)f^a(x);\ a \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\frac{f^{a+1}(x)}{a+1}$
2	$f'(x)e^{f(x)}$	$e^{f(x)}$
3	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
4	$f'(x)\sin f(x)$	$-\cos f(x)$
5	$f'(x)\cos f(x)$	$\sin f(x)$
6	$\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$	$\tan f(x)$
7	$-\frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$	$\cot f(x)$
8	$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$	$\tan^{-1} f(x)$
9	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$	$\sin^{-1} f(x)$
10	$-\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$	$\cos^{-1} f(x)$
11	$f'(x)\cosh f(x)$	$\sinh f(x)$
12	$f'(x)\sinh f(x)$	$\cosh f(x)$
13	$\frac{f'(x)}{\cosh^2 f(x)}$	$\tanh f(x)$
14	$-\frac{f'(x)}{\sinh^2 f(x)}$	$\coth f(x)$

Παράδειγμα 10.2.1 - 3

Όμοια το

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+4}\,.$$

Λύση. Όμοια η ολοκληρωτέα συνάρτηση, επειδή στον αριθμητή υπάρχει ήδη το x, ανάγεται στη μορφή $f'(x)/f(x)$, όπου $f(x) = x^2+4$ και $f'(x) = 2x$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο 3 του Πίνακα 10.2.1 - 1 έχουμε

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{\left(x^2+4\right)'}^{f'(x)=2x}}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+c.$$

■

Παράδειγμα 10.2.1 - 4

Όμοια

$$\int \cos\omega x\,dx, \quad \text{όταν} \quad \omega > 0.$$

Λύση. Όμοια ανάγεται στη μορφή $f'(x)\cos\omega$, όπου $f(x) = \omega x$ και $f'(x) = \omega$ (δημιουργία σταθεράς). Τότε σύμφωνα με τον τύπο 5 του Πίνακα 10.2.1 - 1 έχουμε

$$\int \cos\omega x\,dx = \frac{1}{\omega}\int (\omega x)'\cos\omega x\,dx = \frac{1}{\omega}\sin\omega x + c.$$

■

Παράδειγμα 10.2.1 - 5

Όμοια είναι

$$\int \sin\omega x\,dx = \frac{1}{\omega}\int (\omega x)'\sin\omega x\,dx = -\frac{1}{\omega}\cos\omega x + c.$$

Παράδειγμα 10.2.1 - 6

Όμοια το

$$\int xe^{-x^2}\,dx.$$

Λύση. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση γράφεται στη μορφή $f'(x)e^{f(x)}$, όπου $f(x) = -x^2$ και $f'(x) = -2x$, ενώ η $f'(x)$ είναι δυνατόν να δημιουργηθεί, επειδή ήδη υπάρχει το x. Άρα σύμφωνα με τον τύπο 2 του Πίνακα 10.2.1 - 1 έχουμε

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int(-2x)e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c.$$

■

Παρατήρηση 10.2.1 - 1

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος

$$\int e^{-x^2}dx$$

δεν γίνεται με τον παραπάνω τρόπο, επειδή απαιτεί τη δημιουργία της

$$f'(x) = -2x,$$

δηλαδή τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση με $-2x$, που σημαίνει ότι απαιτείται στην περίπτωση αυτή η δημιουργία μεταβλητής.

Παράδειγμα 10.2.1 - 7

Όμοια

$$\int \frac{dx}{9+4x^2}\,.$$

Λύση. Έχουμε ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης με σταθερά ως αριθμητή και συνάρτηση που είναι άθροισμα τετραγώνων στον παρονομαστή. Η περίπτωση αυτή ανάγεται στην

$$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

με την παρακάτω διαδικασία: Αρχικά γράφεται ο παρονομαστής στη μορφή $1+f^2(x)$ ως εξής:

$$9+4x^2 = 9\left(1+\frac{4x^2}{9}\right) = 9\left[1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2\right] \quad \text{όπου } f(x) = \frac{2x}{3} \text{ και } f'(x) = \frac{2}{3}\,.$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο 8 του Πίνακα 10.2.1 - 1 είναι

$$\int \frac{dx}{9+3x^2} = \frac{1}{9}\frac{3}{2}\int \frac{\overbrace{(\frac{2x}{3})'}^{f'(x)=2/3}\, dx}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2} = \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)+c.$$

■

Παράδειγμα 10.2.1 - 8

Όμοια

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10}.$$

Λύση. Πρόκειται για ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης με σταθερά ως αριθμητή και τριώνυμο με ρίζες μιγαδικές στον παρονομαστή. Αρχικά μετασχηματίζεται ο παρονομαστής σε άθροισμα τετραγώνων σύμφωνα με τον τύπο

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}, \qquad (10.2.1\text{ - }1)$$

δηλαδή

$$x^2+6x+10 = (x+3)^2+1,$$

οπότε σύμφωνα και με το Παράδειγμα 10.2.1 - 7 έχουμε

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+1} = \int \frac{\overbrace{(x+3)'}^{f'(x)=1}\, dx}{(x+3)^2+1} = \tan^{-1}(x+3)+c.$$

■

Παράδειγμα 10.2.1 - 9

Όμοια

$$\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+6x+10}.$$

Λύση. Πρόκειται για ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης με 1ου βαθμού πολυώνυμο στον αριθμητή και τριώνυμο με ρίζες μιγαδικές στον παρονομαστή. Αρχικά δημιουργείται στον αριθμητή η παράγωγος του παρονομαστή. Έχουμε

$$\left(x^2+6x+10\right)' = 2x+6,$$

οπότε ο αριθμητής γράφεται

$$2x+1 = 2x+6-5 = \left(x^2+6x+10\right)' - 5.$$

Τότε σύμφωνα με τον τύπο 4 του Πίνακα 10.2.1 - 1 και το Παράδειγμα 10.2.1 - 8 είναι

$$\begin{aligned}\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+6x+10} &= \int \frac{\left(x^2+6x+10\right)' - 5\,dx}{x^2+6x+10} \\ &= \int \frac{\left(x^2+6x+10\right)'\,dx}{x^2+6x+10} - 5\int \frac{dx}{x^2+6x+10} \\ &= \ln\left(x^2+6x+10\right) - 5\tan^{-1}(x+3) + c.\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 10.2.1 - 10

Όμοια

$$\int \frac{(3x-2)\,dx}{x^2+6x+10}\,.$$

Λύση. Όμοια πρόκειται για ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης με 1ου βαθμού πολυώνυμο στον αριθμητή και τριώνυμο με ρίζες μιγαδικές στον παρονομαστή, οπότε σύμφωνα και με το Παράδειγμα 10.2.1 - 9, επειδή $\left(x^2+6x+10\right)' = 2x+6$, ο αριθμητής γράφεται

$$\begin{aligned}3x-2 &= 3\left(x-\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2x}{2}-\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(2x-\frac{4}{3}\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(2x+6-6-\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{2}(2x+6) - 7.\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον τύπο 4 του Πίνακα 10.2.1 - 1 και το Παράδειγμα 10.2.1 - 9 είναι

$$\begin{aligned}\int \frac{(3x-2)\,dx}{x^2+6x+10} &= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+6)\,dx}{x^2+6x+10} - 11\int \frac{dx}{(x+3)^2+1} \\ &= \frac{3}{2}\ln\left(x^2+6x+10\right) - 11\tan^{-1}(x+1) + c.\end{aligned}$$

■

Άσκηση

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$:

i) $\dfrac{1}{\sqrt{5x+3}}$ *vii)* $\dfrac{x}{2x+1}$

ii) e^{-3x} *viii)* $\cosh 2x - 2\sinh 4x$

iii) $\dfrac{x}{\sqrt{2+3x^2}}$ *ix)* $\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$

iv) $\dfrac{1}{\cos^2 2x}$ *x)* $\dfrac{1}{x\ln^2 x}$

v) $x\sin x^2$ *xi)* $\dfrac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}$

vi) $5^x \quad \left(a^x = e^{x\,\ln a}\right)$ *xii)* $\tan 3x \quad \left(\tan 3x = \dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}\right).$

Απαντήσεις

i) $\frac{2}{5}\sqrt{3+5x}$, ii) $-\frac{1}{3}e^{-3x}$, iii) $\frac{\sqrt{2+3x^2}}{3}$, iv) $\frac{1}{2}\tan 2x$, v) $-\frac{1}{2}\cos x^2$, vi) $\frac{5^x}{\ln 5}$
vii) $\frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x+1-1}{2x+1} = \ldots$, οπότε $\frac{1+2x-\ln(1+2x)}{4}$, viii) $-\frac{1}{2}\cosh 4x + \frac{1}{2}\sinh 2x$,
ix) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)$, x) $-\frac{1}{\ln x}$, xi) $\frac{2}{3}\tan^{3/2} x$, xii) $-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x|$.

10.2.2 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Πολλές φορές το πρόβλημα του υπολογισμού του αόριστου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης $f(x)$ με πεδίο ορισμού, έστω D, απλουστεύεται, αν αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή x με μία νέα, έστω $u = u(x)$, που να είναι ορισμένη σε ένα κατάλληλο διάστημα D_1 της μεταβλητής u, έτσι ώστε το σύνολο των τιμών της συνάρτησης αυτής να είναι $u(D_1) = D$.

Στη μέθοδο αυτή, που είναι γνωστή ως **μέθοδος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση** (integration by substitution), πρέπει να λαμβάνονται υπόψη τα εξής:

- Ο μετασχηματισμός πρέπει να αντιστρέφεται μονοσήμαντα, δηλαδή να λύνεται μονοσήμαντα ως προς x, και
- το ολοκλήρωμα που προκύπτει να είναι απλούστερο του αρχικού, δηλαδή να μην περιέχει ρίζες, αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις, κ.λπ.

Παράδειγμα 10.2.2 - 1

Έστω το ολοκλήρωμα

$$\int e^{-3x}\,dx.$$

Αν

$$u=-3x \quad \text{είναι} \quad x=-\frac{u}{3}, \quad \text{οπότε} \quad dx=d\left(-\frac{u}{3}\right)=\left(-\frac{u}{3}\right)'\,du=-\frac{1}{3}\,du,$$

τότε αντικαθιστώντας έχουμε

$$\begin{aligned}\int e^{-3x}\,dx &= \int e^{u}\overbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)\,du}^{dx}=-\frac{1}{3}\int e^{u}\,du\\ &= -\frac{1}{3}\,e^{u}+c=-\frac{1}{3}\,e^{-3x}+c.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 10.2.2 - 2

Όμοια το

$$\int e^{-x^2}\,dx.$$

Αν

$$u=-x^2 \quad \text{με} \quad u<0, \quad \text{τότε είναι} \quad x=\pm\sqrt{-u}.$$

Επομένως ο μετασχηματισμός δεν λύνεται μονοσήμαντα ως προς x και η μέθοδος δεν εφαρμόζεται.

Παράδειγμα 10.2.2 - 3

Όμοια το

$$I=\int \tan 5x\,dx.$$

Αν

$$u=5x \quad \text{είναι} \quad x=\frac{u}{5}, \quad \text{οπότε} \quad dx=d\left(\frac{u}{5}\right)=\left(\frac{u}{5}\right)'\,du=\frac{1}{5}\,du,$$

και αντικαθιστώντας έχουμε

$$\begin{aligned}\int \tan 5x\,dx &= \int \tan u \overbrace{\left(\frac{1}{5}\right) du}^{dx} = \frac{1}{5}\int \tan u\,du \\ &= \frac{1}{5}\int \frac{\overbrace{\sin u\,du}^{(-\cos u)'du}}{\cos u} = -\frac{1}{5}\int \frac{(-\cos u)'du}{\cos u} \\ &= -\frac{1}{5}\ln|\cos u| + c = -\frac{1}{5}\ln|\cos 5x| + c.\end{aligned}$$

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας κατάλληλη αντικατάσταση να υπολογιστούν τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα των συναρτήσεων $f(x)$:

i) $\cos(\omega x + \phi)$ με $\omega > 0$ *iii)* $\cot 2x$

ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$ *iv)* $\dfrac{x}{\sqrt{1+4x^2}}$.

Απαντήσεις

i) Έστω $\omega x + \phi = u$, $dx = \frac{du}{\omega}$ οπότε τελικά $I = \int \cos(\omega x + \phi)\,dx = \frac{\sin(\omega x+\phi)}{\omega}$
ii) Έστω $2x - 1 = u$, οπότε $I = \sqrt{2x-1}$, iii) $2x = u$, οπότε $I = \frac{1}{2}\ln|\sin 2x|$,
iv) $\frac{x}{\sqrt{1+4x^2}} = \frac{1}{2}\frac{(x^2)'}{\sqrt{1+4x^2}} = \ldots$, οπότε $I = \frac{1}{4}\sqrt{1+4x^2}$.

10.2.3 Παραγοντική ολοκλήρωση

Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g παραγωγίζονται στο $D \subseteq \mathbb{R}$ με D ανοικτό σύνολο. Εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγώγισης γινομένου έχουμε

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης προκύπτει ότι

$$\int [f(x)g(x)]'\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + f(x)g'(x)\,dx$$

που σύμφωνα με τον Ορισμό 10.1.1 - 1 γράφεται

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx,$$

δηλαδή τελικά

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx. \qquad (10.2.3 - 1)$$

Η μέθοδος ολοκλήρωσης που προκύπτει από τον τύπο $(10.2.3-1)$ είναι γνωστή ως η μέθοδος της **παραγοντικής** ή της **κατά μέρη ολοκλήρωσης** (integration by parts). Είναι προφανές ότι ο τύπος $(10.2.3-1)$ εφαρμόζεται, όταν η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι ή είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων, αφού πρώτα μία από τις δύο συναρτήσεις γραφεί στη μορφή $g'(x)$, όπως αυτό περιγράφεται στα παρακάτω παραδείγματα όπου δίνονται οι περισσότερο χρησιμοποιούμενες περιπτώσεις εφαρμογής της παραγοντικής ολοκλήρωσης.

Γινόμενο πολυωνύμου με εκθετική συνάρτηση

Αρχικά δημιουργείται η παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης.

Παράδειγμα 10.2.3 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int x\,e^{-2x}\,dx.$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(10.2.3-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{f(x)} \overbrace{e^{-2x}}^{g(x)}\, dx &= \int \underbrace{x}_{f(x)} \overbrace{\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)'}^{g'(x)}\, dx \\
&= -\frac{1}{2}x\, e^{-2x} + \frac{1}{2}\int \underbrace{x'}_{f'(x)} \overbrace{e^{-2x}}^{g(x)}\, dx \\
&= -\frac{1}{2}x\, e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\, dx \\
&= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) \\
&= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c.
\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 10.2.3 - 2

Όμοια το

$$\int x^2\, e^{-2x}\, dx.$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int x^2\, e^{-2x}\, dx &= -\frac{1}{2}\int x^2 \left(e^{-2x}\right)'\, dx \\
&= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \frac{1}{2}\int \overbrace{\left(x^2\right)'}^{2x} e^{-2x}\, dx \\
&= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \frac{1}{2}\cdot 2\int xe^{-2x} \\
&= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int xe^{-2x}\, dx,
\end{aligned}$$

όταν σύμφωνα με το Παράδειγμα 10.2.3 - 1 είναι

$$\int x\, e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c.$$

Άρα

$$\int x^2 e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c.$$

■

Γινόμενο πολυωνύμου με τριγωνομετρική συνάρτηση

[2]Αρχικά δημιουργείται η παράγωγος της τριγωνομετρικής συνάρτησης.

Παράδειγμα 10.2.3 - 3

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int x^2 \sin 3x\, dx.$$

[2]Ημιτόνου ή συνημιτόνου.

Λύση. Εφαρμόζοντας διαδοχικά λόγω του x^2 δύο φορές την παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin 3x\, dx &= \int x^2 \left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)' dx \\
&= -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{1}{3}\int \left(x^2\right)' \cos 2x\, dx \\
&= -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{3}\int x \cos 3x\, dx \quad 1\eta \text{ παραγοντική} \\
&= -\frac{1}{3}\, x^2 \cos 3x + \frac{2}{3}\int x \left(\frac{\sin 3x}{3}\right)' dx \\
&= -\frac{1}{3}\, x^2 \cos 3x + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}\, x \sin 3x\, dx - \frac{1}{3}\int x' \sin 3x\, dx\right] \\
&= -\frac{1}{3}\, x^2 \cos 3x + \frac{2}{9}\, x \sin 3x - \frac{2}{9}\int x' \sin 3x\, dx \\
&= -\frac{1}{3}\, x^2 \cos 3x + \frac{2}{9}\, x \sin 3x - \frac{2}{9}\overbrace{\int \sin 3x\, dx}^{-\frac{\cos 3x}{3}} \\
&= -\frac{1}{3}\, x^2 \cos 3x + \frac{2}{9}\, x \sin 3x + \frac{2}{27} \cos 3x + c.
\end{aligned}$$

■

Γινόμενο εκθετικής με τριγωνομετρική συνάρτηση

Δημιουργείται ανάλογα με την ευκολία που παρουσιάζεται η παράγωγος ή της τριγωνομετρικής ή της εκθετικής συνάρτησης και εφαρμόζεται δύο φορές ο τύπος $(10.2.3-1)$. Στη 2η παραγοντική δημιουργείται πάντοτε η παράγωγος της ίδιας συνάρτησης με την 1η φορά.

Παράδειγμα 10.2.3 - 4

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int e^{-x} \sin 2x\, dx.$$

Λύση. Έστω ότι δημιουργείται η παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης. Τότε διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} = \int \underbrace{e^{-x}}_{f(x)} \overbrace{\sin 2x}^{g(x)}\, dx &= \int \overbrace{\left(-e^{-x}\right)'}^{f'(x)} \sin 2x\, dx \\
&= -e^{-x}\sin 2x + \int e^{-x} \overbrace{(\sin 2x)'}^{2\cos 2x}\, dx \\
&= -e^{-x}\sin 2x + 2\int e^{-x}\cos 2x\, dx \quad 1\eta \text{ παραγοντική} \\
&= -e^{-x}\sin 2x + 2\int \left(-e^{-x}\right)'\cos 2x\, dx \\
&= -e^{-x}\sin 2x + 2\left[-e^{-x}\cos 2x - \int e^{-x}\overbrace{(\cos 2x)'}^{-2\sin 2x}\, dx\right] \\
&= -e^{-x}\sin 2x - 2e^{-x}\cos 2x - 4\int e^{-x}\sin 2x\, dx \\
&= -e^{-x}\left(\sin 2x + 2\cos 2x\right) - 4\,\mathrm{I} \quad 2\eta \text{ παραγοντική.}
\end{aligned}$$

Άρα

$$\mathrm{I} = -e^{-x}\left(\sin 2x + 2\cos 2x\right) - 4\,\mathrm{I},$$

οπότε λύνοντας ως προς I τελικά έχουμε

$$\int e^{-x}\sin 2x\, dx = -\frac{-e^{-x}\left(\sin 2x + 2\cos 2x\right)}{5} + c.$$

■

Ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος με το MATLAB γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 10.2.3 - 1 (αόριστου ολοκληρώματος)

```
>> syms x
>> int(exp(-x)*sin(2*x),x)
```

ενώ με το MATHEMATICA με την εντολή:

Πρόγραμμα 10.2.3 - 2 (αόριστου ολοκληρώματος)

```
Integrate[Exp[-x]Sin[2x],x]
```

Γινόμενο πολυωνύμου με λογαριθμική συνάρτηση

Αρχικά δημιουργείται η παράγωγος του πολυωνύμου.

Παράδειγμα 10.2.3 - 5

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int x^2 \ln x \, dx.$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int x^2 \ln x \, dx &= \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x \, dx \\
&= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^3 \overbrace{(\ln x)'}^{\frac{1}{x}} dx \\
&= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c.
\end{aligned}$$

■

Γινόμενο πολυωνύμου με αντίστροφη τριγωνομετρική συνάρτηση

Αρχικά δημιουργείται η παράγωγος του πολυωνύμου.

Παράδειγμα 10.2.3 - 6

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \tan^{-1} 3x \, dx.$$

Λύση. Όμοια έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \tan^{-1} 3x\,dx &= \int x^0 \tan^{-1} 3x\,dx = \int \overbrace{x^1}^{f'(x)} \tan^{-1} 3x\,dx \\
&= x\,\tan^{-1} 3x - \int x \overbrace{\left(\tan^{-1} 3x\right)'}^{\frac{(3x)'}{1+(3x)^2}=\frac{3}{1+9x^2}} dx \\
&= x\,\tan^{-1} 3x - \int \frac{3x\,dx}{1+9x^2} \\
&= x\,\tan^{-1} 3x - \frac{1}{6}\int \frac{\left[9x^2+1\right]'\,dx}{1+9x^2} \\
&= x\,\tan^{-1} 3x - \frac{1}{6}\ln\left(1+9x^2\right) + c.
\end{aligned}$$

■

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$:

i)	$x^2 e^{-3x}$	*v)*	$\ln^2 x$
ii)	$x^2 \sin 2x$	*vi)*	$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$
iii)	$x\,\tan^{-1} x$	*vii)*	$\sin^{-1} 2x$
iv)	$e^{-2x}\sin 3x$	*viii)*	$x\cos^2 x$

2. Αν $a,\ \omega \neq 0$, δείξτε ότι

$$\int e^{ax}\,\sin \omega x\,dx = \frac{e^{ax}\left(a\sin \omega x - \omega \cos \omega x\right)}{a^2+\omega^2} + c.$$

Απαντήσεις

i) $-\frac{e^{-3x}}{27}\left(9x^2+6x+2\right)$, ii) $-\frac{1}{4}\left(2x^2-1\right)\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x$,
iii) $\frac{1}{2}\left(-x+\tan^{-1} x + x^2\tan^{-1} x\right)$, (iv) $-\frac{e^{-2x}}{13}\left(3\cos 3x + 2\sin 3x\right)$,
v) $x\left(2-2\ln x+\ln^2 x\right)$, vi) $-\sqrt{1+x^2}+x\,\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$,
vii) $\frac{\sqrt{1-4x^2}}{2} + x\tan^{-1} 2x$, viii) αρχικά $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, οπότε $\frac{x^2}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + \frac{x}{4}\sin 2x$.

10.2.4 Ολοκλήρωση με υποβιβασμό

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται κυρίως, όταν η ολοκληρωτέα συνάρτηση ή όρος αυτής είναι υψωμένη σε δύναμη και αποσκοπεί στην αναγωγή του υπολογισμού του αρχικού ολοκληρώματος σε υπολογισμό ολοκληρώματος με όρο υψωμένο σε βαθμό μικρότερο του αρχικού. Ο τύπος υπολογισμού που προκύπτει λέγεται τότε **αναγωγικός**.

Παράδειγμα 10.2.4 - 1

Έστω το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I}_\nu = \int x^\nu e^{-x}\, dx, \quad \text{όταν} \quad \nu = 1, 2, \ldots .$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_\nu &= \int x^\nu e^{-x}\, dx = \int x^\nu \left(-e^{-x}\right)' dx \\ &= -x^\nu e^{-x} + \int (x^\nu)' e^{-x}\, dx \\ &= -x^\nu e^{-x} + \nu \int x^{\nu-1} e^{-x}\, dx. \end{aligned}$$

Άρα

$$\int x^\nu e^{-x}\, dx = -x^\nu e^{-x} + \nu \int x^{\nu-1} e^{-x}\, dx,$$

δηλαδή

$$\mathrm{I}_\nu = -x^\nu e^{-x} + \nu\, \mathrm{I}_{\nu-1}, \qquad (10.2.4 - 1)$$

όταν $\nu = 1, 2, \ldots$.

Στον αναγωγικό τύπο $(10.2.4 - 1)$ το προς υπολογισμό ολοκλήρωμα I_ν υπολογίζεται συναρτήσει του όρου $-x^\nu e^{-x}$ και του ολοκληρώματος $I_{\nu-1} = \int x^{\nu-1} e^{-x} dx$, όπου ο όρος $x^{\nu-1}$ στην ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι κατά βαθμό μικρότερος του αρχικού όρου x^ν. Είναι προφανές ότι με διαδοχική εφαρμογή του τύπου υπολογίζεται τελικά το ολοκλήρωμα I_ν.

Εφαρμογή για $\nu = 3$

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_3 &= -x^3 e^{-x} + 3\mathrm{I}_2 \\ \mathrm{I}_2 &= -x^2 e^{-x} + 2\mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_1 &= -xe^{-x} + \mathrm{I}_0 = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -x\, e^{-x} - e^{-x}, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_3 &= \int x^3 e^{-x}\, dx = -x^3\, e^{-x} + 3\,\mathrm{I}_2 \\ &= -x^3\, e^{-x} + 3\left(-x^2\, e^{-x} + 2\,\mathrm{I}_1\right) \\ &= -x^3\, e^{-x} - 3\,x^2 e^{-x} + 6\,\mathrm{I}_1 \\ &= -x^3\, e^{-x} - 3\,x^2 e^{-x} + 6\left(-x\, e^{-x} - e^{-x}\right) \\ &= -\left(x^3 + 3x^2 + 6x + 6\right) e^{-x} + c. \end{aligned}$$

Άσκηση

Αν $\nu = 2,\, 3,\, \ldots$, εκτός αν διαφορετικά ορίζεται, δείξτε τους παρακάτω αναγωγικούς τύπους

$$\int \cos^\nu x\, dx = \frac{\sin x\, \cos^{\nu-1} x}{\nu} + \frac{\nu - 1}{\nu} \int \cos^{\nu-2} x\, dx.$$

$$\int \ln^\nu x\, dx = x\, \ln^\nu x - \nu \int \ln^{\nu-1} x\, dx, \quad \text{όταν} \quad \nu = 1,\, 2,\, \ldots\, .$$

$$\begin{aligned} \int x^\nu\, \sin \omega x\, dx &= -\frac{x^\nu\, \cos \omega x}{\omega} + \frac{\nu x^{\nu-1}\, \sin \omega x}{\omega^2} \\ &\quad -\frac{\nu(\nu-1)}{\omega^2} \int x^{\nu-2}\, \sin \omega x\, dx, \quad \text{όταν} \quad \omega \neq 0. \end{aligned}$$

$$\int e^x\, \sin^\nu x\, dx = \frac{e^x\, \sin^{\nu-1} x}{\nu^2 + 1} (\sin x - \nu\, \cos x) + \frac{\nu(\nu-1)}{\nu^2+1} \int e^x\, \sin^{\nu-2} x\, dx.$$

10.2.5 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Έστω ότι η ρητή συνάρτηση είναι της μορφής

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,, \qquad (10.2.5\text{ - }1)$$

όπου το πολυώνυμο $P(x)$ είναι βαθμού, έστω ν και το $Q(x)$ βαθμού m. Τότε διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις ολοκλήρωσης (partial function integration):

I. Ο βαθμός του αριθμητή να είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή

Υποθέτοντας ότι ο παρονομαστής $Q(x)$ έχει αναλυθεί σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων όρων,[3] η ρητή συνάρτηση $(10.2.5-1)$ είναι δυνατόν να αναλυθεί σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

i) ο παράγοντας με παρονομαστή $ax+b$ αναλύεται σε απλό κλάσμα της μορφής

$$\frac{A}{ax+b}\,, \qquad (10.2.5\text{ - }2)$$

ii) ο με παρονομαστή $(ax+b)^2$, αντίστοιχα $(ax+b)^3$, σε

$$\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2}\,, \quad \text{αντίστοιχα} \qquad (10.2.5\text{ - }3)$$

$$\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3}\,, \quad \text{κ.λπ.} \qquad (10.2.5\text{ - }4)$$

iii) ο με ax^2+bx+c σε

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,, \quad \text{κ.λπ.} \qquad (10.2.5\text{ - }5)$$

Η μέθοδος προσδιορισμού των συντελεστών A, B, C, ... που θα εξεταστεί στο μάθημα αυτό στηρίζεται στη σύγκριση των συντελεστών των ίσων δυνάμεων του x.

[3] Περιπτώσεις παραγόντων ανωτέρου βαθμού δεν θα εξεταστούν.

Ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία για τη γενική περίπτωση και τα σχετικά με αυτή θεωρήματα.

Παράδειγμα 10.2.5 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I} = \int \frac{x+2}{x^2+x-12}\,dx\,, \quad \text{όταν} \quad x \neq 3,\, -4.$$

Λύση. Σύμφωνα με την $(10.2.5-2)$ έχουμε

$$\frac{x+2}{x^2+x-12} = \frac{x+2}{(x-3)(x+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4}\,. \tag{1}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (1) με τον παρονομαστή που αναλύεται, δηλαδή με $(x-3)(x+4)$, προκύπτει ότι

$$x+2 = A(x+4) + B(x-3). \tag{2}$$

Η (2) γράφεται

$$(A+B-1)x + 4A - 3B - 2 = 0$$

που για να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει

$$\begin{array}{rcrcl} A & + & B & = & 1 \\ 4A & - & 3B & = & 2, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad A = \frac{5}{7} \quad \text{και} \quad B = \frac{2}{7}\,.$$

Τελικά σύμφωνα και με την (1) έχουμε

$$\mathrm{I} = \frac{5}{7}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{2}{7}\int \frac{dx}{x+4} = \frac{5}{7}\ln|x-3| + \frac{2}{7}\ln|x+4| + c.$$

■

Παράδειγμα 10.2.5 - 2

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{(x+1)(x-1)^2}\,, \quad \text{όταν} \quad x \neq \pm 1.$$

Λύση. Σύμφωνα με τις $(10.2.5-2)$ - $(10.2.5-3)$ έχουμε

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}\,,$$

οπότε

$$1 = A(x-1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x+1). \tag{3}$$

Η (3) γράφεται

$$(A+B)x^2 + (-2A+C)x + (A-B+C-1) = 0$$

που για να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει

$$\begin{array}{rcrcrcl} A & + & B & & & = & 0 \\ -2A & & & + & C & = & 0 \\ A & - & B & + & C & = & 1, \end{array} \quad \text{οπότε } A = \frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{4} \text{ και } C = \frac{1}{2}.$$

Τελικά

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\overbrace{\int (x-1)'(x-1)^{-2}\,dx}^{\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}} \\ &= \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + c. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 10.2.5 - 3

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I} = \int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+4)}, \quad \text{όταν} \quad x \neq 1.$$

Λύση. Όμοια σύμφωνα με τις $(10.2.5-2)$ και $(10.2.5-5)$ έχουμε

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4},$$

οπότε

$$x = A\left(x^2+4\right) + (Bx+C)(x-1). \tag{4}$$

Η (4) γράφεται

$$(A+B)x^2+(-B+C-1)x+(4A-C)=0$$

που για να ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, πρέπει

$$\begin{array}{rcrcrcl} A & + & B & & & = & 0 \\ & - & B & + & C & = & 1 \\ 4A & & & - & C & = & 0, \end{array} \quad \text{οπότε } A=-\frac{1}{5},\ B=\frac{1}{5} \text{ και } C=\frac{4}{5}. \tag{5}$$

Τελικά έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= -\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{5}\int\frac{x\,dx}{x^2+4}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^2+4} \\ &= -\frac{1}{5}\ln|x+1|+\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2, \end{aligned}$$

όπου

$$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{5}\int\frac{x\,dx}{x^2+4}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{\overbrace{\left(x^2+4\right)'}^{2x}dx}{x^2+4}=\frac{1}{10}\ln\left(x^2+4\right),$$

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_2 &= \frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^2+4}=\frac{4}{5}\int\frac{dx}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{5}\cdot 2\int\frac{\left(\frac{x}{2}\right)'dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{2}{5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Άρα

$$\mathrm{I}=-\frac{1}{5}\ln|x+1|+\frac{1}{10}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{2}{5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c.$$

■

Ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος με το MATLAB γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 10.2.5 - 1 (αόριστου ολοκληρώματος)

```
>> syms x
>> int(x/((x-1)*(x^2+4)),x)
```

ενώ με το MATHEMATICA με την εντολή:

Πρόγραμμα 10.2.5 - 2 (αόριστου ολοκληρώματος)

```
Integrate[x/((x-1)*(x^2+4)),x]
```

II. Ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον βαθμό του παρονομαστή

Αρχικά στην $(10.2.5-1)$ γίνεται η διαίρεση των πολυωνύμων $P(x)$ και $Q(x)$, οπότε η περίπτωση αυτή ανάγεται τελικά στην περίπτωση I.

Παράδειγμα 10.2.5 - 4

Έστω το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x^3-1}{x^2-4}\,dx\,, \quad \text{όταν} \quad x \neq \pm 2.$$

Από τη διαίρεση του αριθμητή και του παρονομαστή και μετά την ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε

$$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4x-1}{x^2-4} = x + \frac{7}{4}\,\frac{1}{x-2} + \frac{9}{4}\,\frac{1}{x+2}\,,$$

οπότε

$$\int \frac{x^3-1}{x^2-4}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{7}{4}\ln|x-2| + + \frac{9}{4}\ln|x+2| + c.$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα των παρακάτω ρητών συναρτήσεων $f(x)$:

i) $\dfrac{x-1}{(x+1)(x-2)}$ *iv)* $\dfrac{x^4}{x^2+2x+2}$

ii) $\dfrac{1}{x\,(x^2+5)}$ *v)* $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

iii) $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)^2}$ *vi)* $\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,.$

Απαντήσεις

i) $\frac{2}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{3}\ln|x-2|$, ii) $\frac{1}{5}\ln|x|-\frac{1}{10}\ln\left(5+x^2\right)$,
iii) $\frac{1}{9}\left(-\frac{6}{x+2}+\ln|x-1|-\ln|x+2|\right)$, iv) $2x-x^2+\frac{x^3}{3}-4\tan^{-1}(x+1)$,
v) αν $\sqrt{x}=u$, τελικά $2\sqrt{x}-2\tan^{-1}\sqrt{x}$, vi) όμοια αν $e^{-x}=u$, τότε $x-\ln(1+e^x)$.

10.2.6 Ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Εξετάζονται μόνον οι μορφές:

$$\int \sin mx\,\cos nx\,dx, \quad \int \sin mx\,\sin nx\,dx \quad \text{και} \quad \int \cos mx\,\cos nx\,dx$$

Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούνται οι παρακάτω τύποι της Τριγωνομετρίας:

$$2\,\sin A\,\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B), \qquad (10.2.6\text{ - }1)$$
$$2\,\sin A\,\sin B = \cos(A-B)-\cos(A+B), \qquad (10.2.6\text{ - }2)$$
$$2\,\cos A\,\cos B = \cos(A-B)+\cos(A+B). \qquad (10.2.6\text{ - }3)$$

Επίσης ισχύουν

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{και} \quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\,. \qquad (10.2.6\text{ - }4)$$

Παράδειγμα 10.2.6 - 1

Σύμφωνα με τον τύπο $(10.2.6-2)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int \sin x \sin 3x\, dx &= \frac{1}{2}\int [\cos(x-3x)-\cos(x+3x)]\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 4x)\ dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) \\ &= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + c.\end{aligned}$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$:

$i)$ $\sin^2 2x\, \cos 3x$ $\qquad$ $iii)$ $\sin 10x\, \sin 8x$

$ii)$ $\cos x\, \cos^2 4x$ $\qquad$ $iv)$ $\sin^3 x$.

Απαντήσεις

i) Αρχικά $\sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2}$, οπότε τελικά $-\frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{28}\sin 7x$,
ii) όμοια $\cos^2 4x = \frac{1+\cos 8x}{2}$, οπότε $\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{28}\sin 7x + \frac{1}{36}\sin 9x$,
iii) $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{36}\sin 18x$, $\quad$ iv) $\sin^3 x = \sin x\, \frac{1-\cos 2x}{2}$, οπότε τελικά $-\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x$.

10.2.7 Προσεγγιστικός υπολογισμός ολοκληρώματος

Στα περισσότερα προβλήματα των εφαρμογών το ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται με κανέναν μετασχηματισμό ή άλλη τροποποίηση της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Η γενική αντιμετώπιση του προβλήματος, μέρος του οποίου θα μελετηθεί σε προσεχές εξάμηνο, είναι αντικείμενο μελέτης των Μαθηματικών και ο αναγνώστης παραπέμπεται για περαιτέρω μελέτη στη βιβλιογραφία. Στο μάθημα αυτό θα γίνει η προσέγγιση του ολοκληρώματος με αντικατάσταση της ολοκληρωτέας

συνάρτησης ή όρου αυτής με το αντίστοιχο πολυώνυμο του Taylor ή του Maclaurin.

Παράδειγμα 10.2.7 - 1

Έστω το ολοκλήρωμα

$$\int e^{-x^2}\,dx.$$

Σύμφωνα με τον τύπο του Maclaurin το πολυώνυμο 4ου βαθμού που προσεγγίζει την ολοκληρωτέα συνάρτηση e^{-x^2} είναι

$$e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\,.$$

Επομένως

$$\int e^{-x^2}\,dx \approx \int \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\right) dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + c.$$

Παράδειγμα 10.2.7 - 2

Όμοια έστω το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\ln x}{x-1}\,dx, \quad \text{όταν} \quad x > 1.$$

Σύμφωνα με τον τύπο του Taylor με κέντρο, έστω $\xi = e$, το πολυώνυμο 1ου βαθμού που προσεγγίζει την ολοκληρωτέα συνάρτηση $\ln x$ είναι

$$\ln x \approx 1 + \frac{x-e}{e}\,.$$

Επομένως

$$\int \frac{\ln x}{x-1}\,dx \approx \int \frac{1}{x-1}\left(1 + \frac{x-e}{e}\right) dx = \frac{x}{e} + \frac{\ln(x-1)}{e} + c.$$

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο του Maclaurin 5ου, αντίστοιχα 4ου βαθμού να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx\,, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx.$$

Απαντήσεις

Είναι $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24}$ κ.λπ.

10.3 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[2] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[3] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Βιβλιογραφία για περαιτέρω μελέτη

Παπαδημητράκης, Μ. (2015). *Ανάλυση: Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής* *http://fourier.math.uoc.gr/papadim/analysis_n.pdf*
Πανεπιστήμιο Κρήτης: Τμήμα Μαθηματικών.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://eclass.uoa.gr/courses/MATH141/ θέση Έγγραφα
- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 11

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

11.1 Εισαγωγικές έννοιες

Στο μάθημα αυτό θα δοθούν περιληπτικά οι σημαντικότερες έννοιες που αναφέρονται στο ορισμένο ολοκλήρωμα.[1]

Η αρχική μορφή της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος ως προσέγγιση του εμβαδού ενός γεωμετρικού σχήματος συναντάται το πρώτον στην αρχαιότητα κατά τον 3ον π.Χ. αιώνα με τον Αρχιμήδη, ο οποίος χρησιμοποίησε προσεγγιστικές μεθόδους για να υπολογίσει το εμβαδόν του κύκλου, της έλικας, κ.λπ. Στα μέσα του 19ου αιώνα γίνεται από τον Riemann μια προσπάθεια ορισμού της έννοιας με καθαρά μαθηματικούς όρους. Ο ορισμός αυτός γενικεύτηκε στη συνέχεια από μία σειρά άλλων επιστημόνων, η σημαντικότερη όμως γενίκευση της έννοιας έγινε από τον Lebesgue στις αρχές του 20ου αιώνα.

Το ορισμένο ολοκλήρωμα εκτός από τον υπολογισμό εμβαδών χρησιμοποιείται και σε μία σειρά άλλων εφαρμογών που καλύπτουν το σύνολο των θετικών επιστημών, μέρος των οποίων θα δοθούν στο μάθημα που ακολουθεί.

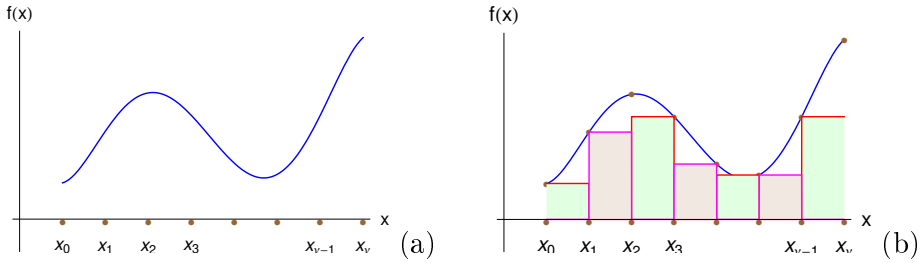
[1] Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [2, 3, 4] και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 8.

11.1.1 Ορισμός ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$, που υποτίθεται ότι είναι συνεχής για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα ότι ισχύει $f(x) > 0$. Αν το $[\alpha,\beta]$ υποδιαιρεθεί σε ν το πλήθος υποδιαστήματα από τα σημεία

$$\delta = \{\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta\}, \qquad (11.1.1\text{ - }1)$$

τότε η υποδιαίρεση αυτή θα λέγεται στο εξής **διαμέριση** και θα συμβολίζεται με δ, ενώ τα x_0, x_1, …, x_ν σημεία της διαμέρισης. Το πλάτος Δx_i των υποδιαστημάτων είναι τότε $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, όταν $i = 1, 2, \ldots, \nu$ (Σχ. 11.1.1 - 1a).



Σχήμα 11.1.1 - 1: (a) Το διάγραμμα της $f(x)$ και η διαμέριση δ του $[\alpha,\beta]$. (b) Άθροισμα $K(\delta, f)$.

Επειδή η συνάρτηση f έχει υποτεθεί συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, θα πρέπει να είναι συνεχής και σε κάθε υποδιάστημα της παραπάνω διαμέρισης. Σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής συνεχών συναρτήσεων[2] θα πρέπει να υπάρχει ένα σημείο σ_i, αντίστοιχα s_i, που η $f(x) \mid [x_{i-1}, x_i]$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$ να λαμβάνει μια ελάχιστη, αντίστοιχα μια μέγιστη τιμή σε αυτό. Τότε σύμφωνα με τα παραπάνω είναι δυνατόν να οριστούν:

i) το **κάτω άθροισμα** (Σχ. 11.1.1 - 1b)

$$K(\delta, f) = \sigma_1\Delta x_1 + \sigma_2\Delta x_2 + \ldots + \sigma_\nu\Delta x_\nu, \qquad (11.1.1\text{ - }2)$$

ii) το **άνω άθροισμα** (Σχ. 11.1.1 - 2a)

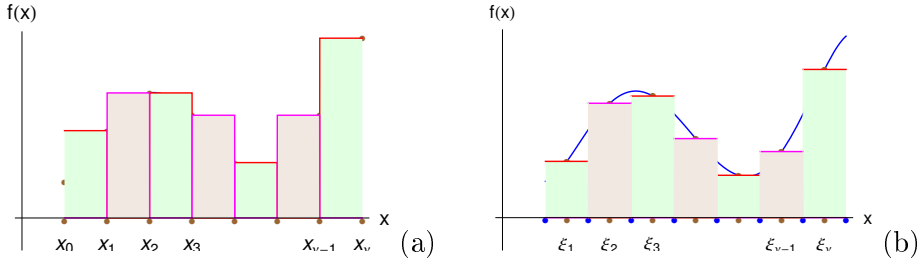
$$A(\delta, f) = s_1\Delta x_1 + s_2\Delta x_2 + \ldots + s_\nu\Delta x_\nu, \qquad (11.1.1\text{ - }3)$$

[2] Βλέπε Μάθημα *Συνέχεια Συνάρτησης* - Θεώρημα 8.1.3 - 6.

iii) το **ενδιάμεσο άθροισμα** (Σχ. 11.1.1 - 2b)

$$E(\delta, f, \xi) = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_\nu)\,\Delta x_\nu, \qquad (11.1.1\text{ - }4)$$

όταν ξ_i; $i = 1, 2, \ldots, \nu$ είναι μία επιλογή ενδιάμεσων σημείων, δηλαδή $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$; $i = 1, 2, \ldots, \nu$.



Σχήμα 11.1.1 - 2: (a) Άθροισμα $A(\delta, f)$ και (b) $E(\delta, f, \xi)$.

Είναι προφανές ότι σε κάθε διαμέριση του $[\alpha, \beta]$ αντιστοιχούν και διαφορετικά αθροίσματα των μορφών $(11.1.1 - 3)$ - $(11.1.1 - 4)$. Στην περίπτωση όμως που το πλάτος της διαμέρισης τείνει στο μηδέν, οι τιμές των παραπάνω αθροισμάτων τελικά συγκλίνουν. Συγκεκριμένα στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω θεμελιώδες θεώρημα:

Θεώρημα 11.1.1 - 1 (ορισμένου ολοκληρώματος). *Έστω f $|[\alpha, \beta]$ μία συνάρτηση συνεχής για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Τότε, όταν το πλάτος $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ όπου $i = 1, 2, \ldots, \nu$, της διαμέρισης δ του $[\alpha, \beta]$ τείνει στο μηδέν, τα παραπάνω αθροίσματα $(11.1.1 - 3)$ - $(11.1.1 - 4)$ συγκλίνουν προς έναν μονοσήμαντα ορισμένο πραγματικό αριθμό, έστω $I(f)$, που είναι ανεξάρτητος από τη διαμέριση δ και την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ.*

Ορισμός 11.1.1 - 1 (ορισμένου ολοκληρώματος). *Ο πραγματικός αριθμός $I(f)$, στον οποίο σύμφωνα με το Θεώρημα 11.1.1 - 1 συγκλίνουν τα αθροίσματα $(11.1.1 - 3)$ - $(11.1.1 - 4)$, ορίζεται ως το ορισμένο ολοκλήρωμα*[3] *(definite*

[3] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Integral*

integral) ή ολοκλήρωμα του Riemann της f στο $[\alpha,\beta]$ και συμβολίζεται με

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = I(f). \qquad (11.1.1 - 5)$$

Τα σημεία α και β λέγονται τότε κάτω και άνω αντίστοιχα άκρα ολοκλήρωσης ή γενικά άκρα ολοκλήρωσης, ενώ το $[\alpha,\beta]$ διάστημα ολοκλήρωσης.

Παρατηρήσεις 11.1.1 - 1

I. Ειδικά ορίζεται ότι

$$\int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0,$$

ενώ προφανώς ισχύει

$$\int_{a}^{\beta} f(x)\,dx = -\int_{\beta}^{a} f(x)\,dx.$$

II. Στην περίπτωση που το ένα άκρο ολοκλήρωσης, έστω το β, μεταβάλλεται, δηλαδή $\beta = x$, τότε με τον τύπο $(11.1.1 - 5)$ ορίζεται η συνάρτηση

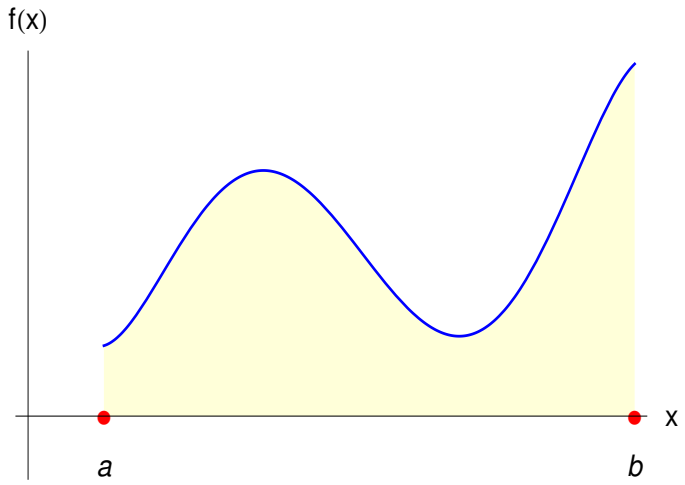
$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt \qquad (11.1.1 - 6)$$

με πεδίο ορισμού, έστω D, όπου $D \subseteq [\alpha, \beta]$.

Σημείωση 11.1.1 - 1

Η μεταβλητή της ολοκλήρωσης και η μεταβλητή του άκρου ολοκλήρωσης δεν θα πρέπει να συμβολίζονται με το ίδιο γράμμα.

III. **Γεωμετρική ερμηνεία**: ο αριθμός $I(f)$, όταν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, παριστάνει το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τραπεζίου (Σχ. 11.1.1 - 3), που ορίζεται από τον άξονα των x, το διάγραμμα της συνάρτησης $y = f(x)$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.



Σχήμα 11.1.1 - 3: γεωμετρική ερμηνεία ορισμένου ολοκληρώματος.

11.1.2 Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

Δίνονται στη συνέχεια με τη μορφή θεωρημάτων χωρίς απόδειξη οι κυριότερες ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

Θεώρημα 11.1.2 - 1. *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Θεώρημα 11.1.2 - 2. *Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha,\beta]$, τότε*

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(x)+g(x)]\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx.$$

Από τα Θεωρήματα 11.1.2 - 1 - 11.1.2 - 2 προκύπτει ότι:

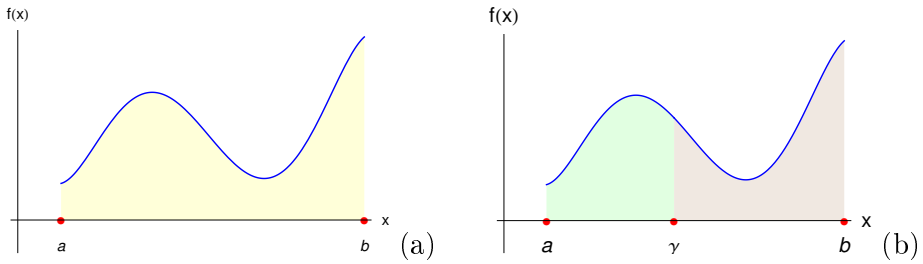
Πόρισμα 11.1.2 - 1 (γραμμική ιδιότητα). *Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha,\beta]$ και $k, \lambda \in \mathbb{R}$, τότε*

$$\int_{\alpha}^{\beta} [kf(x) + \lambda g(x)]\, dx = k \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx + \lambda \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx.$$

Η γραμμική ιδιότητα γενικεύεται για ν το πλήθος συναρτήσεις.

Θεώρημα 11.1.2 - 3. *Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$. Τότε, αν γ (Σχ. 11.1.2 - 1) είναι ένα σημείο με $\alpha < \gamma < \beta$, ισχύει ότι*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\, dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\, dx.$$



Σχήμα 11.1.2 - 1: η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος 11.1.2 - 3.

Θεώρημα 11.1.2 - 4. *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \geq 0.$$

Αν επιπλέον για ένα σημείο $\xi \in [\alpha,\beta]$ ισχύει $f(\xi) > 0$, είναι[4]

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx > 0.$$

[4] Μια προφανής γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος προκύπτει από το (Σχ. 11.1.2 - 1a).

11.1.3 Θεωρήματα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Δίνονται στη συνέχεια χωρίς απόδειξη τα παρακάτω δύο βασικά θεωρήματα του Ολοκληρωτικού Λογισμού:

Θεώρημα 11.1.3 - 1. *Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \;\geq\; \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$$

Θεώρημα 11.1.3 - 2 (μέσης τιμής). *Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha,\beta]$ και $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε*

$$m \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx \;\leq\; \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,dx \;\leq\; M \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx, \qquad (11.1.3\text{ - }1)$$

όπου $m = \min_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$ και $M = \max_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$. Ειδικά, όταν $g(x) = 1$, είναι

$$m\,(\beta-\alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \;\leq\; M\,(\beta-\alpha). \qquad (11.1.3\text{ - }2)$$

Οι ανισότητες (11.1.3−1) και (11.1.3−2) είναι δυνατόν να αντικατασταθούν από τις παρακάτω ισοδύναμες ισότητες:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx, \qquad (11.1.3\text{ - }3)$$

αντίστοιχα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = f(\xi)(\beta-\alpha), \qquad (11.1.3\text{ - }4)$$

όταν $\xi \in (\alpha,\beta)$.

11.2 Υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος

11.2.1 Θεώρημα υπολογισμού

Έχοντας υπόψη και τη σχέση (11.1.1−6) αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 11.2.1 - 1 (θεμελιώδες Απειροστικού Λογισμού). *Αν $f|[\alpha,\beta]$ είναι μια συνάρτηση συνεχής για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε η*

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$$

είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$F'(x) = f(x) \quad \textit{για κάθε } x \in [\alpha,\beta]. \tag{11.2.1 - 1}$$

Το θεώρημα αυτό συνδέει την έννοια της παραγώγου και του ορισμένου ολοκληρώματος της $f(x)$.

11.2.2 Τύπος υπολογισμού ορισμένου ολοκληρώματος

Σύμφωνα με το Θεώρημα 11.2.1 - 1 αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα 11.2.2 - 1. *Αν $f|[\alpha,\beta]$ είναι μια συνάρτηση συνεχής για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και $F(x)$ ένα αόριστο ολοκλήρωμά της, τότε*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(x)\Big|_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha). \tag{11.2.2 - 1}$$

Το θεώρημα αυτό θα χρησιμοποιείται στο εξής για τον υπολογισμό των ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα 11.2.2 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα (Σχ. 11.2.2 - 1a)

$$\int_0^{\pi/4} \tan\, x\, dx.$$

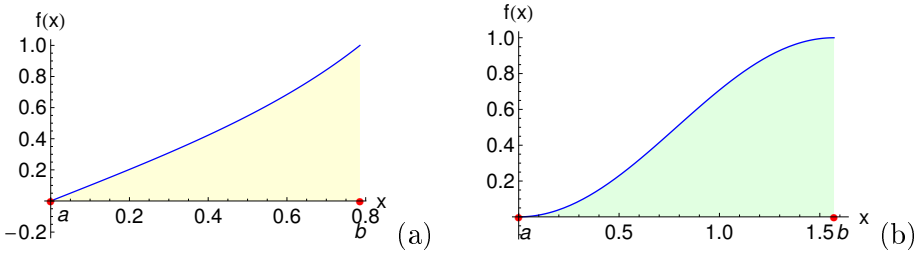
Λύση. Είναι

$$\int \tan\, x\, dx = \int \frac{\sin\, x}{\cos\, x}\, dx = \int \frac{(-\cos x)'}{\cos\, x}\, dx = -\ln|\cos\, x| + c,$$

οπότε από τον τύπο $(11.2.2-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \tan\, x\, dx &= -\ln|\cos\, x|\,\Big|_0^{\pi/4} = -\left[\ln|\cos\,\frac{\pi}{4}| - \ln|\cos\, 0|\right] \\
&= -\left[\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1\right] = -\left(\ln 2^{-1/2} - 0\right) = -\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln 2.
\end{aligned}$$

■



Σχήμα 11.2.2 - 1: Ολοκλήρωμα: (a) $\int_0^{\pi/4} \tan\, x\, dx$ και (b) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$.

Παράδειγμα 11.2.2 - 2

Όμοια το ολοκλήρωμα (Σχ. 11.2.2 - 1b)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx.$$

Λύση. Ισχύει ότι

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

οπότε

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\, dx &= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int (2x)'\cos 2x\, dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c.\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx &= \frac{x}{2}\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - \frac{1}{4}\left(\overbrace{\sin 2\frac{\pi}{2}}^{0} - \overbrace{\sin 0}^{0}\right) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 11.2.2 - 3

Όμοια το ολοκλήρωμα (Σχ. 11.2.2 - 2a)

$$\int_{-1}^{1} e^{-3x}\, dx.$$

Λύση. Είναι

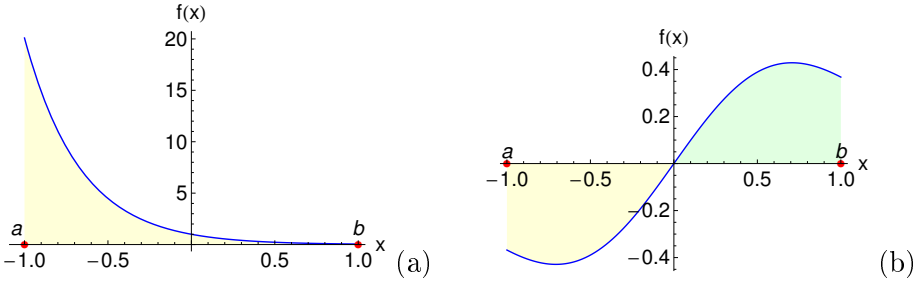
$$\int e^{-3x}\, dx = -\frac{1}{3}\, e^{-3x} + c,$$

οπότε[5]

$$\int_{-1}^{1} e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\,e^{-3x}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{3}\left(e^{-3} - e^{-(-3)}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^{3} - e^{-3}\right) = \frac{2}{3}\sinh 3.$$

■



Σχήμα 11.2.2 - 2: Ολοκλήρωμα: (a) $\int_{-1}^{1} e^{-3x}\,dx$ και (b) $\int_{-1}^{1} x\,e^{-x^2}\,dx$.

Παράδειγμα 11.2.2 - 4

Όμοια το ολοκλήρωμα (Σχ. 11.2.2 - 2b)

$$\int_{-1}^{1} x\,e^{-x^2}\,dx.$$

Λύση. Είναι

$$\int x\,e^{-x^2}\,dx = \int \frac{\left(-x^2\right)'}{-2}\,e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\,e^{-x^2} + c,$$

οπότε

$$\int_{-1}^{1} x\,e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\,e^{-x^2}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}\left(e^{-1^2} - e^{-(-1)^2}\right) = 0.$$

■

[5] Ισχύει ότι : $\sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$.

Παρατήρηση 11.2.2 - 1

Στο Παράδειγμα 11.2.2 - 4 η ολοκληρωτέα συνάρτηση $x\,e^{-x^2}$ είναι περιττή. Γενικότερα αποδεικνύεται στις περιπτώσεις αυτές ότι:

Πρόταση 11.2.2 - 1. *Αν η περιττή συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-a, a]$, τότε*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0. \qquad (11.2.2 - 2)$$

Παράδειγμα 11.2.2 - 5

Όμοια το ολοκλήρωμα (Σχ. 11.2.2 - 3a)

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+4x^2}\,.$$

Λύση. Είναι

$$\int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x)'}{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\tan^{-1}(2x) + c.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+4x^2} &= \frac{1}{2}\,\tan^{-1}(2x)\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2}\,\tan^{-1}2 - \frac{1}{2}\overbrace{\underbrace{\tan^{-1}}_{\text{συνάρτηση περιττή}}(-2)}^{-\tan^{-1}2} \\
&= \tan^{-1}2.
\end{aligned}$$

■

Παρατήρηση 11.2.2 - 2

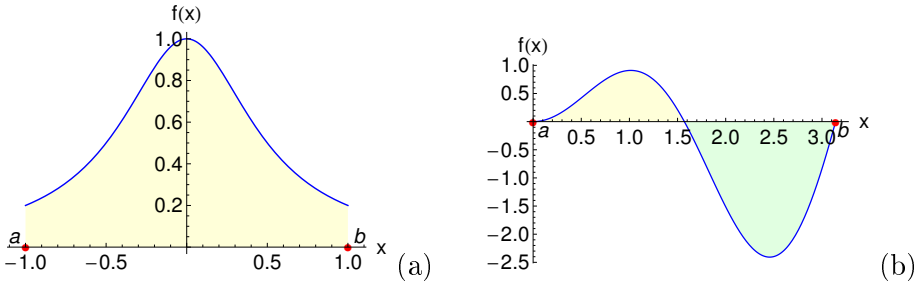
Στο Παράδειγμα 11.2.2 - 6 η ολοκληρωτέα συνάρτηση

$$\frac{1}{1+4x^2}$$

είναι άρτια. Γενικότερα αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 11.2.2 - 2. *Αν η άρτια συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-a, a]$, τότε*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx. \qquad (11.2.2 - 3)$$



(a) (b)

Σχήμα 11.2.2 - 3: Ολοκλήρωμα: (a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+4x^2}$ και (b) $\int_{0}^{\pi} x\,\sin 2x\,dx$.

Παράδειγμα 11.2.2 - 6

Όμοια το ολοκλήρωμα (Σχ. 11.2.2 - 3b)

$$\int_{0}^{\pi} x\,\sin 2x\,dx.$$

Λύση. Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\int x\,\sin 2x\,dx = \int x\left(\frac{-\cos 2x}{-2}\right)'dx = \cdots = -\frac{1}{2}\,x\,\cos 2x + \frac{1}{4}\,\sin 2x + c.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\,\sin 2x\,dx &= -\frac{1}{2}\,x\,\cos 2x\,\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4}\,\sin 2x\,\Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\pi\,\overbrace{\cos 2\pi}^{1} - 0\right) + \frac{1}{4}\left(\overbrace{\sin 2\pi}^{0} - \overbrace{\sin 0}^{0}\right) = -\frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

■

Παρατήρηση 11.2.2 - 3

Γενικά ισχύει

$$\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \text{και} \quad \sin(n\pi) = 0 \tag{11.2.2 - 4}$$

για κάθε $n = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots$.

Παράδειγμα 11.2.2 - 7

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\,\sin 5x\,dx.$$

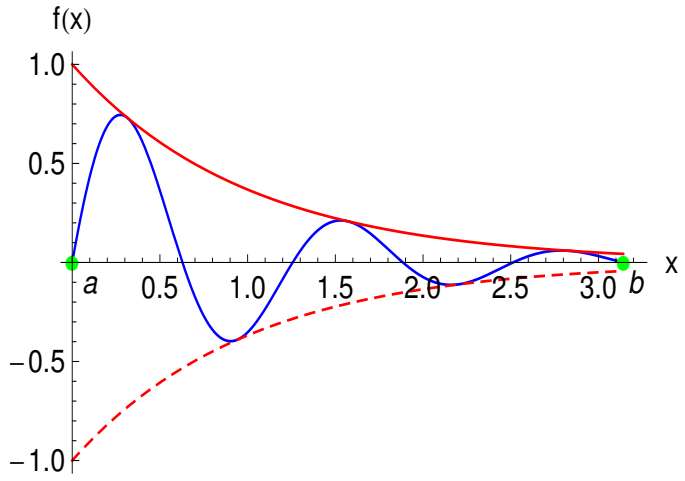
Λύση. Η γραφική παράσταση της ολοκληρωτέας συνάρτησης $e^{-x}\sin 5x$ (Σχ. 11.2.2 - 4), που χαρακτηρίζεται ως **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση**, προκύπτει από τις γραφικές παραστάσεις των:

- $\sin 5x$ ελεύθερη αρμονική ταλάντωση (Σχ. 11.2.2 - 5a), και
- e^{-x} απόσβεση (Σχ. 11.2.2 - 5b).

Εφαρμόζοντας 2 φορές την παραγοντική ολοκλήρωση[6] έχουμε

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\sin 5x\,dx &= \int \left(-e^{-x}\right)'\sin 5x\,dx = \cdots \\ &= -\frac{e^{-x}}{26}\,(5\cos 5x + \sin 5x) + c.\end{aligned}$$

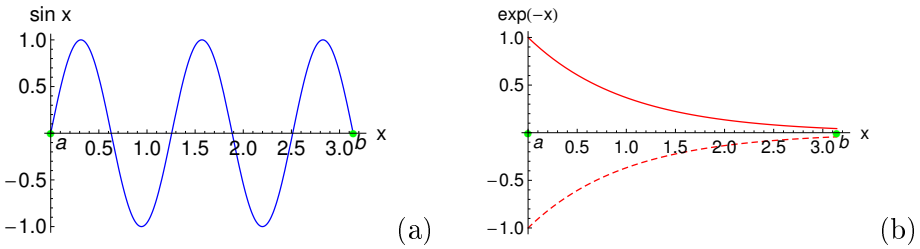
[6] Βλέπε Μάθημα *Αόριστο Ολοκλήρωμα - Παραγοντική ολοκλήρωση.*



Σχήμα 11.2.2 - 4: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $e^{-x}\sin 5x$ (**ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση**), όταν $x \in [0,\pi]$.

Άρα

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} e^{-x}\sin 5x\,dx &= -\frac{e^{-x}}{26}\left(5\cos 5x+\sin 5x\right)\Big|_0^{\pi} \\
&= -\frac{e^{-\pi}}{26}\left(5\overbrace{\cos 5\pi}^{-1}+\overbrace{\sin 5\pi}^{0}\right) \\
&\quad -\left[-\frac{e^{0}}{26}\left(5\overbrace{\cos 5\cdot 0}^{1}+\overbrace{\sin 5\cdot 0}^{0}\right)\right] \\
&= \frac{5}{26}\left(1+e^{-\pi}\right).
\end{aligned}$$



Σχήμα 11.2.2 - 5: $x \in [0,\pi]$: (a) η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\sin 5x$ (**ελεύθερη αρμονική ταλάντωση**) και (b) της e^{-x} συνεχής και $-e^{-x}$ διακεκομμένη καμπύλη (**απόσβεση**).

Ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος με το MATLAB γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 11.2.2 - 1 (αόριστου ολοκληρώματος)

```
>> syms x
>> int(exp(-x)*sin(5*x),x,0,pi)
```

ενώ με το MATHEMATICA με την εντολή:

Πρόγραμμα 11.2.2 - 2 (αόριστου ολοκληρώματος)

```
Integrate[Exp[-x]Sin[5x],{x,),Pi}]
```

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

i) $\int_{-1}^{1} e^{-2x}\,dx$

ii) $\int_{-1}^{1} \sinh x\,dx$

iii) $\int_{-1}^{1} \cosh 2x\,dx$

iv) $\int_{0}^{\pi} \cos 3x\,dx$

v) $\int_{0}^{\pi/2} \sin 2x\,dx$

vi) $\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$

vii) $\int_{0}^{\pi} \cos(2x+\pi/4)\,dx$

viii) $\int_{0}^{2\pi} \sin(x+\pi/4)\,dx$

ix) $\int_{0}^{\pi/4} \tan x\,dx$

x) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x\,dx$

xi) $\int_{0}^{1} \tanh x\,dx$

xii) $\int_{0}^{\pi} \cos^2 5x\,dx$

2. Όμοια τα ολοκληρώματα

i) $\int_0^1 xe^{-2x}\,dx$

ii) $\int_{-1}^1 x^2e^{-2x}\,dx$

iii) $\int_{-1}^1 x\,2^x\,dx$

iv) $\int_{-\pi}^{\pi} x\cos 2x\,dx$

v) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\sin 3x\,dx$

vi) $\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx$

vii) $\int_0^{\pi} e^x\sin 2x\,dx$

viii) $\int_1^e x^2\ln x\,dx$

ix) $\int_0^1 \tan^{-1}2x\,dx$

x) $\int_0^{\pi} x\sin^2 2x\,dx$

3. Δείξτε ότι

i) $\int_0^{2\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \frac{4\pi}{n^2}\,; \quad n=1,\,2,\,\ldots$

ii) $\int_0^{2\pi} x^2\sin(nx)\,dx = -\frac{4\pi^2}{n}\,; \quad n=1,\,2,\,\ldots$

iii) $\int_0^{\pi} e^x\,\sin(nx)\,dx = \frac{n}{1+n^2}\left[1-(-1)^n\,e^{\pi}\right].$

4. Χρησιμοποιώντας κατάλληλη τριγωνομετρική ταυτότητα δείξτε ότι

i) $\int_0^{\pi}\sin 2x\,\cos 4x\,dx = -\frac{4}{5}$

ii) $\int_0^{2\pi}\cos 5x\,\cos 2x\,dx = 0$

iii) $\int_0^{2\pi}\sin x\,\sin 2x\,dx = 0$

iv) $\int_0^{\pi}\sin^2 2x\,\cos 2x\,dx = 0.$

5. Δείξτε ότι

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+5} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{6}{5}\right)$

ii) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{9x^2+25} = \frac{2}{15}\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

iii) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x^2-6x+10} = \tan^{-1}3$

iv) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2\,dx}{x^2+4} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right).$

Απαντήσεις

1.

i) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2e^2} \approx 0.432\,332$

ii) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,dx = \cosh x\Big|_{-1}^1 = 0$

iii) όμοια με (ii) $\dfrac{1}{2}\sinh 2x\Big|_{-1}^1 = \sinh 2$

iv) 0

v) $-\dfrac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} = 1$

vi) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi}{4}$

vii) $\dfrac{1}{2}\sin(2x+\pi/4)\Big|_0^{\pi} = 0$

viii) όμοια με (vii) $\dfrac{-\cos x + \sin x}{\sqrt{2}}\Big|_0^{2\pi} = 0$

ix) $\ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4} = \dfrac{\ln 2}{2}$

x) $\dfrac{\ln 2}{2}$

xi) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sinh x}{\cosh x}\,dx = \ln|\cosh x| \approx 0.433\,781$

xii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1+\cos 10x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$

2.

i) $\left[\left(-\frac{1}{4}-\frac{x}{2}\right)e^{-2x}\right]_0^1 = \frac{1}{4}-\frac{3}{4e^2} \approx 0.148\,499$

ii) $\left[-\frac{1}{4}\left(1+2x+2x^2\right)e^{-2x}\right]_0^1 = \frac{1}{4}-\frac{5}{4e^2} \approx 0.080\,830$

iii) ισχύει ότι $a^x = e^{x\ln a}$, όταν $a>0$, οπότε ισούται με

$$\left[\frac{2^x\,(-1+x\ln 2)}{\ln^2 2}\right]_{-1}^1 = \frac{-3+\ln 32}{2\ln^2 2} \approx 0.484\,684$$

iv) $\left[\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}\,x\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

v) $\left[-\frac{1}{27}\left(-2+9x^2\right)\cos 3x+\frac{2}{9}\,x\sin 3x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$

vi) $\left[\frac{e^{-x}}{2}\left(-\cos x+\sin x\right)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left(1+e^{-\pi}\right) \approx 0.521\,607$

vii) $\left[\frac{e^x}{5}\left(-2\cos 2x+\sin 2x\right)\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{5}\left(-1+e^{\pi}\right) \approx -8.856\,277$

viii) $\left[-\frac{x^3}{9}+\frac{1}{3}\,x^3\ln x\right]_1^e = \frac{1}{9}\left(1+2e^3\right) \approx 4.574\,564$

ix) $\left[x\,\tan^{-1}2x-\frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)\right]_0^1 = \tan^{-1}2-\frac{\ln 5}{4} \approx 0.704\,789$

x) ισχύει ότι $\sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2}$, οπότε $\left[\frac{x^2}{4}-\frac{1}{32}\,\cos 4x-\frac{1}{8}\,x\,\sin 4x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}$.

3.

i) $\left[\frac{2x\cos nx}{n^2}+\frac{\left(-2+n^2x^2\right)\sin nx}{n^3}\right]_0^{2\pi} = \ldots = \frac{4\pi}{n^2}$

ii) $\left[\frac{2x\sin nx}{n^2}-\frac{\left(-2+n^2x^2\right)\cos nx}{n^3}\right]_0^{2\pi} = \ldots = -\frac{4\pi^2}{n}$

iii) ισχύει ότι $\sin n\pi = 0$ και $\cos n\pi = (-1)^n$, οπότε $\left[\frac{e^x\,(\sin nx-n\,\cos nx)}{1+n^2}\right]_0^{\pi} = \ldots$.

11.3 Προσέγγιση ολοκληρωμάτων ειδικής μορφής

Δίνονται στη συνέχεια τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα, που έχουν μεγάλη σημασία στα προβλήματα των εφαρμογών και των οποίων ο υπολογισμός δεν γίνεται με κανέναν από τους στοιχειώδεις κανόνες ολοκλήρωσης. Τα ολοκληρώματα αυτά είναι γνωστά ως **μη στοιχειώδη ολοκληρώματα** (nonelementary integrals) και ο υπολογισμός τους γίνεται μόνον κατά προσέγγιση.

11.3.1 Συνάρτηση σφάλματος

Η συνάρτηση σφάλματος[7] (error function) είναι σημαντική στη Στατιστική, η οποία λέγεται και ολοκλήρωμα πιθανότητας, στη θεωρία διάδοσης της θερμότητας και μετάδοσης σημάτων στη Φυσική, όπως επίσης και σε πολλές άλλες επιστήμες.

Ορισμός 11.3.1 - 1. *Η* **συνάρτηση σφάλματος** *ορίζεται από το ολοκλήρωμα*

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt. \qquad (11.3.1\text{ - }1)$$

Επομένως είναι μια συνάρτηση - ακριβέστερα μια περιττή συνάρτηση - του άνω άκρου ολοκλήρωσης (Σχ. 11.3.1 - 1a).

Αναπτύσσοντας τον όρο e^{-t^2} κατά Maclaurin έχουμε

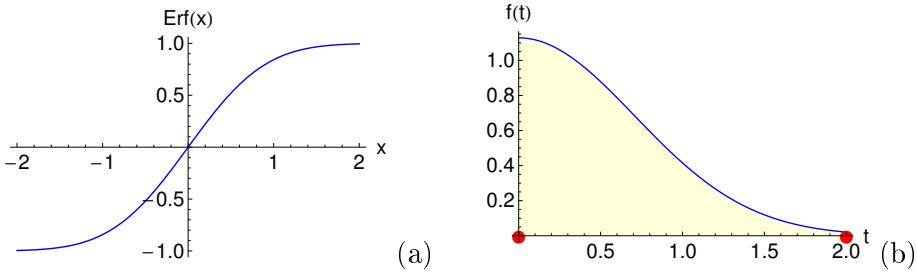
$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} + \cdots,$$

οπότε αντικαθιστώντας στην $(11.3.1-1)$ προκύπτει ότι

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \ldots \right). \qquad (11.3.1\text{ - }2)$$

Οι τιμές της συνάρτησης σφάλματος δίνονται ή από πίνακες ή από τα μαθηματικά πακέτα MATHEMATICA ή MATLAB. Για παράδειγμα, αν $x = 2$,

[7] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Error_function*



Σχήμα 11.3.1 - 1: (a) Η συνάρτηση σφάλματος $\operatorname{erf}(x)$, όταν $x \in [-2,2]$ και (b) Το εμβαδόν ισούται με την τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος $\operatorname{erf}(2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^2 e^{-t^2}\, dt$.

τότε είναι (Σχ. 11.3.1 - 1b)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^2 e^{-t^2}\, dt \approx 0.995\,322.$$

11.3.2 Ολοκληρώματα του Fresnel

Τα ολοκληρώματα του Fresnel[8] (Fresnel integrals), που εμφανίζονται κυρίως σε προβλήματα της Οπτικής, ορίζονται ως εξής:

Ορισμός 11.3.2 - 1 (ημιτονικό). *Ορίζεται από το ολοκλήρωμα*[9] *(Σχ. 11.3.2 - 1a)*

$$\mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}\, t^2\right)\, dt. \qquad (11.3.2 - 1)$$

Αναπτύσσοντας κατά Maclaurin τον όρο $\sin t^2$ έχουμε

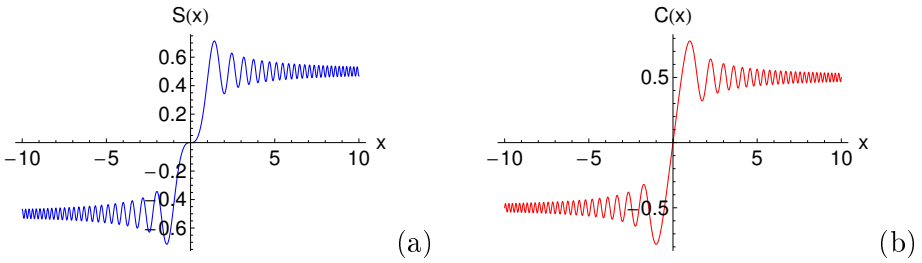
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\, t^2\right) = \frac{\pi}{2}\left(t^2 - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^{10}}{5!} + \cdots\right),$$

[8] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_integral*

[9] Σύμφωνα με τον ορισμό που δίνεται στο βιβλίο των Abramowitz and Stegun [2] και χρησιμοποιείται στο MATHEMATICA. Επίσης ορίζεται ως $\mathrm{S}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t^2\, dt$ σε Α. Μπράτσος [1] ή και $\mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin t^2\, dt$.

οπότε αντικαθιστώντας στην $(11.3.2-1)$ προκύπτει ότι

$$\mathrm{S}(x)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{x^3}{3\cdot 1!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^{11}}{11\cdot 5!}-\frac{x^{15}}{15\cdot 7!}+\cdots\right). \qquad (11.3.2\text{ - }2)$$



Σχήμα 11.3.2 - 1: (a) Το ολοκλήρωμα Fresnel $S(x)$, όταν $x\in[-10,10]$ και (b) το $C(x)$.

Ορισμός 11.3.2 - 2 (συνημιτονικό). *Ορίζεται από το ολοκλήρωμα (Σχ. 11.3.2 - 1b)*

$$\mathrm{C}(x)=\int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\,dt. \qquad (11.3.2\text{ - }3)$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι

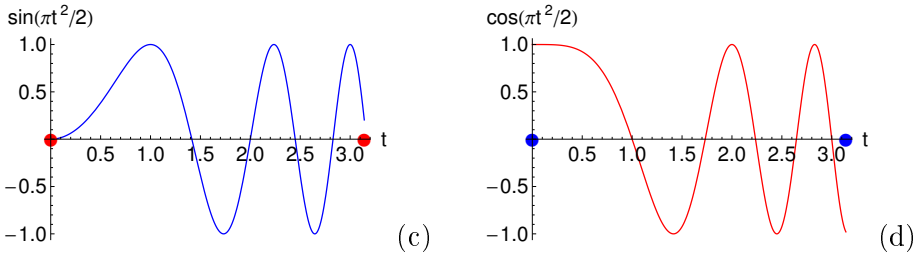
$$\mathrm{C}(x)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^5}{5\cdot 2!}+\frac{x^9}{9\cdot 4!}-\frac{x^{13}}{13\cdot 6!}+\cdots\right). \qquad (11.3.2\text{ - }4)$$

Οι τιμές των ολοκληρωμάτων του Fresnel επίσης δίνονται ή από πίνακες ή από τα μαθηματικά πακέτα.

Αν για παράδειγμα $x=\pi$, τότε

$$\mathrm{S}(\pi)=\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\,dt\approx 0.598\,249 \quad (\Sigma\chi.11.3.2-1c)$$

$$\mathrm{C}(\pi)=\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\,dt\approx 0.523\,699. \quad (\Sigma\chi.11.3.2-1d)$$



Σχήμα 11.3.2 - 2: (c) Η συνάρτηση $\sin\left(\frac{\pi}{2}\,t^2\right)$ και (d) η $\cos\left(\frac{\pi}{2}\,t^2\right)$, όταν $t \in [0, \pi]$.

11.3.3 Ημιτονικό ολοκλήρωμα

Το ημιτονικό ολοκλήρωμα[10] (sine integral) εμφανίζεται σε μία μεγάλη σειρά φυσικών προβλημάτων, όπως στη διάδοση σημάτων, σε φαινόμενα Gibbs, κ.λπ.

Ορισμός 11.3.3 - 1 (ημιτονικό ολοκλήρωμα). *Ορίζεται από το ολοκλήρωμα (Σχ. 11.3.3 - 1)*

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt. \qquad (11.3.3 - 1)$$

Στις περισσότερες εφαρμογές το ένα άκρο ολοκλήρωσης είναι το άπειρο. Τότε είναι γνωστό και ως **ολοκλήρωμα του Dirichlet** (Dirichlet integral).

Αναπτύσσοντας τον όρο $\sin t$ κατά Maclaurin και ολοκληρώνοντας την $(11.3.3 - 1)$ έχουμε

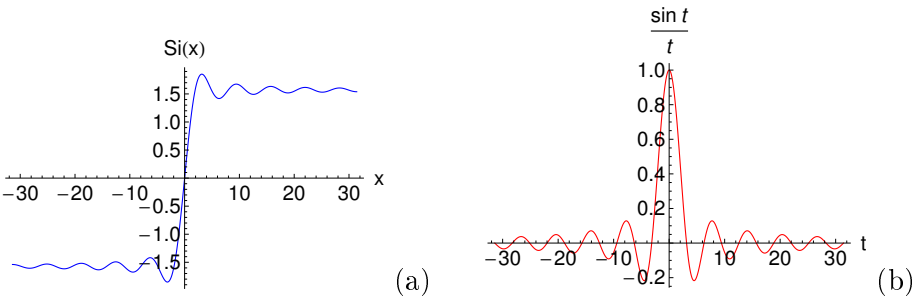
$$\mathrm{Si}(x) = \frac{x}{1 \cdot 1!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} \pm \dots . \qquad (11.3.3 - 2)$$

Όμοια οι τιμές δίνονται ή από πίνακες ή από τα μαθηματικά πακέτα.

Ασκήσεις

1. Προσεγγίζοντας την εκθετική, αντίστοιχα την τριγωνομετρική συνάρτηση με το πολυώνυμο Maclaurin βαθμού 4, αντίστοιχα 5, να υπολογιστούν τα

[10] Βλέπε βιβλιογραφία και
https://en.wikipedia.org/wiki/Trigonometric_integral#Sine_integral



Σχήμα 11.3.3 - 1: (a) Το ημιτονικό ολοκλήρωμα $Si(x)$, όταν $x \in [-10\pi, 10\pi]$ και (b) το διάγραμμα της ολοκληρωτέας συνάρτησης $\frac{\sin t}{t}$.

παρακάτω ολοκληρώματα:

i) $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\, dx$ ii) $\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x}\, dx\,.$

2. Όμοια με το πολυώνυμο Maclaurin βαθμού 3 του ολοκληρώματος:

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin\left(\sin x\right)\, dx.$$

3. Όμοια με το πολυώνυμο Maclaurin βαθμού 3, αντίστοιχα 4 των ολοκληρωμάτων:

i) $\int_{0}^{1} \frac{\sinh x}{x}\, dx$ ii) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^4}\, dx.$

4. Προσεγγίζοντας τη λογαριθμική συνάρτηση με το πολυώνυμο Taylor βαθμού 2 και κέντρο $\xi = e$, να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i)

$$\int_{1}^{e} \ln\left(\ln x\right)\, dx,$$

ii)

$$\int_{1}^{e} \frac{dx}{\ln x}\,. \qquad (11.3.3 - 3)$$

Το ολοκλήρωμα (11.3.3–3) είναι γνωστό και ως το λογαριθμικό ολοκλήρωμα (logarithmic integral).

Απαντήσεις

1.

$$i)\quad e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\,, \quad \text{οπότε} \quad \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{23}{15}\,,$$

$$ii)\quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\,, \qquad \int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \frac{1703}{1800} \approx 0.946\,111.$$

2. Είναι

$$\sin(\sin x) \approx x - \frac{x^3}{3}\,. \quad \text{Άρα} \quad \int_{0}^{\pi/2} \sin(\sin x)\;dx \approx \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^4}{192} \approx 0.726\,362.$$

3.

$$i)\quad \sinh x \approx x + \frac{x^3}{6}\,, \quad \text{οπότε} \quad \int_{0}^{1} \frac{\sinh x}{x}\,dx \approx \frac{13}{24}\,,$$

$$ii)\quad \sqrt{1-x^4} \approx 1 - \frac{x^4}{2}\,, \qquad \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^4}\,dx \approx \frac{9}{5}.$$

4.

$$i)\quad \ln(\ln x) \approx \frac{x-e}{e} - \frac{(x-e)^2}{e^2}\,, \quad \text{οπότε}$$

$$\int_{1}^{e} \ln(\ln x)\;dx \approx 2 - \frac{3}{2e} - \frac{5e}{6} + \frac{1}{3e^2} \approx -0.771\,942\,,$$

$$ii)\quad \tfrac{1}{\ln x} \approx 1 - \frac{x-e}{e} + \frac{3(x-e)^2}{2e^2}\,, \quad \text{οπότε}$$

$$\int_{1}^{e} \frac{dx}{\ln x} \approx -\frac{7}{2} + \frac{2}{e} + 2e - \frac{1}{2e^2} \approx 2.604\,655.$$

11.4 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Είναι ήδη γνωστό ότι, όταν η $f\,|\,[\alpha,\beta]$ είναι μια συνάρτηση συνεχής για κάθε $x \in [\alpha,\beta\,]$, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ έχει έννοια και ορίζει μονοσήμαντα έναν πραγματικό αριθμό, που υπολογίζεται από τον τύπο

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(x)\Big|_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha),$$

όταν $F(x)$ το αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$, δηλαδή

$$\int f(x)\,dx = F(x).$$

Όμως στις διάφορες εφαρμογές υπάρχουν περιπτώσεις όπου το ένα ή και τα δύο άκρα ολοκλήρωσης δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της ολοκληρωτέας συνάρτησης, διαφορετικά το διάστημα ολοκλήρωσης είναι ανοικτό ή στο ένα ή και στα δύο άκρα. Αυτού του είδους τα ολοκληρώματα λέγονται **γενικευμένα**[11] (improper integral).

Οι κυριότερες περιπτώσεις που περισσότερο εμφανίζονται στις διάφορες εφαρμογές πρόκειται να μελετηθούν στη συνέχεια.

Ανάλογα με τη μορφή του διαστήματος ολοκλήρωσης διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

11.4.1 Γενικευμένα ολοκληρώματα του α' είδους

Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού $[a, +\infty)$, τέτοια ώστε η f να είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, x]$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$. Τότε έχει έννοια η

[11] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Improper_integral*

συνάρτηση[12]

$$\mathrm{I}(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{για κάθε } x \in [a, +\infty). \tag{11.4.1 - 1}$$

Ορισμός 11.4.1 - 1. *Ορίζεται ως Γ.Ο. του* **α' είδους** *της f στο $[a, +\infty)$ το ολοκλήρωμα*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{11.4.1 - 2}$$

Ορισμός 11.4.1 - 2. *Το Γ.Ο.* $(11.4.1-2)$ *λέγεται ότι υπάρχει ή διαφορετικά ότι συγκλίνει τότε και μόνον, όταν υπάρχει το* $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{I}(x)$.

Στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \mathrm{I},$$

ενώ, όταν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{I}(x)$, λέγεται ότι το Γ.Ο. $(11.4.1-2)$ δεν υπάρχει ή ότι αποκλίνει.

Όμοια είναι δυνατόν να οριστεί το Γ.Ο. α' είδους της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού $(-\infty, \beta\,]$, υποθέτοντας ότι f είναι ολοκληρώσιμη στο $[x, \beta\,]$ για κάθε $x \in (-\infty, \beta\,]$ με τη βοήθεια της συνάρτησης

$$\mathrm{J}(x) = \int_x^{\beta} f(t)\,dt \quad \text{για κάθε } x \in (-\infty, \beta\,]. \tag{11.4.1 - 3}$$

[12] Βλέπε Μάθημα *Ορισμένο Ολοκλήρωμα* - Παρατηρήσεις 11.1.1 - 1 II τύπος $(11.1.1-6)$: στην περίπτωση που το ένα άκρο ολοκλήρωσης, έστω το β, μεταβάλλεται, δηλαδή $\beta = x$, τότε με τον τύπο $(11.1.1-5)$ ορίζεται η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

με πεδίο ορισμού, έστω D, όπου $D \subseteq [\alpha, \beta\,]$.

Τότε θα λέγεται ότι το Γ.Ο. $(11.4.1-3)$ υπάρχει ή διαφορετικά ότι συγκλίνει, όταν και μόνον, όταν υπάρχει το $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{J}(x)$, οπότε στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$\mathrm{J} = \int_{-\infty}^{\beta} f(x)\,dx,$$

ενώ, όταν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to-\infty} J(x)$, θα λέγεται ότι το Γ.Ο. $(11.4.1-3)$ δεν υπάρχει ή ότι αποκλίνει.

Έστω τώρα η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $(-\infty, +\infty)$, τέτοια ώστε η f να είναι ολοκληρώσιμη στο $[x, y]$ για κάθε $x,\, y \in (-\infty, +\infty)$.

Ορισμός 11.4.1 - 3. *Ορίζεται ως Γ.Ο. του α' είδους της f στο $\mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad (11.4.1\text{ - }4)$$

Ορισμός 11.4.1 - 4. *Το Γ.Ο. $(11.4.1-4)$ λέγεται ότι υπάρχει ή διαφορετικά ότι συγκλίνει όταν και μόνον, όταν υπάρχουν τα Γ.Ο.*

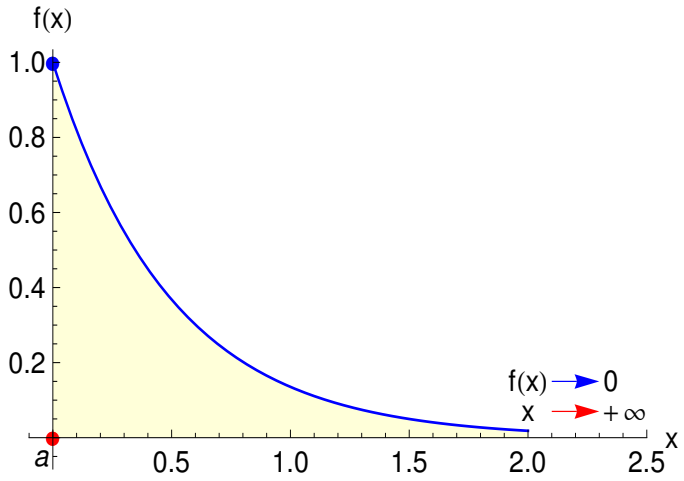
$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \textit{και} \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \ \textit{με}\ a \in \mathbb{R}, \qquad (11.4.1\text{ - }5)$$

ενώ ορίζεται ως η τιμή του ο πραγματικός αριθμός

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad (11.4.1\text{ - }6)$$

Ορισμός 11.4.1 - 5. *Το Γ.Ο. $(11.4.1-4)$ θα λέγεται ότι δεν υπάρχει ή ότι αποκλίνει, όταν τουλάχιστον ένα από τα Γ.Ο. $(11.4.1-5)$ δεν υπάρχει.*

Αποδεικνύεται ότι η ύπαρξη ή μη του Γ.Ο. $(11.4.1-4)$ είναι **ανεξάρτητη** από την εκλογή του σημείου a στην $(11.4.1-5)$.



Σχήμα 11.4.1 - 1: Το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$. Η μπλε καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της e^{-2x} όπου προφανώς $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$.

Παράδειγμα 11.4.1 - 1

Να υπολογιστεί το Γ.Ο. (Σχ. 11.4.1 - 1)

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx.$$

Λύση. Αρχικά είναι

$$\begin{aligned}\int e^{-2x}\,dx &= \int \frac{(-2x)'}{-2}e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int \overbrace{(-2x)'\,e^{-2x}}^{f'(x)e^{f(x)}}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2x} + c.\end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με τον Ορισμό 11.4.1 - 2 έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^{x} e^{-2t}\,dt\\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} e^{-2t}\Big|_0^x\\ &= -\frac{1}{2}\left(\overbrace{\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}}^{0}-1\right)=\frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι:

$$\int_0^{+\infty} e^{-s\,x}dx=\frac{1}{s}\,,\quad \text{όταν}\quad s>0. \tag{11.4.1 - 7}$$

■

Παρατήρηση 11.4.1 - 1

Το Γ.Ο. ολοκλήρωμα (Σχ. 11.4.1 - 2)

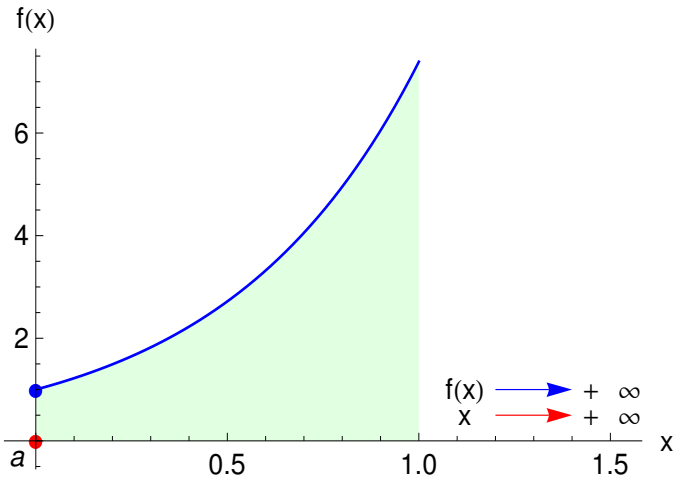
$$\int_0^{+\infty} e^{2x}dx.$$

δεν υπάρχει, επειδή

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{2x}\,dx &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^{x} e^{2t}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} e^{2t}\Big|_0^x=\frac{1}{2}\left(\overbrace{\lim_{x\to+\infty} e^{2x}}^{+\infty}-1\right)=+\infty.\end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει το Γ.Ο.

$$\int_0^{+\infty} e^{s x}dx\,,\quad \text{όταν}\quad s>0. \tag{11.4.1 - 8}$$



Σχήμα 11.4.1 - 2: Το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{2x}dx$. Η μπλε καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της e^{2x} όπου προφανώς $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$.

Παράδειγμα 11.4.1 - 2

Να υπολογιστεί το Γ.Ο. (Σχ. 11.4.1 - 3)

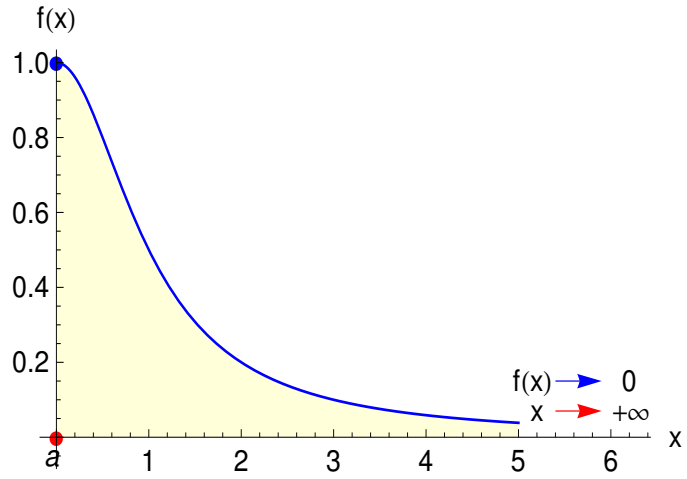
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}\,.$$

Λύση. Αρχικά είναι

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \left(\text{μορφή} \quad \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\right) \quad \tan^{-1} x + c.$$

Επομένως σύμφωνα με τον Ορισμό 11.4.1 - 2 έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{x\to+\infty} \int_0^{x} \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \tan^{-1} t\,\Big|_0^x \\
&= \overbrace{\lim_{x\to+\infty} \tan^{-1} x}^{\frac{\pi}{2}} - \overbrace{\tan^{-1} 0}^{0} = \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$



Σχήμα 11.4.1 - 3: Το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Η μπλε καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ όπου προφανώς $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Άρα

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\,. \qquad (11.4.1\text{ - }9)$$

Παρατήρηση 11.4.1 - 2

Σύμφωνα με τους ορισμούς των τριγωνομετρικών συναρτήσεων του Μαθήματος *Πραγματικές συναρτήσεις*

- η συνάρτηση $\tan x$ έχει πεδίο ορισμού το $D = \mathbb{R} - \left\{\pm\frac{\pi}{2}, \cdots\right\}$ και γενικά το $D = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$, όταν $k = 0, \pm1, \ldots$ (Σχ. 11.4.1 - 4a), ενώ το πεδίο τιμών της είναι το $T = \mathbb{R}$.

  Γενικότερα η συνάρτηση

$$\tan\omega x, \quad \text{όταν} \quad \omega > 0, \quad \text{έχει πεδίο ορισμού το}$$
$$D = \mathbb{R} - \left\{\pm\frac{\pi}{2\omega}, \cdots\right\}$$
$$\text{και τιμών το} \quad T = \mathbb{R}. \qquad (11.4.1\text{ - }10)$$

- Η αντίστροφη συνάρτηση $\tan^{-1} x = \arctan x$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχει πεδίο τιμών το $T = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (Σχ. 11.4.1 - 4b). Τότε ισχύει ότι

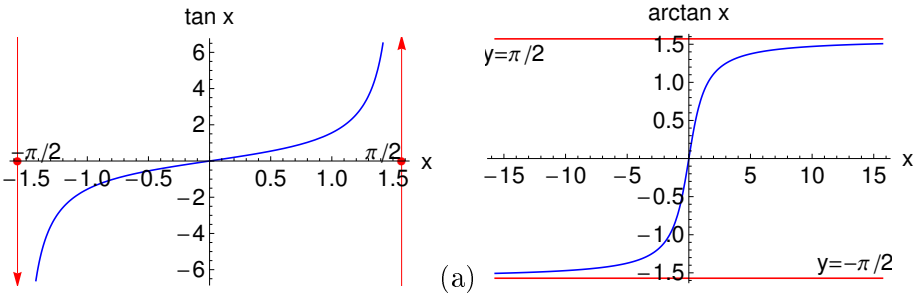
$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}\,. \qquad (11.4.1 - 11)$$

Γενικότερα η συνάρτηση

$$\begin{aligned} \tan^{-1} \omega x \quad = \quad & \arctan^{-1} \omega x, \quad \text{όταν} \quad \omega > 0, \quad \text{έχει} \\ & \text{πεδίο ορισμού το} \quad D = \mathbb{R} - \left\{ \pm \frac{\pi}{2\omega}\,, \cdots \right\} \\ & \text{και τιμών το} \quad T = \mathbb{R}. \qquad (11.4.1 - 12) \end{aligned}$$

Άρα όμοια σύμφωνα με την $(11.4.1 - 11)$ και στην περίπτωση αυτή θα ισχύει ότι

$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} \omega x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} \tan^{-1} \omega x = \frac{\pi}{2}\,. \quad (11.4.1 - 13)$$



Σχήμα 11.4.1 - 4: (a) Το διάγραμμα (μπλε καμπύλη) της $\tan x$, όταν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Οι κατακόρυφες ευθείες είναι οι ασύμπτωτες $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Προφανώς είναι $\lim_{x \to +\pi/2} \tan x = +\infty$ και $\lim_{x \to -\pi/2} \tan x = -\infty$, ενώ $\tan 0 = 0$. (b) Το διάγραμμα (μπλε καμπύλη) της $\tan^{-1} x = \arctan x$, όταν $x \in [-5\pi, 5\pi]$. Οι οριζόντιες ευθείες είναι οι ασύμπτωτες $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Τότε είναι $\lim_{x \to +\infty} \tan^{-1} x = +\frac{\pi}{2}$ και $\lim_{x \to -\infty} \tan x = -\frac{\pi}{2}$, ενώ $\tan^{-1} 0 = 0$.

Όμοια τότε αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{0}\frac{dt}{1+t^2}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}t\Big|_{x}^{0}\\ &= \overbrace{\tan^{-1}0}^{0}-\overbrace{\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x}^{-\frac{\pi}{2}} = -\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Άρα

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}. \qquad (11.4.1\text{ - }14)$$

Συνδυάζοντας τις $(11.4.1-9)$ και $(11.4.1-14)$ και λαμβάνοντας υπόψη την $(11.4.1-6)$ προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi. \qquad (11.4.1\text{ - }15)$$

■

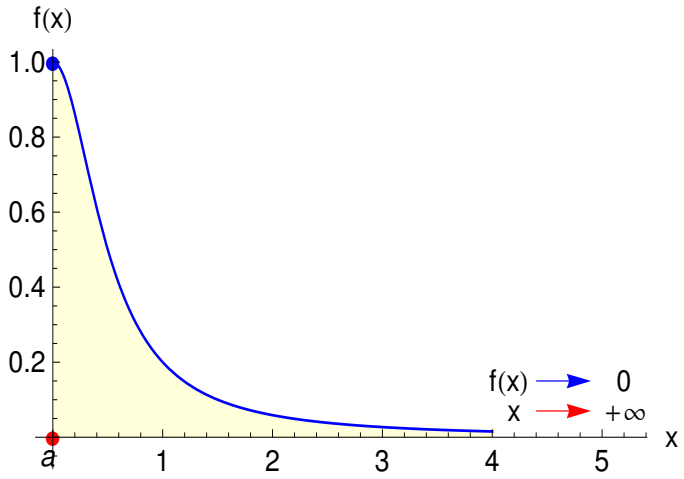
Παράδειγμα 11.4.1 - 3

Όμοια να υπολογιστεί το Γ.Ο. (Σχ. 11.4.1 - 5)

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+4x^2}.$$

Λύση. Αρχικά είναι

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{1+4x^2} &= \int\frac{dx}{1+(2x)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{(2x)'}{1+(2x)^2}\,dx\\ &\qquad\left(\text{μορφή}\quad \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x)+c.\end{aligned}$$



Σχήμα 11.4.1 - 5: Το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2}$. Η μπλε καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της $f(x) = \frac{1}{1+4x^2}$ όπου προφανώς $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Άρα σύμφωνα με τον Ορισμό 11.4.1 - 2 έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2} &= \lim_{x \to +\infty} \int_0^{x} \frac{dt}{1+4t^2} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \to +\infty} \tan^{-1}(2t)\Big|_0^x \\
&= \frac{1}{2} \overbrace{\lim_{x \to +\infty} \tan^{-1}(2x)}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \overbrace{\tan^{-1} 0}^{0} \\
&= \frac{\pi}{4} .
\end{aligned}$$

■

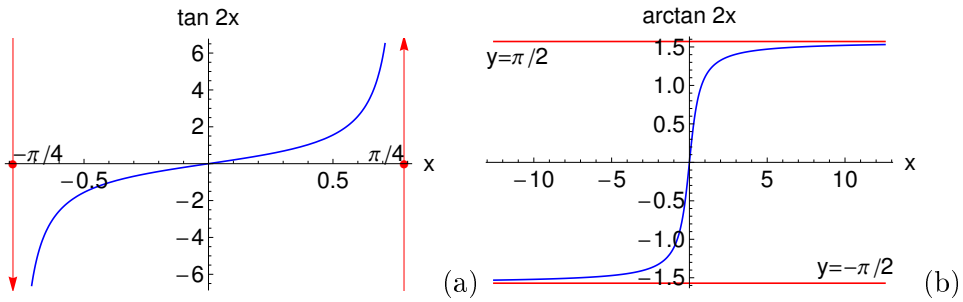
Παρατήρηση 11.4.1 - 3

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 11.4.1 - 2 και τις (11.4.1 – 10), αντίστοιχα (11.4.1 – 12)

- η συνάρτηση $\tan(2x)$ θα έχει πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{4}\right\}$ και τιμών όμοια το $T = \mathbb{R}$ (Σχ. 11.4.1 - 6a), αντίστοιχα

- η αντίστροφη συνάρτηση $\tan^{-1} 2x = \arctan 2x$ θα ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και θα έχει πεδίο τιμών το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (Σχ. 11.4.1 - 6b), ενώ σύμφωνα με την $(11.4.1-13)$ θα ισχύει ότι

$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} 2x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} \tan^{-1} 2x = \frac{\pi}{2}\,.$$



Σχήμα 11.4.1 - 6: (a) Το διάγραμμα (μπλε καμπύλη) της $\tan 2x$, όταν $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Οι κατακόρυφες ευθείες είναι οι ασύμπτωτες $x = \pm\frac{\pi}{4}$ όπου $\lim_{x \to +\pi/4} \tan 2x = +\infty$ και $\lim_{x \to -\pi/4} \tan 2x = -\infty$. (b) Το διάγραμμα (μπλε καμπύλη) της $\tan^{-1} 2x = \arctan 2x$, όταν $x \in [-4\pi, 4\pi]$. Οι οριζόντιες ευθείες είναι οι ασύμπτωτες $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Προφανώς λόγω της $(11.4.1-13)$ είναι $\lim_{x \to +\infty} \tan^{-1} 2x = +\frac{\pi}{2}$ και $\lim_{x \to -\infty} \tan 2x = -\frac{\pi}{2}$.

Παράδειγμα 11.4.1 - 4

Να υπολογιστεί το Γ.Ο. (Σχ. 11.4.1 - 7)

$$\int_0^{+\infty} x\, e^{-2x} dx.$$

Λύση. Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}
\int x\, e^{-2x}\, dx &= \int x \left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)' dx = -\frac{1}{2}\, x\, e^{-2x} + \frac{1}{2} \int x'\, e^{-2x} dx \\
&= -\frac{1}{2}\, x\, e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \\
&= -\frac{1}{2}\, x\, e^{-2x} - \frac{1}{4}\, e^{-2x} + c.
\end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με τον Ορισμό 11.4.1 - 2 και τον κανόνα του de L'Hôpital έχουμε[13]

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x\,e^{-2x}\,dx &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^{x} t\,e^{-2t}\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} t\,e^{-2t}\Big|_0^x - \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty} e^{-2t}\Big|_0^x \\
&= -\frac{1}{2}\left(\overbrace{\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-2x}}^{\text{de L'Hôspital}} - 0\right) - \frac{1}{4}\left(\overbrace{\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}}^{0} - 1\right) \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}}{x} + \frac{1}{4} \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{-2x}\right)'}{x'} + \frac{1}{4} \\
&= -\frac{1}{2}(-2)\overbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}}{1}}^{0} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

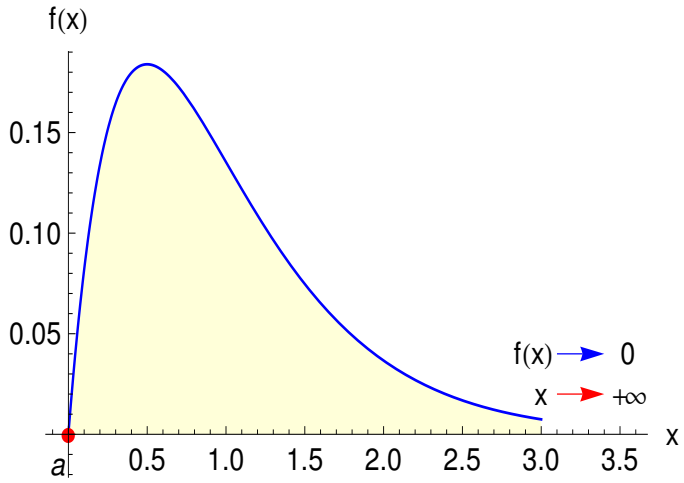
Όμοια αποδεικνύεται ότι

$$\int_0^{+\infty} x\,e^{-sx}dx = \frac{1}{s^2}\,, \quad \text{όταν} \quad s>0. \tag{11.4.1 - 16}$$

■

[13] Βλέπε Μάθημα *Παράγωγος Συνάρτησης - Υπολογισμός οριακών τιμών.*

Θεώρημα *Αν* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *και* $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, *όταν* $x_0 \in \mathbb{R}$ *ή* $x_0 = \pm\infty$, *τότε, αν ορίζεται το* $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *ισχύει ότι* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.



Σχήμα 11.4.1 - 7: Το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} x\,e^{-2x}dx$. Η μπλε καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της $x\,e^{-2x}$ όπου εφαρμόζοντας τον κανόνα του de L'Hôpital προκύπτει ότι $\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-2x} = 0$.

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι

i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$

ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-5x}\,dx = \frac{1}{5}$

iii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}$

iv) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-3x}\,dx = \frac{1}{9}\,.$

2. Όμοια ότι γενικά ισχύει

$$\int_0^{+\infty} x\,e^{-s\,x}\,dx = \frac{1}{s^2}\,, \quad \text{όταν} \quad s > 0.$$

3. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (11.4.1 – 13) δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+k^2} = \frac{\pi}{k}\,, \quad \text{όταν} \quad k > 0.$$

4. Να υπολογιστούν τα παρακάτω γενικευμένα ολοκληρώματα

$$i)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} \qquad ii)\quad \int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\,\ln^2 x}\,.$$

5. Αν $a>0$, δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$

συγκλίνει, όταν $p>1$ και απειρίζεται, όταν $p<1$.

6. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = 0.$$

Απαντήσεις

1. Ανάλογα με λυμένα παραδείγματα.

2. Είναι

$$\int xe^{-sx}\,dx = -\frac{e^{-sx}(1+sx)}{s^2}\,,$$

οπότε η λύση είναι ανάλογη του Παραδείγματος 11.4.1 - 4.

3. Όμοια ανάλογα με τα Παραδείγματα 11.4.1 - 2 και 11.4.1 - 3 λαμβάνοντας υπόψη τις Παρατηρήσεις 11.4.1 - 2 και 11.4.1 - 3.

4.

$$(i)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \tan^{-1}(1+x)\Big|_{-\infty}^{0} + \tan^{-1}(1+x)\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \pi,$$

$$(ii)\quad \int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\,\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Big|_{e}^{+\infty} = 1.$$

5. Προφανής.

6.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$$

$$= -\frac{e^{-x^2}}{2}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-x^2}}{2}\Big|_{0}^{+\infty} = 0.$$

11.4.2 Γενικευμένα ολοκληρώματα του β' είδους

Ανάλογα με την Παράγραφο 11.4.1, έστω ότι η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(a, \beta\,]$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[x, \beta\,]$ για κάθε $x \in (a, \beta\,]$, οπότε θα έχει έννοια στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση

$$\mathrm{I}(x) = \int_x^{\beta} f(t)\,dt \quad \text{για κάθε } x \in (a, \beta\,]. \tag{11.4.2 - 1}$$

Ορισμός 11.4.2 - 1. *Ορίζεται ως Γ.Ο. του* **β' είδους** *της f στο $(a, \beta\,]$ το ολοκλήρωμα*

$$\int_{a+}^{\beta} f(x)\,dx. \tag{11.4.2 - 2}$$

Ορισμός 11.4.2 - 2. *Το Γ.Ο.* $(11.4.2-2)$ *λέγεται ότι υπάρχει ή διαφορετικά ότι συγκλίνει τότε και μόνον, όταν υπάρχει το* $\lim_{x\to a+} \mathrm{I}(x)$. *Στην περίπτωση αυτή γράφεται*

$$\int_{a+}^{\beta} f(x)\,dx = \mathrm{I},$$

ενώ, όταν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to a+} \mathrm{I}(x)$, *λέγεται ότι το Γ.Ο.* $(11.4.2-2)$ *δεν υπάρχει ή ότι αποκλίνει.*

Όμοια με τη βοήθεια της συνάρτησης

$$\mathrm{J}(x) = \int_a^{x} f(t)\,dt \quad \text{για κάθε } x \in [a, \beta). \tag{11.4.2 - 3}$$

είναι δυνατόν να οριστεί το Γ.Ο. β' είδους της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού $[a, \beta)$.

Έστω τώρα η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού (a, β) τέτοια, ώστε η f να είναι ολοκληρώσιμη στο $[x, y]$ για κάθε $x, y \in (a, \beta)$.

Ορισμός 11.4.2 - 3. *Ορίζεται ως Γ.Ο. του β' είδους της f στο (a,β) το ολοκλήρωμα*

$$\int_{a+}^{\beta-} f(x)\,dx. \qquad (11.4.2\text{ - }4)$$

Ορισμός 11.4.2 - 4. *Το Γ.Ο.* $(11.4.2-4)$ *λέγεται ότι υπάρχει ή διαφορετικά ότι συγκλίνει όταν και μόνον, όταν υπάρχουν τα Γ.Ο.*

$$\int_{a+}^{\xi} f(x)\,dx \quad \text{και} \quad \int_{\xi}^{\beta-} f(x)\,dx \ \text{με}\ \xi\in(a,\beta), \qquad (11.4.2\text{ - }5)$$

ενώ ορίζεται ως τιμή του ο πραγματικός αριθμός

$$\int_{a+}^{\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{\beta-} f(x)\,dx. \qquad (11.4.2\text{ - }6)$$

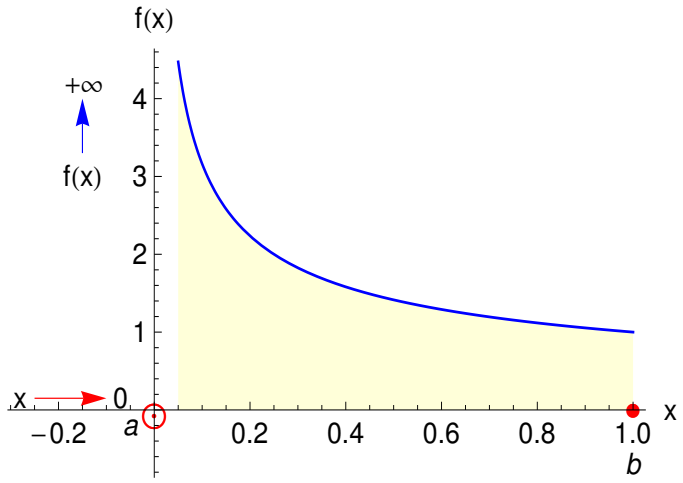
Ορισμός 11.4.2 - 5. *Το Γ.Ο.* $(11.4.2-4)$ *λέγεται ότι δεν υπάρχει ή ότι αποκλίνει, όταν τουλάχιστον ένα από τα Γ.Ο.* $(11.4.2-5)$ *δεν υπάρχει.*

Όμοια αποδεικνύεται ότι η ύπαρξη ή μη του Γ.Ο. $(11.4.2-4)$ είναι ανεξάρτητη από την εκλογή του σημείου ξ στην $(11.4.2-6)$.

Παράδειγμα 11.4.2 - 1

Σύμφωνα με τον Ορισμό 11.4.2 - 2 έχουμε (Σχ. 11.4.2 - 1)

$$\begin{aligned}\int_{0+}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}} &= \int_{0+}^{1} x^{-1/2}\,dx = \lim_{x\to 0+}\int_{x}^{1} t^{-1/2}\,dt\\ &= \lim_{x\to 0+}\left.\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_{x}^{1} = \lim_{x\to 0+}\left.2\sqrt{t}\right|_{x}^{1}\\ &= 2.\end{aligned}$$



Σχήμα 11.4.2 - 1: Το ολοκλήρωμα $\int_{0+}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ όπου η καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της $x^{-1/2}$, όταν $x \in [0.05, 1]$.

11.4.3 Γενικευμένα ολοκληρώματα μεικτού είδους

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα Γ.Ο. που η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν ορίζεται σε ένα συγκεκριμένο σημείο στο ένα άκρο ολοκλήρωσης, ενώ το άλλο άκρο είναι το ∞.

Ειδικότερα έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $(a, +\infty)$ και σημείο $\xi \in (a, +\infty)$, τέτοιο ώστε τα Γ.Ο.

$$\int_{a+}^{\xi} f(x)\,dx \quad \text{και} \quad \int_{\xi}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{11.4.3 - 1}$$

να υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ ή το ένα να απειρίζεται θετικά ή αρνητικά ή και τα δύο να απειρίζονται θετικά ή αρνητικά.

Ορισμός 11.4.3 - 1. *Ορίζεται ως Γ.Ο.* **μεικτού είδους** *της f στο $(a, +\infty)$ το ολοκλήρωμα*

$$\int_{a+}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{11.4.3 - 2}$$

Ορισμός 11.4.3 - 2. *Το Γ.Ο.* $(11.4.3-2)$ *θα λέγεται ότι υπάρχει ή ότι συγκλίνει όταν και μόνον, όταν υπάρχουν τα Γ.Ο.*

$$\int_{a+}^{\xi} f(x)\,dx \quad \text{και} \quad \int_{\xi}^{+\infty} f(x)\,dx \ \text{με}\ \xi \in (a, +\infty), \tag{11.4.3 - 3}$$

ενώ ορίζεται ως η τιμή του ο πραγματικός αριθμός

$$\int_{a+}^{\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{11.4.3 - 4}$$

Ορισμός 11.4.3 - 3. *Το Γ.Ο.* $(11.4.3-2)$ *θα λέγεται ότι δεν υπάρχει ή ότι αποκλίνει, όταν τουλάχιστον ένα από τα Γ.Ο.* $(11.4.3-3)$ *δεν υπάρχουν.*

Αποδεικνύεται ότι η τιμή των Γ.Ο. $(11.4.3-3)$ είναι ανεξάρτητη από την εκλογή του σημείου ξ στην $(11.4.3-4)$. Όμοια ορίζεται το Γ.Ο. του μεικτού είδους της f στο $(-\infty, \beta)$.

Μία εφαρμογή των Γ.Ο. μεικτού είδους δίνεται στην παράγραφο που ακολουθεί.

11.4.4 Συνάρτηση γάμμα

Ορισμός 11.4.4 - 1 (συνάρτησης γάμμα). *Ορίζεται από το γενικευμένο ολοκλήρωμα μεικτού είδους (gamma function)*

$$\Gamma(a) = \int_{0+}^{+\infty} e^{-x} x^{a-1}\,dx, \tag{11.4.4 - 1}$$

όταν $a > 0$ *ή όταν ο* a *είναι μιγαδικός αριθμός με* $\mathrm{Re}(a) > 0$.

Πρόκειται για μια συνάρτηση με πολλές εφαρμογές σε διάφορα προβλήματα των εφαρμοσμένων μαθηματικών.

Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 11.4.3 - 2, αν $\xi = 1$, έχουμε

$$\Gamma(a) = \int_{0+}^{+\infty} e^{-x} x^{a-1}\,dx = \int_{0+}^{1} e^{-x} x^{a-1}\,dx + \int_{1}^{+\infty} e^{-x} x^{a-1}\,dx.$$

Αποδεικνύεται ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα του δεξιού μέλους υπάρχουν, οπότε και το ολοκλήρωμα $(11.4.4-1)$ θα υπάρχει.

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση τελικά αποδεικνύεται ότι

$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a). \qquad (11.4.4\text{ - }2)$$

Από την $(11.4.4-2)$ προκύπτουν:

i)
$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{για κάθε } n = 0,\,1,\,2,\,\ldots \qquad (11.4.4\text{ - }3)$$
όπου προφανώς είναι $\Gamma(1) = 1$, δηλαδή η συνάρτηση γάμμα είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως η **γενίκευση** της παραγοντικής συνάρτησης,

ii) επειδή
$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} = \frac{\Gamma(a+2)}{a(a+1)} = \ldots = \frac{\Gamma(a+k+1)}{a(a+1)\ldots(a+k)} \qquad (11.4.4\text{ - }4)$$
όπου $a > 0$ και k ακέραιος, έτσι ώστε $a+k+1 > 0$, η $(11.4.4-4)$ με την $(11.4.4-3)$ δίνουν τη δυνατότητα να οριστεί η συνάρτηση $\Gamma(a)$ για $a \neq 0$ ή αρνητικού ακεραίου αριθμού (Σχ. 11.4.4 - 1).

Μία προσέγγιση της συνάρτησης γάμμα δίνεται από τον τύπο

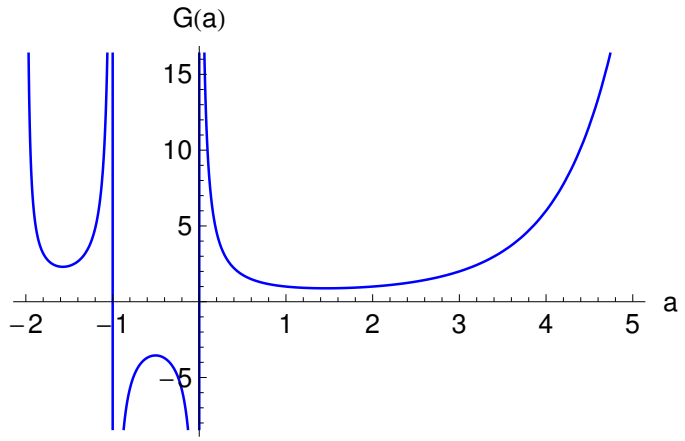
$$\Gamma(a+1) \approx \sqrt{2\pi a}\left(\frac{a}{e}\right)^2 \qquad (11.4.4\text{ - }5)$$

που είναι γνωστός ως **τύπος του Stirling**, ενώ μία ειδική τιμή της είναι η

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \qquad (11.4.4\text{ - }6)$$

Παρατήρηση 11.4.4 - 1

Οι τιμές της συνάρτησης γάμμα δίνονται από πίνακες ή από τα μαθηματικά πακέτα MATHEMATICA και MATLAB.



Σχήμα 11.4.4 - 1: Η συνάρτηση γάμμα, όταν $a \in [-2, 5]$.

Εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος

Δίνονται στη συνέχεια μια σειρά εφαρμογών των ορισμένων ολοκληρωμάτων, που κύρια εμφανίζονται στον υπολογισμό διαφόρων χρήσιμων στις θετικές επιστήμες μεγεθών.

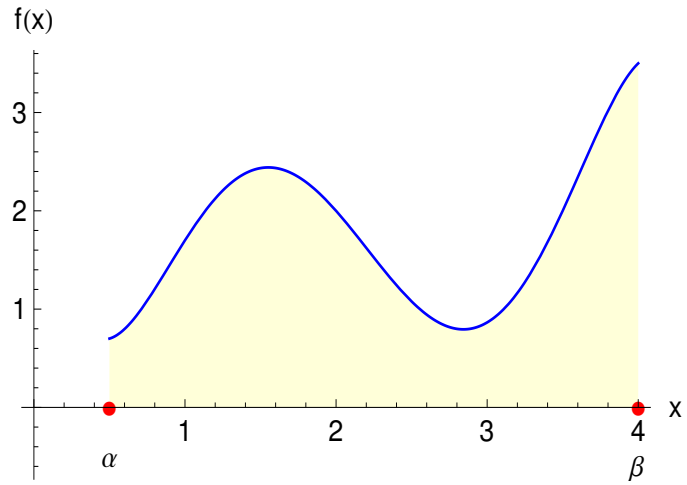
11.5 Εμβαδόν επίπεδου σχήματος

Ανάλογα με τις συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της εξίσωσης της καμπύλης από την οποία δημιουργείται το σχήμα, διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

11.5.1 Ορθογώνιες συντεταγμένες

Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη ότι γεωμετρικά το ορισμένο ολοκλήρωμα παριστάνει εμβαδόν. Ως συνέπεια αυτής της γεωμετρικής ιδιότητάς του έχουμε τον παρακάτω ορισμό του εμβαδού:

Ορισμός 11.5.1 - 1 (εμβαδόν σχήματος). *Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Τότε το εμβαδόν που περικλείεται από τον x-άξονα, τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και την*



Σχήμα 11.5.1 - 1: Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, οπότε $E = \int_a^b f(x)\,dx$.

καμπύλη $y = f(x)$ *δίνεται από τον τύπο (Σχ. 11.5.1 - 1)*

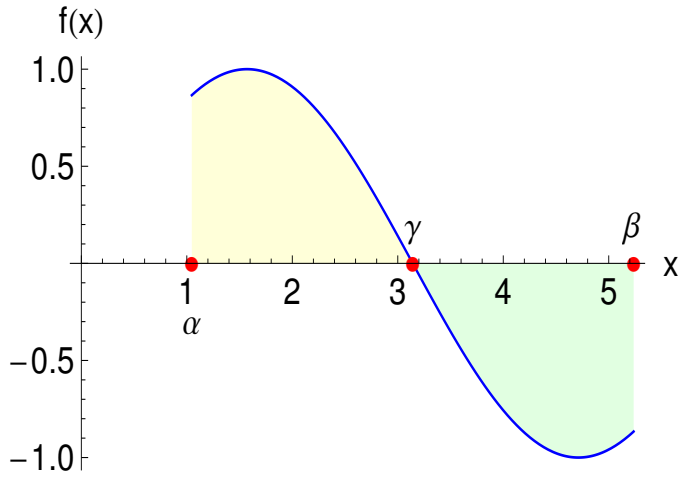
$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx. \qquad (11.5.1 - 1)$$

Γενικότερα, όταν δεν είναι γνωστό το πρόσημο της $f(x)$, ισχύει ο παρακάτω ορισμός του εμβαδού:

Ορισμός 11.5.1 - 2. *Έστω ότι η συνάρτηση* $f(x)$ *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[\alpha,\beta]$. *Τότε το εμβαδόν που περικλείεται από τον* x*-άξονα, τις ευθείες* $x = \alpha$, $x = \beta$ *και την καμπύλη* $y = f(x)$ *δίνεται από τον τύπο (Σχ. 11.5.1 - 2)*

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx. \qquad (11.5.1 - 2)$$

Στις περιπτώσεις όπου το σχήμα περιορίζεται από δύο καμπύλες, τότε το εμβαδόν ορίζεται ως εξής:



Σχήμα 11.5.1 - 2: Είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \gamma]$ και $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\gamma, \beta]$. Τότε $E = \int_{a}^{\gamma} |f(x)|\, dx + \int_{\gamma}^{\beta} |f(x)|\, dx = \int_{a}^{\gamma} f(x)\, dx - \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\, dx$.

Ορισμός 11.5.1 - 3 (γενίκευση εμβαδού σχήματος). *Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x), g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, \beta]$. Τότε το εμβαδόν που περικλείεται από τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τις καμπύλες $f(x)$, $g(x)$ δίνεται από τον τύπο (Σχ. 11.5.1 - 3)*

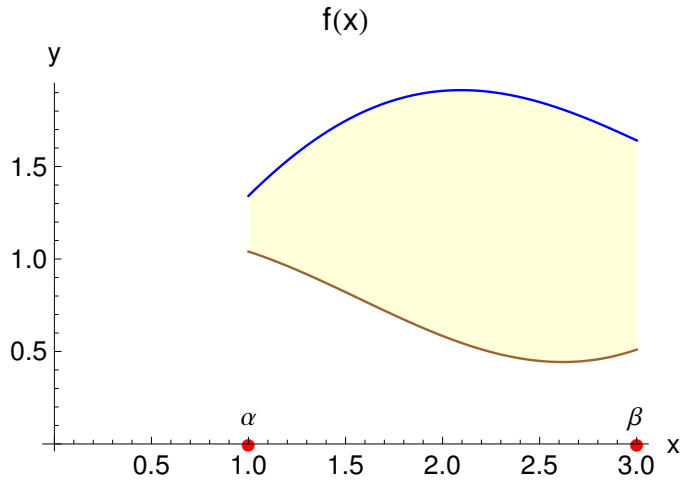
$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)|\, dx. \qquad (11.5.1 - 3)$$

Παρατήρηση 11.5.1 - 1 (εμβαδόν κύκλου)

Υπολογισμός του ολοκληρώματος $I = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

Έστω ότι ζητείται να υπολογιστεί το εμβαδόν του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα r, που όπως είναι γνωστό η εξίσωση των σημείων της περιφέρειάς του δίνεται από τον τύπο

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (11.5.1 - 4)$$



Σχήμα 11.5.1 - 3: Είναι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Τότε $E = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)]\, dx$.

Για τον υπολογισμό των άκρων ολοκλήρωσης στον τύπο $(11.5.1-3)$, πρέπει να προσδιοριστούν τα σημεία που ο κύκλος με εξίσωση $(11.5.1-4)$, τέμνει τον x-άξονα, δηλαδή όταν $y = 0$. Τότε

$$x^2 = r^2 \quad \text{ή} \quad |x| = |r|, \quad \text{οπότε} \quad x = \pm r.$$

Άρα $x \in [-\alpha, \alpha]$.

Από την εξίσωση $(11.5.1-4)$ προκύπτει τότε ότι $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, οπότε έστω

$$y_1 = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{και} \quad y_2 = g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2},$$

όπου προφανώς είναι $y_1(x) \geq y_2(x)$.

Επομένως σύμφωνα με τον τύπο $(11.5.1-3)$ το ζητούμενο εμβαδόν E, που σύμφωνα με τον γνωστό τύπο της Γεωμετρίας είναι $E = \pi r^2$, θα ισούται

με

$$\begin{aligned} E = \pi r^2 &= \int_{-r}^{r} [y_1(x) - y_2(x)]\, dx \\ &= \int_{-r}^{r} \left[\sqrt{r^2 - x^2} - \left(-\sqrt{r^2 - x^2}\right)\right] dx \\ &= 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx. \qquad (11.5.1 - 5) \end{aligned}$$

Από την $(11.5.1 - 5)$ προκύπτει ότι

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi a^2}{2}. \qquad (11.5.1 - 6)$$

Ο τύπος αυτός θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια του μαθήματος.

Παράδειγμα 11.5.1 - 1 (εμβαδόν έλλειψης)

Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από την έλλειψη (Σχ. 11.5.1 - 4)

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1. \qquad (11.5.1 - 7)$$

Λύση. Όμοια όπως και στην Παρατήρηση 11.5.1 - 1 ο προσδιορισμός των άκρων ολοκλήρωσης στον τύπο $(11.5.1{-}3)$ υπολογίζεται θέτοντας στην $(11.5.1{-}7)$ $y = 0$. Τότε

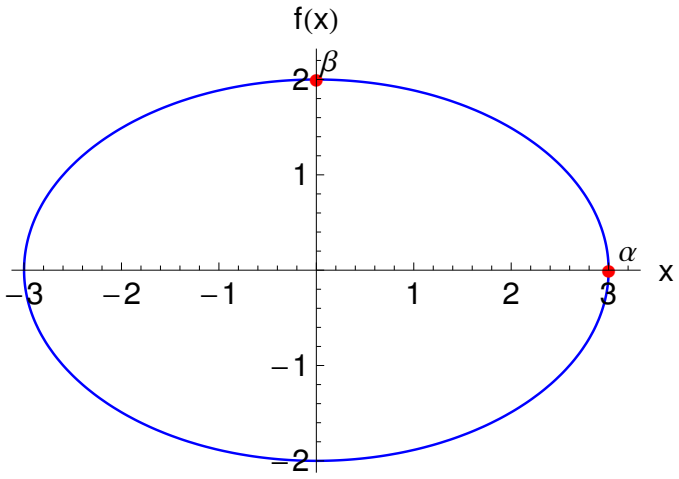
$$x^2 = \alpha^2 \quad \text{ή} \quad |x| = |\alpha|, \quad \text{οπότε} \quad x = \pm\alpha. \quad \text{Άρα} \quad x \in [-\alpha, \alpha].$$

Από την εξίσωση $(11.5.1 - 7)$ προκύπτει ότι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \text{οπότε} \quad y = \pm\beta\sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}}.$$

Επομένως

$$y_1 = f(x) = \beta\sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}} \quad \text{και} \quad y_2 = g(x) = -\beta\sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}}$$



Σχήμα 11.5.1 - 4: Η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

όπου προφανώς είναι $y_1(x) \geq y_2(x)$.

Τότε σύμφωνα με τον τύπο (11.5.1−3) το ζητούμενο εμβαδόν E θα ισούται με

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\alpha}^{\alpha} [y_1(x)-y_2(x)]\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}} - \left(-\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}\right)\right] dx \\ &= 2\beta \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}\,dx = \frac{2\beta}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx \end{aligned}$$

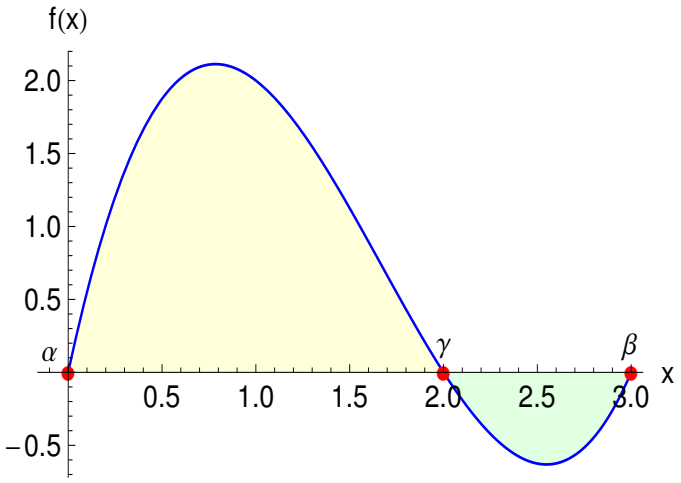
σύμφωνα με τον τύπο $(11.5.1-6)$

$$= \frac{2\beta}{\alpha}\,\frac{\pi\alpha^2}{2} = \pi\alpha\beta.$$

■

Παράδειγμα 11.5.1 - 2

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από το γράφημα της συνάρτησης $f(x)=x(x-2)(x-3)$ και τον x-άξονα (Σχ. 11.5.1 - 5).



Σχήμα 11.5.1 - 5: Παράδειγμα 11.5.1 - 2.

Πίνακας 11.5.1 - 1: Παράδειγμα 11.5.1 - 2.

	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
x	-	+	+	+	
$x-2$	-	-	+	+	
$x-3$	-	-	-	+	
$f(x)$	-	+	-	+	

Λύση. Το γράφημα της συνάρτησης τέμνει τον x-άξονα στα σημεία όπου

$$f(x)=0, \quad \text{δηλαδή τα} \quad x=0,\ 2,\ 3.$$

Επειδή δεν γνωρίζουμε το πρόσημο της $f(x)$, όταν $x\in[0,2]\cup[2,3]$ χρησιμοποιείται ο τύπος $(11.5.1-2)$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι

$$E=\int_0^2 |f(x)|\,dx+\int_2^3 |f(x)|\,dx. \qquad (11.5.1\text{ - }8)$$

Το πρόσημο της $f(x)$ υπολογίζεται στον Πίνακα 11.5.1 - 1.

Επομένως, επειδή

$$f(x)\geq 0, \quad \text{όταν} \quad x\in[0,2] \quad \text{και} \quad f(x)\leq 0, \quad \text{όταν} \quad x\in[2,3],$$

ο τύπος $(11.5.1-8)$ γράφεται

$$\begin{aligned} E &= \int_0^2 |f(x)|\,dx + \int_2^3 |f(x)|\,dx \\ &= \int_0^2 x(x-2)(x-3)\,dx \quad - \quad \int_2^3 x(x-2)(x-3)\,dx \\ &= \left[3x^2 - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^2 - \left[3x^2 - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_2^3 \\ &= \frac{8}{3} - \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{37}{12}\,. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 11.5.1 - 3

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις καμπύλες

$y_1 = 2x^2 + 10$ και $y_2 = 4x + 16$, όταν $x \in [-2, 5]$ $(\Sigma\chi.\ 11.5.1-6)$.

Λύση. Αρχικά υπολογίζονται τα σημεία τομής των καμπυλών

$$y_1 = 2x^2 + 10 \quad \text{και} \quad y_2 = 4x + 16 \qquad (11.5.1\text{ - }9)$$

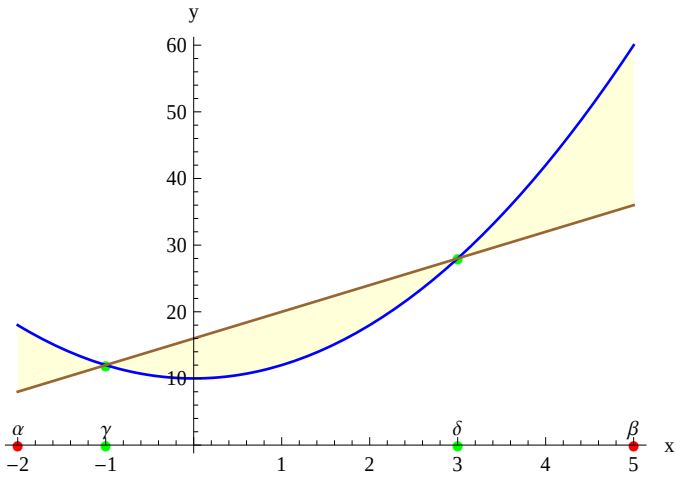
ως εξής:

$$y_1(x) = y_2(x), \quad \text{οπότε} \quad 2x^2 + 10 = 4x + 16, \quad \text{δηλαδή}$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0. \quad \text{Άρα} \quad x = -1,\, 3.$$

Έστω $\gamma(-1,0)$ και $\delta(3,0)$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(11.5.1-3)$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\begin{aligned} E &= \int_{-2}^{-1} |y_1(x) - y_2(x)|\,dx + \int_{-1}^{3} |y_1(x) - y_2(x)|\,dx \\ &\quad + \int_3^5 |y_1(x) - y_2(x)|\,dx. \qquad (11.5.1\text{ - }10) \end{aligned}$$



Σχήμα 11.5.1 - 6: Παράδειγμα 11.5.1 - 3.

Για να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα στην (11.5.1−10), πρέπει να απαλειφθούν τα απόλυτα. Αυτό γίνεται εξετάζοντας το πρόσημο της διαφοράς $y_1(x)-y_2(x)$.

Έστω

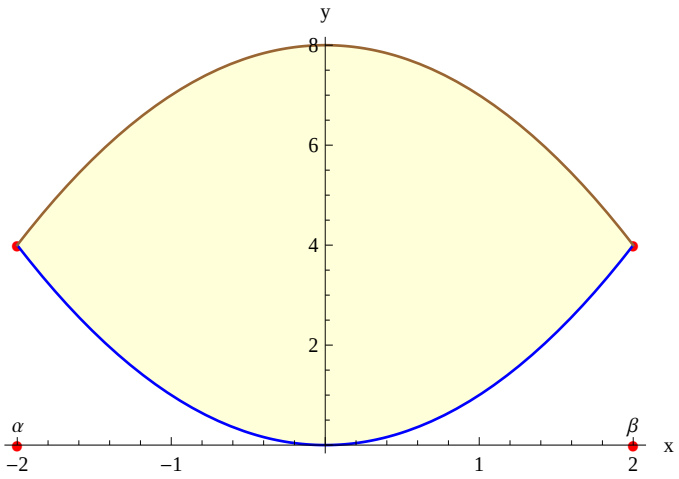
$$y_1(x) - y_2(x) \geq 0 \quad \text{ή λόγω της } (11.5.1-9) \quad (x+1)(x-3) \geq 0,$$

δηλαδή

$$x \leq -1 \quad \text{ή} \quad x \geq 3.$$

Τότε η $(11.5.1-10)$ γράφεται

$$\begin{aligned} E &= \int_{-2}^{-1} [y_1(x) - y_2(x)]\, dx + \int_{-1}^{3} [y_2(x) - y_1(x)]\, dx + \int_{3}^{5} [y_1(x) - y_2(x)]\, dx \\ &= \int_{-2}^{-1} \left(2x^2 - 4x - 6\right) dx + \int_{-1}^{3} \left(-2x^2 + 4x + 6\right) dx + \int_{3}^{5} \left(2x^2 - 4x - 6\right) dx \\ &= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - 6x\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 6x\right]_{-1}^{3} + \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - 6x\right]_{3}^{5} \\ &= \frac{14}{3} + \frac{64}{3} + \frac{64}{3} = \frac{142}{3}\,. \end{aligned}$$



Σχήμα 11.5.1 - 7: Παράδειγμα 11.5.1 - 4. Η μπλε καμπύλη ορίζει την $y_1(x) = x^2$.

■

Παράδειγμα 11.5.1 - 4

Όμοια το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις καμπύλες

$$y_1(x) = x^2 \quad \text{και} \quad y_2(x) = 8 - x^2 \quad (\Sigma\chi.\ 11.5.1 - 7).$$

Λύση. Τα κοινά σημεία τομής των δύο καμπυλών υπολογίζονται θέτοντας

$$y_1(x) = y_2(x), \quad \text{οπότε} \quad x^2 = 8 - x^2. \quad \text{Άρα} \quad x = \pm 2.$$

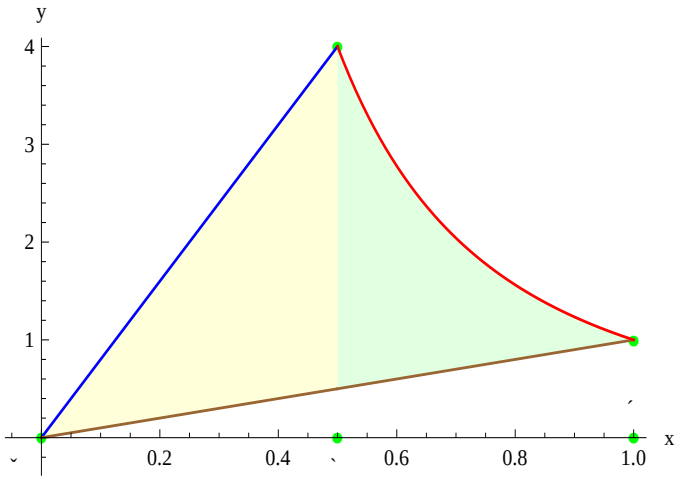
Στη συνέχεια υπολογίζεται το πρόσημο της διαφοράς $y_1(x) - y_2(x)$.

Έστω

$$y_1(x) - y_2(x) \geq 0 \quad \text{ή} \quad 2x^2 - 8 \geq 0, \quad \text{οπότε} \quad (x+2)(x-2) \geq 0.$$

Άρα

$$y_1(x) - y_2(x) \leq 0, \quad \text{όταν} \quad -2 \leq x \leq 2.$$



Σχήμα 11.5.1 - 8: Παράδειγμα 11.5.1 - 5. Η καφέ καμπύλη δείχνει το γράφημα της $y_2(x) = x$, η μπλε της $y_1 = 8x$ και η κόκκινη της $y_3(x) = \frac{1}{x^2}$.

Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(11.5.1 - 8)$ το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$E = \int_{-2}^{2} [y_2(x) - y_1(x)]\, dx = \int_{-2}^{2} \left(8 - 2x^2\right)\, dx$$

$$= 8x - \frac{2x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = \frac{64}{3}\,.$$

■

Παράδειγμα 11.5.1 - 5

Όμοια το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις καμπύλες

$$y_1(x) = 8x, \quad y_2(x) = x \quad \text{και} \quad y_3(x) = \frac{1}{x^2} \quad (\Sigma\chi.\ 11.5.1 - 8).$$

Λύση. Τα κοινά σημεία και των τριών καμπυλών υπάρχουν μόνο για $x \geq 0$, ενώ η συνάρτηση $y_3(x)$ ορίζεται για $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Προφανώς οι καμπύλες (ευθείες) $y_1(x)$ και $y_2(x)$ τέμνονται στο σημείο $(0, 0)$, δηλαδή στην αρχή των αξόνων. Το κοινό σημείο, έστω A, της $y_1(x)$ και $y_3(x)$ υπολογίζεται θέτοντας

$$y_1(x) = y_3(x) \quad \text{ή} \quad 8x = \frac{1}{x^2}\,, \quad \text{οπότε} \quad x = \frac{1}{2}\,,$$

(οι άλλες δύο ρίζες δεν λαμβάνονται υπόψη), ενώ το κοινό σημείο, έστω B, της $y_2(x)$ και $y_3(x)$ θέτοντας

$$y_2(x) = y_3(x) \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{x^2}\,, \quad \text{οπότε} \quad x = 1$$

όπου όμοια οι άλλες δύο ρίζες δεν λαμβάνονται υπόψη.

Έστω $E = E_1 + E_2$ το ζητούμενο εμβαδόν. Επειδή το σημείο $x = 0$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της $y_3(x)$, το E δεν θα προκύψει από συνδυασμό της $y_3(x)$ με την $y_1(x)$ ή την $y_2(x)$ και άκρο ολοκλήρωσης το 0.

Επομένως

- το εμβαδόν E_1 θα πρέπει να ορίζεται από την $y_1(x) = 8x$ και την $y_2(x) = x$ με $x \in [0, 0.5]$, όπου προφανώς $y_1(x) \geq y_2(x)$, δηλαδή

$$E_1 = \int_0^{0.5} [y_1(x) - y_2(x)]\, dx = 7 \int_0^{0.5} x\, dx = \frac{7}{8}$$

- και το εμβαδόν E_2 θα ορίζεται από την $y_3(x) = \frac{1}{x^2}$ και την $y_2(x) = x$ με $x \in [0.5, 1]$, όπου προφανώς $y_3(x) \geq y_2(x)$, δηλαδή

$$\begin{aligned} E_2 &= \int_{0.5}^{1} [y_3(x) - y_2(x)]\, dx = \int_{0.5}^{1} \left(\frac{1}{x^2} - x\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{x} - \frac{x^2}{2}\right]_{0.5}^{1} = \frac{5}{8}\,. \end{aligned}$$

Άρα

$$E = E_1 + E_2 = \frac{3}{2}\,.$$

■

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του σχήματος που περικλείεται από

i) την παραβολή $y = 4x - x^2$ και τον x-άξονα,

ii) την καμπύλη $y = \ln x$, τον άξονα των x και την ευθεία $x = e$,

iii) την καμπύλη $y = x(x-1)(x-2)$ και τον x-άξονα,

iv) την καμπύλη $y^2 = x$ και τις ευθείες $y = 1$ και $y = 8$,

v) από μία ημιπερίοδο της ημιτονικής καμπύλης $y = \sin x$ και του x-άξονα,

vi) την καμπύλη $y = \tan x$, του άξονα των x και της ευθείας $x = \pi/3$,

vii) την υπερβολή $xy = m^2$, των κάθετων ευθειών $x = a$ και $x = 3a$ με $a > 0$ και του x-άξονα,

viii) την **καμπύλη Agnesi** με εξίσωση $y = a^2/\left(x^2 + a^2\right)$ και του x-άξονα,

ix) την καμπύλη $y = x^2$, την ευθεία $y = 8$ και τον y-άξονα,

x) από τις παραβολές $y^2 = 2px$ και $x^2 = 2py$,

xi) την παραβολή $y = x^2$ και την ευθεία $y = 3 - 2x$,

xii) τις παραβολές $y = x^2$, $y = x^2/2$ και της ευθείας $y = 2x$,

xiii) τις παραβολές $y = x^2/3$ και $y = 4 - 2x^2/3$.

2. Όμοια του σχήματος που περικλείεται από την καμπύλη $y = 1/\left(1 + x^2\right)$ και την παραβολή $y = x^2/2$.

3. Όμοια του σχήματος που περικλείεται από

i) τις καμπύλες $y = e^x$, $y = e^{-x}$ και την ευθεία $x = 1$,

ii) από την υπερβολή $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ και την ευθεία $x = 2a$.

4. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της **αστεροειδούς καμπύλης** με εξίσωση

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

5. Όμοια του σχήματος που περικλείεται από

i) την καμπύλη $y = a\cosh(x/a)$, του άξονα των y και της ευθείας $y = a\left(e^2 + 1\right)/2e$,

ii) την καμπύλη $a^2y^2 = x^2\left(a^2 - x^2\right)$.

6. Όμοια του σχήματος που περιέχεται στο εσωτερικό της καμπύλης

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^{2/3} = 1.$$

7. Όμοια του σχήματος που ορίζεται από

i) την ισοσκελή υπερβολή $x^2 - y^2 = 9$, του άξονα των x και της διαμέτρου που διέρχεται από το σημείο $(5, 4)$,

ii) την καμπύλη $y = 1/x^2$, του άξονα των x και της ευθείας $x = 1$, όταν $x > 1$,

iii) την καμπύλη $y^2 = x^3/(2a - x)$ και την ασυμπτωτική της ευθεία $x = 2a$ με $a > 0$.

8. Να υπολογιστεί το εμβαδόν των δύο τμημάτων στα οποία ο κύκλος $x^2 + y^2 = 8$ τέμνεται από την παραβολή $y^2 = 2x$.

9. Όμοια του σχήματος που περιέχεται μεταξύ του κύκλου $x^2 + y^2 = 16$ και της παραβολής $x^2 = 12(y - 1)$.

Απαντήσεις

1. i) Σημεία $x = 0,\ 4$. Σύμφωνα με τον τύπο $(11.5.1 - 1)$: $E = \frac{32}{3}$. ii) Σημεία $x = 1,\ e$ $E = 1$. iii) Σημεία $x = 0,\ 1,\ 2$. Σύμφωνα με τον τύπο $(11.5.1 - 2)$: $E = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. iv) Σημείο τομής $y = \sqrt{x}$ και $y = 1$ το 1. Όμοια με $y = 8$ το 64. Τότε

$$E = 8 \cdot 64 - \int_0^{64} \sqrt{x}\, dx - \left(1 - \int_0^{1} \sqrt{x}\, dx\right) = \frac{511}{3}.$$

v) Σημεία $x = 0,\ \pi$. $E = 2$. vi) Σημεία $x = 0,\ \pi/3$. $E = \ln 2$.
vii) Σημεία $x = a,\ 3a$. $E = m^2 \ln 3$. viii) Σημεία $x = 0,\ +\infty$. $E = a \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{a\pi}{2}$. ix) Σημεία $x = -2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}$. Συμμετρία ως προς τον y-άξονα. Σύμφωνα με τον τύπο $(11.5.1 - 2)$:

$$E = 2\left(2\sqrt{2} \cdot 8 - \int_0^{2\sqrt{2}} x^2\, dx\right) = \frac{64\sqrt{2}}{3}.$$

x) Σημεία $x = 0,\ 2\sqrt{2}$. Σύμφωνα με τον τύπο $(11.5.1 - 2)$: $E = 4\sqrt{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.
xi) Σημεία $x = -3,\ 1$. Όμοια με τον τύπο $(11.5.1 - 2)$: $E = 20 - \frac{28}{3} = \frac{32}{3}$.

xii) Έστω $f_1(x)=\frac{x^2}{2}$, $f_2(x)=x^2\text{quad}$ και $f_3(x)=2x$. Τότε με τον τύπο $(11.5.1-2)$:

$$E=\int_0^2 [f_2(x)-f_1(x)]\,dx+\int_2^4 [f_3(x)-f_1(x)]\,dx=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}=4.$$

xiii) Έστω $f_1(x)=\frac{x^2}{3}$ και $f_2(x)=4-\frac{2x^2}{3}$. Σημεία $x=-2,\,2$. Με τον τύπο $(11.5.1-2)$:

$$E=\int_0^2 [f_2(x)-f_1(x)]\,dx=\frac{16}{9}-\frac{112}{9}=\frac{32}{3}.$$

2. Έστω $f_1(x)=\frac{1}{1+x^2}$ και $f_2(x)=\frac{x^2}{2}$. Σημεία $x=-1,\,1$. Με τον τύπο $(11.5.1-2)$:

$$E=\int_0^2 [f_1(x)-f_2(x)]\,dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\approx 1.237\,463.$$

3. i) Έστω $f_1(x)=e^x$ και $f_2(x)=e^{-x}$. Σημεία $x=0$ και ευθεία $x=1$. Με τον τύπο $(11.5.1-2)$:

$$E=\int_0^1 [f_1(x)-f_2(x)]\,dx=e-1-\frac{e-1}{e}\approx 1.086\,161.$$

ii) [14]Η υπερβολή τέμνει τον x-άξονα στα σημεία $x=\pm a$. Είναι $y=f(x)=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Λόγω συμμετρίας είναι $E=4E_1$, όταν

$$E_1 = \int_a^{2a} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\,ab\left[2\sqrt{3}-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right],\quad \text{οπότε}$$

$$E = 2ab\left[2\sqrt{3}-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right]\approx 4.294\,287\,ab,$$

όταν εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση αποδεικνύεται ότι

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{1}{2}a^2\ln\left[2\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right].$$

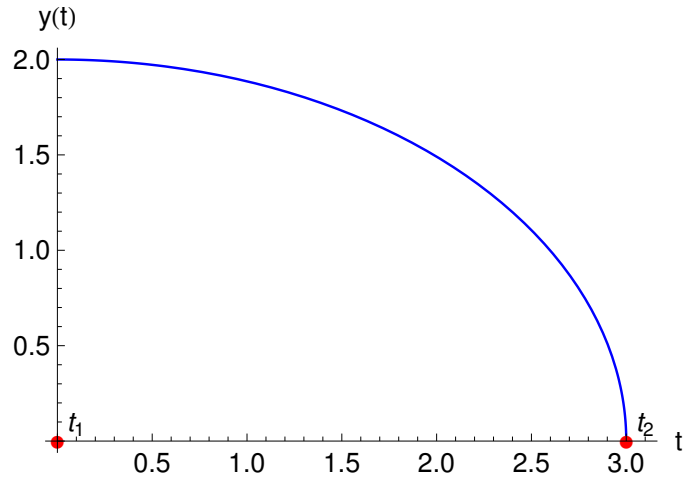
Ανάλογα και οι υπόλοιπες ασκήσεις.

11.5.2 Παραμετρική εξίσωση

Ορισμός 11.5.2 - 1. *Αν μία καμπύλη ορίζεται με παραμετρική εξίσωση της μορφής*

$$x=x(t)\quad \text{και}\quad y=y(t),\quad \text{όταν}\quad t\in[t_1,t_2],$$

[14]Βλέπε Μάθημα *Αναλυτική Γεωμετρία - Υπερβολή*.



Σχήμα 11.5.2 - 1: Παράδειγμα 11.5.2 - 1. Το πρώτο τεταρτημόριο της έλλειψης $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

τότε το εμβαδόν E του καμπυλόγραμμου τραπεζίου που ορίζεται από την καμπύλη, τις κάθετες ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα των x, ισούται με

$$E=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt, \qquad (11.5.2\text{ - }1)$$

όταν $y(t)\geq 0$ για κάθε $t\in[t_1,t_2]$ και οι τιμές t_1 και t_2 προκύπτουν από την εξίσωση $x=x(t)$.

Παράδειγμα 11.5.2 - 1

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της έλλειψης που εκφράζεται με την παραμετρική εξίσωση

$$x=\alpha\cos t \quad \text{και} \quad y=\beta\sin t. \qquad (11.5.2\text{ - }2)$$

Λύση. Λόγω της συμμετρίας της έλλειψης αρκεί να υπολογιστεί το εμβαδόν ενός τεταρτημορίου αυτής (Σχ. 11.5.2 - 1) και το αποτέλεσμα να πολλαπλασιαστεί επί 4.

Θέτοντας στην 1η εξίσωση ($x=\alpha\cos t$) της $(11.5.2-2)$ διαδοχικά $x=0$ και $x=a$ προκύπτουν ως όρια ολοκλήρωσης τα $t_1=\pi/2$ και $t_2=0$, ενώ είναι

$y > 0$ για κάθε $t \in [0, \pi/2]$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(11.5.2-1)$ είναι

$$\int_{\pi/2}^{0} \beta \sin\alpha\,(-\sin t)\,dt = \alpha\beta \int_{0}^{\pi/2} \sin^2 t\,dt = \frac{\pi\alpha\beta}{4}\,.$$

Άρα $\quad E = \pi\alpha\beta$.

Παρατήρηση 11.5.2 - 1

Ο παραπάνω τρόπος υπολογισμού του εμβαδού της έλλειψης με τη βοήθεια της παραμετρικής παράστασής της είναι εμφανώς ευκολότερος του αντίστοιχου τρόπου με τις ορθογώνιες συντεταγμένες (Παράδειγμα 11.5.1 - 1). Αυτό είναι μια απόδειξη της χρησιμότητας των παραμετρικών παραστάσεων των καμπυλών. ∎

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του σχήματος που περιέχεται στο εσωτερικό της **αστεροειδούς καμπύλης**[15] (astroid curve) με παραμετρική εξίσωση (Σχ. 11.5.2 - 2)

$$x = a\cos^3 t \quad \text{και} \quad y = b\sin^3 t.$$

2. Όμοια του σχήματος που περικλείεται από

i) τον άξονα των x και ένα τόξο της **κυκλοειδούς καμπύλης**[16] (cycloid curve) με παραμετρική εξίσωση (Σχ. 11.5.2 - 3a)

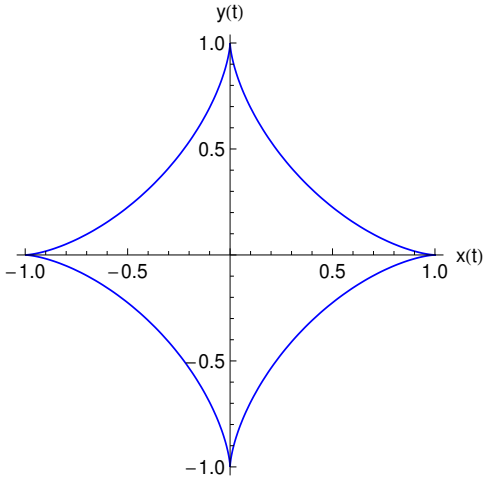
$$x = a(t - \sin t) \quad \text{και} \quad y = a(1 - \cos t),$$

ii) τον κλάδο της καμπύλης με παραμετρική εξίσωση (γενίκευση της κυκλοειδούς καμπύλης)

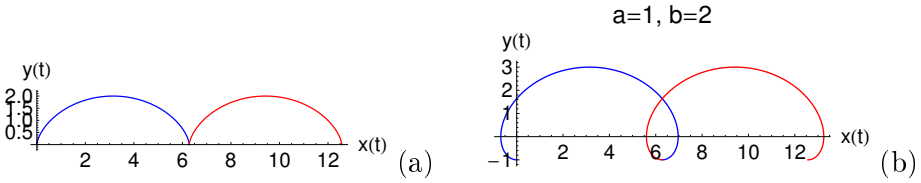
$$x = at - b\sin t \quad \text{και} \quad y = a - b\cos t, \quad \text{όπου } 0 < b \le a$$

και της εφαπτόμενής της στα χαμηλότερα σημεία της (Σχ. 11.5.2 - 3b),

[15] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Astroid*
Επίσης *mathworld.wolfram.com/Astroid.html*
[16] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Cycloid*
Επίσης *mathworld.wolfram.com/Cycloid.html*



Σχήμα 11.5.2 - 2: Η αστεροειδής καμπύλη, όταν $a = b = 1$.



Σχήμα 11.5.2 - 3: (a) Η κυκλοειδής καμπύλη και (b) η γενίκευσή της.

iii) την **καρδιοειδή καμπύλη** με παραμετρική εξίσωση

$$x = a(2\cos t - \cos 2t) \quad \text{και} \quad y = a(2\sin t - \sin 2t).$$

Απαντήσεις

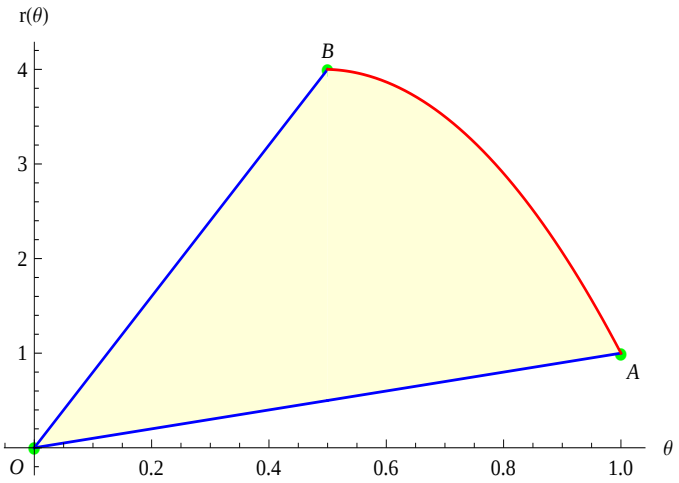
1. Σύμφωνα με την $(11.5.2-1)$ και λόγω συμμετρίας είναι

$$E = 4\int_0^{\pi/2} \left(-3ab\cos^2 t \sin^4 t\right)\, dt = \frac{3\pi ab}{8}.$$

2. i) Όμοια $E = \alpha^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\, dt = 3a^2\pi$,

ii) $E = \int_0^{2\pi} (a - b\cos t)^2\, dt = \left(2a^2 + b^2\right)\pi$,

iii) $E = -2\alpha^2 \int_0^{2\pi} (\sin t - sin2t)\,(2\sin t - sin2t)\, dt = 12a^2\pi$.



Σχήμα 11.5.3 - 1: εμβαδόν σχήματος σε πολικές συντεταγμένες.

11.5.3 Πολικές συντεταγμένες

Ορισμός 11.5.3 - 1. *Έστω ότι*

$$r = r(\theta), \quad \text{όταν} \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

είναι η εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες του τμήματος (Σχ. 11.5.3 - 1), που ορίζεται από την αρχή των αξόνων και τα σημεία $A\,(r, \theta_1)$ και $B\,(r, \theta_2)$. Τότε το εμβαδόν E του σχήματος AOB δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$E = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta)\, d\theta. \qquad (11.5.3 - 1)$$

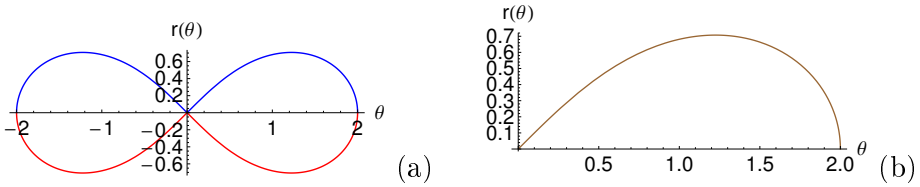
Παράδειγμα 11.5.3 - 1

Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από τους **λημνίσκους Bernoulli** (Bernoulli's lemniscate)[17] (Σχ. 11.5.3 - 2a) με εξίσωση

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

Λύση. Λόγω της συμμετρίας της καμπύλης υπολογίζεται μόνο το εμβαδόν

[17] Βλέπε: http : //en.wikipedia.org/wiki/Lemniscate_of_Bernoulli
και επίσης *mathworld.wolfram.com/Lemniscate.html*



Σχήμα 11.5.3 - 2: Ο λημνίσκος του Bernoulli $r^2 = 2\cos 2\theta$, όταν (a) $\theta \in [0, \pi]$ (μπλε) και $\theta \in [\pi, 2\pi]$ (κόκκινη καμπύλη). (b) $\theta \in [0, \pi/4]$.

του 1ου τεταρτημορίου (Σχ. 11.5.3 - 2b), οπότε

$$\frac{1}{4}E = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta \, d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}\,.$$

Άρα $E = a^2$. ∎

Άσκηση

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του σχήματος που ορίζεται από την

i) καμπύλη $r = a\sin 3\theta$ (Σχ.11.5.3 - 3a),

ii) καμπύλη $r = 2a\cos 3\theta$ που είναι στο εξωτερικό του κύκλου με ακτίνα $r = 2a$, όταν $a > 0$ (Σχ.11.5.3 - 3b),

iii) καμπύλη $r = 2 + \cos\theta$,

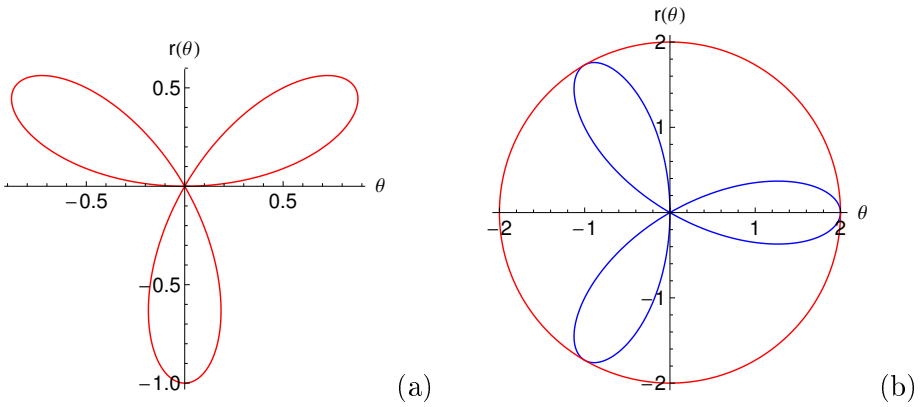
iv) παραβολή $r = a/\cos^2(\theta/2)$ και τις δύο ημιευθείες $\theta = \pi/4$ και $\theta = \pi/2$,

v) έλλειψη με εξίσωση $r = p/(1 + \varepsilon\cos\theta)$, όπου $\varepsilon < 1$.

Απαντήσεις

i) Σύμφωνα με την $(11.5.3 - 1)$ είναι

$$E = a^2\int_0^{\pi} \sin^2 3\theta \, d\theta = \frac{\pi a^2}{2}\,,$$



Σχήμα 11.5.3 - 3: Ασκήσεις Παραγράφου 11.5.3, όταν $a = 1$ και $\theta \in [0, \pi]$: (a) η (i) και (b) η (ii).

ii) Το εμβαδόν του κύκλου είναι $4\pi a^2$. Άρα το εμβαδόν του εσωτερικού μέρους είναι

$$E = 4\pi a^2 - a^2 \int_0^{\pi} \cos^2 3\theta \, d\theta = 2\pi a^2.$$

Ανάλογα και οι υπόλοιπες ασκήσεις.

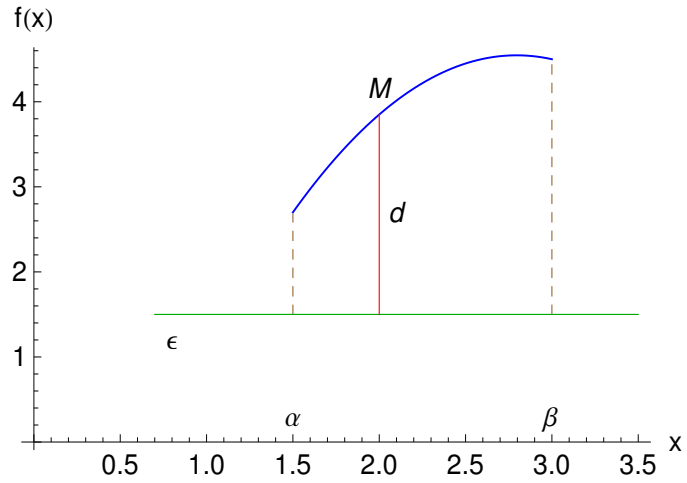
11.6 Εμβαδόν επιφάνειας από περιστροφή

18

11.6.1 Ορθογώνιες συντεταγμένες

Ορισμός 11.6.1 - 1. *Έστω ότι η συνάρτηση $f\,|\,[\alpha,\beta\,]$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για κάθε $x \in [\alpha,\beta\,]$. Αν ϵ είναι μία ευθεία που δεν τέμνει το γράφημα της συνάρτησης $y = f(x)$ εκτός ίσως από τα σημεία α, β και $d = \delta(x)$ η απόσταση τυχόντος σημείου $M(x, f(x))$ του διαγράμματος της $f(x)$ από την ϵ (Σχ. 11.6.1 - 1), τότε το εμβαδόν E της επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή του καμπυλόγραμμου τραπεζίου που ορίζεται*

[18] Βλέπε επίσης βιβλιογραφία και
https://en.wikipedia.org/wiki/Surface_of_revolution
Επίσης *mathworld.wolfram.com/Revolution.html*



Σχήμα 11.6.1 - 1: Ορισμός 11.6.1 - 1: η συνάρτηση $f(x)$ σε ορθογώνιες συντεταγμένες και ο άξονας περιστροφής ϵ (πράσινη ευθεία).

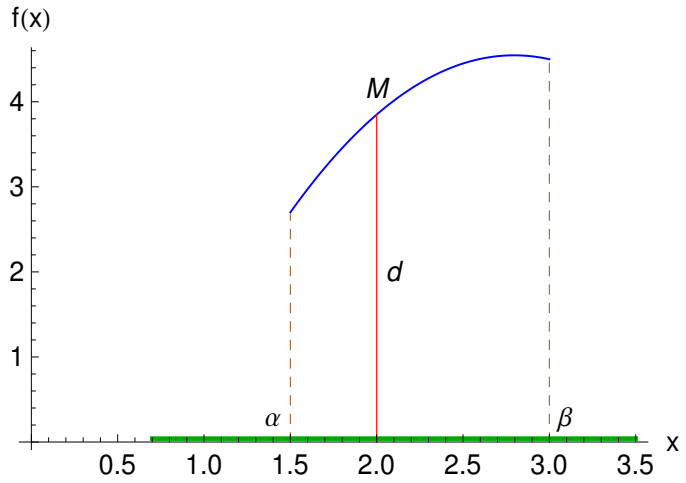
από το τόξο του διαγράμματος της $f(x)$, *όταν* $x \in [\alpha, \beta]$, *τις ευθείες* $x = \alpha$ *και* $x = \beta$ *γύρω από την ευθεία* ϵ *δίνεται από τον τύπο*

$$E = 2\,\pi \int_{\alpha}^{\beta} \delta(x) \sqrt{1 + \left[\frac{d\,f(x)}{dx}\right]^2}\, dx. \qquad (11.6.1 - 1)$$

Ο Ορισμός 11.6.1 - 1 στην περίπτωση που η ευθεία ϵ συμπίπτει με τον x-άξονα γράφεται ως εξής:

Ορισμός 11.6.1 - 2. *Έστω ότι η συνάρτηση* $f\,|\,[\alpha, \beta]$ *είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για κάθε* $x \in [\alpha, \beta]$. *Αν* $d = \delta(x) = f(x)$ *η απόσταση τυχόντος σημείου* $M(x, f(x))$ *του διαγράμματος της* $f(x)$ *από τον* x*-άξονα (Σχ. 11.6.1 - 2), τότε το εμβαδόν* E *της επιφάνειας που προκύπτει από περιστροφή του καμπυλόγραμμου τραπεζίου που ορίζεται από το τόξο του διαγράμματος της* $f(x)$, *όταν* $x \in [\alpha, \beta]$, *τις ευθείες* $x = \alpha$, $x = \beta$ *γύρω από τον* x*-άξονα δίνεται από τον τύπο*

$$E = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sqrt{1 + \left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2}\, dx. \qquad (11.6.1 - 2)$$



Σχήμα 11.6.1 - 2: Ορισμός 11.6.1 - 2: η συνάρτηση $f(x)$ σε ορθογώνιες συντεταγμένες και ο x-άξονας περιστροφής (πράσινη ευθεία).

Σημείωση 11.6.1 - 1

Αν η εξίσωση της καμπύλης δίνεται διαφορετικά, τότε το εμβαδόν της επιφάνειας E δίνεται από τον τύπο $(11.6.1-2)$ αλλάζοντας κατάλληλα τις μεταβλητές.

Παράδειγμα 11.6.1 - 1

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που σχηματίζεται από περιστροφή γύρω από τον x-άξονα ενός βρόγχου της καμπύλης

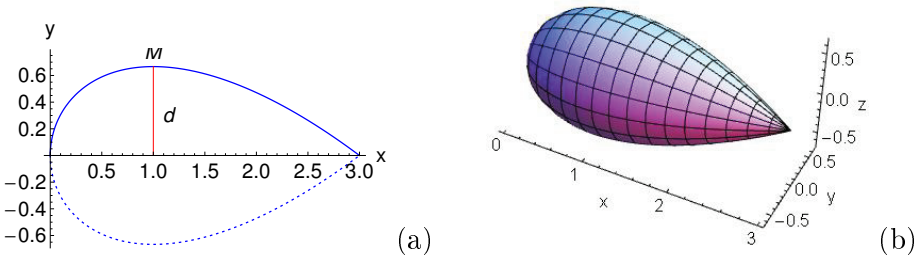
$$y^2 = \frac{1}{9}\, x(3-x)^2.$$

Λύση. Η καμπύλη τέμνει τον x-άξονα στα σημεία $x = 0, 3$. Για το άνω μέρος της καμπύλης (Σχ. 11.6.1 - 4a), όταν $0 \le x \le 3$, έχουμε

$$y = f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}\,(3-x),$$

ενώ

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}},$$



Σχήμα 11.6.1 - 3: Παράδειγμα 11.6.1 - 1: (a) Ο βρόχος της καμπύλης $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}\,(3-x)$ μπλε συνεχής και της $y = -\frac{1}{3}\sqrt{x}\,(3-x)$ μπλε διακεκομμένη καμπύλη και (b) η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής.

Τότε προφανώς είναι

$$d = \delta(x) = f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}\,(3-x)\,.$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο $(11.6.1-2)$ το εμβαδόν της επιφάνειας είναι

$$E = 2\pi\,\frac{1}{6}\int_0^3 (3-x)(x+1)\,dx = 3\pi.$$

■

Παράδειγμα 11.6.1 - 2

Όμοια το εμβαδόν της επιφάνειας, που σχηματίζεται από περιστροφή γύρω από τον άξονα $x = 1$ της καμπύλης

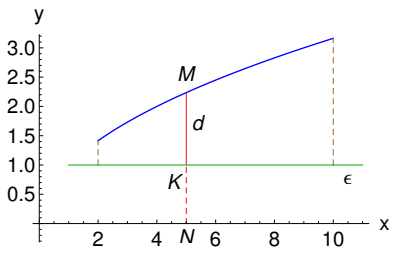
$$y = \sqrt{x}, \quad \text{όταν} \quad x \in [2, 10].$$

Λύση. Είναι

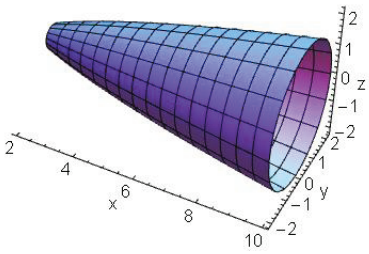
$$y = f(x) = \sqrt{x} \quad \text{και} \quad \sqrt{1 + \left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2} = \frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\,,$$

ενώ

$$d = \delta(x) = |MN| - |KN| = f(x) - 1 = \sqrt{x} - 1.$$



(a)



(b)

Σχήμα 11.6.1 - 4: Παράδειγμα 11.6.1 - 1: (a) Η καμπύλη $y = \sqrt{x}$ μπλε καμπύλη και ο άξονας περιστροφής $x = 1$ (πράσινη ευθεία). (b) Η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής.

Αντικαθιστώντας στον τύπο $(11.6.1 - 1)$ το εμβαδόν της επιφάνειας είναι

$$E = 2\pi \frac{1}{2} \int_2^{10} (\sqrt{x} - 1) \frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x}}\, dx \approx 71.811\,630.$$

■

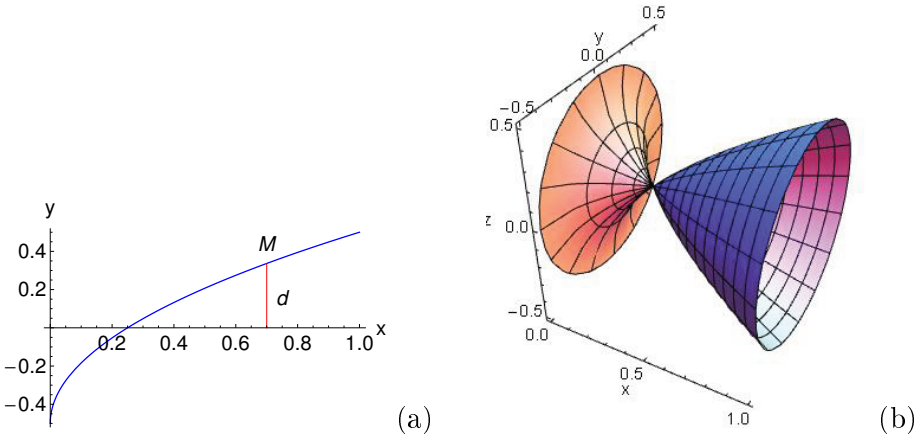
Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας, που σχηματίζεται από περιστροφή γύρω από τον x- άξονα ενός τόξου της καμπύλης (Σχ. 11.6.1 - 5)

$$y = \sqrt{x} - \frac{1}{2}, \quad \text{όταν} \quad x \in [0, 1].$$

2. Όμοια το εμβαδόν της επιφάνειας από περιστροφή γύρω από τον x- άξονα ενός τόξου της καμπύλης (Σχ. 11.6.1 - 6)

$$y = e^{-x}, \quad \text{όταν} \quad x \in [0, +\infty).$$



Σχήμα 11.6.1 - 5: Άσκηση 1 Παραγράφου 11.6.1: (a) Η καμπύλη $y = \sqrt{x} - \frac{1}{2}$ μπλε καμπύλη, όταν $x \in [0,1]$ και (b) η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής γύρω από τον x-άξονα.

Απαντήσεις

1. Είναι $\delta(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2}$. Άρα

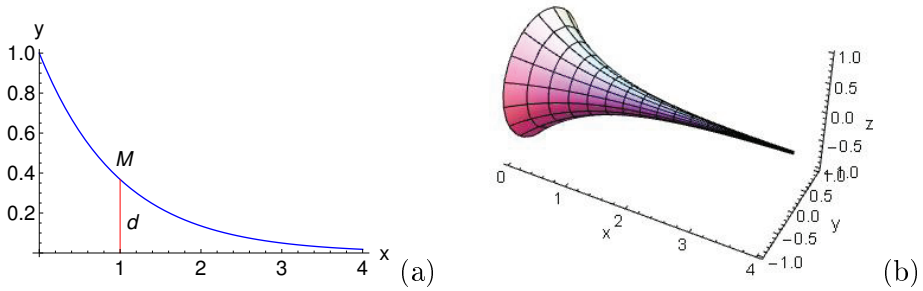
$$\begin{aligned} E &= 2\pi \left[\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{1+4x}}{2} - \frac{\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{x}} \right) dx \right] \\ &= \frac{\pi}{6} (1+4x)^{3/2} \Big|_0^1 - \frac{\pi}{2} \left[\sqrt{x(1+4x)} + \frac{1}{2} \sinh^{-1}\left(2\sqrt{x}\right) \right] \Big|_0^1 \\ &\approx 0.684\,178. \end{aligned}$$

2. Είναι $\delta(x) = e^{-x}$. Με παραγοντική ολοκλήρωση

$$\begin{aligned} I &= \int e^{-x} \sqrt{1+e^{-2x}}\, dx = -\int \sqrt{1+e^{-2x}}\, d\overbrace{e^{-x}}^{u} = -\int \sqrt{1+u^2}\, d\, u \\ &= -\frac{1}{2} \left(u\sqrt{1+u^2} + \sinh^{-1} u \right) = -\frac{1}{2} \left[e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}} + \sinh^{-1}\left(e^{-x}\right) \right]. \end{aligned}$$

Τότε, επειδή $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, είναι

$$E = 2\pi \int e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}}\, dx = -\pi\, I \Big|_0^{+\infty} \approx 7.212.$$



Σχήμα 11.6.1 - 6: Άσκηση 2 Παραγράφου 11.6.1: (a) Η καμπύλη $y = e^{-x}$ μπλε καμπύλη, όταν $x \in [0,4]$ και (b) η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής γύρω από τον x-άξονα.

11.6.2 Παραμετρική εξίσωση

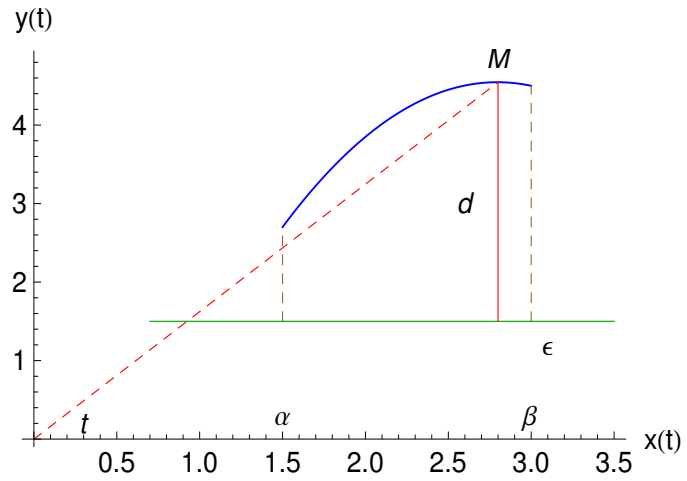
Στην περίπτωση που η συνάρτηση ορίζεται παραμετρικά, τότε ο Ορισμός 11.6.1 - 1 γράφεται:

Ορισμός 11.6.2 - 1. *Έστω ότι η συνάρτηση* $f\,|\,[\alpha,\beta\,]$ *είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για κάθε* $x \in [\alpha,\beta\,]$ *και έχει την παρακάτω παραμετρική εξίσωση:*

$$y = y(t) \quad \textit{και} \quad x = x(t) \quad \textit{για κάθε} \quad t \in [t_0, t_1\,].$$

Αν ϵ *είναι μία ευθεία που δεν τέμνει το γράφημα της συνάρτησης* f *εκτός ίσως από τα σημεία* α, β *και* $d = \delta(t)$ *η απόσταση τυχόντος σημείου* $M(x(t), y(t))$ *του διαγράμματος της* f *από την* ϵ *(Σχ. 11.6.2 - 1), τότε το εμβαδόν* E *της επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή του καμπυλόγραμμου τραπεζίου που ορίζεται από το τόξο του διαγράμματος της* f, *όταν* $t \in [t_0, t_1]$, *τις ευθείες* $x = \alpha$ *και* $x = \beta$ *γύρω από την ευθεία* ϵ *δίνεται από τον τύπο*

$$E = 2\,\pi \int_{t_0}^{t_1} \delta(t) \sqrt{\left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2}\, d\,t. \qquad (11.6.2 - 1)$$



Σχήμα 11.6.2 - 1: Ορισμός 11.6.2 - 1: η συνάρτηση $f(x)$ με παραμετρική εξίσωση και ο άξονας περιστροφής ϵ (πράσινη ευθεία).

Παράδειγμα 11.6.2 - 1

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που σχηματίζεται εκ περιστροφής του τόξου της **κυκλοειδούς** καμπύλης

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

γύρω από τον άξονα συμμετρίας της (Σχ. 11.6.2 - 2).

Λύση. Η επιφάνεια σχηματίζεται από περιστροφή της κυκλοειδούς, όταν $t \in [0, \pi]$ (Σχ. 11.6.2 - 2a), γύρω από τον άξονα ϵ με εξίσωση είναι $x = \pi a$.

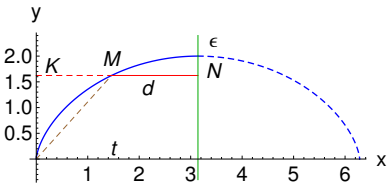
Τότε

$$d = \delta(t) = |MN| = |KN| - |KM| = \pi a - a(t - \sin t), \qquad (11.6.2 - 2)$$

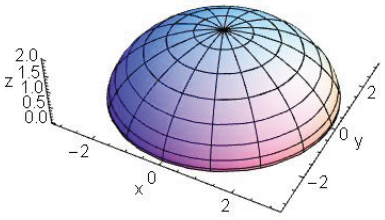
ενώ είναι

$$\sqrt{\left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2} = \sqrt{(a - a\,\cos t)^2 + (a\,\sin t)^2}$$

$$= a\sqrt{2}\,\sqrt{1 - \cos t}. \qquad (11.6.2 - 3)$$



(a)



(b)

Σχήμα 11.6.2 - 2: Παράδειγμα 11.6.2 - 1: (a) Η κυκλοειδής, όταν $a = 1$, $t \in [0, \pi]$ συνεχής μπλε, $t \in [\pi, 2\pi]$ διακεκομμένη μπλε καμπύλη και ο άξονας περιστροφής $x = \pi$ πράσινη ευθεία. (b) Η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής.

Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int \sqrt{1-\cos t}\, dt$

Ισχύει ότι

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}, \quad \text{οπότε} \quad 1-\cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}\,.$$

Άρα, επειδή $t \in [0, \pi]$, έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{1-\cos t}\, dt = \int \sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = \sqrt{2} \int \sin \frac{t}{2}\, dt \\ &= 2\sqrt{2} \int \left(\frac{t}{2}\right)' \sin \frac{t}{2}\, dt = -2\sqrt{2} \cos \frac{t}{2}\,, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\sqrt{1-\cos t} = \sqrt{2} \sin \frac{t}{2}\,, \quad \text{ενώ} \qquad (11.6.2 - 4)$$

$$\int \sqrt{1-\cos t}\, dt = -2\sqrt{2} \cos \frac{t}{2}\,. \qquad (11.6.2 - 5)$$

Άρα σύμφωνα με την $(11.6.2-1)$ και τις $(11.6.2-2)$ - $(11.6.2-4)$ έχουμε

$$\begin{aligned} E &= 2\pi \int_0^{\pi} (\pi a - at + a\sin t)\left(2a\sin\frac{t}{2}\right) dt \\ &= 2\pi\, a \int_0^{\pi} \left[\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \overbrace{t\,\sin\left(\frac{t}{2}\right)}^{\text{παραγοντική}} + \overbrace{\sin t}^{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right] dt \\ &= 2\pi\, a \left[-2\pi\,\cos\frac{t}{2} - \left(-2t\,\cos\frac{t}{2} + 4\,\sin\frac{t}{2}\right) + \left(\sin\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\,\sin\frac{3t}{2}\right)\right]_0^{\pi} \\ &= 8\pi\left(\pi - \frac{4}{3}\right) a^2 \approx 7.233\,037\, a^2 \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 11.6.2 - 2

Έστω η περιφέρεια με παραμετρική εξίσωση

$$x = a\,\cos t \quad \text{και} \quad y = a\,\sin t, \quad \text{όταν} \quad t \in [0, 2\pi]. \qquad (11.6.2\text{ - }6)$$

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που σχηματίζεται, όταν η περιφέρεια περιστραφεί γύρω από

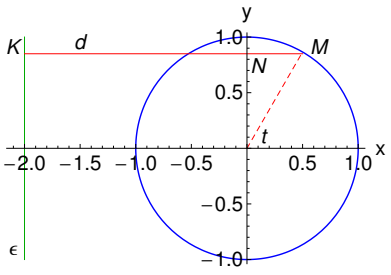
i) την ευθεία $x = -b$, όταν $b > a$, και

ii) τον x-άξονα.

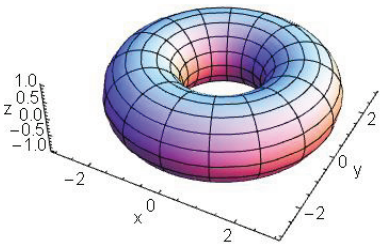
Λύση.

i) **Περιστροφή γύρω από την ευθεία** $x = -b$
Η απόσταση $d = \delta(t)$, όταν t η πολική γωνία τυχόντος σημείου $M(x, y)$ της περιφέρειας του κύκλου, από τον άξονα περιστροφής $x = -b$ σύμφωνα με το Σχ. 11.6.2 - 3(i) ισούται με

$$d = \delta(t) = |KM| = |KN| + |MN| = b + a\,\cos t. \qquad (11.6.2\text{ - }7)$$



(a)



(b)

Σχήμα 11.6.2 - 3: (a) Η περιφέρεια ακτίνας $a = 1$ και ο άξονας περιστροφής $x = -2$ πράσινη ευθεία και (b) η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής.

Εφαρμόζοντας τον τύπο $(11.6.2-1)$ με

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = -a\,\sin t \quad \text{και} \quad \frac{d\,y(t)}{d\,t} = a\,\cos\,t,$$

οπότε

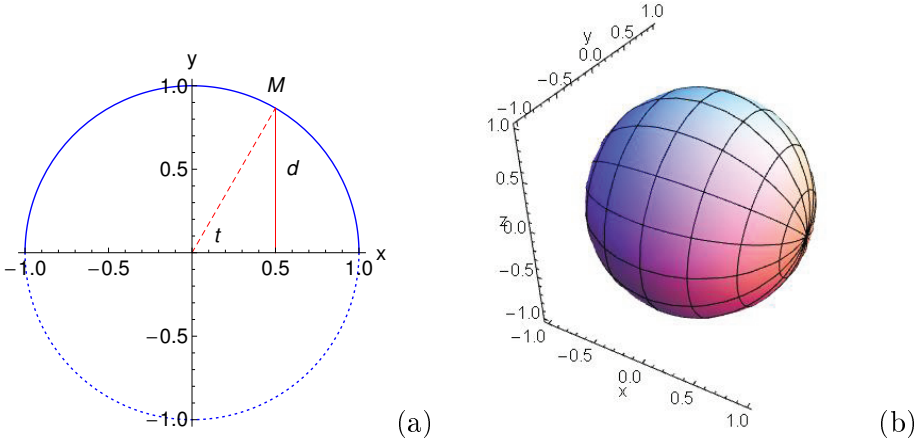
$$\sqrt{\left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2} = \sqrt{(-a\,\sin t)^2 + (a\,\cos t)^2} = a, \tag{11.6.2 - 8}$$

σύμφωνα και με την $(11.6.2-7)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} E &= 2\,\pi \int_0^{2\,\pi} \delta(t) \sqrt{\left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2}\, d\,t \\ &= 2\,\pi \int_0^{2\,\pi} \delta(t)\, a\, d\,t = 2\,\pi\, a \int_0^{2\,\pi} (b + a\cos t)\, d\,t \\ &= 2\,\pi\, a\,(bt + a\sin t)\,|_0^{2\,\pi} = 4ab\pi^2. \end{aligned}$$

ii) **Περιστροφή γύρω από τον** x-άξονα

Σύμφωνα με το Σχ. 11.6.2 - 4(i) λόγω συμμετρίας αρκεί να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή του άνω μέρους ($t \in [0, \pi]$) της περιφέρειας με παραμετρική εξίσωση την $(11.6.2-7)$ γύρω από τον x-άξονα.



Σχήμα 11.6.2 - 4: (a) Η περιφέρεια ακτίνας $a = 1$ και ο άξονας περιστροφής $x = -2$ πράσινη ευθεία και (b) η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής.

Τότε η απόσταση $d = \delta(t)$ τυχόντος σημείου $M(x, y)$ από τον άξονα περιστροφής $y = 0$ ισούται με

$$d = \delta(t) = y = a\,\sin t, \qquad (11.6.2\text{ - }9)$$

οπότε από τους τύπους $(11.6.2-1)$ και $(11.6.2-8)$, όταν λόγω του άνω μέρους της περιφέρειας είναι $t \in [0, \pi]$), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} E &= 2\,\pi \int_0^{\pi} \delta(t) \sqrt{\left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2}\; d\,t \\ &= 2\,\pi \int_0^{\pi} \delta(t)\, a\, d\,t = 2\,\pi\, a^2 \int_0^{\pi} \sin t\, d\,t \\ &= 2\,\pi\,\alpha^2\,(-\cos t)\,\big|_0^{\pi} = 4\pi\alpha^2. \end{aligned}$$

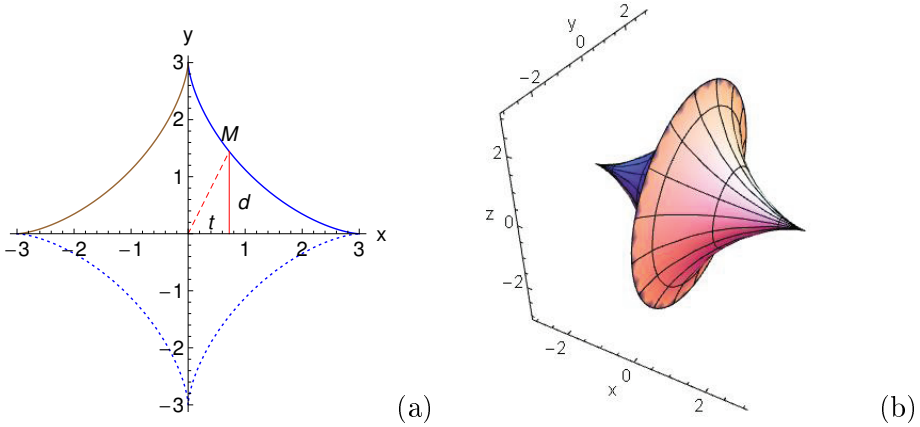
■

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που σχηματίζεται από περιστροφή γύρω από τον x-άξονα της **αστεροειδούς** καμπύλης (Σχ. 11.6.2 - 5) με παραμετρική εξίσωση

$$x = a\cos^3 t \quad \text{και} \quad y = a\sin^3 t, \quad \text{όταν} \quad a > 0.$$

2. Όμοια της επιφάνειας που σχηματίζεται από περιστροφή γύρω από τον



(a) (b)

Σχήμα 11.6.2 - 5: Άσκηση 1 Παραγράφου 11.6.2: (a) Η αστεροειδής, όταν $a = 3$, $t \in [0, \pi/2]$ μπλε, $t \in [\pi/2, \pi]$ καφέ και $t \in [\pi, 2\pi]$ διακεκομμένη μπλε καμπύλη. (b) Η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής.

x-άξονα της **καρδιοειδούς** καμπύλης (Σχ. 11.6.2 - 6) με παραμετρική εξίσωση

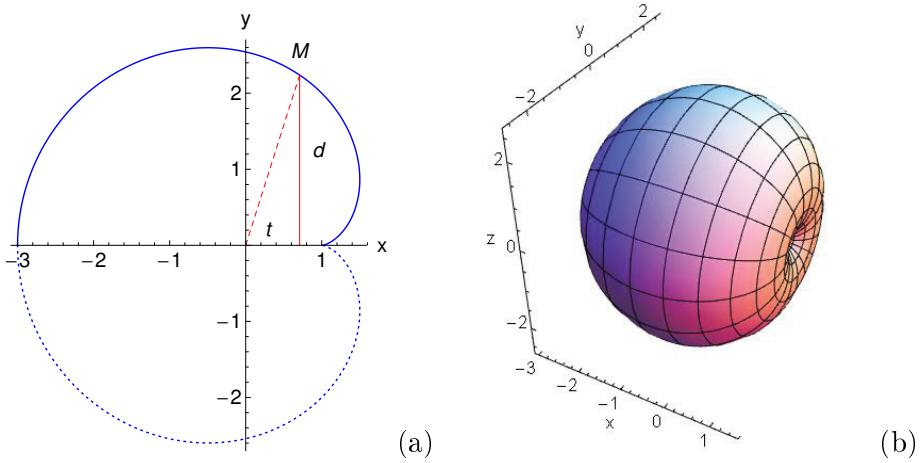
$$x = a(2\cos t - \cos 2t) \quad \text{και} \quad y = a(2\sin t - \sin 2t).$$

3. Να υπολογιστεί **προσεγγιστικά**[19] η επιφάνεια που σχηματίζεται εκ περιστροφής της έλλειψης

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

γύρω από τον (i) x-άξονα (Σχ. 11.6.2 - 7), (ii) y-άξονα (Σχ. 11.6.2 - 8).

[19] Βλέπε Σημείωση 11.6.2 - 1.



Σχήμα 11.6.2 - 6: Άσκηση 2 Παραγράφου 11.6.2: (a) Η καρδιοειδής, όταν $t \in [0, \pi]$ μπλε και $t \in [\pi, 2\pi]$ διακεκομμένη μπλε καμπύλη. (b) Η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής.

Σημείωση 11.6.2 - 1

Σε πολλές περιπτώσεις η ολοκλήρωση του τύπου $(11.6.2-1)$ λόγω του ριζικού είναι αδύνατη ή πολύπλοκη. Στις περιπτώσεις αυτές ο υπολογισμός γίνεται προσεγγιστικά και ειδικότερα στην περίπτωση αυτή με το 2ου βαθμού πολυώνυμο του Maclaurin. Για άλλες προσεγγίσεις ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

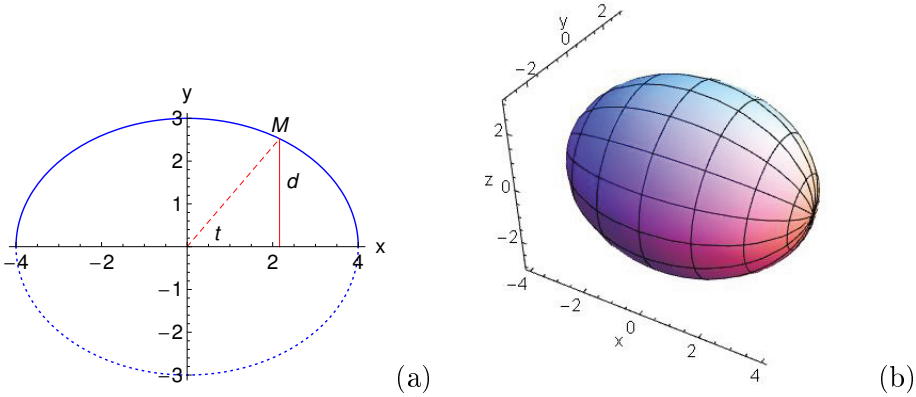
Απαντήσεις

1. Προφανώς $\delta(t) = a \sin^3 t$. Λόγω συμμετρίας αρκεί να υπολογιστεί η επιφάνεια που δημιουργείται, όταν $t \in [0, \pi]$. Είναι

$$\sqrt{\left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2} = \frac{3}{2}\,a\,\sin 2t.$$

Επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση στον τύπο $(11.6.2-1)$ είναι περιττή, έχουμε

$$E = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{3}{2}\,a^2\,\sin^3 t\,\sin 2t\,d\,t = \frac{3}{5}\,a^2 \sin^5 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{12\pi a^2}{5}\,.$$



Σχήμα 11.6.2 - 7: Άσκηση 3 *i*) Παραγράφου 11.6.2: (a) Η έλλειψη, όταν $a = 4$, $b = 3$, $t \in [0, \pi]$ μπλε και $t \in [\pi, 2\pi]$ διακεκομμένη μπλε καμπύλη. (b) Η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής.

2. Είναι $\delta(t) = 2\sin t - \sin 2t$. Όμοια λόγω συμμετρίας αρκεί να υπολογιστεί η επιφάνεια που δημιουργείται, όταν $t \in [0, \pi]$. Είναι

$$\sqrt{\left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2} = 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}.$$

Σύμφωνα με τους τύπους $(11.6.2-1)$ και $(11.6.2-5)$ έχουμε

$$E = 2\pi \int_0^{\pi} (2\sin t - \sin 2t)\left(2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\right)\, d\,t = \frac{128\pi}{5}\,.$$

3. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 11.6.2 - 1 είναι:

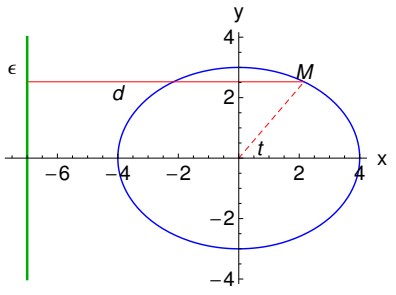
$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{\left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2} = \sqrt{b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} \\ &\approx b + \frac{\left(a^2-b^2\right)t^2}{2b}\,. \end{aligned}$$

i) Είναι $\delta(t) = b\sin t$, οπότε

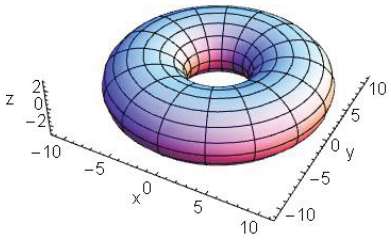
$$E \approx 2\pi \int_0^{\pi} \delta(t) f(t)\, d\,t = \frac{1}{2}\left(7\pi^2 + 8\right).$$

ii) Είναι $\delta(t) = c + a\cos t$, οπότε όμοια

$$E \approx 2\pi \int_0^{2\pi} \delta(t) f(t)\, d\,t = \frac{2}{9}\,\pi\left(98\pi^2 + 273\right).$$



(a)



(b)

Σχήμα 11.6.2 - 8: Άσκηση $3ii$) Παραγράφου 11.6.2: (a) Η έλλειψη, όταν $a=4$, $b=3$, $t\in[0,2\pi]$ μπλε καμπύλη και ο άξονας περιστροφής $x=-7$ πράσινη ευθεία. (b) Η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής.

11.7 Μήκος τόξου καμπύλης

Όμοια ανάλογα με τις συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της εξίσωσης της καμπύλης διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

11.7.1 Ορθογώνιες συντεταγμένες

Η εξίσωση της καμπύλης είναι της μορφής $y=f(x)$

Στην περίπτωση αυτή το μήκος της υπολογίζεται ως εξής:

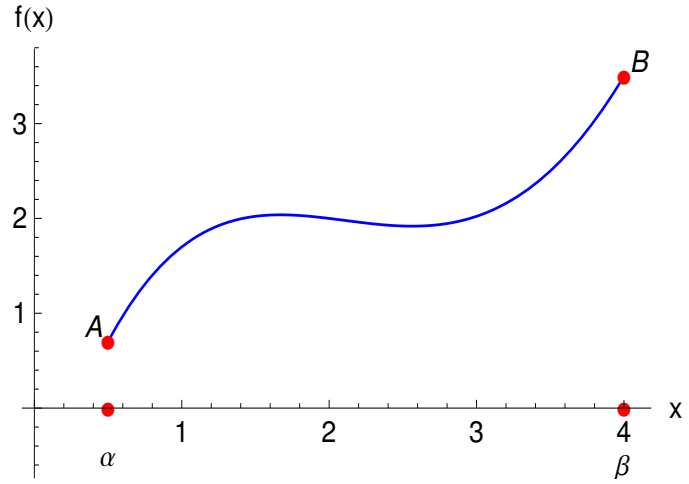
Ορισμός 11.7.1 - 1 (μήκος καμπύλης). *Έστω ότι η συνάρτηση* $f(x)\,|\,[\alpha,\beta]$ *είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για κάθε* $x\in[\alpha,\beta]$. *Τότε το μήκος* L *της καμπύλης που ορίζει η* $y=f(x)$ *από το σημείο* $A(\alpha,f(\alpha))$ *έως και το σημείο* $B(\beta,f(\beta))$ *(Σχ. 11.7.1 - 1) δίνεται από τον τύπο*

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2}\,dx. \qquad (11.7.1\text{ - }1)$$

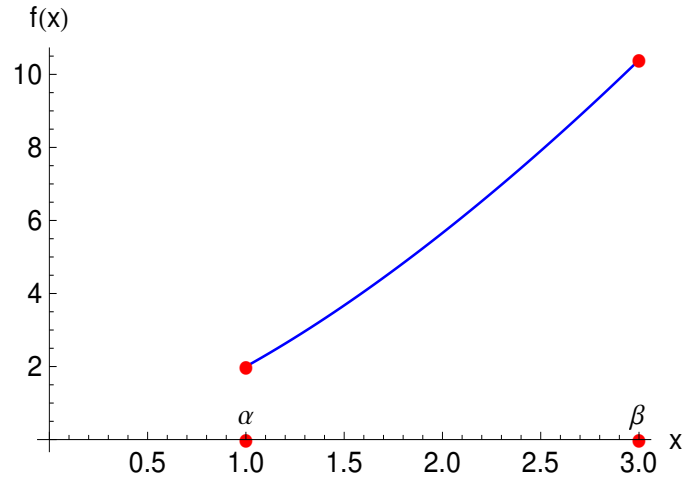
Παράδειγμα 11.7.1 - 1

Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης (Σχ. 11.7.1 - 2)

$$y=f(x)=2\,x^{3/2},\quad \text{όταν}\quad x\in[1,3].$$



Σχήμα 11.7.1 - 1: Το τόξο AB της καμπύλης $y = f(x)$.



Σχήμα 11.7.1 - 2: Η καμπύλη $y = 2\,x^{3/2}$, όταν $x \in [1, 3]$.

Λύση. Εφαρμόζοντας τον τύπο $(11.7.1-1)$ όπου

$$f'(x) = 2\,\frac{3}{2}\,x^{\frac{3}{2}-1} = 3\,x^{1/2}$$

έχουμε $\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{1+9x}$.

Άρα

$$\begin{aligned} L &= \int_1^3 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_1^3 \sqrt{1+9x}\,dx = \int_1^3 (1+9x)^{1/2}\,dx \\ &= \frac{1}{9}\int_1^3 (1+9x)'(1+9x)^{1/2}\,dx = \frac{1}{9}\,\frac{(1+9x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^3 \\ &= \frac{4}{27}\left(28\sqrt{7}-5\sqrt{10}\right) \approx 8.632541. \end{aligned}$$

Ο υπολογισμός του μήκους της καμπύλης με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές

Πρόγραμμα 11.7.1 - 1 (μήκος καμπύλης - ορθογώνιες συντεταγμένες)

```
f[x_] := 2 x^(3/2)
length1 = Simplify[1 + D[f[x], x]^2, x > 0];
Print["Integrable function : ", length1]
z = Integrate[Sqrt[length1], {x, 1, 3}];
Print["Length = ", z " = ", N[z]]
```

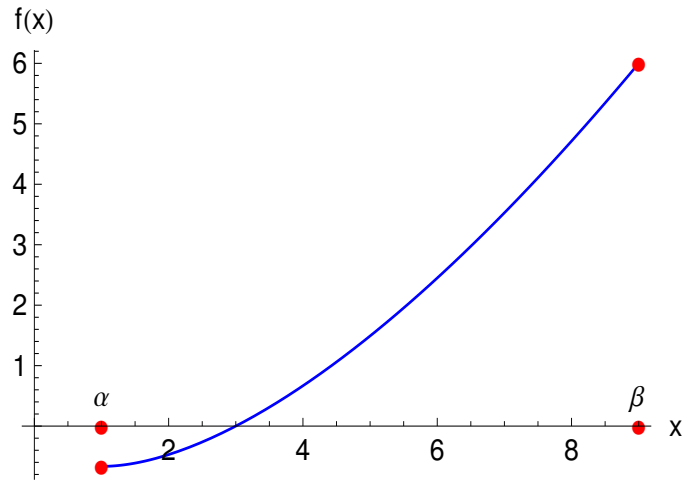
■

Παράδειγμα 11.7.1 - 2

Όμοια το μήκος της καμπύλης (Σχ. 11.7.1 - 3)

$$y = f(x) = \frac{1}{3}\,\sqrt{x}\,(x-3), \quad \text{όταν} \quad x \in [1,9].$$

Λύση. Όμοια εφαρμόζεται ο τύπος $(11.7.1-1)$ όπου η $f'(x)$ υπολογίζεται



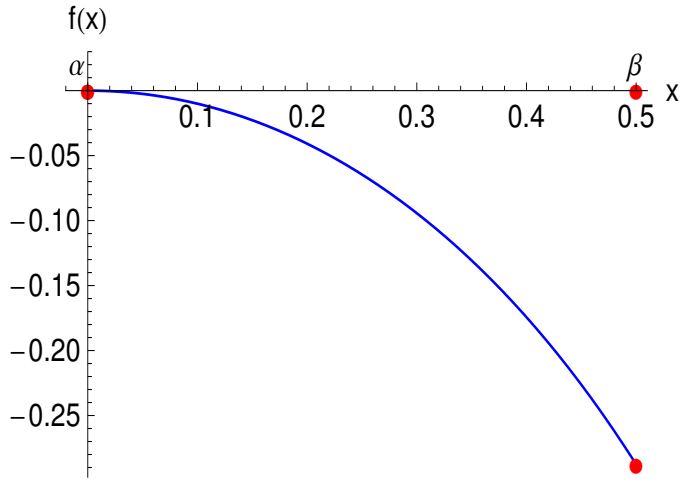
Σχήμα 11.7.1 - 3: Η καμπύλη $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}\,(x-3)$, όταν $x \in [1,9]$.

ως εξής:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}\left[x^{1/2}(x-3)\right]' = \frac{1}{3}\left[\left(x^{1/2}\right)'(x-3) + x^{1/2}(x-3)'\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1}(x-3) + x^{1/2}\right] \\ &= \frac{1}{6}\,x^{-1/2}(x-3) + \frac{1}{3}\,x^{1/2} = \frac{x-1}{2\sqrt{x}}\,. \end{aligned}$$

Τότε

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{(x-1)^2}{4x}} = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,.$$



Σχήμα 11.7.1 - 4: Η καμπύλη $y = \ln\left(1 - x^2\right)$, όταν $x \in [0, 0.5]$.

Άρα

$$L = \int_1^9 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_1^9 \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\, dx = \int_1^9 \frac{x}{2\sqrt{x}}\, dx + \int_1^9 \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$$

$$= \int_1^9 \frac{\sqrt{x}}{2}\, dx + \int_1^9 \frac{1}{2}\, x^{-1/2}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^9 x^{1/2}\, dx + \frac{1}{2}\int_1^9 x^{-1/2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^9 + \frac{1}{2}\,\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^9 = \frac{1}{3}x^{3/2}\Big|_1^9 + x^{1/2}\Big|_1^9 = 9 + 3 - \frac{1}{3} - 1 = \frac{32}{3}.$$

■

Παράδειγμα 11.7.1 - 3

Όμοια το μήκος της καμπύλης (Σχ. 11.7.1 - 4)

$$y = f(x) = \ln\left(1 - x^2\right), \quad \text{όταν} \quad x \in [0, 0.5].$$

Λύση. Επειδή η συνάρτηση y είναι λογαριθμική, για να ορίζεται πρέπει

$$1 - x^2 > 0, \quad \text{δηλαδή} \quad (1+x)(1-x) > 0 \quad \text{και τελικά} \quad -1 < x < 1.$$

Επειδή το διάστημα $[0, 0.5]$ ανήκει στο πεδίο ορισμού $(-1, 1)$, το πρόβλημα ορίζεται.

Αρχικά υπολογίζουμε την παράγωγο της $f(x)$ ως εξής:

$$f'(x) = \frac{\left(1-x^2\right)'}{1-x^2} = \frac{-2x}{1-x^2}\,,$$

οπότε σύμφωνα με τον τύπο $(11.7.1-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\left(1-x^2\right)^2+4x^2}{\left(1-x^2\right)^2}}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^2}}{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx \qquad (11.7.1\text{ - }2) \end{aligned}$$

Είναι ήδη γνωστό[20] ότι, όταν έχουμε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης όπου ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον βαθμό του παρονομαστή, αρχικά γίνεται η διαίρεση. Στην περίπτωση όμως του παραπάνω ολοκληρώματος, επειδή ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι του ίδιου βαθμού, για ευκολία τροποποιείται κατάλληλα ο αριθμητής ώστε να δημιουργηθεί ο παρονομαστής, δηλαδή

$$\begin{aligned} \frac{1+x^2}{1-x^2} &= \frac{-1+1+1+x^2}{1-x^2} = \frac{-\left(1-x^2\right)+2}{1-x^2} \\ &= \frac{-\left(1-x^2\right)}{1-x^2} + \frac{2}{1-x^2} = -1 + \frac{2}{1-x^2}\,. \end{aligned}$$

[20] Βλέπε Μάθημα *Αόριστο Ολοκλήρωμα - Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων.*

Επομένως σύμφωνα με την $(11.7.1-2)$ είναι

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (-1)\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-x^2}\,dx = -x\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-x^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{2} + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-x^2}\,dx. \qquad (11.7.1\text{ - }3) \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους είναι η περίπτωση ολοκλήρωσης ρητής συνάρτησης όπου ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή και υπολογίζεται αναλύοντας τη ρητή συνάρτηση σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}\,,$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $(1-x)(1+x)$ προκύπτει

$$1 = A(1+x) + B(1-x), \quad \text{δηλαδή} \quad (A-B)x + A + B = 1$$

που για να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει

$$\begin{array}{rcrcl} A & - & B & = & 0 \\ A & + & B & = & 1, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad A = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad B = \frac{1}{2}\,.$$

Τότε σύμφωνα και με την $(11.7.1-3)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
L &= -\frac{1}{2}+2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2}+2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}\right)dx \\
&= -\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1+x} \\
&= -\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{-(1-x)'dx}{1-x}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(1+x)'dx}{1+x} \\
&= -\frac{1}{2}-\ln|1-x|\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\ln|1+x|\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}-\left[\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)-\ln 1\right]+\left[\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)-\ln 1\right] \\
&= -\frac{1}{2}-\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}-(-\ln 2)+\ln 3-\ln 2 \\
&= -\frac{1}{2}+\ln 3 \approx 0.598\,612\,3.
\end{aligned}$$

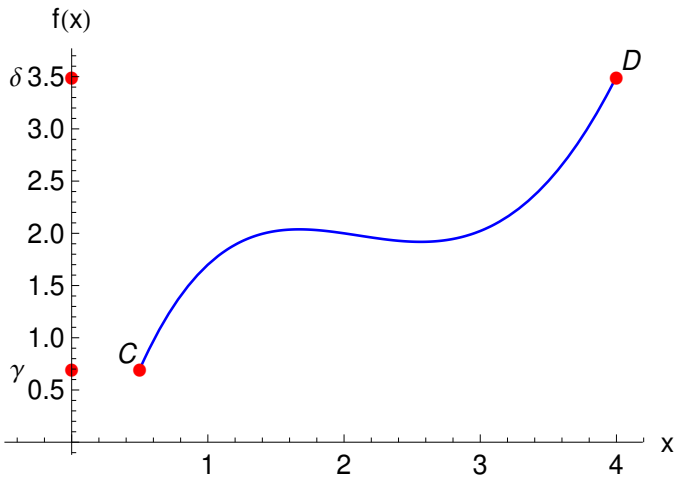
■

Η εξίσωση της καμπύλης είναι της μορφής $x=f(y)$

Τότε το μήκος υπολογίζεται ως εξής:

Ορισμός 11.7.1 - 2 (μήκος καμπύλης). *Έστω ότι η συνάρτηση* $f(y)\,|\,[\gamma,\delta]$ *είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για κάθε* $y\in[\gamma,\delta]$. *Τότε το μήκος* L *της καμπύλης που ορίζει η* $x=f(y)$ *από το σημείο* $C(\gamma,f(\gamma))$ *έως και το σημείο* $D(\delta,f(\delta))$ *(Σχ. 11.7.3 - 3) δίνεται από τον τύπο*

$$L=\int_\gamma^\delta\sqrt{1+[f'(y)]^2}\,dy=\int_\gamma^\delta\sqrt{1+\left[\frac{df(y)}{dy}\right]^2}\,dy. \qquad (11.7.1-4)$$



Σχήμα 11.7.1 - 5: Το τόξο CD της καμπύλης $y = f(x)$.

Παράδειγμα 11.7.1 - 4

Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης (Σχ. 11.7.1 - 6)

$$x = f(y) = \frac{1}{2}\,y^2, \quad \text{όταν} \quad y \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

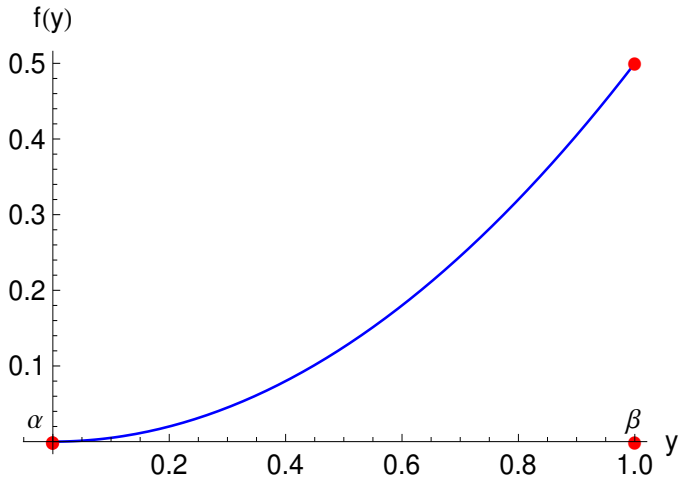
Λύση. Εφαρμόζοντας τον τύπο $(11.7.1 - 4)$ όπου

$$f'(y) = \frac{1}{2}\,2y = y$$

έχουμε $\sqrt{1 + [f'(y)]^2} = \sqrt{1 + y^2}$.

Άρα

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + y^2}\, dy. \qquad (11.7.1 - 5)$$



Σχήμα 11.7.1 - 6: Η καμπύλη $x = \frac{1}{2}\,y^2$, όταν $y \in [0,1]$.

Υπολογισμός του ολοκληρώματος $I = \int \sqrt{1+x^2}\,dx$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{1+x^2}\,dx = x\sqrt{1+x^2} - \int x\left(\sqrt{1+x^2}\right)'\,dx \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int x\left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]'\,dx \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int x\left[\frac{1}{2}\,\frac{2x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]dx \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{\overbrace{x^2}^{x^2+1-1}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\ &= x\sqrt{1+x^2} - I + \int dx\sqrt{1+x^2}\,, \end{aligned}$$

οπότε

$$2I = x\sqrt{1+x^2} + \int dx\sqrt{1+x^2} = x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1}x$$

και τελικά

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1} x\right). \qquad (11.7.1\text{ - }6)$$

Σύμφωνα με την $(11.7.1-6)$ τότε προκύπτει ότι το μήκος της καμπύλης στην $(11.7.1-5)$ είναι

$$L = \frac{1}{2}\left(y\sqrt{1+y^2} + \sinh^1 y\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sinh^{-1} 1\right) \approx 1.147\,794.$$

■

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το μήκος του τόξου της:

i) ημικυβικής παραβολής $y^2 = x^3$ από την αρχή των συντεταγμένων μέχρι το σημείο $x = 4$,

ii) παραβολής $y = 2x^{1/2}$ από το σημείο $x = 0$ μέχρι το $x = 1$,

iii) καμπύλης $y = \ln x$ από το σημείο $x = \sqrt{3}$ μέχρι το $x = \sqrt{2}$,

iv) καμπύλης $x = -\ln\cos y$, όταν $y \in [0, \pi/3]$,

v) καμπύλης $x = y^2/4 - (\ln y)/2$ από το σημείο $y = 1$ μέχρι το $y = e$.

2. Όμοια το μήκος του κλειστού τμήματος της καμπύλης

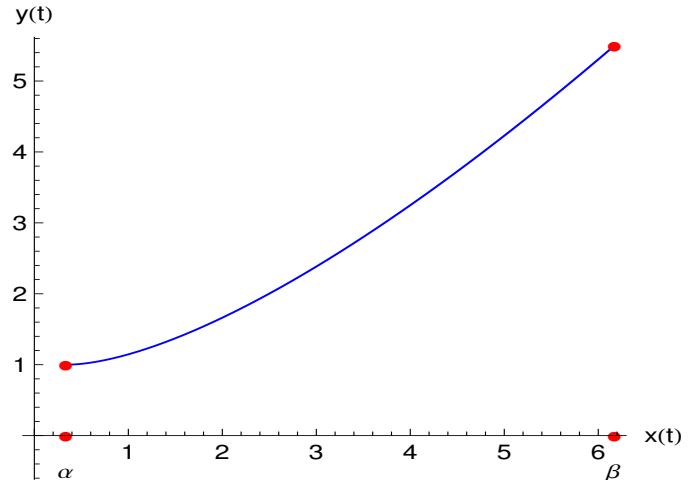
$$9ay^2 = x(x-3a)^2 \quad \text{με} \quad a > 0.$$

11.7.2 Παραμετρική εξίσωση

Όταν η εξίσωση της καμπύλης ορίζεται παραμετρικά, το μήκος της υπολογίζεται ως εξής:

Ορισμός 11.7.2 - 1 (μήκος καμπύλης παραμετρική εξίσωση). *Έστω ότι η εξίσωση της καμπύλης έχει την παραμετρική μορφή*

$$y = y(t) \quad \textit{και} \quad x = x(t) \quad \textit{για κάθε} \quad t \in [t_0, t_1]\,.$$



Σχήμα 11.7.2 - 1: Παράδειγμα 11.7.2 - 1: η καμπύλη με παραμετρική εξίσωση $x = x(t) = \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2}$, $y = y(t) = \frac{t^2}{2} + 1$, όταν $t \in [0,3]$ ($\alpha = x(0), \quad \beta = x(3)$).

Τότε το μήκος L της καμπύλης στο διάστημα $[t_0, t_1]$ δίνεται από τον τύπο

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2}\, d\,t. \qquad (11.7.2 - 1)$$

Παράδειγμα 11.7.2 - 1

Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης (Σχ. 11.7.2 - 1) με παραμετρική εξίσωση

$$x = x(t) = \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2}, \quad y = y(t) = \frac{t^2}{2} + 1, \quad \text{όταν} \quad t \in [0,3].$$

Λύση. Αρχικά είναι

$$\begin{aligned} \frac{d\,x(t)}{d\,t} &= \frac{1}{3}\frac{3}{2}(2t+1)^{\frac{3}{2}-1}(2t+1)' = \frac{1}{2}(2t+1)^{1/2}\cdot 2 = (2t+1)^{1/2} \\ \frac{d\,y(t)}{d\,t} &= t. \end{aligned}$$

Επειδή είναι $t_0 = 0$ και $t_1 = 3$, εφαρμόζοντας τον τύπο $(11.7.2-1)$ έχουμε

$$\sqrt{\left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2} = \sqrt{(2t+1)+t^2} = \sqrt{(t+1)^2} = t+1.$$

Άρα σύμφωνα με την $(11.7.2-1)$ είναι

$$L = \int_0^3 (t+1)\,d\,t = \frac{t^2}{2} + t\Big|_0^3 = \frac{9}{2} + 3 = \frac{15}{2}\,.$$

Ο υπολογισμός του μήκους της καμπύλης με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές

Πρόγραμμα 11.7.2 - 1 (μήκος καμπύλης παραμετρική εξίσωση)

```
x[t_] := ((2 t + 1)^(3/2))/3
y[t_] := t^2/2 + 1
length1 = Simplify[Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2], t > 0];
Print["Integrable function : ", length1]
Print["Length = ", Integrate[length1, {t, 0, 3}]]
```

■

Άσκηση

Αν $a > 0$, να υπολογιστεί το μήκος του τόξου της καμπύλης με εξίσωση

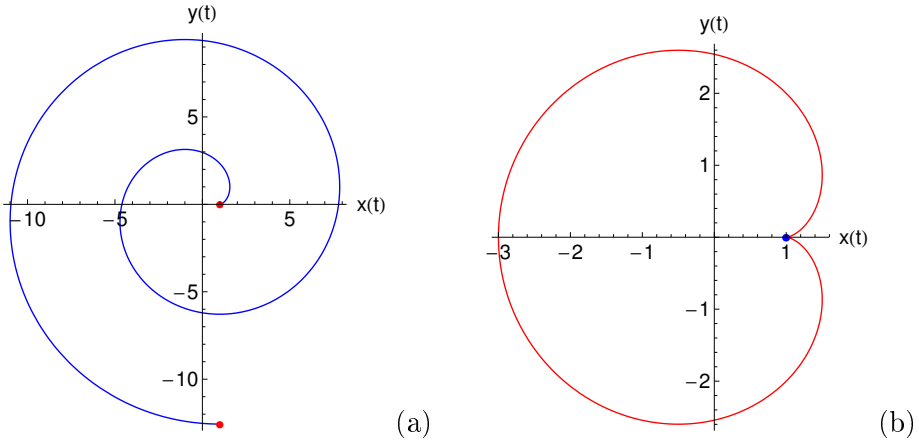
i) $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, όταν $t \in [0, 4\pi]$ (Σχ. 11.7.3 - 3a),

ii) $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$, όταν $t \in [0, 2\pi]$ (Σχ. 11.7.3 - 3b).

Απαντήσεις

i) Ολοκληρωτέα συνάρτηση σχέσης $(11.7.2-1)$: at, μήκος $L = 8\pi^2 a$,

ii) Όμοια: $2a\sqrt{2-2\cos t}$ όπου $2a\int\sqrt{2-2\cos t}\,d\,t = -4a\sqrt{2-2\cos t}\,\cot\frac{t}{2}$, μήκος $L = 16a$.



Σχήμα 11.7.2 - 2: Άσκηση Παραγράφου 11.7.2, όταν $a = 1$: (a) $x = \cos t + t \sin t, \quad y = \sin t - t \cos t, \quad$ όταν $\quad t \in [0, 4\pi]$. (b) $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t, \quad$ όταν $\quad t \in [0, 2\pi]$ (κλειστή καμπύλη).

11.7.3 Πολικές συντεταγμένες

Όταν η εξίσωση της καμπύλης ορίζεται σε πολικές συντεταγμένες, το μήκος της υπολογίζεται ως εξής:

Ορισμός 11.7.3 - 1 (μήκος καμπύλης πολικές συντεταγμένες). *Έστω ότι η εξίσωση της καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες είναι της μορφής*

$$r = r(\theta), \quad \text{όταν} \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2],$$

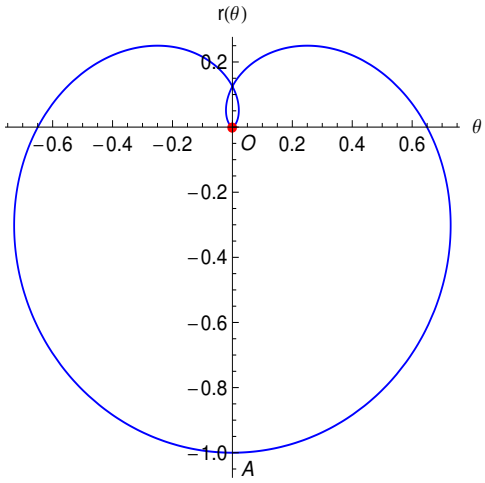
όπου θ_1 και θ_2 είναι οι τιμές της πολικής γωνίας στα άκρα σημεία του τόξου της καμπύλης. Τότε το μήκος L της καμπύλης στο τόξο $[\theta_1, \theta_2]$ δίνεται από τον τύπο

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta. \qquad (11.7.3 - 1)$$

Παράδειγμα 11.7.3 - 1

Ζητείται το μήκος της καμπύλης με εξίσωση (Σχ. 11.7.3 - 1)

$$r = a \sin^3 \frac{\theta}{3}, \quad \text{όταν} \quad \theta \in [0, 3\pi].$$



Σχήμα 11.7.3 - 1: Παράδειγμα 11.7.3 - 1: το τόξο της κλειστής καμπύλης $r = a\sin^3\frac{\theta}{3}$, όταν $\theta \in [0, 3\pi]$ και $OA = a = 1$.

Λύση. Είναι

$$\frac{dr}{d\theta} = a\sin^2\frac{\theta}{3}\,\cos\frac{\theta}{3}\,,$$

οπότε σύμφωνα με τον τύπο $(11.7.3-1)$ το συνολικό μήκος του τόξου της καμπύλης είναι

$$L = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2\,\sin^6\frac{\theta}{3} + a^2\,\sin^4\frac{\theta}{3}\,\cos^2\frac{\theta}{3}}\,d\theta$$

$$= a\int_0^{3\pi} \sin^2\frac{\theta}{3}\,d\theta = \left[a\left(\frac{\theta}{2} - \frac{3}{4}\sin\frac{2\theta}{3}\right)\right]_0^{3\pi} = \frac{3a\pi}{2}\,.$$

Ο υπολογισμός του μήκους της καμπύλης και η γραφική παράσταση με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές

Πρόγραμμα 11.7.3 - 1 (μήκος καμπύλης με πολικές συντεταγμένες)

```
r[x_] := a (Sin[x/3])^3
length1 = Simplify[Sqrt[(r[x])^2 + (D[r[x], x])^2], {a > 0, x > 0}];
Print["Integrable function : ", length1]
```

```
Print["Length = ", Integrate[length1, {x, 0, 3 Pi}]]

r[x_] := a (Sin[x/3])^3
data2 = {{0, 0}};
f1 = PolarPlot[r[x], {x, 0, 3 Pi}, AxesOrigin -> {0, 0},
   BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 12},
   AxesLabel -> {"\[Theta]", "r(\[Theta])"},
   PlotStyle -> {Blue, Thickness[0.004]}];
f2 = ListPlot[data2, PlotStyle -> Red, PlotMarkers -> "\!\(\*
StyleBox[\"\[FilledCircle]\",\nFontSize->9]\)", Axes -> False];
f3 = Show[{Graphics[Text[O, {0.05, -0.05}]],
    Graphics[Text[A, {0.05, -1.05}]]}];
fgr = Show[f1, f2, f3]
```

■

Παράδειγμα 11.7.3 - 2

Όμοια το μήκος της **έλικας του Αρχιμήδη** (Archimedes' spiral) με εξίσωση (Σχ. 11.7.3 - 2)

$$r = a\theta, \quad \text{όταν} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Λύση. Είναι

$$\frac{dr}{d\theta} = a,$$

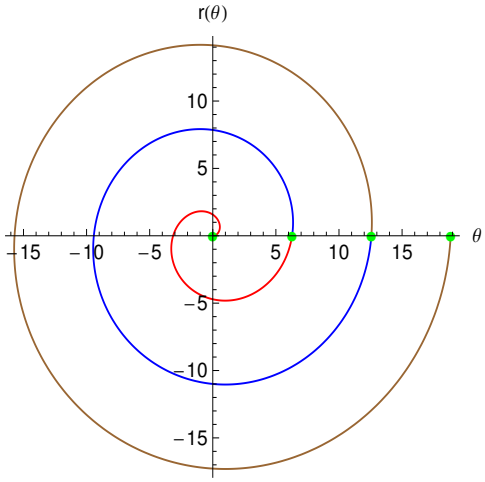
οπότε σύμφωνα με τον τύπο $(11.7.3 - 1)$ το συνολικό μήκος του τόξου της έλικας, όταν $\theta \in [0, 2\pi]$, είναι

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}\, d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\, a \left(2\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \sinh^{-1} 2\pi \right) \approx 21.256\,290\, a, \end{aligned}$$

επειδή είναι γνωστό από την $(11.7.1 - 6)$ ότι

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{1 + x^2} + \sinh^{-1} x \right).$$

■



Σχήμα 11.7.3 - 2: Παράδειγμα 11.7.3 - 2: η **έλικα του Αρχιμήδη**, όταν: $\theta \in [0, 2\pi]$ (1η περιστροφή κόκκινη καμπύλη), $\theta \in [2\pi, 4\pi]$ (2η μπλε καμπύλη), $\theta \in [4\pi, 6\pi]$ (3η καφέ καμπύλη) και $a = 1$.

Άσκηση

1. Να υπολογιστεί το συνολικό μήκος της **καρδιοειδούς καμπύλης**

$$r = a(1 + \cos\theta) \quad \text{με} \quad a > 0.$$

2. Όμοια το μήκος της **υπερβολικής σπειροειδούς** με εξίσωση

$$r\theta = 1, \quad \text{όταν} \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, 5\pi\right].$$

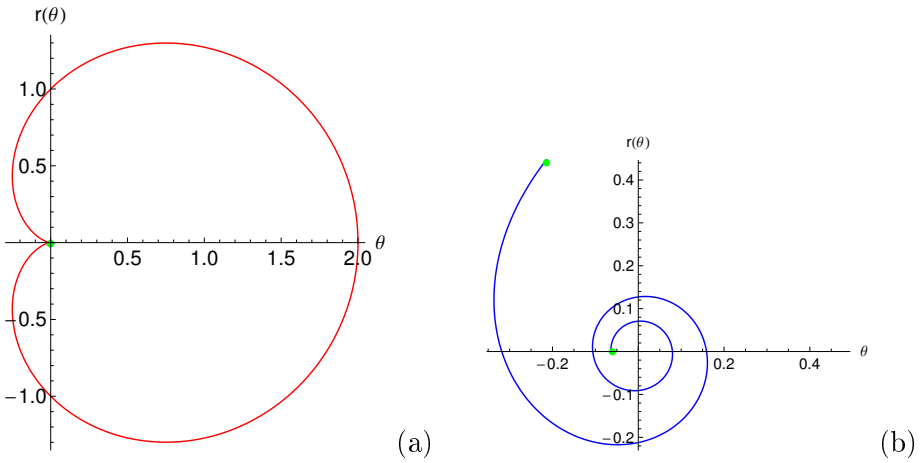
Απαντήσεις

i) Σύμφωνα με τη σχέση $(11.7.3 - 1)$ το μήκος L είναι

$$L = \sqrt{2}\,a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos\theta}\, d\theta = \sqrt{2}\,a \sqrt{1 + \cos\theta}\, \tan\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a,$$

ii) Όμοια εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση στο αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα με

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)' \sqrt{1+x^2}$$



Σχήμα 11.7.3 - 3: Άσκηση Παραγράφου 11.7.3, όταν: (a) (i) $\theta \in [0, 2\pi]$ και $a = 1$ **καρδιοειδής καμπύλη**, (b) (ii) $\theta \in [\pi/3, 5\pi]$ **υπερβολική σπειροειδής**.

τελικά έχουμε ότι

$$L = \int_{\pi/3}^{5\pi} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\, dx = \left[-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \sinh^{-1} x \right]_{\pi/3}^{5\pi} \approx 2.914\,657.$$

11.8 Όγκος στερεών από περιστροφή

21

11.8.1 Ορθογώνιες συντεταγμένες

Ορισμός 11.8.1 - 1. *Έστω ότι η συνάρτηση $f\,|\,[\alpha,\beta]$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. Τότε ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του καμπυλόγραμμου τραπεζίου που ορίζεται από το τόξο του διαγράμματος της $f(x)$, όταν $x \in [\alpha,\beta]$, τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ γύρω από τον*

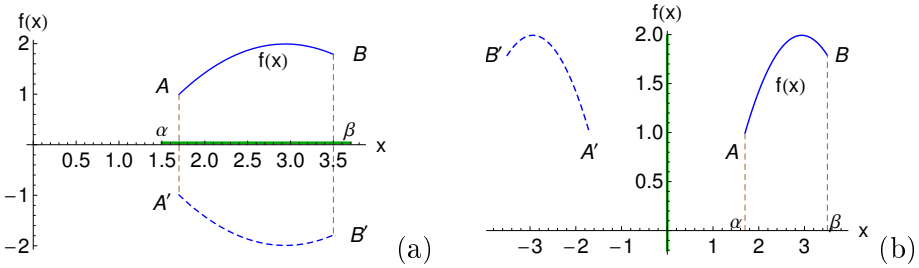
- *x-άξονα (Σχ. 11.8.1 - 1a), αντίστοιχα τον*
- *y-άξονα (Σχ. 11.8.1 - 1b)*

[21] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Solid_of_revolution*

δίνεται από τον τύπο

$$V_x = \pi \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)\,dx, \quad \textit{αντίστοιχα} \tag{11.8.1 - 1}$$

$$V_y = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x f(x)\,dx. \tag{11.8.1 - 2}$$



Σχήμα 11.8.1 - 1: Ορισμός 11.8.1 - 1: (a) ο x-άξονας περιστροφής και (b) ο y-άξονας.

Στην περίπτωση που το διάγραμμα της συνάρτησης εκφράζεται στη μορφή $x = g(y)$, ο Ορισμός 11.8.1 - 1 γράφεται ως εξής:

Ορισμός 11.8.1 - 2. *Έστω ότι η συνάρτηση $g|[\gamma, \delta]$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για κάθε $y \in [\gamma, \delta]$. Τότε ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του καμπυλόγραμμου τραπεζίου που ορίζεται από το τόξο του διαγράμματος της $g(y)$, όταν $y \in [\gamma, \delta]$, τις ευθείες $y = \gamma$ και $y = \delta$ γύρω από τον*

- *y-άξονα, αντίστοιχα τον*
- *x-άξονα (Σχ. 11.8.1 - 1b)*

δίνεται από τον τύπο

$$V_y = \pi \int_{\gamma}^{\delta} g^2(y)\, dy, \quad \textit{αντίστοιχα} \qquad (11.8.1 - 3)$$

$$V_x = 2\pi \int_{\gamma}^{\delta} y\, g(y)\, dy. \qquad (11.8.1 - 4)$$

Οι $(11.8.1-3)$, αντίστοιχα $(11.8.1-4)$ προκύπτουν στην περίπτωση αυτή από την $(11.8.1-1)$, αντίστοιχα $(11.8.1-2)$ με εναλλαγή των συντεταγμένων x και y.

Παράδειγμα 11.8.1 - 1

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται από περιστροφή της ημιτονοειδούς καμπύλης

$$y = \sin x, \quad \text{όταν} \quad 0 \le x \le \pi,$$

ως προς τον

i) x-άξονα (Σχ. 11.8.1 - 2),

ii) y-άξονα (Σχ. 11.8.1 - 3).

Λύση. Διαδοχικά έχουμε:

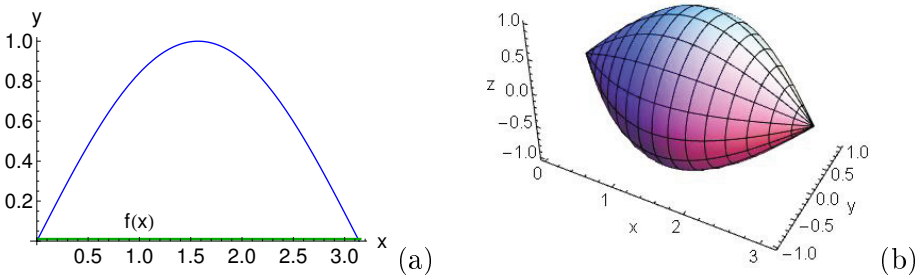
i) τύπος $(11.8.1-1)$

$$V_x = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \frac{\pi^2}{2}, \quad \text{και}$$

ii) τύπος $(11.8.1-2)$

$$V_y = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x\, dx = 2\pi\, [-x\cos x + \sin x\,]_0^{\pi} = 2\pi^2.$$

■



Σχήμα 11.8.1 - 2: Παράδειγμα 11.8.1 - 1: (a) η συνάρτηση $y = \sin x$, όταν $x \in [0, \pi]$ (μπλε συνεχής καμπύλη) και η συμμετρική της (μπλε διακεκομμένη) ως προς τον x-άξονα περιστροφής. (b) Το στερεό εκ περιστροφής.

Παράδειγμα 11.8.1 - 2

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται από περιστροφή της καμπύλης

$$y = 1 - \sqrt{x}, \quad \text{όταν} \quad 0 \le x \le 2,$$

ως προς τον

i) x-άξονα (Σχ. 11.8.1 - 4),

ii) y-άξονα (Σχ. 11.8.1 - 5).

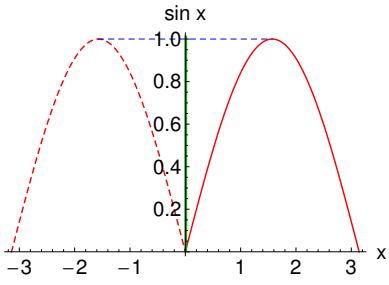
Λύση. Όμοια έχουμε:

i) τύπος $(11.8.1 - 1)$

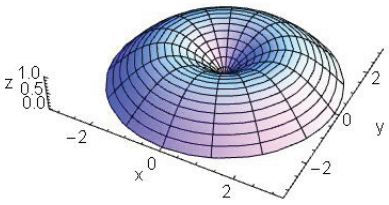
$$V_x = \pi \int_0^{\pi} \left(1 - \sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \left[x - \frac{4x^{3/2}}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 \approx 0.718\,683\,, \quad \text{και}$$

ii) τύπος $(11.8.1 - 2)$ με $xf(x) \le 0$, όταν $x \in [1, 2]$

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_0^1 x\left(1 - \sqrt{x}\right) dx - 2\pi \int_1^2 x\left(1 - \sqrt{x}\right) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^{5/2}}{5}\right]_0^1 - 2\pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^{5/2}}{5}\right]_1^2 \approx 2.907\,492. \end{aligned}$$



(a)



(b)

Σχήμα 11.8.1 - 3: Παράδειγμα 11.8.1 - 1: (a) η συνάρτηση $y = \sin x$, όταν $x \in [0, \pi]$ (κόκκινη συνεχής καμπύλη) και η συμμετρική της (κόκκινη διακεκομμένη) ως προς τον y-άξονα περιστροφής. (b) Το στερεό εκ περιστροφής.

■

Γενίκευση Ορισμού 11.8.1 - 1

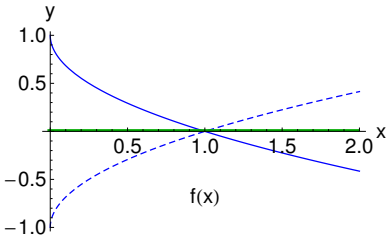
Ορισμός 11.8.1 - 3. *Έστω ότι οι συναρτήσεις $f, g\,|\,[\alpha,\beta\,]$ είναι παραγωγίσιμες με συνεχείς παραγώγους για κάθε $x \in [\alpha,\beta\,]$. Τότε ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του καμπυλόγραμμου τραπεζίου που ορίζεται από το τόξο του διαγράμματος της $f(x) - g(x)$, όταν $x \in [\alpha,\beta\,]$, τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ γύρω από τον*

- *x-άξονα (Σχ. 11.8.1 - 6), αντίστοιχα τον*
- *y-άξονα*

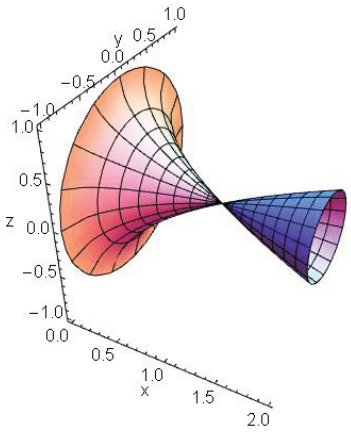
δίνεται από τον τύπο

$$V_x = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx, \quad \textit{αντίστοιχα} \qquad (11.8.1 - 5)$$

$$V_y = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x\,|f(x) - g(x)|\, dx. \qquad (11.8.1 - 6)$$



(a)



(b)

Σχήμα 11.8.1 - 4: Παράδειγμα 11.8.1 - 1: (a) η συνάρτηση $y = 1 - \sqrt{x}$, όταν $x \in [0, 2]$ (μπλε συνεχής καμπύλη) και η συμμετρική της (μπλε διακεκομμένη) ως προς τον x-άξονα περιστροφής. (b) Το στερεό εκ περιστροφής.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού, που σχηματίζεται

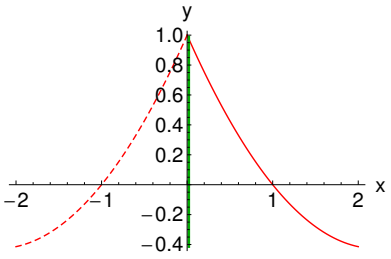
i) από περιστροφή γύρω από τον άξονα των x, της περιοχής που περιβάλλεται από τον άξονα των x και την παραβολή $y = ax - x^2$ με $a > 0$,

ii) από τον άξονα των x, της περιοχής που περιβάλλεται από την καμπύλη $y = a\cosh(x/a)$, τον άξονα x και τις ευθείες $x = \pm a$ με $a > 0$,

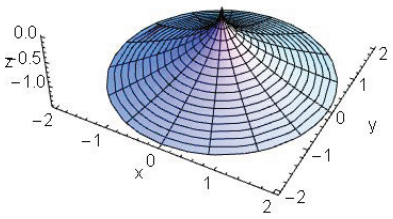
iii) από περιστροφή γύρω από τον άξονα των x, της περιοχής που περιβάλλεται από την ημικυβική παραβολή $y^2 = x^3$, τον άξονα των x και την ευθεία $x = 1$.

2. Να υπολογιστούν οι όγκοι των στερεών, που σχηματίζονται από περιστροφή της περιοχής, που περιβάλλεται από τις γραμμές $y = e^x$, $x = 0$ και $y = 0$ γύρω από τον άξονα των (i) x και (ii) y.

3. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής γύρω από την ευθεία $x = a$ και του τμήματος της παραβολής $y^2 = 4ax$ με $a > 0$, που τέμνεται από την παραπάνω ευθεία.



(a)



(b)

Σχήμα 11.8.1 - 5: Παράδειγμα 11.8.1 - 1: (a) η συνάρτηση $y = 1 - \sqrt{x}$, όταν $x \in [0,2]$ (κόκκινη συνεχής καμπύλη) και η συμμετρική της (κόκκινη διακεκομμένη) ως προς τον y-άξονα περιστροφής. (b) Το στερεό εκ περιστροφής.

4. Όμοια ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα των x και της περιοχής που περιέχεται μεταξύ των παραβολών $y = x^2$ και $y = \sqrt{x}$.

Απαντήσεις

1. i) $V_x = \pi \int_0^1 \left(x - x^2\right)^2 dx = \frac{\pi}{30}$. ii) Λόγω συμμετρίας $V_x = \pi \int_0^1 \cosh^2 x \, dx = \pi(1 + \sin 1 \cos 1)$. iii) Λόγω συμμετρίας $V_x = \pi \int_0^1 x^3 \, dx = \frac{\pi}{4}$.

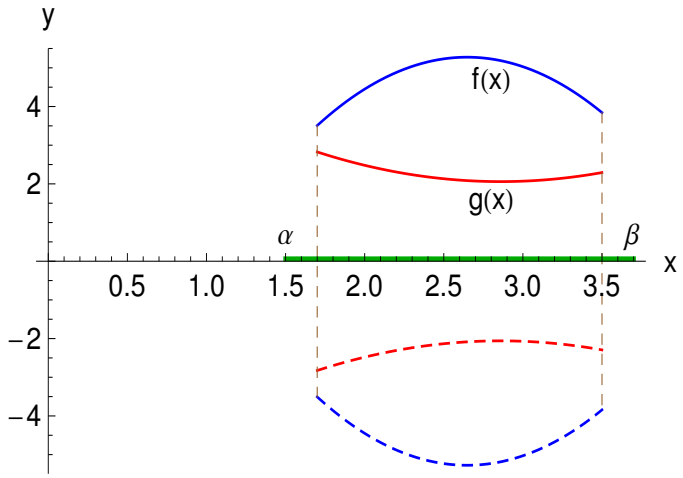
2. x-άξονας: $V_x = \pi \int_0^1 e^{2x} \, dx = \frac{\pi}{2}\left(e^2 - 1\right)$, y-άξονας: $V_y = 2\pi \int_0^1 x e^x \, dx = \pi$.
Ανάλογα οι Ασκήσεις **3**, **4**.

11.8.2 Παραμετρική εξίσωση

Ορισμός 11.8.2 - 1. *Έστω η συνάρτηση $f \,|\, [\alpha,\beta\,]$ με παραμετρική εξίσωση της μορφής*

$$x = x(t) \quad \textit{και} \quad y = y(t), \quad \textit{όταν} \quad t \in [t_0,t_1\,],$$

όπου $y(t) \geq 0$, ενώ οι $y(t)$ και $x'(t)$ είναι συνεχείς για κάθε $t \in [t_0,t_1]$. Τότε ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης γύρω από τον



Σχήμα 11.8.1 - 6: Ορισμός 11.8.1 - 3 με τον x-άξονας περιστροφής.

i) x-άξονα (Σχ. 11.8.2 - 1a) είναι

$$V_x = \pi \int_{t_0}^{t_1} y(t)\, \left|x'(t)\right| \, dt, \quad \text{και} \tag{11.8.2 - 1}$$

ii) y-άξονα (Σχ. 11.8.2 - 1b) είναι

$$V_y = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} x(t)\, y(t)\, \left|x'(t)\right| \, dt. \tag{11.8.2 - 2}$$

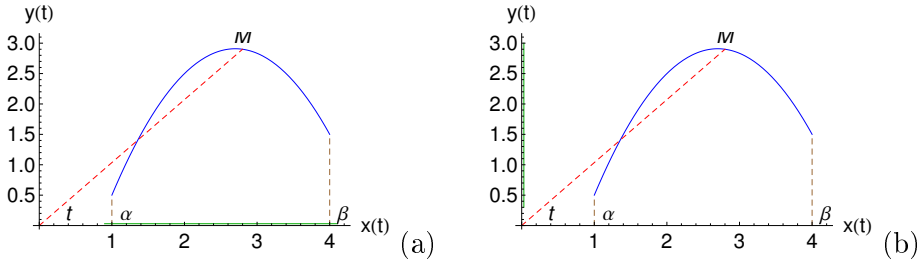
Παράδειγμα 11.8.2 - 1

Να υπολογιστεί ο όγκος που σχηματίζεται από περιστροφή της περιφέρειας με παραμετρική εξίσωση

$$x(t) = a + r\cos t \quad \text{και} \quad y(t) = b + r\sin t,$$

δηλαδή κέντρου $K(a,b)$ και ακτίνας r, γύρω από τον

i) x- άξονα, όταν $t \in [0,\pi]$ (Σχ. 11.8.2 - 2a), και



Σχήμα 11.8.2 - 1: Ορισμός 11.8.2 - 1: (a) περιστροφή γύρω από τον x-άξονα (πράσινη ευθεία) και (b) y-άξονα.

i) y- άξονα, όταν $t \in [0, 2\pi]$ (Σχ. 11.8.2 - 3a).

Λύση.

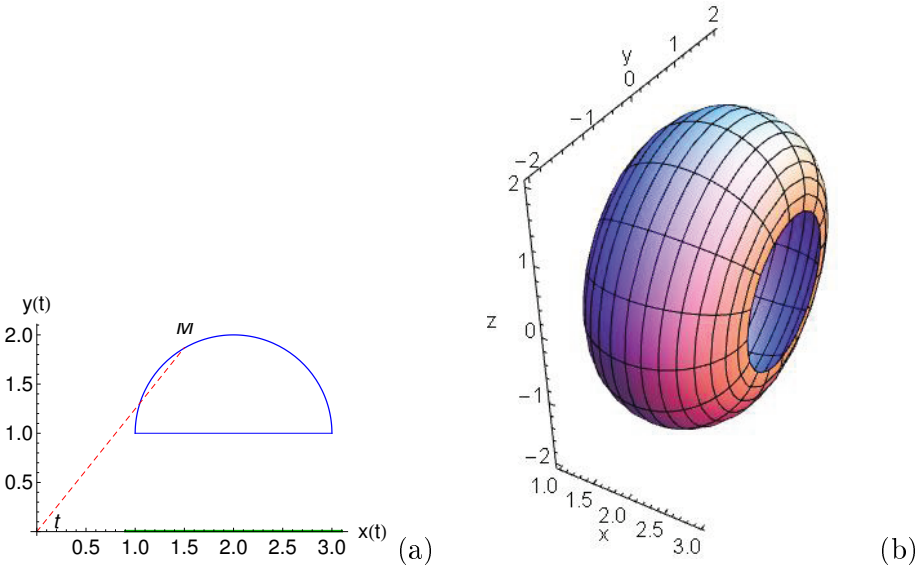
i) Σύμφωνα με τον τύπο $(11.8.2-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^{\pi} y(t)\ \left|x'(t)\right|\ dt = \pi r \int_0^{\pi} \sin t(b + r\sin t)\, d\theta \\ &= -\frac{\pi r}{4}\ [4b\cos t + r(-2t + \sin 2t)]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\,\pi r(4b + \pi r). \end{aligned}$$

ii) Ανάλογα με τον τύπο $(11.8.2-2)$ έχουμε

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_0^{2\pi} x(t)y(t)\ \left|x'(t)\right|\ dt \\ &= -2\pi r \int_0^{2\pi} \sin t(b + r\sin t)(a + r\sin t)\, d\theta \\ &= \frac{\pi r}{6}\ [12ab\cos t + r(-6at + 3b\cos 2t 3r\sin t \\ &\quad +3a\sin 2t + r\sin 3t)]_0^{2\pi} = 2a\pi^2 r^2. \end{aligned}$$

Το Σχ. 11.8.2 - 2b, αντίστοιχα το Σχ. 11.8.2 - 3b γίνονται με τις παρακάτω εντολές του MATHEMATICA:



Σχήμα 11.8.2 - 2: Παράδειγμα 11.8.2 - 1: (a) το άνω μέρος της περιφέρειας $x(t) = 2 + \cos t$ και $y(t) = 1 + \sin t$, όταν $\theta \in [0, \pi/4]$ μπλε καμπύλη ($a = 2$, $b = 1$ και $r = 1$). (b) Το στερεό εκ περιστροφής γύρω από τον x-άξονα - πράσινη ευθεία σε σχήμα (a).

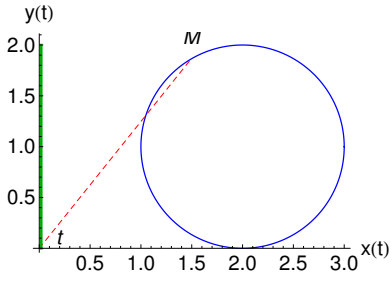
Πρόγραμμα 11.8.2 - 1 (στερεό εκ περιστροφής)

```
x[t_] := 2 + Cos[t]; y[t_] := 1 + Sin[t]
RevolutionPlot3D[{x[t], y[t]}, {t, 0, Pi}, Boxed -> False,
    RevolutionAxis -> {1, 0}, AxesLabel -> {"x", "y", "z"},
    BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 16}]
```

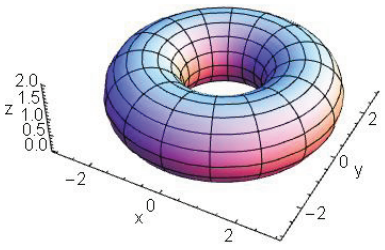
αντίστοιχα

```
x[t_] := 2 + Cos[t]; y[t_] := 1 + Sin[t]
RevolutionPlot3D[{x[t], y[t]}, {t, 0, Pi}, Boxed -> False,
    RevolutionAxis -> {0, 1}, AxesLabel -> {"x", "y", "z"},
    BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 16}]
```

■



(a)



(b)

Σχήμα 11.8.2 - 3: Παράδειγμα 11.8.2 - 1: (a) η περιφέρεια $x(t) = 2+\cos t$ και $y(t) = 1 + \sin t$, όταν $\theta \in [0, 2\pi]$ μπλε καμπύλη ($a = 2$, $b = 1$ και $r = 1$). (b) Το στερεό εκ περιστροφής γύρω από τον y-άξονα - πράσινη ευθεία σε σχήμα (a).

Ασκήσεις

1. Έστω η **κυκλοειδής καμπύλη** με παραμετρική εξίσωση

$$x(t) = a(t - \sin t) \quad \text{και} \quad y(t) = a(1 - \cos t), \quad \text{όταν} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού από περιστροφή της γύρω από τον

i) x- άξονα (Σχ. 11.8.2 - 4), και

i) y- άξονα, (Σχ. 11.8.2 - 5).

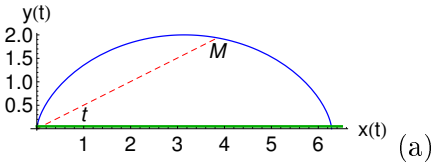
2. Έστω η **αστεροειδής καμπύλη** με παραμετρική εξίσωση

$$x(t) = a\cos^3 t \quad \text{και} \quad y(t) = b\sin^3 t, \quad \text{όταν} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{και} \quad a, b > 0.$$

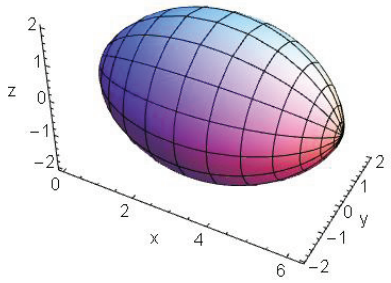
Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού από περιστροφή της γύρω από τον

i) x- άξονα (Σχ. 11.8.2 - 6), και

i) y- άξονα, (Σχ. 11.8.2 - 7).



(a)



(b)

Σχήμα 11.8.2 - 4: Άσκηση 1i Παραγράφου 11.8.2: (a) η κυκλοειδής $x(t) = a(t - \sin t)$ και $y(t) = a(1 - \cos t)$, όταν $\theta \in [0, 2\pi]$ μπλε καμπύλη ($a = 1$). (b) Το στερεό εκ περιστροφής γύρω από τον x-άξονα - πράσινη ευθεία σε σχήμα (a).

Απαντήσεις

1. i) Σύμφωνα με τον τύπο $(11.8.2 - 1)$ έχουμε

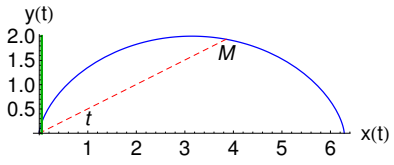
$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^{2\pi} y(t) \left|x'(t)\right| \, dt = \pi a^2 \int_0^{2\pi} (\cos t - 1)^2 \, dt \\ &= \frac{1}{4} \pi a^2 \left[6t - 8 \sin t + \sin 2t\right]_0^{2\pi} = 3\pi^2 a^2. \end{aligned}$$

ii) Όμοια με τον τύπο $(11.8.2 - 2)$ έχουμε

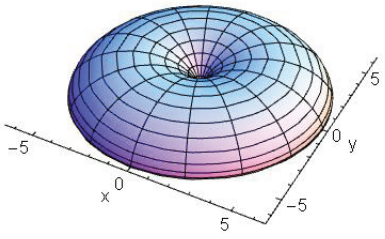
$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_0^{2\pi} x(t) y(t) \left|x'(t)\right| \, dt = 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (\cos t - 1)^2 \, (t - \sin t) \, dt \\ &= \frac{1}{12} \pi a^3 \left[-18 \cos t - 9 \cos 2t - 24 \sin t \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(9t^2 + \cos 3t\right) + 3t \sin 2t\right]_0^{2\pi} = 6\pi^3 a^3. \end{aligned}$$

2. i) Λόγω συμμετρίας αρκεί να υπολογιστεί, όταν $t \in [0, \pi]$. Σύμφωνα με τον τύπο $(11.8.2 - 1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^{\pi} y(t) \left|x'(t)\right| \, dt = 3\pi ab \int_0^{\pi} \cos^2 t \sin^4 t \, dt \\ &= \frac{1}{64} \pi ab \left[12t - 3 \sin 2t - 3 \sin 4t + \sin 6t\right]_0^{\pi} = \frac{3}{16} \pi^2 ab. \end{aligned}$$



(a)



(b)

Σχήμα 11.8.2 - 5: Άσκηση 1ii Παραγράφου 11.8.2: (a) όμοια η κυκλοειδής $x(t) = a(t - \sin t)$ και $y(t) = a(1 - \cos t)$, όταν $\theta \in [0, 2\pi]$ μπλε καμπύλη ($a = 1$). (b) Το στερεό εκ περιστροφής γύρω από τον y-άξονα - πράσινη ευθεία σε σχήμα (a).

ii) Όμοια λόγω συμμετρίας αρκεί αρχικά να υπολογιστεί, όταν $t \in [0, \pi/2]$, οπότε με τον τύπο $(11.8.2 - 2)$ έχουμε

$$\tilde{V}_y = 2\pi \int_0^{\pi} x(t)y(t)\,|x'(t)|\,dt = 6\pi a^2 b \int_0^{\pi/2} \cos^5 t \sin^4 t\,dt$$

$$= \frac{1}{420}\,\pi a^2 b\,\left[(249 + 220\cos 2t + 35\cos 4t + 35\cos 4t)\sin^5 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{16}{105}\,\pi\, a^2 b.$$

Άρα

$$V_y = 2\tilde{V}_y = \frac{32}{105}\,\pi a^2 b.$$

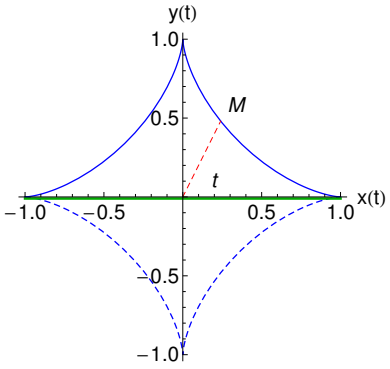
11.8.3 Πολικές συντεταγμένες

Ορισμός 11.8.3 - 1. *Έστω ότι η συνάρτηση $f\,|\,[\alpha, \beta]$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και έχει εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες της μορφής*

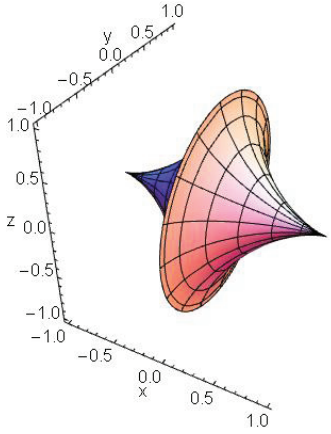
$$r = r(\theta), \quad \text{όταν} \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]\,,$$

όπου θ_1 και θ_2 είναι οι τιμές της πολικής γωνίας στα άκρα σημεία του τόξου της καμπύλης (Σχ. 11.8.3 - 1). Τότε ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του κυκλικού τόξου με $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ δίνεται από τον τύπο

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^3(\theta)\,\sin\theta\,d\theta. \qquad (11.8.3 - 1)$$



(a)



(b)

Σχήμα 11.8.2 - 6: Άσκηση 2i Παραγράφου 11.8.2: (a) η αστεροειδής $x(t) = a\cos^3 t$ και $y(t) = b\cos^3 t$, όταν $\theta \in [0, \pi]$ μπλε συνεχής, $\theta \in [\pi, 2\pi]$ μπλε διακεκομμένη καμπύλη ($a = b = 1$). (b) Το στερεό εκ περιστροφής γύρω από τον x-άξονα - πράσινη ευθεία σε σχήμα (a).

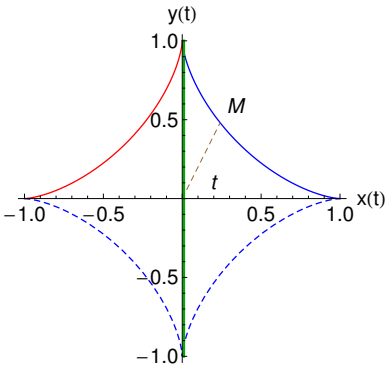
Σημείωση 11.8.3 - 1

Ο τύπος $(11.8.3-1)$ χρησιμοποιείται επίσης όταν πρόκειται για τον όγκο από περιστροφή γύρω από τον πολικό άξονα μιας κλειστής καμπύλης.

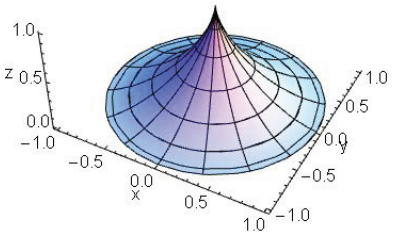
Παράδειγμα 11.8.3 - 1

Να υπολογιστεί ο όγκος που σχηματίζεται από περιστροφή της καμπύλης

$$r(\theta) = a\sin 2\theta, \quad \text{όταν} \quad \theta \in [0, \pi/2]$$



(a)



(b)

Σχήμα 11.8.2 - 7: Άσκηση 2i Παραγράφου 11.8.2: (a) η αστεροειδής $x(t) = a\cos^3 t$ και $y(t) = b\cos^3 t$, όταν $\theta \in [0, \pi]$ μπλε συνεχής, $\theta \in [\pi, 2\pi]$ μπλε διακεκομμένη καμπύλη ($a = b = 1$). (b) Το άνω μέρος του στερεού εκ περιστροφής γύρω από τον y-άξονα - πράσινη ευθεία σε σχήμα (a).

γύρω από τον πολικό άξονα.

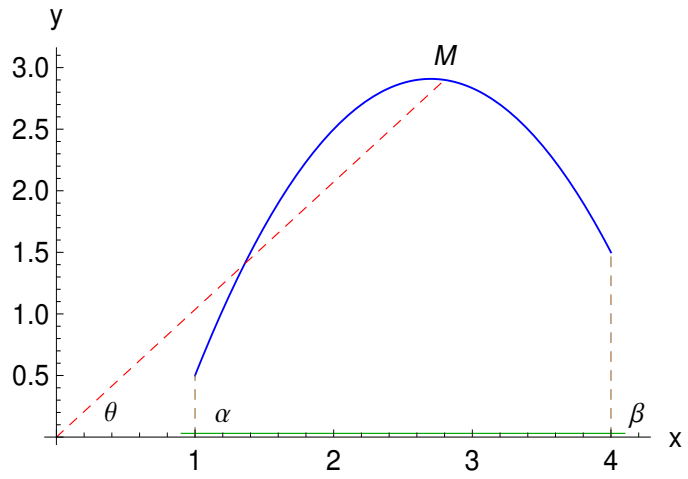
Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(11.8.3-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3}\pi \int_0^{\pi/2} r^3(\theta)\,\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^3 2\theta\,\sin\theta\,d\theta \\ &\qquad (\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta) \\ &= \frac{16}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\,\cos^3\theta\,d\theta \\ &= \frac{8}{105}\pi a^3 \left[(9+5\cos 2\theta)\sin^5\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{32}{105}\pi a^3. \end{aligned}$$

■

Άσκηση

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής γύρω από τον πολικό άξονα των καμπυλών



Σχήμα 11.8.3 - 1: Ορισμός 11.8.1 - 3 με τον πολικό άξονα περιστροφής (πράσινη ευθεία).

i) $r(\theta) = a(1+\cos\theta)$ - **καρδιοειδής καμπύλη**, όταν $\theta[0,\pi]$, και

ii) $r(\theta) = a\cos^2\theta$, όταν $\theta[0,\pi/2]$.

Απαντήσεις

Σύμφωνα με τον τύπο $(11.8.3-1)$ έχουμε

i)

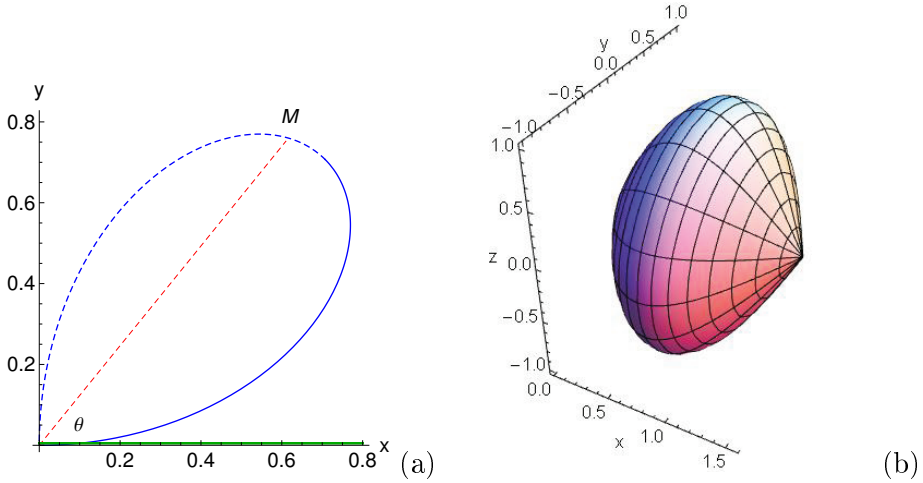
$$V = \frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi} r^3(\theta)\,\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\,\sin\theta\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{48}a^3\pi\left[(56\cos\theta+28\cos 2\theta+8\cos 3\theta+\cos 4\theta\right]_0^{\pi} = \frac{8}{3}\pi a^3.$$

ii)

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi} r^3(\theta)\,\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\pi}\cos^6\theta\,\sin\theta\,d\theta$$

$$= -\frac{2}{21}a^3\pi\cos^7\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{21}\pi a^3.$$



Σχήμα 11.8.3 - 2: Παράδειγμα 11.8.3 - 1: (a) η καμπύλη $r(\theta) = \sin 2\theta$, όταν $\theta \in [0, \pi/4]$ μπλε συνεχής και $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$ μπλε διακεκομμένη. (b) Το στερεό εκ περιστροφής γύρω από τον πολικό άξονα - πράσινη ευθεία σε (a).

11.9 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[2] Abramowitz, M. & Stegun, I. (1965). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover, Chapter 7, page 297. ISBN 978–048–661–272–0.

[3] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[4] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Βιβλιογραφία για περαιτέρω μελέτη

Παπαδημητράκης, Μ. (2015). *Ανάλυση: Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής* *http://fourier.math.uoc.gr/ papadim/analysis_n.pdf*
Πανεπιστήμιο Κρήτης: Τμήμα Μαθηματικών.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://eclass.uoa.gr/courses/MATH141/ θέση 'Εγγραφα
- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm

- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 12

ΣΕΙΡΕΣ

12.1 Ακολουθίες αριθμών

Κρίνεται σκόπιμο να δοθεί περιληπτικά πριν από τη μελέτη των σειρών η έννοια της ακολουθίας αριθμών. Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4].

12.1.1 Ορισμός ακολουθίας

Ορισμός 12.1.1 - 1. *Κάθε συνάρτηση της μορφής*

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{E} : \nu \longrightarrow a(\nu), \qquad (12.1.1 - 1)$$

όπου $\mathbb{N}$ *το σύνολο των φυσικών αριθμών και* E *ένα μη κενό σύνολο λέγεται* **ακολουθία** *στοιχείων του συνόλου* E.

Στην (12.1.1−1) τα πρότυπα, δηλαδή οι φυσικοί αριθμοί, λέγονται **δείκτες**, ενώ οι εικόνες τους **όροι** της ακολουθίας. Η έκφραση $a(\nu)$ θα συμβολίζεται συνήθως στο εξής με a_ν και θα λέγεται ο ν-οστός ή ο γενικός όρος της ακολουθίας, δηλαδή

$$a_\nu = a(\nu) \quad \text{για κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Επίσης μια ακολουθία θα συμβολίζεται με (a_ν), $\nu \in \mathbb{N}$ ή αναλυτικά a_ν; $\nu = 1, 2, \ldots$, ενώ θα χρησιμοποιείται και ο όρος *η ακολουθία* a_ν; $\nu \in \mathbb{N}$.

Στην ειδική περίπτωση που το σύνολο $\mathrm{E} \subseteq \mathbb{R}$, τότε η ακολουθία a_ν λέγεται ακολουθία των πραγματικών αριθμών. Άρα:

Ορισμός 12.1.1 - 2. *Ορίζεται ως* **ακολουθία των πραγματικών αριθμών** *κάθε μονοσήμαντη απεικόνιση του συνόλου* $\mathbb{N}$ *των φυσικών αριθμών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών* $\mathbb{R}$.

Στο εξής θα εξεταστούν μόνον οι ακολουθίες των πραγματικών αριθμών.

Άμεση συνέπεια του Ορισμού 12.1.1 - 2 είναι ότι το πεδίο ορισμού και τιμών μιας ακολουθίας, έστω $a_\nu = a(\nu)$; $\nu \in \mathbb{N}$, είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι είναι υποσύνολο του αντίστοιχου πεδίου ορισμού και τιμών της συνάρτησης $f(x)$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}$, όπως αυτό φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 12.1.1 - 1

Έστω η ακολουθία με γενικό όρο

$$a_\nu = \frac{\nu}{\nu^2 + 1} \quad \text{για κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Δίνοντας στο ν διαδοχικά τις τιμές $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$ προκύπτουν οι παρακάτω όροι της ακολουθίας:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{\nu}{\nu^2 + 1}, \ldots .$$

Τότε η αντίστοιχη συνάρτηση θα έχει τύπο

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{με πεδίο ορισμού και τιμών το} \quad \mathbb{R}.$$

Παρατηρήσεις 12.1.1 - 1

- Άμεσα προκύπτει ότι μία ακολουθία είναι ορισμένη, όταν δίνεται ο γενικός της όρος a_ν, όπως στο Παράδειγμα 12.1.1 - 1.
- Μία ακολουθία είναι επίσης ορισμένη, όταν δίνονται
  - επαρκείς όροι της, όπως $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$, οπότε εύκολα προκύπτει ότι ορίζεται η ακολουθία $a_\nu = \nu^2$; $\nu \in \mathbb{N}$,

- ένας αναγωγικός τύπος ή αναδρομική σχέση, που επιτρέπει τον υπολογισμό του όρου a_ν από τον $a_{\nu-1}$ ή γενικότερα από ορισμένους προηγούμενούς του, όπως

$$a_\nu = a_{\nu-1} + \frac{1}{\nu-1}\,; \quad \nu = 2,\, 3,\, \ldots, \quad \text{όταν} \quad a_1 = -\frac{1}{4}\,.$$

- Είναι δυνατόν σε ορισμένες περιπτώσεις οι τιμές του δείκτη ν να αρχίζουν από το 0 ή από κάποιο δείκτη $\nu_0 > 1$, όπως

$$a_\nu = \frac{1}{\nu+1}\,; \quad \nu = 0,\, 1,\, \ldots, \quad \text{ή} \quad b_\nu = \frac{\nu}{\nu-3}\,; \quad \nu = 4,\, 5,\, \ldots\,.$$

- Οι τιμές του δείκτη ν, ενώ αρχίζουν από κάποια τιμή, πρέπει τελικά να τείνουν στο άπειρο, διαφορετικά δεν ορίζεται ακολουθία.

Επομένως ο τύπος

$$a_\nu \;=\; \frac{1}{\nu+1}\,; \quad \nu = 1,\, 2,\, \ldots \quad \text{ορίζει ακολουθία, ενώ ο}$$

$$b_\nu \;=\; \frac{1}{\nu+1}\,; \quad \nu = 1,\, 2,\, \ldots,\, 10 \quad \text{δεν ορίζει.}$$

12.1.2 Πράξεις μεταξύ ακολουθιών

Έστω (a_ν), (b_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ δύο ακολουθίες. Τότε ορίζονται για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ οι παρακάτω πράξεις:

Ισότητα	$(a_\nu) = (b_\nu)$, όταν $a_\nu = b_\nu$.
Πρόσθεση	$(a_\nu) + (b_\nu) = (a_\nu + b_\nu)$.
Γινόμενο	$(a_\nu)\,(b_\nu) = (a_\nu b_\nu)$.
Πηλίκο	$\dfrac{(a_\nu)}{(b_\nu)} = \left(\dfrac{a_\nu}{b_\nu}\right)$ με $b_\nu \neq 0$.
Γινόμενο με πραγματικό αριθμό	$\lambda\,(a_\nu) = (\lambda a_\nu)$; $\lambda \in \mathbb{R}$.
Απόλυτη τιμή	$\lvert(a_\nu)\rvert = (\lvert a_\nu\rvert)$.
Τετραγωνική ρίζα	$\sqrt{(a_\nu)} = \left(\sqrt{a_\nu}\right)$, και ανάλογα
Ρίζα k**-τάξης με** $k \geq 2$	$\sqrt[k]{(a_\nu)} = \left(\sqrt[k]{a_\nu}\right)$.

Παρατήρηση 12.1.2 - 1

Οι πράξεις της πρόσθεσης και του γινομένου γενικεύονται επαγωγικά για πεπερασμένο πλήθος ακολουθιών.

12.1.3 Φραγμένη ακολουθία

Ορισμός 12.1.3 - 1. *Η ακολουθία* (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ *είναι* **άνω φραγμένη** *τότε και μόνον, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός* s, *τέτοιος ώστε* $a_\nu \leq s$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$.

Ο αριθμός s, καθώς και κάθε άλλος πραγματικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος από τον s, θα λέγεται ένα άνω φράγμα της ακολουθίας.

Ορισμός 12.1.3 - 2. *Η ακολουθία* (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ *είναι* **κάτω φραγμένη** *τότε και μόνον, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός* σ, *τέτοιος ώστε* $\sigma \leq a_\nu$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$.

Ο αριθμός σ, καθώς και κάθε άλλος πραγματικός αριθμός που είναι μικρότερος από τον σ, θα λέγεται τότε ένα κάτω φράγμα της ακολουθίας.

Ορισμός 12.1.3 - 3. *Η ακολουθία* (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ *είναι* **φραγμένη** *τότε και μόνον, όταν είναι άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί* σ, s *με* $\sigma \leq s$, *τέτοιοι ώστε* $\sigma \leq a_\nu \leq s$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$.

Άρα μία ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη τότε και μόνον, όταν υπάρχει κλειστό διάστημα $[\sigma, s]$ στο οποίο ανήκουν όλοι οι όροι της.

Παράδειγμα 12.1.3 - 1

Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{1}{\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι φραγμένη, επειδή

$$0 \leq a_\nu = \frac{1}{\nu} \leq 1,$$

δηλαδή όλοι οι όροι της ανήκουν στο διάστημα $[0, 1]$.

Ορισμός 12.1.3 - 4. *Η ακολουθία* (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ *είναι* **απόλυτα φραγμένη** *τότε και μόνον, όταν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός, τέτοιος ώστε* $|a_\nu| \leq \theta$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$.

Το θ θα λέγεται τότε ένα απόλυτο φράγμα της ακολουθίας. Είναι φανερό ότι αν ο θ είναι ένα απόλυτο φράγμα, τότε και κάθε άλλος θετικός αριθμός $\varphi > \theta$ είναι επίσης ένα απόλυτο φράγμα της. Γενικότερα ισχύει:

Πρόταση 12.1.3 - 1. *Μία φραγμένη ακολουθία είναι απόλυτα φραγμένη και αντίστροφα.*

Σύμφωνα με την πρόταση αυτή στο εξής ο όρος *φραγμένη* και *απόλυτα φραγμένη* ακολουθία θα χρησιμοποιούνται με την ίδια σημασία.

Παράδειγμα 12.1.3 - 2

Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{\nu^2 \cos 5\nu + \sqrt{\nu} \sin 2\nu}{\nu^2 + 1}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι απόλυτα φραγμένη, επειδή

$$|a_\nu| \leq \frac{\left|\nu^2 \cos 5\nu + \sqrt{\nu} \sin 2\nu\right|}{\nu^2 + 1} \leq \frac{\nu^2 + \sqrt{\nu}}{\nu^2 + 1} \leq \frac{2\nu^2}{\nu^2 + 1} < 2,$$

δηλαδή $|a_\nu| < 2$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε προφανώς είναι $-2 \leq a_\nu \leq 2$, δηλαδή η ακολουθία a_ν είναι επίσης και φραγμένη σύμφωνα με τον Ορισμό 12.1.3 - 3.

12.1.4 Μονοτονία ακολουθίας

Δίνεται στη συνέχεια η έννοια της μονοτονίας μιας ακολουθίας.

Έστω (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε θα λέγεται ότι η ακολουθία είναι:

Ορισμός 12.1.4 - 1 **αύξουσα** *τότε και μόνον, όταν ισχύει* $a_\nu \leq a_{\nu+1}$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 12.1.4 - 2 **γνήσια αύξουσα** *τότε και μόνον, όταν ισχύει* $a_\nu < a_{\nu+1}$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 12.1.4 - 1

Η ακολουθία

$$a_\nu = \nu^2 + 1\,; \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι γνήσια αύξουσα, επειδή

$$a_1 = 2 < a_2 = 5 < \ldots .$$

Ορισμός 12.1.4 - 3 **φθίνουσα** *τότε και μόνον, όταν ισχύει* $a_\nu \geq a_{\nu+1}$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 12.1.4 - 4 **γνήσια φθίνουσα** *τότε και μόνον, όταν ισχύει* $a_\nu > a_{\nu+1}$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 12.1.4 - 2

Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{1}{\nu^2 + 1}\,; \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι γνήσια φθίνουσα, επειδή

$$a_1 = \frac{1}{2} > a_2 = \frac{1}{5} > \ldots .$$

Ορισμός 12.1.4 - 5 **σταθερή** *τότε και μόνον, όταν ισχύει* $a_{\nu+1} = a_\nu$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 12.1.4 - 3

Η ακολουθία $a_\nu = 5; \quad \nu \in \mathbb{N}$ είναι σταθερή, επειδή $a_1 = 5 = a_2 = 5 = \ldots$.

Μία ακολουθία $(a_\nu); \nu \in \mathbb{N}$ που ανήκει σε μία από τις κατηγορίες ορισμών 12.1.4 - 1 ή 12.1.4 - 3 θα λέγεται **μονότονη** ακολουθία, ενώ όταν ανήκει στις 12.1.4 - 2 ή 12.1.4 - 4 θα λέγεται **γνήσια μονότονη** ακολουθία.

Παρατηρήσεις 12.1.4 - 1

1. Κάθε γνήσια μονότονη ακολουθία είναι και μονότονη. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.

2. Αν η ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα, τότε $a_\nu \geq \alpha_1$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, δηλαδή η (a_ν) είναι κάτω φραγμένη με ένα κάτω φράγμα τον πρώτο όρο της, όπως αυτό ισχύει στο Παράδειγμα 12.1.4 - 1, όπου ένα κάτω φράγμα της είναι ο αριθμός 2.

Όμοια, αν η ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα, τότε $a_\nu \leq \alpha_1$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, δηλαδή η (a_ν) είναι άνω φραγμένη με ένα άνω φράγμα τον πρώτο όρο της, όπως αυτό ισχύει στο Παράδειγμα 12.1.4 - 2, όπου ένα άνω φράγμα της είναι ο αριθμός $1/2$..

3. Για να καθοριστεί το είδος της μονοτονίας μιας ακολουθίας (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ τις περισσότερες φορές ακολουθείται μία από τις παρακάτω μεθόδους:

i) εξετάζεται το πρόσημο της διαφοράς

$$\Delta_\nu = a_{\nu+1} - a_\nu.$$

Παράδειγμα 12.1.4 - 4

Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{\nu}{\nu+1}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι γνήσια αύξουσα, επειδή

$$\Delta_\nu = a_{\nu+1} - a_\nu = \frac{\nu+1}{\nu+2} - \frac{\nu}{\nu+1} = \frac{2}{(\nu+1)(\nu+2)} > 0\,,$$

δηλαδή $a_{\nu+1} > a_\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

ii) Αν οι όροι της a_ν διατηρούν πρόσημο, τότε συνήθως συγκρίνεται ο λόγος $a_{\nu+1}/a_\nu$ με τη μονάδα, οπότε από τη σύγκριση αυτή εξάγονται συμπεράσματα για τη μονοτονία της ακολουθίας,

iii) υπολογίζεται μεταξύ δύο ή τριών πρώτων όρων της ακολουθίας μία σχέση, από την οποία προκύπτει μία ένδειξη μονοτονίας και έπειτα, με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής, αποδεικνύεται η ανισοτική σχέση, η οποία καθορίζει τελικά το είδος της μονοτονίας της ακολουθίας.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι 4 πρώτοι όροι των παρακάτω ακολουθιών (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$:

i) $\dfrac{1}{\nu}$ *iii)* $(-1)^\nu \dfrac{1+\sqrt{\nu}}{\nu}$

ii) $\dfrac{\nu}{\sqrt{\nu^2+1}}$ *iv)* $\dfrac{2^\nu}{\nu\,!}$.

Στη συνέχεια να υπολογιστούν τα φράγματά των.

2. Να υπολογιστούν οι 5 πρώτοι όροι της ακολουθίας, που ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο

$$a_\nu = 1 + \frac{1}{a_{\nu-1}}\,;\ \nu = 2,\,3,\,\ldots, \quad \text{όταν} \quad a_1 = -\frac{3}{5}\,.$$

3. Να υπολογιστούν οι 4 πρώτοι όροι των παρακάτω ακολουθιών (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$:

i) $\dfrac{\nu \sin 2\nu}{\nu^2+1}$ *iii)* $\dfrac{\sin\nu + \cos^4 3\nu}{\nu^4}$

ii) $\dfrac{\nu^3}{5\nu^2+\cos^2\nu}$ *iv)* $\dfrac{\nu+5}{2^\nu}$.

4. Στην προηγούμενη άσκηση να εξεταστεί ποιες ακολουθίες είναι μονότονες και να καθοριστεί το είδος μονοτονίας τους.

12.1.5 Ορισμός σύγκλισης ακολουθιών

Ορισμός 12.1.5 - 1. *Θα λέγεται ότι μία ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$* **συγκλίνει** *στον πραγματικό αριθμό a ή τείνει στον αριθμό a ή το όριό της είναι ο αριθμός a και αυτό θα συμβολίζεται με*[1]

$$a_\nu \to a \quad \text{ή} \quad \lim_{\nu->+\infty} a_\nu = a \quad \text{ή εν συντομία στο εξής} \quad \lim a_\nu = a,$$

τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, δηλαδή δείκτης που εξαρτάται γενικά από το ε, τέτοιος ώστε να ισχύει

$$|a_\nu - a| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } \nu \geq \nu_0(\varepsilon). \tag{12.1.5 - 1}$$

[1] Ο συμβολισμός lim είναι η συγκοπή της λέξης *limes*, που σημαίνει *όριο* και στο εξής, όταν χρησιμοποιείται, θα σημαίνει $\lim_{\nu \to +\infty}$, εκτός και αν διαφορετικά ορίζεται.

Στην ειδική περίπτωση που είναι $a = 0$, δηλαδή $\lim a_\nu = 0$, η ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ θα λέγεται **μηδενική**.

Από τον Ορισμό 12.1.5 - 1 προκύπτει τότε ότι:

Πρόταση 12.1.5 - 1. *Αν $\lim a_\nu = a$, τότε η ακολουθία $\delta_\nu = (a_\nu - a)$; $\nu \in N$ είναι μηδενική και αντίστροφα, δηλαδή*

$$\lim a_\nu = a \iff \lim (a_\nu - a) = 0. \qquad (12.1.5 - 2)$$

Παράδειγμα 12.1.5 - 1

Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{1}{\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι μηδενική, επειδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, που είναι μεγαλύτερος από το $1/\varepsilon$.

Πράγματι, αν

$$\nu_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 = \nu_0(\varepsilon),$$

τότε για κάθε $\nu \geq \nu_0(\varepsilon)$ θα είναι

$$\nu > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{\nu} < \varepsilon,$$

δηλαδή

$$|a_\nu| = \frac{1}{\nu} < \varepsilon, \quad \text{οπότε} \quad a_\nu = \frac{1}{\nu} \to 0.$$

Παράδειγμα 12.1.5 - 2

Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{\nu^2 - \nu}{\nu^2 + 1}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει στο 1, επειδή σύμφωνα με την Πρόταση 12.1.5 - 1 είναι

$$|a_\nu - 1| = \left|\frac{\nu^2 - \nu}{\nu^2 + 1} - 1\right| = \frac{\nu + 1}{\nu^2 + 1} \leq \frac{2}{\nu} < \varepsilon \quad \text{με} \quad \varepsilon > 0,$$

οπότε $\nu > 2/\varepsilon$. Τότε υπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, που είναι μεγαλύτερος από το $2/\varepsilon$ και αυτό επειδή, αν είναι

$$\nu_0 = \text{ακέραιο μέρος του } \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1 = \nu_0(\varepsilon),$$

τότε για κάθε $\nu \geq \nu_0(\varepsilon)$ θα είναι

$$\nu > \frac{2}{\varepsilon} \quad \text{ή} \quad \frac{2}{\nu} < \varepsilon, \quad \text{δηλαδή} \quad |a_\nu - 1| < \varepsilon,$$

οπότε $\lim a_\nu = 1$.

Παράδειγμα 12.1.5 - 3

Να δειχθεί ότι η ακολουθία

$$a_\nu = (-1)^\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

δεν συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Λύση. Αν με την εις άτοπον απαγωγή υποτεθεί ότι συγκλίνει προς έναν αριθμό, έστω x, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα και για $\varepsilon = 1/2$, θα υπάρχει δείκτης $\nu_0 \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε

$$|(-1)^\nu - x| \leq \frac{1}{2} \quad \text{για κάθε} \quad \nu \geq \nu_0.$$

Τότε όμως, επειδή $\nu_0 < \nu_0 + 1$ είναι

$$|(-1)_0^\nu - x| < \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \left|(-1)^{\nu_0+1} - x\right| < \frac{1}{2},$$

οπότε έχουμε

$$\left|(-1)^{\nu_0+1} - (-1)_0^\nu\right| \leq \left|(-1)^{\nu_0+1} - x\right| + |(-1)_0^\nu - x| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

δηλαδή $\left|(-1)^{\nu_0+1} - (-1)_0^\nu\right| < 1$, ενώ προφανώς $\left|(-1)^{\nu_0+1} - (-1)_0^\nu\right| = 2$.

Άρα η υπόθεση ότι η ακολουθία συγκλίνει οδηγεί σε άτοπο, που σημαίνει ότι η a_ν δεν συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. ∎

12.1.6 Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Δίνονται στη συνέχεια με τη μορφή προτάσεων οι κυριότερες ιδιότητες των συγκλινουσών ακολουθιών:

Πρόταση 12.1.6 - 1. *Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο.*

Πρόταση 12.1.6 - 2. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε, δηλαδή υπάρχουν φραγμένες ακολουθίες που δεν συγκλίνουν.*

Πρόταση 12.1.6 - 3. *Το γινόμενο μηδενικής ακολουθίας επί φραγμένη είναι μηδενική ακολουθία.*

Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει:

Πόρισμα 12.1.6 - 1. *Αν $\lim a_\nu = a$ και $k \in \mathbb{R}$, τότε*

$$\lim (ka_\nu) = ka. \qquad (12.1.6 - 1)$$

Πρόταση 12.1.6 - 4. *Αν η (b_ν), $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μια μηδενική ακολουθία και η ακολουθία (a_ν), $\nu \in \mathbb{N}$ φράσσεται από την ακολουθία (b_ν), $\nu \in \mathbb{N}$ από κάποιο δείκτη και μετά, έστω ν_1, δηλαδή αν ισχύει*

$$|a_\nu| \leq k\,|b_\nu| \quad \mu\varepsilon \quad k > 0 \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad \nu \geq \nu_1,$$

τότε η (a_ν), $\nu \in \mathbb{N}$ είναι επίσης μηδενική ακολουθία.

Παράδειγμα 12.1.6 - 1

Έστω η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{5\sin^2 \nu}{\nu^2 + \nu + 1}\,.$$

Τότε, επειδή σύμφωνα με την Πρόταση 12.1.6 - 4 είναι

$$|a_\nu| = \left|\frac{5\sin^2 \nu}{\nu^2 + \nu + 1}\right| = \frac{5\,|\sin^2 \nu|}{|\nu^2 + \nu + 1|} \leq \frac{5}{\nu^2 + \nu + 1} < \overbrace{5}^{k}\ \overbrace{\frac{1}{\nu}}^{b_\nu}$$

και ισχύει ότι $\lim b_\nu = \frac{1}{\nu} = 0$, θα πρέπει και $\lim a_\nu = 0$.

Πόρισμα 12.1.6 - 2. *Αν* $|a_\nu| \leq |b_\nu|$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$ *και η* (b_ν) *είναι μηδενική ακολουθία, τότε και η ακολουθία* (a_ν) *είναι μηδενική.*

Πρόταση 12.1.6 - 5. *Αν*

$$b_\nu \leq a_\nu \leq \gamma_\nu \quad \textit{για κάθε} \quad \nu \geq \nu_0 \quad \textit{και} \quad \lim b_\nu = \lim \gamma_\nu = a,$$

τότε θα πρέπει και $\lim a_\nu = a$ (ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες).

Πρόταση 12.1.6 - 6. *Αν δύο ακολουθίες* (a_ν) *και* (b_ν)*;* $\nu \in \mathbb{N}$ *συγκλίνουν και ισχύει* $a_\nu < b_\nu$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$*, τότε* $a_\nu \leq b_\nu$.

Πόρισμα 12.1.6 - 3. *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $a_\nu < s$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$*, τότε* $a \leq s$.

Πόρισμα 12.1.6 - 4. *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $\sigma < a_\nu$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$*, τότε* $\sigma \leq a$.

12.1.7 Πράξεις μεταξύ συγκλινουσών ακολουθιών

Όμοια δίνονται στη συνέχεια οι δυνατές πράξεις μεταξύ συγκλινουσών ακολουθιών με τη μορφή των παρακάτω προτάσεων:

Πρόταση 12.1.7 - 1 (όριο αθροίσματος). *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $\lim b_\nu = b$*, τότε υπάρχει το* $\lim (a_\nu + b_\nu)$ *και ισχύει*

$$\lim (a_\nu + b_\nu) = a + b. \tag{12.1.7 - 1}$$

Παρατηρήσεις 12.1.7 - 1

i) Η ισχύς της Πρότασης 12.1.7 - 1 επεκτείνεται και στην περίπτωση ενός πεπερασμένου πλήθους συγκλινουσών ακολουθιών, δηλαδή ισχύει

$$\lim (a_{1_\nu} + a_{2_\nu} + \ldots + a_{k_\nu})$$

$$= \lim a_{1_\nu} + \lim a_{2_\nu} + \ldots + \lim a_{k_\nu}, \tag{12.1.7 - 2}$$

ενώ δεν ισχύει αν το πλήθος των προσθετέων δεν είναι πεπερασμένο, δηλαδή άπειρο.

ii) Το αντίστροφο της Πρότασης 12.1.7 - 1 δεν ισχύει πάντοτε, δηλαδή: *αν το άθροισμα δύο ακολουθιών είναι συγκλίνουσα ακολουθία, αυτό δεν συνεπάγεται πάντοτε ότι καθεμιά από αυτές είναι συγκλίνουσα ακολουθία.* Είναι επίσης δυνατόν στην περίπτωση αυτή να μη συγκλίνει ούτε η μία ούτε η άλλη ακολουθία.

Πρόταση 12.1.7 - 2 (όριο διαφοράς). *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $\lim b_\nu = b$, *τότε υπάρχει το* $\lim (a_\nu - b_\nu)$ *και ισχύει*

$$\lim (a_\nu - b_\nu) = a - b. \qquad (12.1.7 - 3)$$

Πρόταση 12.1.7 - 3 (όριο γινομένου). *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $\lim b_\nu = b$, *τότε υπάρχει το* $\lim (a_\nu\, b_\nu)$ *και ισχύει*

$$\lim (a_\nu\, b_\nu) = ab. \qquad (12.1.7 - 4)$$

Παρατηρήσεις 12.1.7 - 2

i) Η Πρόταση 12.1.7 - 3 επεκτείνεται και στην περίπτωση ενός πεπερασμένου πλήθους συγκλινουσών ακολουθιών, δηλαδή

$$\lim (a_{1_\nu}\, a_{2_\nu}\, \cdots\, a_{k_\nu}) = \lim a_{1_\nu}\, \lim a_{2_\nu}\, \cdots \lim a_{k_\nu}. \qquad (12.1.7 - 5)$$

Ειδικότερα, αν οι k-ακολουθίες είναι **ίσες**, δηλαδή

$$a_{i_\nu} = a_\nu; \quad i = 1, 2, \ldots, k \quad \text{και} \quad \lim a_\nu = a,$$

τότε ισχύει

$$\lim (a_\nu)^k = (\lim a_\nu)^k = a^k \quad \text{για κάθε} \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (12.1.7 - 6)$$

ii) Η $(12.1.7 - 5)$ δεν ισχύει αν το πλήθος των παραγόντων δεν είναι πεπερασμένο.

iii) Το αντίστροφο της Πρότασης 12.1.7 - 3 δεν ισχύει γενικά.

Από τις Προτάσεις 12.1.7 - 1 και 12.1.7 - 3 προκύπτει ότι:

Πόρισμα 12.1.7 - 1. *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $\lim b_\nu = b$, *τότε*

$$\lim (ka_\nu + \lambda b_\nu) = ka_\nu + \lambda b_\nu \qquad (12.1.7 - 7)$$

για κάθε $k, \lambda \in \mathbb{R}$ *(γραμμική ιδιότητα).*

Η γραμμική ιδιότητα γενικεύεται ως εξής:
αν $\lim a_{i_\nu} = a_i$ και $k_i \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lim (k_1 a_{1_\nu} + k_2 a_{2_\nu} + \ldots + k_\nu a_{k_\nu})$$

$$= k_1 \lim a_{1_\nu} + k_2 \lim a_{2_\nu} + \ldots + k_\nu \lim a_{k_\nu},$$

Πρόταση 12.1.7 - 4 (όριο πηλίκου). *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $\lim b\nu = b \neq 0$ *όπου* $b_\nu \neq 0$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$, *τότε υπάρχει το* $\lim (a_\nu / b_\nu)$ *και ισχύει*

$$\lim \frac{a_\nu}{b_\nu} = \frac{\lim a_\nu}{\lim b_\nu} = \frac{a}{b}\,. \qquad (12.1.7 - 8)$$

Παράδειγμα 12.1.7 - 1

Έστω η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{\nu^2 + \nu + 5}{3\nu^2 + 1}\,,$$

που γράφεται επίσης ως εξής:

$$a_\nu = \frac{1 + \frac{1}{\nu} + \frac{5}{\nu^2}}{3 + \frac{1}{\nu^2}}\,.$$

Τότε, επειδή η ακολουθία

- $\dfrac{1}{\nu}$ (Παράδειγμα 12.1.5 - 1) συγκλίνει στο μηδέν, και
- η $\dfrac{1}{\nu^2}$ σύμφωνα με την Πρόταση 12.1.7 - 3, επειδή

$$\frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{1}{\nu}\,, \quad \text{είναι επίσης μηδενική,}$$

σύμφωνα με τις Προτάσεις 12.1.7 - 1 και 12.1.7 - 4 έχουμε ότι:

$$\lim a_\nu = \lim \frac{\nu^2+\nu+5}{3\nu^2+1} = \frac{\lim\left(1+\frac{1}{\nu}+\frac{5}{\nu^2}\right)}{\lim\left(3+\frac{1}{\nu^2}\right)}$$

$$= \frac{1+\lim\left(\frac{1}{\nu}\right)+5\lim\left(\frac{1}{\nu^2}\right)}{3+\lim\left(\frac{1}{\nu^2}\right)} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}\,.$$

Παρατηρήσεις 12.1.7 - 3

i) Το αντίστροφο της Πρότασης 12.1.7 - 4 δεν ισχύει πάντοτε, δηλαδή η ύπαρξη του ορίου $\lim(a_\nu/b_\nu)$ δεν συνεπάγεται πάντοτε την ύπαρξη ενός από τα $\lim a_\nu$ ή $\lim b_\nu$.

ii) Σύμφωνα με την Πρόταση 12.1.7 - 4, αν $a_\nu = 1$ και $b_\nu \neq 0$ με $\lim b_\nu = b \neq 0$, τότε από τον τύπο $(12.1.7-6)$ έχουμε

$$\frac{1}{(b_\nu)^k} = \frac{1}{b^k}\,. \qquad (12.1.7\text{ - }9)$$

Συνδυάζοντας τις $(12.1.7-6)$ και $(12.1.7-9)$ προκύπτει ότι:

Πόρισμα 12.1.7 - 2. *Αν $a_\nu \neq 0$ και $\lim a_\nu = a \neq 0$, τότε ισχύει*

$$\lim(a_\nu)^k = a^k \quad \textit{για κάθε} \quad k = \pm1, \pm2, \ldots\,. \qquad (12.1.7\text{ - }10)$$

Η $(12.1.7-10)$ αποτελεί γενίκευση της $(12.1.7-6)$.

Πρόταση 12.1.7 - 5 (όριο απόλυτης τιμής). *Αν $\lim a_\nu = a$, τότε υπάρχει το $\lim|a_\nu|$ και ισχύει*

$$\lim|a_\nu| = |a|. \qquad (12.1.7\text{ - }11)$$

Παρατηρήσεις 12.1.7 - 4

i) Το αντίστροφο της Πρότασης 12.1.7 - 5 δεν ισχύει, όταν $a \neq 0$, δηλαδή:

$$\text{αν} \quad \lim |a_\nu| = |a| \neq 0, \quad \textbf{δεν} \text{ συνεπάγεται ότι και} \quad \lim a_\nu = a$$

και αυτό επειδή είναι δυνατόν μία ακολουθία να συγκλίνει απόλυτα, χωρίς όμως η ίδια να συγκλίνει.

Ειδικά, όταν $a = 0$, ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία:

$$\lim a_\nu = 0 \iff -\lim a_\nu = 0 \iff \lim |a_\nu| = 0. \qquad (12.1.7 - 12)$$

Πρόταση 12.1.7 - 6 (όριο ρίζας). *Αν* $\lim a_\nu = a$, *τότε*

$$\lim \sqrt{|a_\nu|} = \sqrt{|a|} = \sqrt{\lim a_\nu}. \qquad (12.1.7 - 13)$$

Παρατήρηση 12.1.7 - 1

Από την Πρόταση 12.1.7 - 6 προκύπτει ότι τα σύμβολα

$$\lim \quad \text{και} \quad \sqrt{\ }$$

επιτρέπεται να εναλλάσσονται αριστερά από την ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$.

Η γενίκευση της Πρότασης 12.1.7 - 6 διατυπώνεται ως εξής:

Πρόταση 12.1.7 - 7 (γενίκευση ρίζας). *Αν* $a_\nu \geq 0$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$ *και* $\lim a_\nu = a$, *τότε*

$$\lim \sqrt[k]{a_\nu} = \sqrt[k]{\lim a_\nu} \quad \mu\varepsilon \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (12.1.7 - 14)$$

Από την Πρόταση 12.1.7 - 7 προκύπτει ότι:

Πόρισμα 12.1.7 - 3. *Αν* $a > 0$, *τότε, αν*

$$a_\nu = a, \quad \textit{είναι} \quad a_\nu = \lim \sqrt[\nu]{a} = 1, \quad \textit{ενώ, αν}$$

$$a_\nu = \nu, \qquad \lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1.$$

Σε συμπλήρωση των παραπάνω προτάσεων δίνονται στη συνέχεια οι εξής:

Πρόταση 12.1.7 - 8. *Έστω η ακολουθία*

$$a_\nu = \omega^\nu\,; \quad \nu \in \mathbb{N} \quad \mu\varepsilon \quad |\omega| < 1.$$

Τότε $\lim a_\nu = 0.$

Πρόταση 12.1.7 - 9. *Αν* $\omega \in \mathbb{R}$ *και* $|\omega| < 1$, *τότε*

$$\lim a_\nu = \nu^k \omega^\nu = 0\,; \quad \nu \in \mathbb{N} \quad \mu\varepsilon \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Πρόταση 12.1.7 - 10. *Έστω μία ακολουθία* (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ *με* $a_\nu \neq 0$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$. *Τότε, αν*

$$\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| < 1, \quad \text{είναι} \quad \lim a_\nu = 0.$$

Πρόταση 12.1.7 - 11. *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *ισχύει ότι*

$$\lim \frac{x^\nu}{\nu\,!} = 0.$$

Σχετικά τώρα με τη σύγκλιση μονότονων ακολουθιών δεχόμαστε ότι ισχύει:

Αξίωμα 12.1.1. *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό.*

Το αξίωμα αυτό, αν και αφορά μόνο τις μονότονες ακολουθίες, δίνει μία ικανή συνθήκη ύπαρξης του ορίου ακολουθίας. Επίσης εξασφαλίζει την ύπαρξη στο $\mathbb{R}$ του ορίου μιας ακολουθίας με ορισμένες προϋποθέσεις, αλλά δεν δίνει καμία ένδειξη για τον υπολογισμό του.

Άμεσες συνέπειες του αξιώματος είναι οι επόμενες δύο προτάσεις:

Πρόταση 12.1.7 - 12. *Αν μία ακολουθία* $(a_\nu);\ \nu \in \mathbb{N}$ *είναι αύξουσα και έχει ως ένα άνω φράγμα τον αριθμό* s*, τότε είναι συγκλίνουσα και ισχύει* $\lim a_\nu \leq s$.

Πρόταση 12.1.7 - 13. *Αν μία ακολουθία* $(a_\nu);\ \nu \in \mathbb{N}$ *είναι φθίνουσα και έχει ως ένα κάτω φράγμα τον αριθμό* σ*, τότε είναι συγκλίνουσα και ισχύει* $\sigma \leq \lim a_\nu$.

12.1.8 Ο αριθμός e

Αποδεικνύεται σύμφωνα με τους ορισμούς της Παραγράφου 12.1.5 ότι η ακολουθία

$$a_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι γνήσια αύξουσα, ενώ η ακολουθία

$$b_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι γνήσια φθίνουσα.

Επίσης αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$2 = \alpha_1 \leq a_\nu < b_\nu \leq b_1 = 4. \tag{12.1.8 - 1}$$

Τότε σύμφωνα με το Αξίωμα 12.1.1 για τις οριακές τιμές των ισχύει:

$$2 \leq \lim a_\nu \leq \lim b_\nu = 4. \tag{12.1.8 - 2}$$

Αλλά

$$\frac{\lim a_\nu}{\lim b_\nu} = \lim \frac{a_\nu}{b_\nu} = \lim \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) = 1. \tag{12.1.8 - 3}$$

Από τις $12.1.8 - 1)$ και $12.1.8 - 3)$ προκύπτει ότι $\lim a_\nu = \lim b_\nu$.

Ορισμός 12.1.8 - 1 (αριθμού e). *Ο αριθμός* e *ορίζεται ως η κοινή οριακή τιμή των ακολουθιών* $(a_\nu);\ \nu \in \mathbb{N}$ *και* $(b_\nu);\ \nu \in \mathbb{N}$*, δηλαδή*

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu = \lim \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} \tag{12.1.8 - 4}$$

όπου ισχύει ότι

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} \leq \ e \ \leq \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}. \qquad (12.1.8\text{ - }5)$$

Ο αριθμός e, που συμβολισμός του εισήχθη από τον Euler το 1736, παίζει σπουδαίο ρόλο στα Μαθηματικά και κυρίως τα Εφαρμοσμένα, ενώ αποδεικνύεται στην Ανάλυση ότι δεν είναι ρητός, ούτε αλγεβρικός, δηλαδή δεν αποτελεί ρίζα καμιάς αλγεβρικής εξίσωσης (κατά συνέπεια δεν είναι άρρητος), αλλά, όπως και ο αριθμός π, μη αλγεβρικός ή **υπερβατικός** αριθμός.[2] Μία προσέγγισή του στα 3 δεκαδικά ψηφία είναι $e \approx 2.718$.

Ασκήσεις

1. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω ακολουθίες (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$:

i) $\dfrac{\nu}{\nu^4+\nu+1}$ *iii)* $\left(5+\dfrac{1}{\nu}\right)^2$

ii) $\sqrt{\nu^2+4}-\sqrt{\nu^2+1}$ *iv)* $\left(\dfrac{9\nu^2+5}{4\nu^2+\nu+1}\right)^{1/3}$.

2. Δείξτε ότι αν μία ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη, τότε και η ακολουθία (a_ν/ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη και συγκλίνει στο μηδέν.

3. Δείξτε ότι

$$\lim\left(\sqrt{(a+\nu)(b+\nu)} \ - \ \nu\right) = \frac{a+b}{2}.$$

4. Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μηδενικές:

i) $\dfrac{\sin\nu+\cos^2\nu}{\sqrt{\nu}}$ *iii)* $\nu\left(\sqrt{\nu^4+5}-\nu^2\right)$

ii) $\sqrt[3]{\nu+1}-\sqrt[3]{\nu}$ *iv)* $\dfrac{2^\nu\,\nu\,!}{(3\nu)^\nu}$.

5. Σύμφωνα με την (12.1.8−4) υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών

[2] Το ότι είναι υπερβατικός απεδείχθη από τον Hermite και η ανακάλυψη αυτή θεωρείται ως μία από τις σπουδαιότερες ανακαλύψεις των Μαθηματικών. Το 1882 ο Lindemann απέδειξε ότι και ο αριθμός π είναι υπερβατικός και κατά συνέπεια *το άλυτο του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη*.

με γενικούς όρους:

$$i)\quad \left(1+\frac{1}{5\nu}\right)^{\nu} \qquad ii)\quad \left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} \qquad iii)\quad \left(\frac{3\nu+1}{3\nu-1}\right)^{\nu}.$$

6. Δείξτε ότι

$$\lim \sqrt[\nu]{\nu^2+\nu} = 1.$$

12.2 Σειρές αριθμών

12.2.1 Ορισμός σειράς

Έστω $(a_n);\ n \in \mathbb{N}$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών.[3] Τότε ορίζονται επαγωγικά τα παρακάτω αθροίσματα:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ &\text{και γενικά} \\ s_{n+1} &= s_n + a_{n+1} \quad \text{για κάθε } n = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

Τα παραπάνω αθροίσματα είναι μονοσήμαντα ορισμένα και ορίζουν μία νέα ακολουθία, έστω $(s_n);\ n \in \mathbb{N}$, που είναι τα αθροίσματα των όρων της $(a_n);\ n \in \mathbb{N}$, που έχει γενικό όρο τον $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Η ακολουθία $(s_n);\ n \in \mathbb{N}$, που συμβολίζεται με $a_1 + a_2 + \ldots$ ή συντομότερα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \tag{12.2.1 - 1}$$

θα λέγεται **σειρά** (series) των πραγματικών αριθμών a_n.[4]

Κάθε άθροισμα s_n λέγεται τότε και **μερικό άθροισμα** ή **τμήμα** (partial sum) της σειράς $(12.2.1-1)$, ενώ οι πραγματικοί αριθμοί a_n θα λέγονται **όροι** της σειράς.

Ανάλογα με τις Παρατηρήσεις 12.2.1 - 1 για τις ακολουθίες έχουμε και για την περίπτωση των σειρών τα εξής:

[3] Στο εξής για διάκριση με τον αντίστοιχο δείκτη των ακολουθιών ο δείκτης στις σειρές θα συμβολίζεται με n.

[4] Βλέπε βιβλιογραφία και: *https://en.wikipedia.org/Series_(mathematics)*

Παρατηρήσεις 12.2.1 - 1

- Άμεσα προκύπτει ότι μία σειρά είναι ορισμένη, όταν δίνεται ο γενικός της όρος a_ν, όπως για παράδειγμα, αν

$$a_n = \frac{1}{n+1}, \quad \text{τότε} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots .$$

- Μία σειρά είναι επίσης ορισμένη, όταν δίνονται επαρκείς όροι της, όπως 1^2, 2^2, 3^2, ..., οπότε εύκολα προκύπτει ότι πρόκειται για τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2.$$

- Είναι δυνατόν σε ορισμένες περιπτώσεις οι τιμές του δείκτη n να αρχίζουν από το 0, δηλαδή

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots \qquad (12.2.1 - 2)$$

όπως για παράδειγμα στη σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \dots$$

ή από κάποιο δείκτη n_0 με $n_0 > 1$, όπως

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n}{n-2} = 3 + 2 + \frac{5}{3} + \dots$$

όπου $n_0 = 3$.

- Οι τιμές του δείκτη n, ενώ **αρχίζουν** από κάποια τιμή, πρέπει τελικά να **τείνουν στο άπειρο**, διαφορετικά δεν ορίζεται σειρά.

  Επομένως ο τύπος

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} \quad \textbf{ορίζει} \text{ σειρά, ενώ ο}$$

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{n}{n^2+1} \quad \textbf{δεν ορίζει} \quad (\text{άθροισμα αριθμών}).$$

Παραδείγματα σειρών

Δίνονται στη συνέχεια μερικά γνωστά στον αναγνώστη παραδείγματα σειρών με το αντίστοιχο μερικό άθροισμα, όπου αυτό είναι δυνατόν να υπολογιστεί, τονίζοντας ότι στις περισσότερες περιπτώσεις ο υπολογισμός του τελικού τύπου του μερικού αθροίσματος είναι πολύ δύσκολος ή και αδύνατος.

Αρμονική σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}\,. \tag{12.2.1 - 3}$$

με μερικό άθροισμα της μορφής

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\,.$$

Γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n. \tag{12.2.1 - 4}$$

Το μερικό άθροισμα της γεωμετρικής σειράς δίνεται από τον τύπο

$$s_n = \frac{1-\omega^n}{1-\omega}\,, \quad \text{όταν} \quad \omega \neq 1, \tag{12.2.1 - 5}$$

Δεκαδική σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\psi_n}{10^n} = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \ldots \tag{12.2.1 - 6}$$

όπου ψ_0 ακέραιος αριθμός, και ψ_1, ψ_2, $\ldots$ ψηφία, δηλαδή ακέραιοι αριθμοί με $0 \leq \psi_n \leq 9$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.

12.2.2 Ορισμός σύγκλισης

Ορισμός 12.2.2 - 1. *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *λέγεται ότι* **συγκλίνει** *στον πραγματικό αριθμό* s *και συμβολίζεται αυτό με* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$ *τότε και μόνον, όταν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων* s_n *συγκλίνει στον αριθμό* s*, δηλαδή είναι*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n &= s, \text{ όταν} \\ \lim_{n\to+\infty} s_n &= \lim_{n\to+\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s. \end{aligned} \qquad (12.2.2 - 1)$$

Ο αριθμός s θα λέγεται και **άθροισμα** της σειράς.

Διευκρινίζεται στο σημείο αυτό, ότι σε αντίθεση με το άθροισμα πεπερασμένου πλήθους πραγματικών αριθμών που είναι πάντοτε ένας μονοσήμαντα ορισμένος πραγματικός αριθμός, το άθροισμα μιας σειράς ενδέχεται

- να υπάρχει, αλλά να μην είναι δυνατόν να υπολογιστεί το άθροισμά της,
- να μην υπάρχει.

Ορισμός 12.2.2 - 2. *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *λέγεται ότι* **απειρίζεται** *θετικά, αντίστοιχα αρνητικά και συμβολίζεται αυτό με* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$*, αντίστοιχα* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\infty$ *τότε και μόνον, όταν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων* s_n *απειρίζεται θετικά, αντίστοιχα αρνητικά, δηλαδή*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} s_n &= \lim_{n\to+\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = +\infty, \text{ αντίστοιχα } -\infty. \end{aligned} \qquad (12.2.2 - 2)$$

Στην περίπτωση αυτή λέγεται επίσης ότι η σειρά συγκλίνει **κατ' εκδοχή**.

Παράδειγμα 12.2.2 - 1

Η αρμονική σειρά $(12.2.1-4)$, δηλαδή η

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n} \quad \text{με μερικό άθροισμα} \quad s_n = 1+\frac{1}{2}++\ldots+\frac{1}{n}$$

αποδεικνύεται ότι απειρίζεται θετικά.[5]

Ορισμός 12.2.2 - 3. *Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ λέγεται ότι* **αποκλίνει ή κυμαίνεται** *τότε και μόνον, όταν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων s_n δεν συγκλίνει προς έναν συγκεκριμένο πραγματικό αριθμό, ούτε απειρίζεται θετικά ή αρνητικά.*

Σύγκλιση γεωμετρικής σειράς

Για τη γεωμετρική σειρά μερικό άθροισμα s_n της μορφής $(12.2.1-4)$, δηλαδή

$$s_n = \frac{1-\omega^n}{1-\omega}, \quad \text{όταν } \omega \neq 1,$$

διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις: αν

i) $|\omega| < 1$, τότε σύμφωνα με την Πρόταση 12.1.7 - 8 είναι $\lim \omega^n = 0$, οπότε

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\omega^n = \frac{1}{1-\omega}. \qquad (12.2.2\text{ - }3)$$

Παράδειγμα 12.2.2 - 2

Σύμφωνα με την $(12.2.2-3)$ είναι

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

ii) $\omega \geq 1$, τότε απειρίζεται θετικά, επειδή η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσα και μη φραγμένη.

[5] Βλέπε βιβλιογραφία.

Παράδειγμα 12.2.2 - 3

Η γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \quad \text{με} \quad \omega = 2 > 1 \quad \text{απειρίζεται θετικά.}$$

iii) $\boldsymbol{\omega \leq -1}$, αποκλίνει. Η γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \quad \text{με} \quad \omega = -1 \quad \text{αποκλίνει.}$$

Σύγκλιση δεκαδικής σειράς

Αποδεικνύεται ότι η δεκαδική σειρά συγκλίνει πάντοτε.

12.2.3 Ιδιότητα σύγκλισης

Εύκολα αποδεικνύεται η παρακάτω γραμμική ιδιότητα, που αφορά συγκλίνουσες σειρές:

Θεώρημα 12.2.3 - 1. *Αν* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a$ *και* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = b$, *τότε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\kappa a_n + \lambda b_n) = \kappa a + \lambda b \quad \textit{για κάθε } \kappa, \lambda \in \Re.$$

12.3 Σύγκλιση σειράς αριθμών

12.3.1 Αναγκαία συνθήκη σύγκλισης

Αρχικά δίνεται ο παρακάτω ορισμός, που καθορίζει τη μονοτονία των μερικών αθροισμάτων της σειράς:

Ορισμός 12.3.1 - 1. *Η ακολουθία* s_n *των μερικών αθροισμάτων της σειράς* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *λέγεται ότι είναι τελικά* **μονότονη** *τότε και μόνον, όταν τελικά όλοι οι όροι της σειράς είναι μη αρνητικοί ή μη θετικοί αριθμοί.*

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 12.3.1 - 1. *Μία σειρά που τελικά όλοι οι όροι της είναι μη αρνητικοί, αντίστοιχα μη θετικοί αριθμοί συγκλίνει, όταν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι φραγμένη και απειρίζεται, όταν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι μη φραγμένη.*

Θεώρημα 12.3.1 - 2 (αναγκαία συνθήκη). *Αν*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a, \quad \text{τότε} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει πάντοτε, όπως αυτό φαίνεται στην αρμονική σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{όπου} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

ενώ είναι ήδη γνωστό ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Παρατήρηση 12.3.1 - 1

Τα συμπεράσματα του Θεωρήματος 12.3.1 - 2 θα χρησιμοποιηθούν ως κριτήριο σύγκλισης του γραμμικού φάσματος της σειράς Fourier.[6]

12.3.2 Κριτήριο σύγκρισης

Θεώρημα 12.3.2 - 1. *Αν $|a_n| \leq c_n$ τελικά για όλους τους δείκτες και επιπλέον η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει.*

[6] Βλέπε *Μαθήματα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών - Σειρά Fourier.*

Παράδειγμα 12.3.2 - 1

Η σειρά

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots$$

συγκλίνει, επειδή

$$\frac{1}{n\cdot 2^n}<\frac{1}{2^n}$$

και η γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{συγκλίνει, επειδή} \quad \omega=\frac{1}{2}<1.$$

Θεώρημα 12.3.2 - 2. *Αν ισχύει $a_n\geq c_n\geq 0$ τελικά για όλους τους δείκτες και επιπλέον η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}c_n$ απειρίζεται θετικά, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ θα απειρίζεται θετικά.*

Παράδειγμα 12.3.2 - 2

Η σειρά

$$\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\ldots+\frac{\ln n}{n}+\ldots$$

αποκλίνει, επειδή $\ln n>\frac{1}{n}$ και η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει.

12.3.3 Κριτήρια σύγκλισης των Cauchy και d'Alembert

Είναι προφανές ότι τα Θεωρήματα 12.3.2 - 1 και 12.3.2 - 2 της Παραγράφου 12.3.2 έχουν περιορισμένες εφαρμογές, επειδή δεν είναι πάντοτε δυνατόν να προσδιοριστούν οι κατάλληλες σειρές για σύγκριση.

Δίνονται στη συνέχεια τα παρακάτω δύο κριτήρια, που κύρια εφαρμόζονται στον έλεγχο της σύγκλισης των σειρών:

Θεώρημα 12.3.3 - 1 (κριτήριο ριζών του Cauchy). *Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ μία σειρά και*

$$\theta=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}. \qquad (12.3.3\text{ - }1)$$

Τότε, αν

i) $\theta<1$ η σειρά συγκλίνει προς πεπερασμένο αριθμό,

ii) $\theta > 1$ *η σειρά δεν συγκλίνει προς πεπερασμένο αριθμό,*

iii) $\theta = 1$ *δεν είναι γνωστό αν η σειρά συγκλίνει.*

Παράδειγμα 12.3.3 - 1

Η σειρά

$$\frac{2}{1} + \left(\frac{3}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n + \ldots$$

συγκλίνει, επειδή

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{2} = \theta < 1.$$

Θεώρημα 12.3.3 - 2 (κριτήριο πηλίκων d'Alembert).[7] *Έστω* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *μία σειρά με* $a_n \neq 0$ *τελικά για όλους τους δείκτες και*

$$\theta = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad (12.3.3 - 2)$$

Τότε, αν

i) $\theta < 1$ *η σειρά συγκλίνει προς πεπερασμένο αριθμό,*

ii) $\theta > 1$ *η σειρά δεν συγκλίνει προς πεπερασμένο αριθμό,*

iii) $\theta = 1$ *το κριτήριο δεν εφαρμόζεται.*

Παράδειγμα 12.3.3 - 2

Η σειρά

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \ldots + \frac{2n-1}{3^n} + \ldots$$

συγκλίνει, επειδή

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2(n+1)-1}{3^{n+1}}}{\frac{2n-1}{3^n}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2n-1}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} = \theta < 1.$$

[7] Πολλές φορές λέγεται και κριτήριο του λόγου.

Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο σύγκρισης να εξεταστεί αν συγκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

i) $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\ldots$ *iii)* $2+\frac{2^2}{2}+\ldots+\frac{2^n}{n}+\ldots$

ii) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)^2}+\ldots$ *iv)* $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$.

2. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές, που οι γενικοί τους όροι a_n είναι:

i) $\frac{n}{2^n}$

ii) $\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

iii) $\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$

iv) $\frac{n\,!}{n^2}$

v) $\frac{n\,!}{5^n}$

vi) e^{-n^2}

vii) $\ln^n n$

viii) $\frac{3^n\,n\,!}{n^n}$

12.4 Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων

12.4.1 Απλή σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων

Γενικεύοντας τον Ορισμό 12.1.1 - 2 της ακολουθίας των πραγματικών αριθμών,[8] έστω ότι οι όροι της ακολουθίας $(a_\nu)\,;\,\nu\in\mathbb{N}$ έχουν τη μορφή

$$\frac{x}{1^2}\,,\frac{x}{2^2}\,,\ldots,\frac{x}{\nu^2}\,,\ldots \quad \text{ή} \quad e^{-x^1},\,e^{-x^2},\,\ldots,\,e^{x^\nu},\,\ldots, \quad \text{κ.λπ.}$$

Είναι προφανές ότι στην περίπτωση αυτή κάθε όρος της ακολουθίας και κατά συνέπεια και ο γενικός της όρος $(a_\nu)\,;\,\nu\in\mathbb{N}$, θα εξαρτάται εκτός του ν και από το x, δηλαδή θα είναι $a_\nu=a_\nu(x);\,\nu\in\mathbb{N}$. Τότε όμως στους όρους της

[8] **Ορισμός.** *Ορίζεται ως* ακολουθία των πραγματικών αριθμών *κάθε μονοσήμαντη απεικόνιση του συνόλου* $\mathbb{N}$ *των φυσικών αριθμών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών* $\mathbb{R}$.

ακολουθίας πρέπει εκτός από τις τιμές του δείκτη ν να είναι γνωστό και το πεδίο ορισμού, έστω $\mathcal{D}$, της μεταβλητής x.

Εφόσον το x είναι πραγματικός αριθμός, οι παραπάνω ακολουθίες $a_\nu(x)$; $\nu \in \mathbb{N}$ θα λέγονται στο εξής ακολουθίες πραγματικών συναρτήσεων ή απλά **ακολουθίες συναρτήσεων** και για διάκριση από τις αντίστοιχες ακολουθίες των πραγματικών αριθμών θα συμβολίζονται με

$$f_\nu(x); \qquad \nu \in \mathbb{N}, \quad \text{όταν} \quad x \in \mathcal{D} \quad \text{ή απλά}$$

$$f_\nu | \mathcal{D} \qquad \text{για κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Η έννοια της σύγκλισης μιας ακολουθίας συναρτήσεων μεταφέρεται ανάλογα και στην περίπτωση αυτή με τη διαφορά ότι το όριο, εφόσον υπάρχει, θα είναι συνάρτηση και θα λέγεται **οριακή τιμή** ή και **όριο** της ακολουθίας $f_\nu \,|\, \mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Τότε ο Ορισμός 12.1.1 - 2 διατυπώνεται ως εξής:[9]

Ορισμός 12.4.1 - 3. *Η ακολουθία $f_\nu \,|\, \mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ λέγεται ότι* **συγκλίνει κατά σημείο** *ή διαφορετικά ότι* **συγκλίνει απλά** *προς τη συνάρτηση f, όταν για κάθε $x \in \mathcal{D}$ ισχύει*

$$\lim_{\nu \to +\infty} f_\nu(x) = f(x) \tag{12.4.1 - 1}$$

ή ισοδύναμα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\varepsilon, x) > 0$, έτσι ώστε

$$|f_\nu(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{D} \text{ και } \nu \geq \mathbb{N}.$$

---

[9] **Ορισμός.** *Θα λέγεται ότι μία ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$* **συγκλίνει** *στον πραγματικό αριθμό a ή τείνει στον αριθμό a ή το όριό της είναι ο αριθμός a και αυτό θα συμβολίζεται με $a_\nu \to a$ ή $\lim_{\nu->+\infty} a_\nu = a$ ή επίσης $\lim a_\nu = a$ τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, δηλαδή δείκτης που εξαρτάται γενικά από το ε, τέτοιος ώστε να ισχύει*

$$|a_\nu - a| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } \nu \geq \nu_0(\varepsilon).$$

Στην ειδική περίπτωση που είναι $a = 0$, δηλαδή $\lim a_\nu = 0$, η ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ θα λέγεται **μηδενική**.

Έστω τώρα ότι ο γενικός όρος f_n μιας σειράς περιέχει εκτός από το n και μία ανεξάρτητη μεταβλητή, έστω x με $x \in \mathcal{D}$. Τότε η προκύπτουσα σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \quad \text{με } x \in \mathcal{D} \tag{12.4.1 - 2}$$

λέγεται **σειρά συναρτήσεων**.

Ορισμός 12.4.1 - 4. *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *λέγεται ότι* **συγκλίνει** *για κάθε* $x \in \mathcal{D}$ *τότε και μόνον, όταν*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x). \tag{12.4.1 - 3}$$

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση $f(x)$ λέγεται **άθροισμα** της σειράς.

Στο σημείο αυτό πρέπει να εξεταστεί κατά πόσο ιδιότητες της παραπάνω ακολουθίας συναρτήσεων $f_\nu \,|\, \mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, όπως η

- συνέχεια,
- ολοκλήρωση, και
- η παραγώγιση

μεταβιβάζονται και στην οριακή συνάρτηση, δηλαδή την f.

Πριν δοθεί απάντηση στα ερωτήματα αυτά, αναφέρονται μερικά παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση του θέματος.

Συνέχεια

Παράδειγμα 12.4.1 - 1

Έστω η ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων

$$f_\nu(x) = (1+x)^\nu \quad \text{με } -1 \le x \le 0.$$

Τότε για κάθε x με $x \neq 0$ είναι

$$\lim_{\nu \to +\infty} f_\nu(x) = \lim_{\nu \to +\infty} (1+x)^\nu = 0 = f(x),$$

ενώ

$$f(0) = \lim_{\nu \to +\infty} f_\nu(0) = 1.$$

Άρα η οριακή συνάρτηση της παραπάνω ακολουθίας έχει τη μορφή

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x = 0, \end{cases}$$

που εύκολα διαπιστώνεται ότι δεν είναι συνεχής στο $x = 0$.

Παράδειγμα 12.4.1 - 2

Όμοια, έστω η ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων

$$f_\nu(x) = \frac{x^{2\nu}}{(1+x^2)^\nu} \quad \text{με} \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Τότε, επειδή η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ ορίζει μια γεωμετρική πρόοδο με λόγο

$$\omega = \frac{x^2}{1+x^2} < 1,$$

θα πρέπει σύμφωνα με τον τύπο $(12.2.2-3)$ να ισχύει

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n \\ &= f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\omega} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{1+x^2}} = 1+x^2 & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Επομένως για την οριακή συνάρτηση της σειράς ισχύει ότι

$$f(0) = 0 \neq 1 = \lim_{x \to 0} f(x),$$

δηλαδή δεν είναι συνεχής.

Από τα Παραδείγματα 12.4.1 - 1 και 12.4.1 - 2 προκύπτει ότι *μία συγκλίνουσα σειρά συνεχών συναρτήσεων είναι δυνατόν να έχει άθροισμα μη συνεχή συνάρτηση*.

Ολοκλήρωση

Παράδειγμα 12.4.1 - 3

Έστω η ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων

$$f_\nu(x) = \nu x \left(1 - x^2\right)^\nu \quad \text{με} \quad 0 \le x \le 1.$$

Τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι, αν $0 \le x \le 1$, είναι

$$\lim_{\nu \to +\infty} f_\nu(x) = 0 = f_\nu(0).$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \to +\infty} \int_0^1 f_\nu(x)\, dx &= \lim_{\nu \to +\infty} \left\{ \nu \int_0^1 x \left(1 - x^2\right)^\nu \, dx \right\} \\
&= -\lim_{\nu \to +\infty} \frac{\nu}{2} \frac{\left(1 - x^2\right)^{\nu+1}}{\nu + 1} \Bigg|_0^1 \\
&= \lim_{\nu \to +\infty} \frac{\nu}{2(\nu + 1)} = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Αλλά

$$\int_0^1 \left[\lim_{\nu \to +\infty} f_\nu(x) \right] dx = \int_0^1 0\, dx = 0,$$

δηλαδή

$$\lim_{\nu \to +\infty} \int_0^1 f_\nu(x)\, dx \neq \int_0^1 \left[\lim_{\nu \to +\infty} f_\nu(x) \right] dx$$

που σημαίνει ότι *η τιμή του ολοκληρώματος της οριακής συνάρτησης δεν είναι ίση με την οριακή τιμή του ολοκληρώματος της ακολουθίας των συναρτήσεων*.

Παραγώγιση

Παράδειγμα 12.4.1 - 4

Έστω η ακολουθία των συναρτήσεων

$$f_\nu(x) = \frac{\sin(\nu x)}{\nu} \quad \text{με } x \in \Re.$$

Τότε

$$\lim_{\nu \to +\infty} |f_\nu(x)| = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{|\sin \nu x|}{\nu} \leq \lim_{\nu \to +\infty} \left(\frac{1}{\nu}\right) = 0 = f(x).$$

Αλλά $f'_\nu(x) = \cos \nu x$, ενώ είναι γνωστό ότι η οριακή τιμή

$$\lim_{\nu \to +\infty} f'_\nu(x) = \lim_{\nu \to +\infty} \cos \nu x$$

δεν ορίζεται.[10] Άρα όμοια με τις παραπάνω δύο άλλες περιπτώσεις έχουμε επίσης ότι *η τιμή της παραγώγου της οριακής συνάρτησης δεν είναι ίση με την οριακή τιμή της παραγώγου της ακολουθίας των συναρτήσεων*.

Από τα Παραδείγματα 12.4.1 - 1 έως και 12.4.1 - 4 άμεσα προκύπτει ότι **δεν** μεταβιβάζονται πάντοτε ιδιότητες των συγκλινουσών συναρτήσεων στην οριακή συνάρτηση. Προκειμένου να δοθεί απάντηση στο ερώτημα με ποιες συνθήκες γίνεται η μεταβίβαση των ιδιοτήτων και στην οριακή συνάρτηση, απαιτείται ο ορισμός μιας σύγκλισης ισχυρότερης εκείνης της απλής. Η σύγκλιση αυτή δίνεται στην παράγραφο που ακολουθεί.

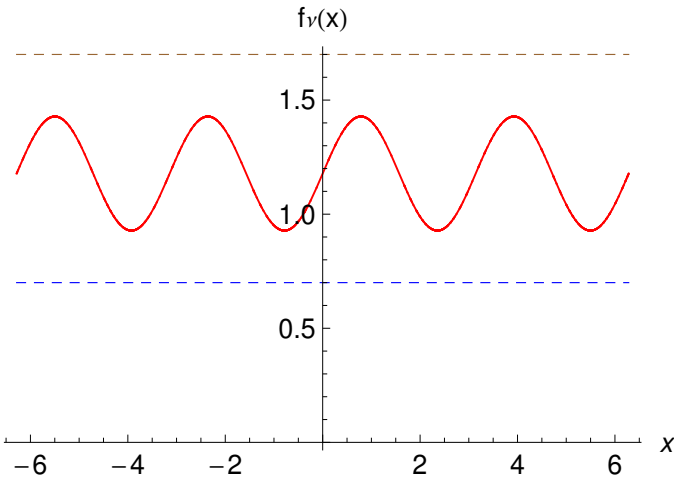
12.4.2 Ομαλή σύγκλιση ακολουθιών και σειρών συναρτήσεων

Ομαλή σύγκλιση ακολουθιών

Ορισμός 12.4.2 - 1. *Μία ακολουθία συναρτήσεων $f_\nu \,|\, \mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ λέγεται ότι συγκλίνει* **ομαλά** *ή* **ομοιόμορφα** *(uniform convergent) προς τη συνάρτηση f επί του συνόλου $\mathcal{D}$ και συμβολίζεται αυτό με $f_\nu \Rightarrow f$ τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει αριθμός $N = N(\varepsilon)$, που εξαρτάται μόνον από το ε, έτσι ώστε*

$$|f_\nu(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{D} \text{ με } \nu \geq \mathbb{N}. \qquad (12.4.2 - 1)$$

[10] Βλέπε Μάθημα *Συνέχεια Συνάρτησης - Ασυνέχεια του 2ου είδους.*



Σχήμα 12.4.2 - 1: ομαλή σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων. Η κόκκινη καμπύλη είναι το διάγραμμα της $f_\nu(x)$; $\nu \geq \mathbb{N}$, η διακεκομμένη καφέ της $f(x)+\varepsilon$ και η διακεκομμένη μπλε της $f(x)-\varepsilon$.

Από τον Ορισμό 12.4.2 - 1 προκύπτουν τα εξής:

- η σχέση $|f_\nu(x)-f(x)|<\varepsilon$ ισοδυναμεί με

$$f(x)-\varepsilon < f_\nu(x) < f(x)+\varepsilon.$$

  Άρα η γραφική παράσταση της $f_\nu(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{D}$ και $\nu \in \mathbb{N}$ περιέχεται μεταξύ των ευθειών $f(x)-\varepsilon$ και $f(x)+\varepsilon$ (Σχ. 12.4.2 - 1).

- Συγκρίνοντας με τον Ορισμό 12.4.1 - 3 της απλής σύγκλισης προκύπτει ότι, αν η ακολουθία $f_\nu\,|\,\mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει ομαλά, τότε θα συγκλίνει και απλά, χωρίς να ισχύει το αντίστροφο πάντοτε. Κατά συνέπεια η ομαλή σύγκλιση είναι **ισχυρότερη** της απλής.

Επίσης προκύπτουν οι παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση 12.4.2 - 1. *Αν η ακολουθία συναρτήσεων $f_\nu\,|\,\mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει ομαλά προς τη συνάρτηση f, τότε και η ακολουθία $|f_\nu|\,|\,\mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει ομαλά προς τη συνάρτηση $|f|$ επί του $\mathcal{D}$.*

Πρόταση 12.4.2 - 2. *Έστω ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_\nu \,|\, \mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει ομαλά προς τη συνάρτηση f επί του $\mathcal{D}$ όπου $f(\mathcal{D}) \subseteq [a,b]$. Αν g είναι μία συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$, τότε η ακολουθία των σύνθετων συναρτήσεων $g \circ f_\nu \,|\, D$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει ομαλά προς τη σύνθετη συνάρτηση $g \circ f$ επί του $\mathcal{D}$.*

Σύμφωνα με την Πρόταση 12.4.2 - 2 για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, αν

$$
\begin{array}{llllll}
g(x) & = & |x|, & \text{τότε} \quad g\left(f_\nu\right) & = & \left|f_\nu\right|, \\
g(x) & = & x^a & g\left(f_\nu\right) & = & f_\nu^a \quad \text{με} \quad f_\nu \geq 0 \quad \text{και} \quad a \in \mathbb{N}, \\
g(x) & = & \sin x & g\left(f_\nu\right) & = & \sin\left(f_\nu\right), \\
g(x) & = & e^x & g\left(f_\nu\right) & = & e^{f_\nu}, \\
g(x) & = & \ln x & g\left(f_\nu\right) & = & \ln f_\nu \quad \text{με} \quad f_\nu > 0, \quad \text{κ.λπ.}
\end{array}
$$

έχουμε την υπό ορισμένες συνθήκες ομαλή σύγκλιση των αντίστοιχων σύνθετων συναρτήσεων.

Ομαλή σύγκλιση σειρών

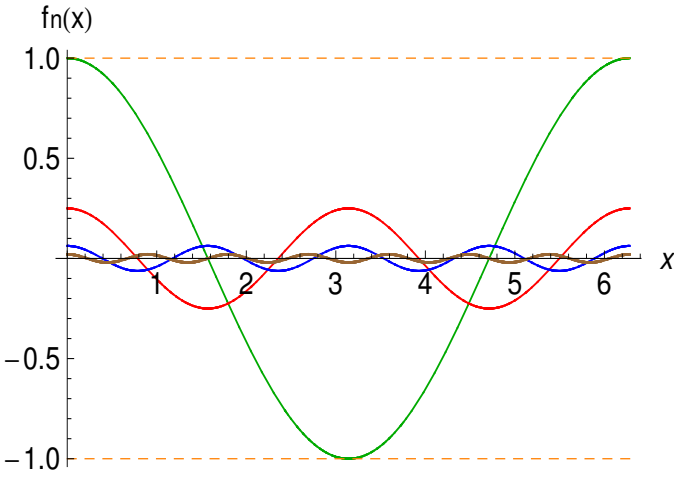
Ορισμός 12.4.2 - 2. *Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ θα συγκλίνει ομαλά επί του D τότε και μόνον, όταν η ακολουθία $(s_n);\ n \in \mathbb{N}$ των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει ομαλά επί του D.*

Δίνονται στη συνέχεια τα περισσότερο χρησιμοποιούμενα στις εφαρμογές κριτήρια, που εξασφαλίζουν την ομαλή σύγκλιση μιας σειράς. Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

Θεώρημα 12.4.2 - 1 (κριτήριο του Weierstrass). *Έστω η ακολουθία συναρτήσεων f_ν για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ορισμένη επί του $\mathcal{D}$ και a_ν για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ μία ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια, ώστε*

$$|f_\nu(x)| \leq a_\nu \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathcal{D} \quad \text{και} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Τότε, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ θα συγκλίνει ομαλά και απόλυτα επί του D.



Σχήμα 12.4.2 - 2: Παράδειγμα 12.4.2 - 1: διάγραμμα $f_1(x)$ πράσινη, $f_2(x)$ κόκκινη, $f_4(x)$ μπλε και $f_7(x)$ καφέ καμπύλη, όταν $x \in [0, 2\pi]$.

Παράδειγμα 12.4.2 - 1

Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad \text{με γενικό όρο} \quad f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad (\Sigma\chi.\ 12.4.2 - 2)$$

συγκλίνει ομαλά και απόλυτα επί του διαστήματος $[0, 2\pi]$, επειδή

$$0 \leq \left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

συγκλίνει.

Παράδειγμα 12.4.2 - 2

Έστω η σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{με} \quad |x| < 1.$$

Επειδή $|x| < 1$, η σειρά συγκλίνει απλά (γεωμετρική σειρά με λόγο $|\omega| < 1$) και το άθροισμά της ισούται με

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,.$$

Εξετάζεται τώρα, αν συγκλίνει και ομαλά. Είναι

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \;-\; \frac{1}{1-x} \right| = \left| x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots \right|$$

όπου, όταν $0 < x < 1$, είναι $\left| x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots \right| > x^{n+1}$. Άρα

$$s_n = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \;-\; \frac{1}{1-x} \right| \geq x^{n+1} \geq 1$$

για κάθε $x \in (0,1)$, δηλαδή η σύγκλιση δεν είναι ομαλή.

Θεώρημα 12.4.2 - 2 (κριτήριο d'Alembert). *Έστω η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \qquad (12.4.2\text{ - }2)$$

όπου για τις συναρτήσεις $f_n \,|\, \mathcal{D}$ ισχύει ότι

$$0 < |f_n(x)| \leq \theta_n \quad \textit{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N} \quad \textit{και} \quad x \in D,$$

όταν θ_n σταθεροί θετικοί αριθμοί. Τότε, αν υπάρχει k με $0 < k < 1$ τέτοιος, ώστε

$$\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| \leq k \qquad (12.4.2\text{ - }3)$$

τελικά για όλους τους δείκτες, η σειρά $(12.4.2-2)$ συγκλίνει ομαλά επί του $\mathcal{D}$.

Τα παρακάτω θεωρήματα αναφέρονται στη μεταβίβαση ιδιοτήτων στην οριακή συνάρτηση μιας ακολουθίας, αντίστοιχα μιας σειράς συναρτήσεων.

Ομαλή σύγκλιση και συνέχεια

Θεώρημα 12.4.2 - 3. *Έστω ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_\nu \,|\, \mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει ομαλά επί του $\mathcal{D}$ προς τη συνάρτηση f. Αν καθεμιά από τις συναρτήσεις f_ν είναι συνεχής σε ένα σημείο, έστω x_0 με $x_0 \in \mathcal{D}$, τότε και η συνάρτηση f θα είναι συνεχής στο x_0.*

Παρατηρήσεις 12.4.2 - 1

i) Σύμφωνα με το Θεώρημα 12.4.2 - 3 ισχύει

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \left[\lim_{\nu \to +\infty} f_\nu(x) \right] &= \lim_{x \to x_0} [f(x)] = f(x_0) \\ &= \lim_{\nu \to +\infty} f_\nu(x_0) \qquad (12.4.2 - 4) \\ &= \lim_{\nu \to +\infty} \left[\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right]. \end{aligned}$$

ii) Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.

Πόρισμα 12.4.2 - 1. *Αν η σειρά των συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει ομαλά προς μία συνάρτηση f επί του $\mathcal{D}$ και κάθε όρος της σειράς είναι μία συνεχής συνάρτηση στο σημείο x_0 με $x_0 \in \mathcal{D}$, τότε και η συνάρτηση f θα είναι συνεχής στο x_0.*

Παρατήρηση 12.4.2 - 1

Μία άμεση συνέπεια του παραπάνω πορίσματος είναι ότι επιτρέπεται στην περίπτωση της ομαλής σύγκλισης η εισαγωγή του συμβόλου του ορίου εντός του αθροίσματος της σειράς, δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0). \qquad (12.4.2 - 5)$$

Ομαλή σύγκλιση και ολοκλήρωση

Θεώρημα 12.4.2 - 4. *Έστω ότι η ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων $f_\nu \,|\, \mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει ομαλά επί του $\mathcal{D}$, όπου $\mathcal{D} = [a, b]$, προς*

τη συνάρτηση f. Τότε ισχύει

$$\lim_{\nu \to +\infty} \int_a^b f_\nu(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (12.4.2\text{ - }6)$$

Παρατήρηση 12.4.2 - 2

Σύμφωνα με το Θεώρημα 12.4.2 - 4 θα ισχύει

$$\lim_{\nu \to +\infty} \int_a^b f_\nu(x)\,dx = \int_a^b \left[\lim_{\nu \to +\infty} f_\nu(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (12.4.2\text{ - }7)$$

Πόρισμα 12.4.2 - 2. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ των συνεχών συναρτήσεων επί του $\mathcal{D} = [a,b]$ συγκλίνει ομαλά επί του $\mathcal{D}$ προς τη συνάρτηση $f(x)$, τότε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (12.4.2\text{ - }8)$$

Άρα όμοια επιτρέπεται στην περίπτωση της ομαλής σύγκλισης η εισαγωγή του συμβόλου $\lim_{\nu \to +\infty}$, αντίστοιχα του $\sum_{n=1}^{+\infty}$ εντός του συμβόλου της ολοκλήρωσης.

Ομαλή σύγκλιση και παραγώγιση

Θεώρημα 12.4.2 - 5. *Αν μία ακολουθία συναρτήσεων $f_\nu \,|\, \mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει σε ένα σημείο x_0 με $x_0 \in \mathcal{D}$ όπου $\mathcal{D} = (a,b)$, υπάρχει η παράγωγος των όρων της ακολουθίας στο $\mathcal{D}$ και επιπλέον η ακολουθία των όρων της συγκλίνει ομαλά προς μία συνάρτηση, έστω $p(x)$ επί του $\mathcal{D}$, τότε*

i) η ακολουθία των συναρτήσεων $f_\nu \,|\, \mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει ομαλά προς μία συνάρτηση, έστω f,

ii) υπάρχει η παράγωγος f' της οριακής συνάρτησης και ισχύει

$$f'(x) = p(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathcal{D}. \qquad (12.4.2\text{ - }9)$$

Παρατήρηση 12.4.2 - 3

Σύμφωνα με το Θεώρημα 12.4.2 - 5 ισχύει

$$\left[\lim_{\nu \to +\infty} f_\nu(x)\right]' = \lim_{\nu \to +\infty} f'_\nu(x) = f'(x). \qquad (12.4.2 - 10)$$

Πόρισμα 12.4.2 - 3. *Αν*

i) *η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *συγκλίνει για ένα* $x_0 \in \mathcal{D}$ *όπου* $\mathcal{D} = (a, b)$,

ii) *υπάρχει η παράγωγος* $f'_n(x)$; $n = 1, 2, \ldots$ *για κάθε* $x \in \mathcal{D}$,

iii) *η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$ *συγκλίνει ομαλά επί του* $\mathcal{D}$,

τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *συγκλίνει ομαλά προς μία συνάρτηση, έστω* $f(x)$ *επί του* $\mathcal{D}$, *της οποίας υπάρχει η παράγωγος* $f'(x)$ *και ισχύει*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = f'(x) \quad \textit{για κάθε} \quad x \in \mathcal{D}. \qquad (12.4.2 - 11)$$

Η σχέση $(12.4.2 - 11)$ γράφεται

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{d\, f_n(x)}{dx}\right] \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathcal{D} \qquad (12.4.2 - 12)$$

και αποτελεί γενίκευση για σειρές συναρτήσεων της ήδη γνωστής σχέσης για αθροίσματα

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{k} f_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{k} \frac{d\, f_n(x)}{dx}\,.$$

Επομένως και στην περίπτωση αυτή ισχύει ανάλογη παρατήρηση για την εισαγωγή του τελεστή παραγώγισης d/dx στους όρους της ακολουθίας, αντίστοιχα της σειράς συναρτήσεων.

12.4.3 Τριγωνομετρική σειρά

Ορισμός 12.4.3 - 1. *Η σειρά*

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots \\ = \quad & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,, \end{aligned} \tag{12.4.3 - 1}$$

όταν $x \in \mathbb{R}$ *και* $a_0,\ a_n,\ b_n \in \mathbb{R}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *οι συντελεστές, λέγεται* τριγωνομετρική σειρά.

Είναι προφανές ότι κάθε όρος της τριγωνομετρικής σειράς είναι μια περιοδική συνάρτηση. Σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstrass (Θεώρημα 12.4.2 - 1), αν η σειρά

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\,|\,a_n\,| + |\,b_n\,|\,) \tag{12.4.3 - 2}$$

συγκλίνει, τότε και η τριγωνομετρική σειρά θα συγκλίνει ομαλά προς μια όμοια περιοδική συνάρτηση, έστω $f(x)$, δηλαδή

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = f(x). \tag{12.4.3 - 3}$$

Αποδεικνύεται ότι, αν η $f(x)$ είναι μία περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο, έστω $T = 2\pi$, που είναι δυνατό να παρασταθεί με τη μορφή της τριγωνομετρικής σειράς $(12.4.3 - 1)$, τότε οι συντελεστές δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad \text{και για κάθε} \quad n \in \mathbb{N} \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx. \end{aligned} \tag{12.4.3 - 4}$$

Παρατήρηση 12.4.3 - 4

Λόγω της περιοδικότητας της f το διάστημα ολοκλήρωσης $[-\pi, \pi]$ στους τύπους $(12.4.3-4)$ είναι δυνατό να αντικατασταθεί με κάθε άλλο διάστημα πλάτους 2π, όπως $[0, 2\pi]$, κ.λπ., όταν αυτό εξυπηρετεί στον υπολογισμό των συντελεστών της σειράς.

Σύμφωνα και με την Παρατήρηση 12.4.3 - 4 γενικότερα αποδεικνύεται ότι, αν T είναι η θεμελιώδης περίοδος της περιοδικής συνάρτησης $f\,|\,\mathcal{D}$, όταν D διάστημα του πεδίου ορισμού της f πλάτους T, τότε οι συντελεστές της τριγωνομετρικής σειράς $(12.4.3-1)$ δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_{\mathcal{D}} f(x)\,dx, \quad \text{και για κάθε} \quad n \in \mathbb{N} \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_{\mathcal{D}} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)\,dx, \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_{\mathcal{D}} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)\,dx, \qquad (12.4.3\text{ - }5)
\end{aligned}
$$

που λέγονται επίσης και **τύποι του Euler**. Η σειρά $(12.4.3-1)$ είναι επίσης γνωστή και ως η **σειρά Fourier** για την περιοδική συνάρτηση f με συντελεστές Fourier που δίνονται από τους τύπους $(12.4.3-5)$.

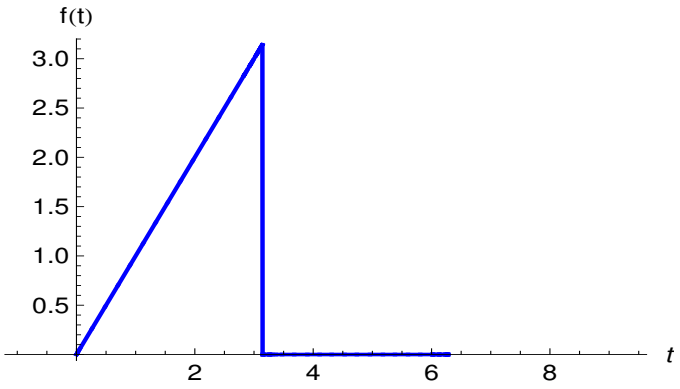
Παράδειγμα 12.4.3 - 1

[11] Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση $\quad (\Sigma\chi.\ 12.4.3\text{ - }1)$

$$
f(t) = \begin{cases} \dfrac{20}{\pi}x, & \text{όταν} \quad 0 \le x < \pi \\ 0, & \text{όταν} \quad \pi \le x < 2\pi \end{cases} \qquad \text{με } f(x+2\pi) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.
$$

Σύμφωνα με τους τύπους $(12.4.3-5)$ έχουμε

[11] Για εφαρμογές βλέπε Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 2.



Σχήμα 12.4.3 - 1: Παράδειγμα 12.4.3 - 1: η συνάρτηση $f(x)$ στη θεμελιώδη περίοδο.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{20}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\,dx = 10, \\
b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{20}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{20}{\pi^2}\,\frac{\cos(nx)+nx\sin(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{20}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right], \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{20}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{20}{\pi^2}\,\frac{\sin(nx)-nx\cos(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi} = -\frac{20}{n\pi}\cos(n\pi) = -\frac{20}{n\pi}(-1)^n,
\end{aligned}
$$

οπότε η αντίστοιχη σειρά Fourier είναι

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 5 - 4.05\cos x - 0.45\cos 3x - 0.16\cos 5x - \ldots \\
&\quad +6.37\sin x - 3.18\sin 2x + 2.12\sin 3x - \ldots .
\end{aligned}
$$

Ασκήσεις

1. Να μελετηθεί ως προς την ομαλή σύγκλιση η παρακάτω ακολουθία συναρτήσεων:

$$f_\nu(x) = \frac{\nu\, x}{1+\nu^2 x^2} \quad \text{για κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

2. Όμοια ως προς την ομαλή σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2 x}\,, \quad \text{όταν} \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Δείξτε ότι

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}\,.$$

4. Να αναπτυχθούν σε σειρά Fourier οι παρακάτω περιοδικές συναρτήσεις $f(x)$, που ο περιορισμός τους στη θεμελιώδη περίοδο είναι:

i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad -\pi \le x < \pi \\ 0 & \text{αν} \quad \pi \le x < 3\pi \end{cases}$

ii) $f(x) = x\,; \quad 0 \le x < 1$

iii) $f(x) = e^x\,; \quad 0 \le x < 1$

iv) $f(x) = |\sin x|.$

12.4.4 Δυναμοσειρές

Ορισμός 12.4.4 - 1. *Κάθε σειρά της μορφής*[12]

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \textit{αντίστοιχα} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x-x_0)^n \qquad (12.4.4\text{ - }1)$$

με συντελεστές τους πραγματικούς αριθμούς a_n*;* $n = 1, 2, \ldots$ *και* $x \in \mathbb{R}$ *λέγεται* **δυναμοσειρά** *(power series) ή* **ακέραια** *σειρά με κέντρο το* 0*, αντίστοιχα το* x_0*.*

Σχετικά με τη σύγκλιση των δυναμοσειρών ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

[12] Βλέπε βιβλιογραφία και: *https://en.wikipedia.org/wiki/Power_series*

Θεώρημα 12.4.4 - 1. *Έστω η δυναμοσειρά*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n, \quad \text{αντίστοιχα η} \tag{12.4.4 - 2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n . \tag{12.4.4 - 3}$$

Αν σύμφωνα με το κριτήριο σύγκλισης των ριζών είναι

$$d = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

ή το κριτήριο του λόγου

$$d = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \tag{12.4.4 - 4}$$

τότε, αν

i) $d = 0$, *οι δυναμοσειρές συγκλίνουν για κάθε* $x \in \mathbb{R}$,

ii) $d = +\infty$, *η δυναμοσειρά*

- $(12.4.4 - 2)$ *συγκλίνει μόνον, όταν* $x = 0$, *αντίστοιχα η*
- $(12.4.4 - 3)$, *όταν* $x = x_0$,

iii) $d \neq 0, +\infty$, *έστω*

$$r = \frac{1}{d} \quad (\text{τύπος των Cauchy-Hadamard}). \tag{12.4.4 - 5}$$

Τότε η δυναμοσειρά $(12.4.4 - 2)$*:*

- *συγκλίνει για κάθε* $x \in (-r, r)$,
- *δεν συγκλίνει, όταν* $|x| > r$, *ενώ για*
- $x = \pm r$ *δεν είναι γνωστό αν συγκλίνει.*

Η δυναμοσειρά $(12.4.4 - 3)$*:*

- *συγκλίνει για κάθε* $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$,

- *δεν συγκλίνει, όταν* $|x - x_0| > r$, *ενώ για*
- $x - x_0 = \pm r$ *δεν είναι γνωστό αν συγκλίνει.*

Παρατηρήσεις 12.4.4 - 2

Αν είναι:

- $d \neq 0, +\infty$, τότε ο θετικός αριθμός $r = 1/d$ ορίζει την **ακτίνα** σύγκλισης της δυναμοσειράς, ενώ το $(-r, r)$, αντίστοιχα το $(x_0 - r, x_0 + r)$ το **διάστημα** σύγκλισης,
- $d = 0,$ είναι $r = +\infty$ το $\mathbb{R}$,
- $d = +\infty,$ ορίζεται ότι είναι $r = 0$, αντίστοιχα $r = x_0$, ενώ το διάστημα σύγκλισης συμπίπτει με το σημείο 0, αντίστοιχα το x_0.

Παράδειγμα 12.4.4 - 1

Έστω η σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n\,!}\,,$$

που ορίζει μια δυναμοσειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x - x_0)^n \quad \text{με κέντρο} \quad x_0 = 1 \quad \text{και} \quad a_n = \frac{1}{n\,!}\,.$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου έχουμε

$$d = \lim_{n\,\to\,+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\,\to\,+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)\,!}}{\frac{1}{n\,!}} = \lim_{n\,\to\,+\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

όταν

$$(n+1)\,! = 1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1) \quad \text{και} \quad n\,! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = +\infty$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 12.4.4 - 2

Έστω η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n},$$

που ορίζει μια δυναμοσειρά της μορφής

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, x^n \quad \text{με κέντρο} \quad x_0 = 0 \quad \text{και} \quad a_n = \frac{1}{n}.$$

Όμοια εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου έχουμε

$$d = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = 1$ και το διάστημα σύγκλισης το $(-1, 1)$.

Στο άκρο $x = -1$ η δυναμοσειρά αποδεικνύεται ότι συγκλίνει, ενώ στο άκρο $x = 1$ απειρίζεται (αρμονική σειρά).

Παράδειγμα 12.4.4 - 3

Έστω η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)^2},$$

που όμοια ορίζει μια δυναμοσειρά της μορφής

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, (x - x_0)^n \quad \text{με κέντρο} \quad x_0 = -2 \quad \text{και} \quad a_n = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Όμοια με το κριτήριο του λόγου έχουμε

$$d = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{(n+1+1)^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2 = 1,$$

οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = 1$ και το διάστημα σύγκλισης το

$$(x_0 - r, x_0 + r) = (2 - 1, 2 + 1), \quad \text{δηλαδή το} \quad (1, 3).$$

Στο άκρο $x=1$, αντίστοιχα $x=3$ έχουμε τις σειρές των αριθμών

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{(n+1)^2}\,, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n}{(n+1)^2}$$

οπότε εφαρμόζοντας το κριτήριο πηλίκων του d'Alembert έχουμε

$$\begin{aligned}\theta &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+2)^2}}{\frac{3^n}{(n+1)^2}} = 3\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\\ &= 3>1,\end{aligned}$$

δηλαδή απειρίζεται. Όμοια απειρίζεται και η άλλη σειρά, επειδή $\tilde{\theta}=5>1$.

Παράδειγμα 12.4.4 - 4

Έστω η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(x+1)^n\,,$$

που όμοια ορίζει μια δυναμοσειρά της μορφής

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\,(x-x_0)^n \quad \text{με κέντρο} \quad x_0=-1 \quad \text{και} \quad a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\,.$$

Τότε σύμφωνα με το κριτήριο της ρίζας είναι

$$d=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $r=1$ και το διάστημα σύγκλισης

$$(x_0-r,x_0+r)=(-1-1,-1+1), \quad \text{δηλαδή το} \quad (-2,0) \quad \text{κ.λπ.}$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω θεώρημα παραγώγισης και ολοκλήρωσης δυναμοσειρών:

Θεώρημα 12.4.4 - 2. *Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)\,|\,\mathcal{D}$ αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά της μορφής*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,(x-x_0)^n$$

και ότι r είναι η ακτίνα σύγκλισής της. Τότε η f

i) είναι συνεχής στο διάστημα $\mathcal{D} = (x_0 - r, x_0 + r)$,

ii) παραγωγίζεται στο $\mathcal{D}$ *και ισχύει*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\ a_n\,(x - x_0)^{n-1}\,, \qquad (12.4.4\text{ - }6)$$

iii) ολοκληρώνεται σε κάθε υποδιάστημα, έστω $[a, b]$ *του* $\mathcal{D}$ *και ισχύει*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x - x_0)^n\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b (x - x_0)^n\ dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left[\frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b \qquad (12.4.4\text{ - }7) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\ \Big[(b - x_0)^{n+1} - (a - x_0)^{n+1}\Big]\,.\end{aligned}$$

Άσκηση

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω δυναμοσειρές που οι γενικοί τους όροι a_n είναι:

i) x^n

ii) $\dfrac{2^n}{n^2}\,x^n$

iii) $\dfrac{2^n}{n\,!}\,x^n$

iv) $\dfrac{n^3}{3^n}\,x^n$

v) $\dfrac{x^n}{(n!)^2}$

vi) $\dfrac{(x-5)^n}{n\,3^n}$

vii) $\dfrac{(x+3)^n}{n^2}$

viii) $n^n\,(x-1)^n$.

12.4.5 Σειρά Taylor

Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη από το Μάθημα *Παράγωγος Συνάρτησης* ότι, αν $f\,|\,(a,b)$ είναι μια συνάρτηση που έχει παραγώγους μέχρι και ν-τάξη,

τότε ισχύει ο παρακάτω **τύπος του Taylor**:

$$f(x) \approx f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 + \ldots + \frac{f^{(\nu)}(\xi)}{\nu!}(x-\xi)^{\nu}. \qquad (12.4.5\text{ - }1)$$

Στην (12.4.5−1) το 2ο μέλος είναι ένα πολυώνυμο ν - βαθμού, που προσεγγίζει την f, ενώ οι αριθμοί $f(\xi), f'(\xi), \ldots, f^{(\nu)}(\xi)$ είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου.

Στην περίπτωση όπου $\xi = 0$, ο τύπος $(12.4.5-1)$ γράφεται στη μορφή

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}x^{\nu} \qquad (12.4.5\text{ - }2)$$

και είναι γνωστός ως **τύπος του Maclaurin**, με συντελεστές τους αριθμούς $f(0), f'(0), \ldots, f^{(\nu)}(0)$.

Αν θεωρήσουμε ότι οι παραπάνω τύποι του Taylor, αντίστοιχα του Maclaurin, ορίζουν την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων δυναμοσειρών με κέντρο $x_0 = \xi$, αντίστοιχα $x_0 = 0$, τότε, αν $\nu \to +\infty$, ορίζονται οι:

σειρά Taylor

$$f(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \ldots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n, \qquad (12.4.5\text{ - }3)$$

σειρά Maclaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (12.4.5\text{ - }4)$$

Παρατηρήσεις 12.4.5 - 3

i) Σε αντίθεση με την οριακή συνάρτηση των σειρών συναρτήσεων ή των δυναμοσειρών που δεν είναι γνωστή και ούτε είναι δυνατόν τις περισσότερες φορές να υπολογιστεί, στη σειρά Taylor, αντίστοιχα Maclaurin η οριακή συνάρτηση **είναι γνωστή**.

ii) Ο έλεγχος της σύγκλισης των παραπάνω σειρών γίνεται με το Θεώρημα 12.4.4 - 1.

Παράδειγμα 12.4.5 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = e^x$$

όπου εύκολα υπολογίζεται ότι

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad \text{με} \quad f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Τότε η σειρά Maclaurin $(12.4.5-4)$ γράφεται

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\,. \end{aligned} \tag{12.4.5 - 5}$$

Η σειρά $(12.4.5-5)$ είναι μια δυναμοσειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{με κέντρο} \quad x_0 = 0 \quad \text{και} \quad a_n = \frac{1}{n!}\,,$$

οπότε εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου έχουμε

$$d = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

όταν

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1) \quad \text{και} \quad n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = +\infty$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση e^x αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 12.4.5 - 3-(ii), αν $x = 1$, έχουμε την παρακάτω προσέγγιση του αριθμού e:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,.$$

Παράδειγμα 12.4.5 - 2

Αποδεικνύεται ότι για τη σειρά Maclaurin του $\sin x$ ισχύει

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,. \qquad (12.4.5 - 6) \end{aligned}$$

Η $(12.4.5 - 6)$ είναι όμοια μια δυναμοσειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{με κέντρο} \quad x_0 = 0 \quad \text{όπου,}$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{και} \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{(n+1)+1}}{[2(n+1)+1]!} = \frac{(-1)^{n+2}}{(2n+3)!}\,,$$

όταν

$$\begin{aligned} (2n+1)! &= 1 \cdot 2 \cdots 2n \cdot (2n+1) \quad \text{και} \\ (2n+3)! &= 1 \cdot 2 \cdots 2n \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (2n+3) \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου έχουμε

$$d = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+2}}{(2n+3)!}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = +\infty$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση $\sin x$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 12.4.5 - 3

Ανάλογα με το Παράδειγμα 12.4.5 - 2 αποδεικνύεται ότι για τη σειρά Maclaurin του $\cos x$, που δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n+1}\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}\,\frac{x^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

με

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \quad \text{και} \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{(n+1)+1}}{[2(n+1)]!} = \frac{(-1)^{n+2}}{(2n+2)!},$$

όταν

$$\begin{aligned}(2n+1)! &= 1 \cdot 2 \cdots (2n-1) \cdot (2n) \quad \text{και} \\ (2n+2)! &= 1 \cdot 2 \cdots 2n \cdot (2n+1) \cdot (2n+2),\end{aligned}$$

είναι

$$d = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}}{\frac{(-1)^{n+2}}{(2n+2)!}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = +\infty$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση $\cos x$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 12.4.5 - 4

Η σειρά Maclaurin της συνάρτησης

$$\frac{1}{1-x}$$

δίνεται από τον τύπο

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

που είναι της μορφής

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{με κέντρο} \quad x_0 = 0 \quad \text{και} \quad a_n = 1.$$

Τότε από το κριτήριο του λόγου έχουμε

$$d = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1,$$

οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = 1$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in (-1, 1)$.

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι η σειρά Maclaurin της

$$\frac{1}{1+x}$$

που δίνεται από τον τύπο

$$\frac{1}{1-x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n,$$

όμοια συγκλίνει για κάθε $x \in (-1, 1)$.

Παράδειγμα 12.4.5 - 5

Η σειρά Taylor της συνάρτησης $\ln x$ με κέντρο το σημείο $\xi = 1$ δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} \ln x &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + \ldots \\ &= \sum_{n=1}^{n} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}, \quad \text{όταν} \quad x > 0. \end{aligned} \tag{12.4.5 - 7}$$

Η $(12.4.5 - 7)$ είναι μια δυναμοσειρά της μορφής

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{με κέντρο} \quad x_0 = 1 \quad \text{και} \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου έχουμε

$$d = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{n}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = 1$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x με

$$x \in (1 - x_0, 1 + x_0), \quad \text{δηλαδή} \quad x \in (0, 2).$$

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι οι παρακάτω σειρές Maclaurin έχουν τα αντίστοιχα διαστήματα σύγκλισης:

i)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,x^3 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\,x^n \dots \quad \text{με } x \in (-1,1]\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x} &= (1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2\cdot 4}\,x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\,x^3 + \dots \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\,x^n - \dots \quad \text{με } x \in (-1,1].\end{aligned}$$

2. Όμοια με το Παράδειγμα (12.4.5 – 1), δείξτε ότι η σειρά Maclaurin

$$a^x = e^{\,x\,\ln a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x\,\ln a)^n}{n\,!}$$

συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν $a > 0$.

12.5 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[4] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://eclass.uoa.gr/courses/MATH130/ θέση Έγγραφα
- http://eclass.uoa.gr/courses/MATH141/ θέση Έγγραφα
- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 13

ΣΕΙΡΑ FOURIER

13.1 Εισαγωγικές έννοιες

Οι περιοδικές συναρτήσεις συναντώνται συχνά σε διάφορα προβλήματα εφαρμογών. Η προσπάθεια να εκφραστούν οι συναρτήσεις αυτές με όρους απλών περιοδικών συναρτήσεων, όπως είναι οι συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου, έχει μεγάλη σημασία στη μελέτη των συναρτήσεων αυτών, στη λύση διάφορων μορφών διαφορικών εξισώσεων, σε προβλήματα προσεγγίσεων κ.λπ. Αποδεικνύεται στα Μαθηματικά ότι στην περίπτωση των περιοδικών συναρτήσεων, η προσέγγιση αυτή είναι η καλύτερη δυνατή (best approximation), δηλαδή η οποιαδήποτε άλλης μορφής προσέγγιση της συνάρτησης έχει μεγαλύτερο σφάλμα. Η υλοποίηση της προσπάθειας αυτής, που ξεκίνησε από τον Fourier, συνεχίζεται ακόμα και σήμερα, συμβάλλοντας στη λύση πολλών προβλημάτων από τις παραπάνω περιπτώσεις.[1]

Κρίνεται απαραίτητο στο σημείο αυτό να γίνει μια υπενθύμιση ορισμένων μαθηματικών εννοιών απαραίτητων στη συνέχεια του μαθήματος.

[1] Ο αναγνώστης για περαιτέρω μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [3, 5] και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 2.

13.1.1 Περιοδική συνάρτηση

Ορισμός 13.1.1 - 1 (περιοδικής συνάρτησης). *Μια συνάρτηση $f(t)$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει $\tau \in \mathbb{R}$ με $\tau \neq 0$, έτσι ώστε να ισχύει*

$$f(t+\tau) = f(t) \quad \textit{για κάθε} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13.1.1 - 1}$$

Ο ελάχιστος θετικός αριθμός τ για τον οποίο ισχύει η $(13.1.1-1)$ λέγεται **θεμελιώδης περίοδος** και συμβολίζεται συνήθως με T, ενώ ο αριθμός τ λέγεται απλά **περίοδος**.

Παράδειγμα 13.1.1 - 1

Η συνάρτηση

$$f(t) = |\sin \omega t| \quad \text{όπου} \quad \omega > 0$$

είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = \pi/\omega$, ενώ η

$$f(t) = t, \quad \text{όταν} \quad -\pi \leq t < \pi \quad \text{και} \quad f(t+2\pi) = f(t) \quad \text{για κάθε} \quad t \in \mathbb{R}$$

είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$.

Στις περιπτώσεις που η συνάρτηση δεν ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$, ο παραπάνω ορισμός γράφεται:

Ορισμός 13.1.1 - 2. *Μια συνάρτηση $f(t)$ με πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}$ λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει $\tau \in \mathbb{R}$ με $\tau \neq 0$, έτσι ώστε να ισχύει*

$$f(t+\tau) = f(t) \quad \textit{για κάθε} \quad t, t+\tau \in \mathcal{D}.$$

13.1.2 Ιδιότητες περιοδικών συναρτήσεων

Σχετικά με τις περιοδικές συναρτήσεις ισχύουν:

i) το διάγραμμα μιας περιοδικής συνάρτησης σε μία περίοδο λέγεται **κύμα** ή **κυματομορφή**,

ii) αν η μεταβλητή μιας περιοδικής συνάρτησης συμβολίζει το διάστημα, τότε η περίοδός της λέγεται **μήκος κύματος** και συμβολίζεται με λ,

iii) κάθε περιοδική συνάρτηση $f(t)$ με θεμελιώδη περίοδο T γίνεται περιοδική με θεμελιώδη περίοδο 2π, θέτοντας

$$t = \frac{2\pi}{T}x\,, \qquad (13.1.2 - 1)$$

iv) αν T είναι η θεμελιώδης περίοδος, τότε ορίζεται ως **συχνότητα** ν ο αριθμός

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad (13.1.2 - 2)$$

και ως **κυκλική συχνότητα** ο

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,, \qquad (13.1.2 - 3)$$

Ορισμός 13.1.2 - 1. *Ορίζεται ως* **αρμονική** *κάθε συνάρτηση της μορφής*

$$f(t) = a\cos(\omega t + \theta) \quad \text{ή} \quad f(t) = a\sin(\omega t + \theta). \qquad (13.1.2 - 4)$$

Ιδιότητες αρμονικής συνάρτησης

Σχετικά με την αρμονική συνάρτηση ισχύουν:

α) το διάγραμμά της είναι μία ημιτονοειδής καμπύλη ή, όπως συνήθως λέγεται, **αρμονικό κύμα**,

β) έχει κυκλική συχνότητα ω με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi/\omega$,

γ) έχει πλάτος a, που παριστάνει και τη μέγιστη τιμή της f,

δ) έχει φάση $\omega t + \theta$ με αρχική γωνία θ.

Επίσης ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση 13.1.2 - 1. *Το άθροισμα δύο ή περισσοτέρων αρμονικών συναρτήσεων με την ίδια κυκλική συχνότητα, έστω ω, είναι επίσης αρμονική συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα.*

Παράδειγμα 13.1.2 - 1

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 13.1.2 - 1 για $\omega = 1$ στις αρμονικές συναρτήσεις $f(t) = \sin t$ και $g(t) = \sqrt{3}\cos t$ προκύπτει ότι η

$$h(t) = \sin t + \sqrt{3}\cos t = 2\left(\frac{1}{2}\sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\right) = 2\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right),$$

είναι όμοια μία αρμονική συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα $\omega = 1$.

Πρόταση 13.1.2 - 2. *Το άθροισμα δύο ή περισσότερων αρμονικών συναρτήσεων, που η καθεμιά έχει κυκλική συχνότητα ακέραιο πολλαπλάσιο μιας συχνότητας, έστω ω_0, είναι μία περιοδική - γενικά μη αρμονική - συνάρτηση με συχνότητα τη μικρότερη συχνότητα των αρμονικών συναρτήσεων.*

Πρόταση 13.1.2 - 3. *Το άθροισμα δύο ή περισσότερων αρμονικών συναρτήσεων, που οι συχνότητές τους έχουν ανά δύο πηλίκο ρητό αριθμό, είναι περιοδική - γενικά μη αρμονική - συνάρτηση.*

13.2 Σειρά Fourier

13.2.1 Ορισμός της σειράς

Σύμφωνα και με τον Ορισμό 12.4.3 - 1 της Παραγράφου 12.4.3 έχουμε ότι:

Ορισμός 13.2.1 - 1 (τριγωνομετρική σειρά). *Ορίζεται ως τριγωνομετρική σειρά κάθε σειρά της μορφής*

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_0}{2} &+ (\alpha_1\cos t + \beta_1\sin t) + \ldots + (\alpha_n\cos nt + \beta_n\sin nt) + \ldots \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n\cos nt + \beta_n\sin nt), \end{aligned} \qquad (13.2.1 - 1)$$

όταν $t \in \mathbb{R}$ και α_0, α_n, $\beta_n \in \mathbb{R}$; $n = 1, 2, \ldots$ οι συντελεστές *της σειράς.*

Από τον Ορισμό 13.2.1 - 1 προκύπτουν τα εξής:

- κάθε όρος της σειράς είναι μία περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$,

- αν η σειρά $(13.2.1-1)$ συγκλίνει[2] ομαλά στο $\mathbb{R}$, θα πρέπει σύμφωνα με την Παράγραφο 13.1.1, η ιδιότητα της περιοδικότητας να μεταβιβάζεται και στην οριακή συνάρτηση, έστω $f(t)$, δηλαδή η $f(t)$ να είναι όμοια μία περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο ίση με T.

Παρατηρήσεις 13.2.1 - 1

Τα βασικά ερωτήματα που δημιουργούνται στην περίπτωση της τριγωνομετρικής σειράς είναι:

i) ποιες συνθήκες πρέπει να επαληθεύονται, έτσι ώστε μία περιοδική συνάρτηση να αναπτύσσεται σε τριγωνομετρική σειρά,

ii) ο υπολογισμός των συντελεστών της σειράς $(13.2.1-1)$.

13.2.2 Θεώρημα σειράς Fourier

Δίνεται τώρα η απάντηση στο ερώτημα (i) των Παρατηρήσεων 13.2.1 - 1 με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος:

Θεώρημα 13.2.2 - 1 (σειράς Fourier). *Έστω $f(t)$ μία περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$ που είναι κατά τμήματα συνεχής στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ και για την οποία υπάρχουν τόσο η αριστερά όσο και η δεξιά πλευρική παράγωγος σε κάθε σημείο του διαστήματος αυτού. Τότε η σειρά Fourier $(13.2.1-1)$, που οι συντελεστές της δίνονται από τις σχέσεις $(13.2.3-1)$ - $(13.2.3-3)$, συγκλίνει ομαλά στο $\mathbb{R}$ και το άθροισμά της είναι η $f(t)$, εκτός από ένα σημείο, έστω t_0, που η $f(t)$ είναι ασυνεχής και που το άθροισμά της είναι ο μέσος όρος του αριστερού και του δεξιού ορίου της στο t_0, δηλαδή*

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{t\to t_0-0} f(t) + \lim_{t\to t_0+0} f(t)\right]. \qquad (13.2.2 - 1)$$

[2] Βλέπε Μάθημα *Σειρές - Ομαλή σύγκλιση*.

13.2.3 Υπολογισμός της σειράς Fourier

Σχετικά με το ερώτημα (ii) των Παρατηρήσεων 13.2.1 - 1 αποδεικνύεται ότι αν η $f(t)$ είναι μία περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$ τέτοια, ώστε να είναι δυνατό να παρασταθεί με τη μορφή της τριγωνομετρικής σειράς $(13.2.1-1)$, δηλαδή επαληθεύει τις υποθέσεις του Θεωρήματος 13.2.2 - 1, τότε οι συντελεστές της υπολογίζονται από τους τύπους

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \qquad (13.2.3 - 1)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt, \qquad (13.2.3 - 2)$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt \qquad (13.2.3 - 3)$$

για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.

Η σειρά $(13.2.1-1)$ λέγεται τότε **σειρά Fourier**[3] (Fourier series) για την περιοδική συνάρτηση f με συντελεστές Fourier τους $(13.2.3-1)$ - $(13.2.3-3)$. Οι τύποι $(13.2.3-1)$ - $(13.2.3-3)$, που δίνουν τους συντελεστές της σειράς $(13.2.1-1)$, λέγονται και **τύποι του Euler**.

Λόγω της περιοδικότητας της f το διάστημα ολοκλήρωσης $[-\pi, \pi]$ είναι δυνατό να αντικατασταθεί με κάθε άλλο διάστημα πλάτους 2π, όπως $[0, 2\pi]$, κ.λπ., όταν αυτό εξυπηρετεί στον υπολογισμό των συντελεστών της σειράς.

Έστω τώρα ότι η συνάρτηση $f(t)$ έχει μία τυχούσα θεμελιώδη περίοδο T και πληροί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 13.2.2 - 1. Θέτοντας

$$t = \frac{T}{2\pi}x, \quad \text{δηλαδή} \quad x = \frac{2\pi}{T}t$$

και, υποθέτοντας ότι $t \in \left[\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, θα είναι $x \in [-\pi, \pi]$, ενώ η f, όταν θεωρηθεί ως συνάρτηση του x, θα είναι όμοια περιοδική με θεμελιώδη περίοδο 2π, ο

[3] Βλέπε βιβλιογραφία και *http://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series*

τύπος $(13.2.3-1)$ γράφεται

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left[\left(\frac{T}{2\pi}\right)x\right]\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\frac{2\pi}{T}\,dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt.$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι οι συντελεστές Fourier στην περίπτωση αυτή δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt, \\
\alpha_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\,dt, \text{ όταν } n=1,2,.. \quad (13.2.3\text{ - }4) \\
\beta_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\,dt, \text{ όταν } n=1,2,\ldots
\end{aligned}$$

και λέγονται επίσης τύποι του Euler για τους συντελεστές της σειράς Fourier, που αντιστοιχεί στην περιοδική συνάρτηση $f(t)$ με θεμελιώδη περίοδο T. Τότε η σειρά Fourier έχει τη μορφή

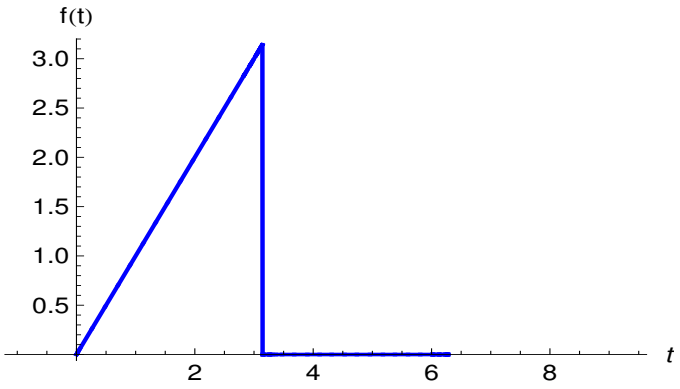
$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\alpha_n\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + \beta_n\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\right]. \qquad (13.2.3\text{ - }5)$$

Όμοια, λόγω της περιοδικότητας της f στους τύπους $(13.2.3-4)$ είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί κάθε διάστημα ολοκλήρωσης πλάτους T, όπως $[0,T]$, κ.λπ.

Παράδειγμα 13.2.3 - 1

Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση (Σχ. 13.2.3 - 1)

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{όταν} \quad 0 \le t < \pi \\ 0, & \text{όταν} \quad \pi \le t < 2\pi \end{cases} \qquad \text{και } f(t+2\pi) = f(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$



Σχήμα 13.2.3 - 1: Παράδειγμα 13.2.3 - 1: η συνάρτηση $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο, δηλαδή όταν $t \in [0, 2\pi]$.

Λύση. Η θεμελιώδης περίοδος είναι $T = 2\pi$. Τότε σύμφωνα με τους τύπους $(13.2.3 - 4)$ έχουμε [4, 5]

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{\pi}{2}\,,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]'\,dt$$

$$= \frac{1}{n\pi}\,t\,\sin(nt)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} t'\,\sin(nt)\,d\,t$$

$$= 0 - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,d\,t = \frac{1}{n^2\pi}\cos(nt)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right],$$

[4] **Παραγοντική ολοκλήρωση** - περίπτωση γινομένου πολυωνύμου με τριγωνομετρική συνάρτηση: αρχικά δημιουργείται η παράγωγος της τριγωνομετρικής συνάρτησης. Βλέπε επίσης Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 7.

[5] Υπενθυμίζεται ότι: $\cos(n\pi) = (-1)^n$ και $\sin(n\pi) = 0$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt \quad (\text{όμοια})$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin(nt)-nt\cos(nt)}{n^2}\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{n}\cos(n\pi) = -\frac{1}{n}\,(-1)^n$$

για κάθε $n = 1,\, 2,\, \ldots$.

Άρα σύμφωνα με την $(13.2.3-5)$ η αντίστοιχη σειρά Fourier είναι

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos t + \sin t - \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{2}{2\pi}\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t \\ &\quad -\frac{1}{4}\sin 4t - \frac{2}{25\pi}\cos 5t + \frac{1}{5}\sin 5t - \frac{1}{6}\sin 6t \\ &\quad -\frac{2}{49\pi}\cos 7t + \frac{1}{7}\sin 7t - \ldots \\ &\approx 0.7854 - 0.6366\cos t + \sin t - 0.5\sin 2t \\ &\quad -0.0710\cos 3t + 0.3333\sin 3t - 0.25\sin 4t \\ &\quad -0.0255\cos 5t + 0.2\sin 5t - 0.1667\sin 6t \\ &\quad -0.0130\cos 7t + 0.1429\sin 7t - \ldots . \end{aligned} \qquad (13.2.3\text{ - }6)$$

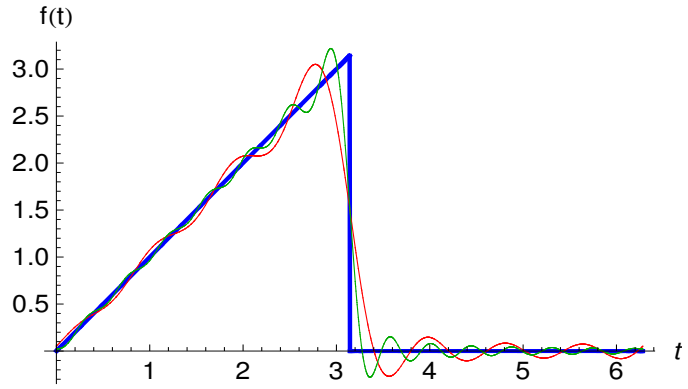
Στο σημείο ασυνέχειας $t_0 = \pi$ σύμφωνα με το Θεώρημα 13.2.2 - 1 - τύπος $(13.2.2-1)$ - το άθροισμα της σειράς ισούται με

$$f(t_0) = \frac{1}{2}\left[\lim_{t\to\pi-0} f(t) + \lim_{t\to\pi+0} f(t)\right] = \frac{1}{2}\,(\pi+0) = \frac{\pi}{2}\,. \qquad (13.2.3\text{ - }7)$$

Στο Σχ. 13.2.3 - 2 δίνεται το διάγραμμα της $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο (έντονη μπλε καμπύλη), το διάγραμμα του αθροίσματος S_5 των 5 πρώτων όρων της $(13.2.3-6)$ - κόκκινη καμπύλη, όπου

$$\begin{aligned} S_5(t) &= 0.7854 - 0.6366\cos t + \sin t - 0.5\sin 2t - 0.0710\cos 3t \\ &\quad +0.3333\sin 3t - 0.25\sin 4t - 0.0255\cos 5t + 0.2\sin 5t \end{aligned}$$

και του αθροίσματος S_{14} (πράσινη καμπύλη). Από το Σχ. 13.2.3 - 2 προκύπτει ότι, ενώ για $t \in (0, 2\pi)$ το διάγραμμα του αθροίσματος των n πρώτων όρων



Σχήμα 13.2.3 - 2: Παράδειγμα 13.2.3 - 1: διάγραμμα της $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο (μπλε), αθροίσματος S_5 κόκκινη και S_{14} πράσινη καμπύλη.

πρέπει να τείνει στο διάγραμμα της f, όταν το n αυξάνει, στο σημείο π - σημείο ασυνέχειας - δημιουργούνται κύματα, που εξακολουθούν να υπάρχουν και όταν το άθροισμα των όρων της σειράς αυξάνει. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως **φαινόμενο Gibbs**. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα των S_5 και S_{14} διέρχονται από το σημείο $(t_0, f(t_0))$, όπου η $f(t_0)$ δίνεται από την $(13.2.3-7)$.

Ο υπολογισμός των συντελεστών με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές:

Πρόγραμμα 13.2.3 - 1 (συντελεστές σειράς Fourier)

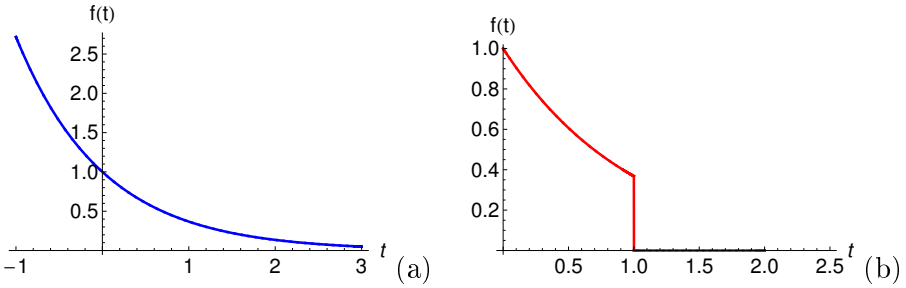
```
T = 2*Pi;a0 = Integrate[(2/T) t, {t, 0, Pi}]
an = Integrate[(2/T)*t*Cos[n t],{t,0,Pi}]
/.{Cos[n Pi]->(-1)^n,Sin[n Pi]->0}
bn = Integrate[(2/T)*t*Sin[n t],{t,0,Pi}]
/.{Cos[n Pi]->(-1)^n,Sin[n Pi]-> 0}
```

■

Παράδειγμα 13.2.3 - 2

Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση (Σχ. 13.2.3 - 3)

$$g(t)=\begin{cases} e^{-t}, & \text{όταν} \quad 0\le t<1 \\ 0, & \text{όταν} \quad 1\le t<2 \end{cases} \quad \text{και } g(t+2)=g(t) \text{ για κάθε } t\in\mathbb{R}.$$



Σχήμα 13.2.3 - 3: Παράδειγμα 13.2.3 - 2: (a) η συνάρτηση e^{-t}, όταν $t \in \mathbb{R}$, (b) η συνάρτηση $g(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο, δηλαδή όταν $t \in [0, 2]$.

Λύση. Η θεμελιώδης περίοδος είναι $T = 2$. Τότε σύμφωνα με τους τύπους $(13.2.3 - 4)$ έχουμε[6]

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{2}{2}\int_0^2 g(t)\,dt = \int_0^1 g(t)\,dt + \int_1^2 g(t)\,dt = \int_0^1 e^{-t}\,dt = \frac{e-1}{e}\,, \\ \alpha_n &= \int_0^1 g(t)\cos(n\pi t)\,dt = \int_0^1 e^{-t}\cos(n\pi t)\,dt = I \end{aligned}$$

(13.2.3 - 8)

[6] **Παραγοντική ολοκλήρωση** - περίπτωση γινομένου εκθετικής με τριγωνομετρική συνάρτηση: εφαρμόζεται δύο φορές η παραγοντική ολοκλήρωση, δημιουργώντας στην 1η παραγοντική την παράγωγο της ευκολότερης από τις δύο συναρτήσεις (στην περίπτωση αυτή της εκθετικής) και όμοια και στη 2η παραγοντική ολοκλήρωση.

όπου

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 e^{-t}\cos(n\pi t)\,dt = \int_0^1 \left[-e^{-t}\right]'\cos(n\pi t)\,dt \\ &= -\,e^{-t}\,\cos(n\pi t)\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-t}\,\left[\cos(n\pi t)\right]'\,dt \\ &= -\left[e^{-1}\cos(n\pi)-1\right] - n\pi\int_0^1 e^{-t}\sin(n\pi t)\,dt \\ &= -\left[(-1)^n e^{-1}-1\right] - n\pi\int_0^1 \left[-e^{-t}\right]'\sin(n\pi t)\,dt \\ &= -\left[(-1)^n e^{-1}-1\right] + n\pi\,e^{-t}\,\sin(n\pi t)\Big|_0^1 \\ &\quad -n\pi\int_0^1 e^{-t}\,\left[\sin(n\pi t)\right]'\,dt \\ &= -\left[(-1)^n e^{-1}-1\right] + 0 - n^2\pi^2\int_0^1 e^{-t}\,\cos(n\pi t)\,dt \\ &= -\left[(-1)^n e^{-1}-1\right] + 0 - n^2\pi^2\, I. \end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$\alpha_n = \frac{e-(-1)^n}{e\,(1+n^2\pi^2)} \quad \text{για κάθε} \quad n=1,\,2,\,\ldots\,.$$

Όμοια

$$\beta_n = \int_0^1 g(t)\sin(n\pi t)\,dt = \int_0^1 e^{-t}\sin(n\pi t)\,dt,$$

οπότε

$$\beta_n = \frac{n\pi\,\left[e-(-1)^n\right]}{e\,(1+n^2\pi^2)} \quad \text{για κάθε} \quad n=1,\,2,\,\ldots\,.$$

Επομένως σύμφωνα με την $(13.2.3-5)$ η αντίστοιχη σειρά Fourier είναι

$$\begin{aligned} g(t) &= 0.3161 + 0.1259\cos\pi t + 0.3954\sin\pi t + 0.0156\cos 2\pi t \\ &\quad +0.0981\sin 2t + 0.01522\cos 3\pi t + 0.1435\sin 3\pi t \\ &\quad +0040\cos 4\pi t + 0.0400\sin 4\pi t + \dots . \end{aligned} \qquad (13.2.3\text{ - }9)$$

Στο σημείο ασυνέχειας $t_0 = 1$ σύμφωνα με το Θεώρημα 13.2.2 - 1 - τύπος $(13.2.2-1)$ - το άθροισμα της σειράς ισούται με

$$\begin{aligned} g(t_0) &= \frac{1}{2}\left[\lim_{t\to 1-0} g(t) + \lim_{t\to 1+0} g(t)\right] = \frac{1}{2}\left(e^{-1}+0\right) \\ &= \frac{e^{-1}}{2} \approx 0.1840. \end{aligned} \qquad (13.2.3\text{ - }10)$$

Στο Σχ. 13.2.3 - 4 δίνεται το διάγραμμα της $g(t)$, όταν $t \in [0,4]$ (έντονη μπλε καμπύλη), το διάγραμμα του αθροίσματος S_3 των 3 πρώτων όρων της $(13.2.3-9)$ - κόκκινη καμπύλη - και του S_{14} - πράσινη καμπύλη. Όπως και στο Σχ. 13.2.3 - 2 από το Σχ. 13.2.3 - 4 προκύπτει ότι, ενώ για $t \in (0,4)$ το διάγραμμα του αθροίσματος των n πρώτων όρων πρέπει να τείνει στο διάγραμμα της g, όταν το n αυξάνει, στα σημεία ασυνέχειας $t_i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ δημιουργούνται κύματα, που εξακολουθούν να υπάρχουν και όταν το άθροισμα των όρων της σειράς αυξάνει (φαινόμενο Gibbs). Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα των S_3 και S_{14} διέρχονται από το σημείο $(t_0, g(t_0))$, όταν $t_0 = 1$ και $g(t_0) \approx 0.1840$ σύμφωνα με την $(13.2.3-10)$. Όμοια και από τα άλλα σημεία ασυνέχειας $(t_i, g(t_i))$ με $t_i = 0,\ 2,\ 3,\ 4$.

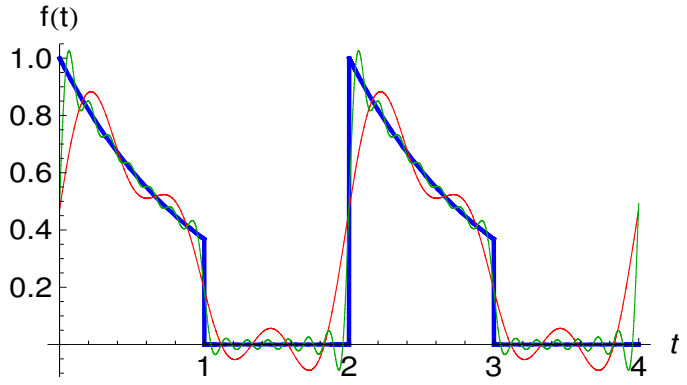
■

Παράδειγμα 13.2.3 - 3

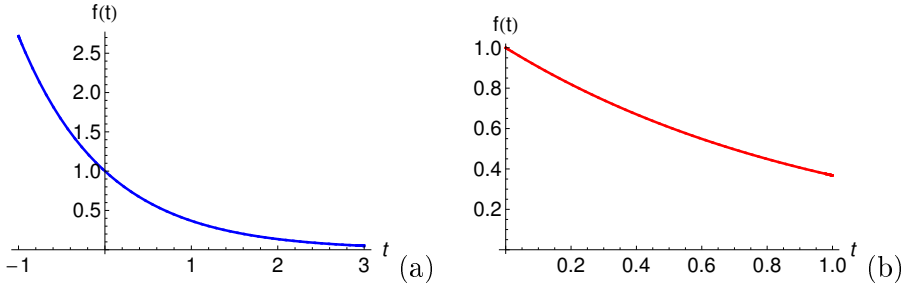
Όμοια η περιοδική συνάρτηση (Σχ. 13.2.3 - 5)

$$\tilde{g}(t) = e^{-t}, \quad \text{όταν} \quad 0 \le t < 1 \quad \text{και} \quad \tilde{g}(t+1) = \tilde{g}(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Η θεμελιώδης περίοδος είναι $T = 1$. Τότε σύμφωνα με τους τύπους $(13.2.3-4)$ και ανάλογους υπολογισμούς με αυτούς του Παραδείγματος 13.2.3 - 2 τελικά έχουμε



Σχήμα 13.2.3 - 4: Παράδειγμα 13.2.3 - 2: διάγραμμα της $g(t)$ όταν $t \in [0,4]$ μπλε καμπύλη, αθροίσματος S_3 κόκκινη και S_{14} πράσινη.



Σχήμα 13.2.3 - 5: Παράδειγμα 13.2.3 - 3: (a) η συνάρτηση e^{-t}, όταν $t \in \mathbb{R}$, (b) η συνάρτηση $\tilde{g}(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο, δηλαδή όταν $t \in [0,1]$.

$$\alpha_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 \tilde{g}(t)\,dt = 2\int_0^1 \tilde{g}(t)\,dt = 2\int_0^1 e^{-t}\,dt = 2\left(1-\frac{1}{e}\right),$$

$$\alpha_n = \frac{2}{1}\int_0^1 \tilde{g}(t)\cos(2n\pi t)\,dt = 2\int_0^1 e^{-t}\cos(2n\pi t)\,dt$$

$$= \frac{2\,e^{-t}\left[-\cos(2n\pi t)+2n\pi\sin(2n\pi t)\right]}{1+4n^2\pi^2}\Bigg|_0^1 = \frac{2(e-1)}{e\,(1+4n^2\pi^2)},$$

$$\beta_n = \frac{2}{1}\int_0^1 \tilde{g}(t)\sin(2n\pi t)\,dt = 2\int_0^1 e^{-t}\sin(2n\pi t)\,dt$$

$$= -\frac{2\,e^{-t}\left[2n\pi\cos(2n\pi t)+\sin(2n\pi t)\right]}{1+4n^2\pi^2}\Bigg|_0^1 = \frac{4n\pi(e-1)}{e\,(1+4n^2\pi^2)}$$

για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.

Άρα σύμφωνα με την $(13.2.3-5)$ η αντίστοιχη σειρά Fourier είναι

$$g(t) = 0.6321 + 0.0312\cos 2\pi t + 0.1962\sin 2\pi t + 0.0080\cos 4\pi t$$

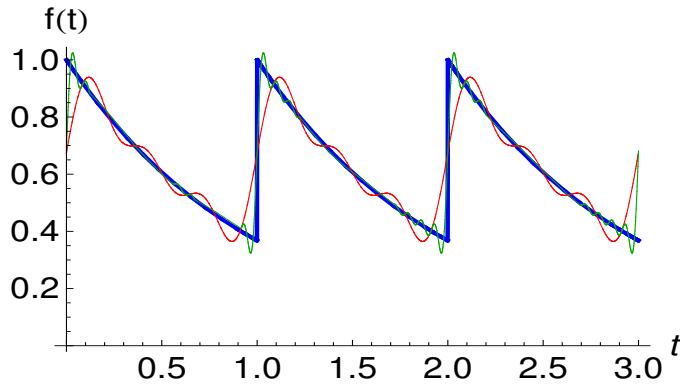
$$+0.0100\sin 4t + 0.0036\cos 6\pi t + 0.0669\sin 6\pi t$$

$$+0020\cos 8\pi t + 0.0502\sin 8\pi t + \ldots . \qquad (13.2.3\text{ - }11)$$

Στο σημείο ασυνέχειας $t_0 = 1$ σύμφωνα με το Θεώρημα 13.2.2 - 1 - τύπος $(13.2.2-1)$ - το άθροισμα της σειράς ισούται με

$$\tilde{g}\,(t_0) = \frac{1}{2}\left[\lim_{t\to 1-0}\tilde{g}(t) + \lim_{t\to 1+0}\tilde{g}(t)\right] = \frac{1}{2}\left(e^{-1}+0\right) = \frac{e^{-1}}{2} \approx 0.1840.$$

Στο Σχ. 13.2.3 - 6 δίνεται το διάγραμμα της $\tilde{g}(t)$, όταν $t \in [0,3]$ (έντονη μπλε καμπύλη), το διάγραμμα του αθροίσματος S_3 των 3 πρώτων όρων της $(13.2.3-11)$ - κόκκινη καμπύλη - και του S_9 - πράσινη καμπύλη. Από το Σχ. 13.2.3 - 6 όμοια προκύπτει ότι, ενώ για $t \in (0,3)$ το διάγραμμα του αθροίσματος των n πρώτων όρων πρέπει να τείνει στο διάγραμμα της $\tilde{g}$, όταν



Σχήμα 13.2.3 - 6: Παράδειγμα 13.2.3 - 3: διάγραμμα της $\tilde{g}(t)$ όταν $t \in [0,3]$ μπλε καμπύλη, αθροίσματος S_3 κόκκινη και S_9 πράσινη.

το n αυξάνει, στα σημεία ασυνέχειας 0, 1, 2, 3 δημιουργούνται επίσης κύματα, που εξακολουθούν να υπάρχουν και όταν το άθροισμα των όρων της σειράς αυξάνει (φαινόμενο Gibbs). Επίσης τα διαγράμματα των S_3 και S_9 διέρχονται από τα σημεία ασυνέχειας $(t_i, g(t_i))$ με $t_i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

■

Παράδειγμα 13.2.3 - 4

Όμοια η περιοδική συνάρτηση (Σχ. 16.1.4 - 1)

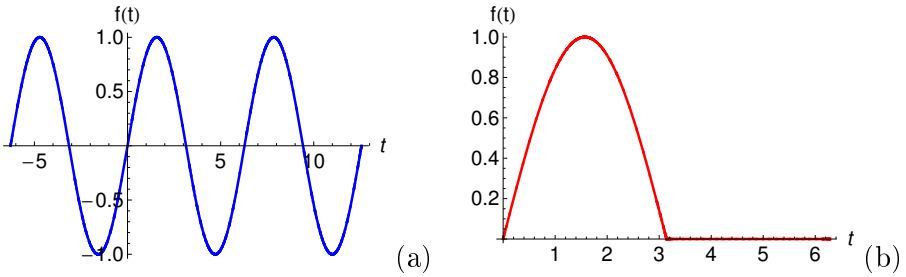
$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{όταν} \quad 0 \le t < \pi \\ 0, & \text{όταν} \quad \pi \le t < 2\pi \end{cases} \quad \text{και } \tilde{f}(t + \mathbf{2\pi}) = \tilde{f}(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

(**ημιανόρθωση**).

Λύση. Η θεμελιώδης περίοδος είναι $T = 2\pi$. Όμοια με τους τύπους (13.2.3−4) και γνωστούς τύπους της Τριγωνομετρίας[7] τελικά έχουμε[8]

[7] $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B), \quad 2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B).$

[8] Όταν στους τύπους υπολογισμού των συντελεστών α_n και β_n προκύψουν παραστάσεις, που δεν ορίζονται για κάποιες τιμές του n, τότε ο υπολογισμός των αντίστοιχων συντελεστών γίνεται χωριστά αντικαθιστώντας στους τύπους $(13.2.3-4)$ τις τιμές αυτές, όπως στις περιπτώσεις των συντελεστών α_1 και β_1.



Σχήμα 13.2.3 - 7: Παράδειγμα 13.2.3 - 4: (a) η συνάρτηση $\sin t$, όταν $t \in [-2\pi, 4\pi]$, (b) η συνάρτηση $\tilde{f}(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο, δηλαδή όταν $t \in [0, 2\pi]$.

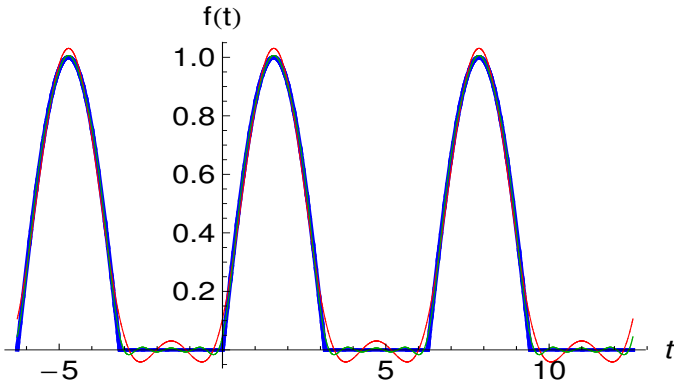
$$\alpha_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \tilde{f}(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\,dt = \frac{2}{\pi}\,,$$

$$\alpha_1 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(t)\cos\left(\frac{2\pi t}{2\pi}\right)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\cos t\,dt = 0,$$

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(t)\cos\left(\frac{2n\pi t}{2\pi}\right)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\ \cos(nt)\,dt \\ &= \left.\frac{\cos t\ \cos(nt) + n\ \sin t\ \sin(nt)}{\pi\,(n^2-1)}\right|_0^{\pi} \\ &= -\frac{1+(-1)^n}{\pi\pi\,(n^2-1)} \quad \text{για κάθε} \quad n = 2,\,3,\,\ldots\,,\end{aligned}$$

$$\beta_1 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(t)\sin\left(\frac{2\pi t}{2\pi}\right)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}\,,$$

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(t)\sin\left(\frac{2n\pi t}{2\pi}\right)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\ \sin(nt)\,dt \\ &= \left.\frac{-n\sin t\ \cos(nt) + \cos t\ \sin(nt)}{\pi\,(n^2-1)}\right|_0^{\pi} \\ &= 0 \quad \text{για κάθε} \quad n = 2,\,3,\,\ldots\,.\end{aligned}$$



Σχήμα 13.2.3 - 8: Παράδειγμα 13.2.3 - 4: διάγραμμα της $\tilde{f}(t)$ όταν $t \in [-2\pi, 4\pi]$ μπλε καμπύλη, αθροίσματος S_3 κόκκινη και S_7 πράσινη.

Άρα σύμφωνα με την $(13.2.3-5)$ η αντίστοιχη σειρά Fourier είναι

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t) &= 0.3183 + 0.5\sin t - 0.2122\cos 2t - 0.0424\sin 4t \\ &\quad -0.0182\cos 6t - 0.0101\cos 8t - \dots . \qquad (13.2.3\text{ - }12)\end{aligned}$$

Στο Σχ. 13.2.3 - 8 δίνεται το διάγραμμα της $\tilde{f}(t)$ στο διάστημα $[-2\pi, 4\pi]$ (έντονη μπλε καμπύλη), το διάγραμμα του αθροίσματος S_3 των 3 πρώτων όρων της $(13.2.3-12)$ - κόκκινη καμπύλη - και του S_7 - πράσινη καμπύλη. Η $\tilde{f}(t)$ δεν έχει σημεία ασυνέχειας, οπότε δεν εμφανίζεται το φαινόμενο Gibbs.

■

13.2.4 Γραμμικά φάσματα

Ο γενικός όρος της σειράς Fourier, που αντιστοιχεί σε μία περιοδική συνάρτηση $f(t)$ με θεμελιώδη περίοδο T, σύμφωνα με τον τύπο $(13.2.3-5)$ γράφεται

$$\alpha_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) = \alpha_n \cos(n\omega t) + \beta_n \sin(n\omega t), \quad (13.2.4\text{ - }1)$$

όπου $n = 1, 2, \dots$ και $\omega = 2\pi/T$.

Έστω $\beta_n \neq 0$ και $\tan\varphi_n = \alpha_n/\beta_n$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$, όπου $-\pi \leq \varphi_n < \pi$. Χρησιμοποιώντας κατάλληλους τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς στην

$(13.2.4-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha_n\cos(n\omega t)+\beta_n\sin(n\omega t) &= \beta_n\left[\frac{\alpha_n}{\beta_n}\cos(n\omega t)+\sin(n\omega t)\right]\\ &= \beta_n\left[\tan\varphi_n\cos(n\omega t)+\sin(n\omega t)\right]\\ &= \frac{\beta_n}{\cos\varphi_n}\left[\sin\varphi_n\cos(n\omega t)+\cos\varphi_n\sin(n\omega t)\right]\\ &= \beta_n\sqrt{1+\tan^2\varphi_n}\,\sin\left(n\omega t+\varphi_n\right)\\ &= \sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}\,\sin\left(n\omega t+\varphi_n\right).\end{aligned}$$

[9] Έστω $C_n=\left(\alpha_n^2+\beta_n^2\right)^{1/2}$ για κάθε $n=1,2,\ldots$, ενώ για $n=0$ θέτουμε $C_0=|a_0|/2$. Τότε η αντίστοιχη σειρά Fourier της $f(t)$ γράφεται

$$f(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\sin\left(n\omega t+\varphi_n\right) \qquad (13.2.4\text{ - }2)$$

και λέγεται **σειρά του ημιτόνου**.

Όμοια θέτοντας στον γενικό όρο όπου $\tan\theta_n=\beta_n/\alpha_n$ με $\alpha_n\neq 0$ για κάθε $n=1,2,\ldots$ και $-\pi\leq\varphi_n<\pi$, προκύπτει η παρακάτω σειρά της f

$$f(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\cos\left(n\omega t-\theta_n\right) \qquad (13.2.4\text{ - }3)$$

που λέγεται **σειρά του συνημιτόνου**.

Τότε $|C_n\sin(n\omega t+\varphi_n)|\leq C_n$, αντίστοιχα, $|C_n\cos(n\omega t-\theta_n)|\leq C_n$ για κάθε $n=0,1,\ldots$, δηλαδή οι συντελεστές C_n δείχνουν το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης κάθε όρου της σειράς. Οι συντελεστές αυτοί λέγονται **αρμονικοί πλάτους** και το διάγραμμά τους **γραμμικό φάσμα πλάτους** (line spectrum). Είναι προφανές τότε ότι από τη μελέτη του γραμμικού φάσματος προκύπτει η ταχύτητα σύγκλισης της σειράς στην f. Οι γωνίες φ_n, αντίστοιχα, θ_n; $n=1,2,\ldots$ ορίζουν τότε τους **αρμονικούς φάσης** και το διάγραμμά τους λέγεται **γραμμικό φάσμα φάσης** (phase spectrum).

[9] Ισχύει ότι: $\cos\varphi_n=1/\sqrt{1+\tan^2\varphi_n}$.

Πρέπει να τονιστεί στο σημείο αυτό ότι, εφόσον ισχύει το Θεώρημα 13.2.2 - 1, οπότε η σειρά Fourier συγκλίνει στην $f(t)$, τα πλάτη C_n πρέπει διαρκώς να μειώνονται και τελικά να συγκλίνουν στο μηδέν, διαφορετικά σύμφωνα με το Θεώρημα 12.3.1 - 2 η ακολουθία C_n; $n = 0, 1, \ldots$ να είναι **μηδενική**.

Παράδειγμα 13.2.4 - 1

Από τη σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης του Παραδείγματος 13.2.3 - 1 με στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 5 δεκαδικά ψηφία προκύπτει ότι για τους όρους περιττής τάξης είναι:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{|a_0|}{2} = 0.78540, \quad C_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 1.18545, \\ C_3 &= \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 0.34076, \quad C_5 = \sqrt{a_5^2 + b_5^2} = 0.20161 \\ C_7 &= \sqrt{a_7^2 + b_7^2} = 0.14345, \quad \ldots, \end{aligned}$$

ενώ για τους όρους άρτιας τάξης

$$C_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = |b_2| = 0.5, \quad C_4 = |b_4| = 0.25, \quad C_6 = |b_6| = 0.1667, \ldots .$$

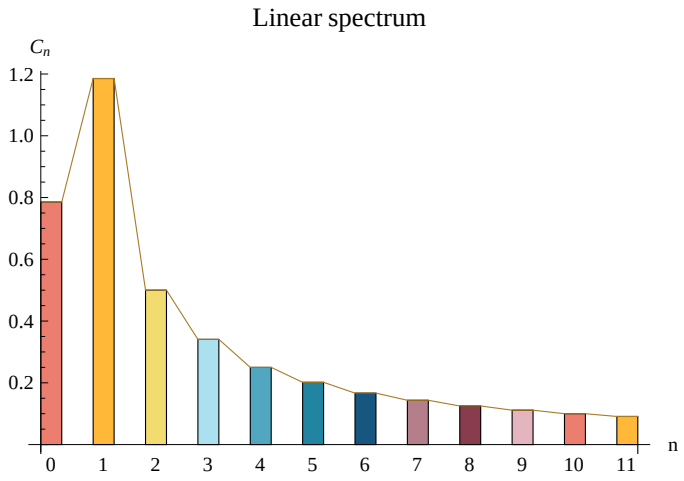
Το αντίστοιχο γραμμικό φάσμα πλάτους δίνεται στο Σχ. 13.2.4 - 1. Από τη μελέτη του διαγράμματος προκύπτει ότι η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει αργά προς την f. Επίσης δίνονται το κυκλικό διάγραμμα κατανομής (pie chart) στο Σχ. 13.2.4 - 2 και φάσης στο Σχ. 13.2.4 - 3.

Ο υπολογισμός των αρμονικών πλάτους με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές:[10]

Πρόγραμμα 13.2.4 - 1 (σειράς Fourier αρμονικοί πλάτους)

```
f[t_]:= Piecewise[{{t, 0 <= t < Pi}, {0, Pi <= t < 2 Pi}}]
T  = 2*Pi;
a0 = (2/T) Integrate[f[t],{t, 0, 2*Pi}];
C0 = Abs[a0]/2;Print["Co=", N[C0]];
Do[n = i; x = (2/T) Integrate[f[t]*Cos[2*n*Pi*t/T],
          {t, 0, 2*Pi}];
```

[10] Για MATHEMATICA βλέπε Don [4].



Σχήμα 13.2.4 - 1: Παράδειγμα 13.2.4 - 1: το γραμμικό φάσμα πλάτους (linear spectrum).

```
            y = (2/T) Integrate[f[t]*Sin[2*n*Pi*t/T],
            {t, 0, 2*Pi}];
            z = Sqrt[x^2 + y^2];
Print["C", i,"=",N[z], {i, 1, 7}];
```

Παράδειγμα 13.2.4 - 2

Από τη σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης του Παραδείγματος 13.2.3 - 2 με στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 5 δεκαδικά ψηφία προκύπτει ότι για τους όρους περιττής τάξης είναι:

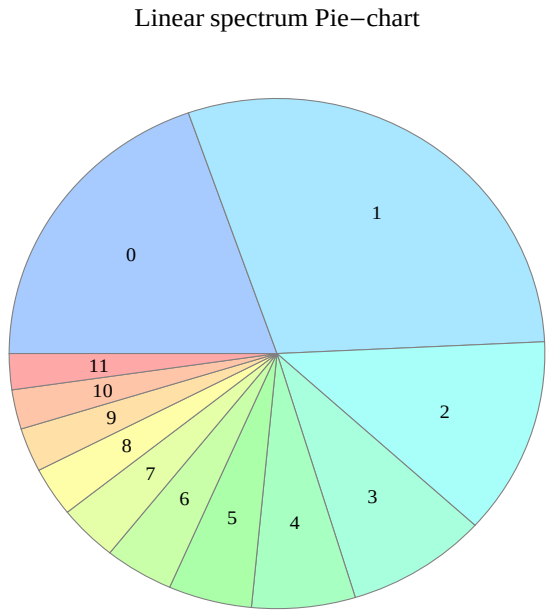
$$C_0 = \frac{|a_0|}{2} = 0.31606, \quad C_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 0.41490,$$

$$C_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 0.14433, \quad C_4 = \sqrt{a_4^2 + b_4^2} = 0.05014, \quad \ldots,$$

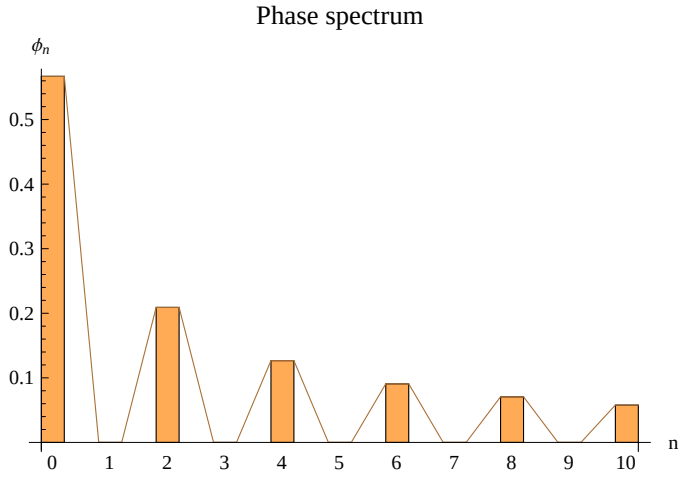
ενώ για τους όρους άρτιας τάξης

$$C_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 0.09935, \quad C_4 = 0.05014, \quad C_6 = 0.03349, \quad \ldots .$$

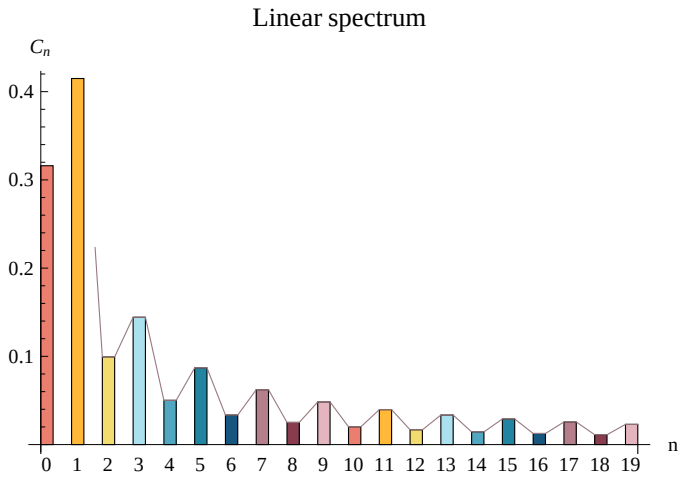
Το αντίστοιχο γραμμικό φάσμα πλάτους δίνεται στο Σχ. 13.2.4 - 4. Από τη μελέτη του διαγράμματος προκύπτει ότι η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει επίσης αργά προς την g.



Σχήμα 13.2.4 - 2: Παράδειγμα 13.2.4 - 1: το διάγραμμα κατανομής (pie chart) του γραμμικού φάσματος πλάτους.



Σχήμα 13.2.4 - 3: Παράδειγμα 13.2.4 - 1: το φάσμα φάσεων (phase spectrum).



Σχήμα 13.2.4 - 4: Παράδειγμα 13.2.4 - 2: το γραμμικό φάσμα πλάτους (linear spectrum).

Παράδειγμα 13.2.4 - 3

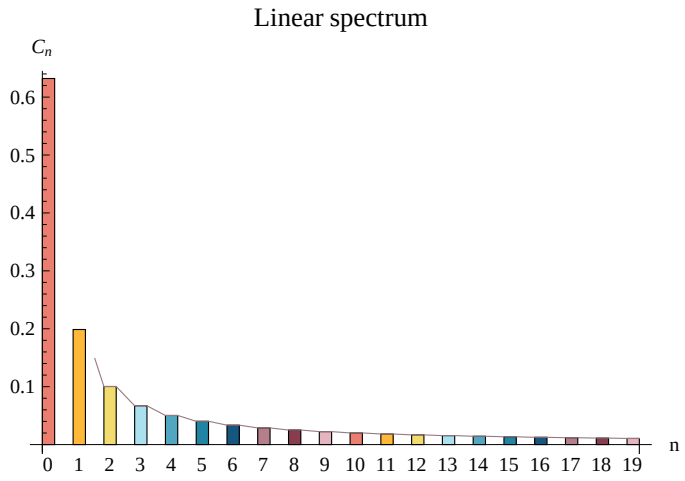
Όμοια από τη σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης του Παραδείγματος 13.2.3 - 3 με στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 5 δεκαδικά ψηφία προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{|a_0|}{2} = 0.63212, \quad C_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 0.19871, \\ C_2 &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 0.10029, \quad C_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 0.06698, \\ C_4 &= \sqrt{a_4^2 + b_4^2} = 0.05026, \quad C_5 = \sqrt{a_5^2 + b_5^2} = 0.04026, \quad \ldots \end{aligned}$$

με αντίστοιχο γραμμικό φάσμα πλάτους που δίνεται στο Σχ. 13.2.4 - 5. Από τη μελέτη του διαγράμματος προκύπτει ότι η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει γρήγορα προς την $\tilde{g}$.

Παράδειγμα 13.2.4 - 4

Όμοια από τη σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης του Παραδείγματος 13.2.3 - 4 με στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 5 δεκαδικά ψηφία



Σχήμα 13.2.4 - 5: Παράδειγμα 13.2.4 - 3: το γραμμικό φάσμα πλάτους (linear spectrum).

έχουμε:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{|a_0|}{2} = 0.31831, \quad C_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 0.5, \\ C_4 &= \sqrt{a_4^2 + b_4^2} = 0.04244, \quad C_6 = \sqrt{a_6^2 + b_6^2} = 0.01819, \\ C_8 &= \sqrt{a_8^2 + b_8^2} = 0.01011, \quad C_{10} = \sqrt{a_{10}^2 + b_{10}^2} = 0.00643, \quad \ldots \end{aligned}$$

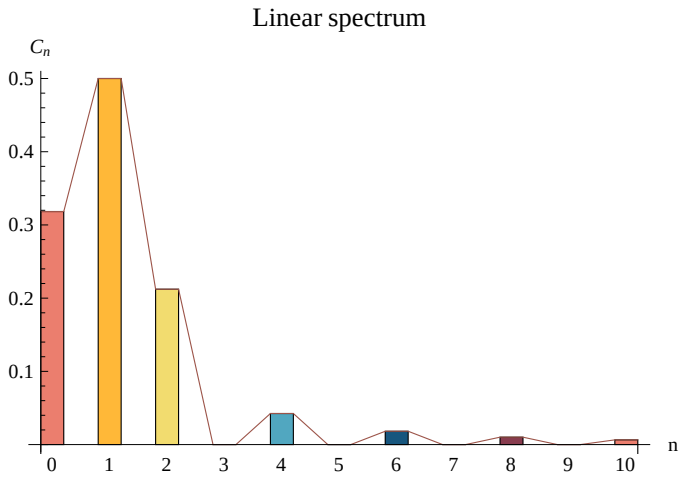
με αντίστοιχο γραμμικό φάσμα πλάτους που δίνεται στο Σχ. 13.2.4 - 6. Από τη μελέτη του διαγράμματος προκύπτει ότι η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει επίσης γρήγορα προς την $\tilde{f}$.

13.2.5 Σειρά άρτιων και περιττών συναρτήσεων

Είναι ήδη γνωστό ότι μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού, έστω $\mathcal{D}$, λέγεται άρτια αντίστοιχα περιττή, όταν για κάθε t, $-t \in \mathcal{D}$ είναι $f(-t) = f(t)$, αντίστοιχα, $f(-t) = -f(t)$.

Από τις ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών έχουμε:

i) το διάγραμμα μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα yy', ενώ μιας περιττής συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων,



Σχήμα 13.2.4 - 6: Παράδειγμα 13.2.4 - 4: το γραμμικό φάσμα πλάτους (linear spectrum).

ii) όταν η f είναι άρτια, τότε

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt = 2\int_{0}^{\alpha} f(t)\,dt, \qquad (13.2.5 - 1)$$

ενώ, όταν είναι περιττή,

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt = 0, \qquad (13.2.5 - 2)$$

iii) το γινόμενο μιας περιττής με μία άρτια είναι περιττή συνάρτηση, ενώ το γινόμενο δύο άρτιων ή δύο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.

Με χρήση των παραπάνω ιδιοτήτων (i)-(iii) αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 13.2.5 - 1 (σειρά άρτιων και περιττών συναρτήσεων). *Έστω $f(t)$ μία περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο T που πληροί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 13.2.2 - 1. Τότε, αν η $f(t)$ είναι* **άρτια**, *το ανάπτυγμά της σε σειρά Fourier είναι*

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)$$

όπου

$$\alpha_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt \ \textit{και}$$

$$\alpha_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt \ \textit{για κάθε}\ n = 1, 2, \ldots \quad (13.2.5 - 3)$$

ενώ, όταν είναι **περιττή**,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)$$

όπου

$$\beta_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt \ \textit{για κάθε}\ n = 1, 2, \ldots . \quad (13.2.5 - 4)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 13.2.5 - 1, όταν η f είναι

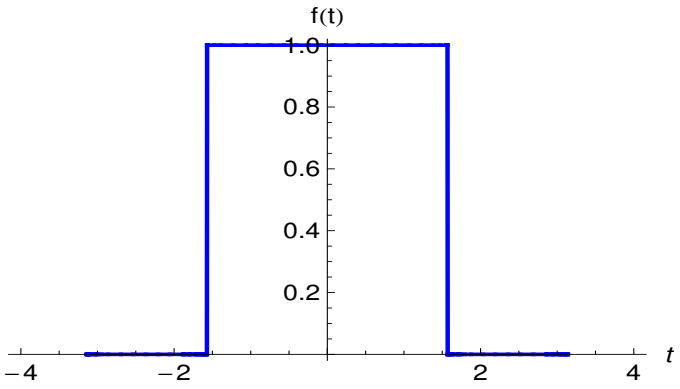
- **άρτια**, πρέπει $\beta_n = 0$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, ενώ, όταν είναι
- **περιττή**, πρέπει $\alpha_n = 0$ για κάθε $n = 0, 1, \ldots$.

Παράδειγμα 13.2.5 - 1

Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση (Σχ. 13.2.5 - 1)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad -\pi < t \le -\frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{αν} \quad -\frac{\pi}{2} < t \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{αν} \quad \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases} \quad \text{και } f(t+2\pi) = f(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Η f είναι μία **άρτια** συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$, οπότε $\beta_n = 0$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Τότε σύμφωνα με τους τύπους $(13.2.5 - 3)$



Σχήμα 13.2.5 - 1: Παράδειγμα 13.2.5 - 1: η συνάρτηση $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο.

ολοκληρώνοντας σε διάστημα πλάτους $T/2$, δηλαδή στο $[0,\pi] = [0,\pi/2] \cup [\pi/2,\pi]$ έχουμε

$$\alpha_0 = \frac{4}{T}\int_0^{\pi/2} f(t)dt + \frac{4}{T}\int_{\pi/2}^{\pi} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} dt = 1$$

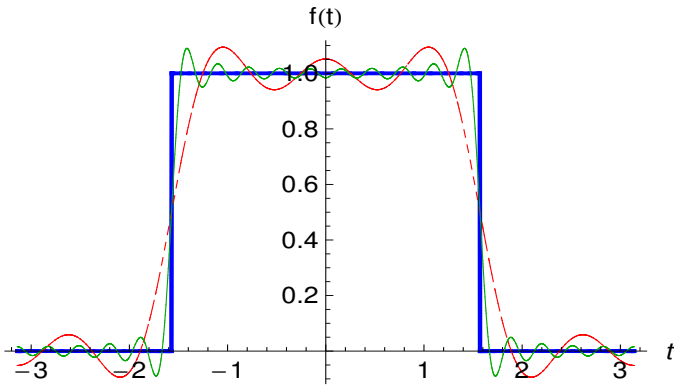
και

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(nt)dt = \frac{2}{n\pi}\sin(nt)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.

Στο Σχ. 13.2.5 - 2 δίνεται το διάγραμμα της $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο (έντονη μπλε καμπύλη), το διάγραμμα του αθροίσματος S_5 των 5 πρώτων όρων (κόκκινη καμπύλη) και του S_{19} (πράσινη καμπύλη).

Από το Σχ. 13.2.5 - 2 προκύπτει ότι, ενώ για $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ το διάγραμμα του αθροίσματος των n πρώτων όρων πρέπει να τείνει στο διάγραμμα της f, όταν το n αυξάνει, στα σημεία ασυνέχειας $-\pi/2$ και $\pi/2$ δημιουργούνται **κύματα**, που εξακολουθούν να υπάρχουν και όταν το άθροισμα των όρων της σειράς αυξάνει. Το φαινόμενο αυτό είναι ήδη γνωστό από τα Παραδείγματα 13.2.3 - 1 έως και 13.2.3 - 3 ως **φαινόμενο Gibbs**. ∎



Σχήμα 13.2.5 - 2: Παράδειγμα 13.2.5 - 1: διάγραμμα της $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο, αθροίσματος S_5 κόκκινη και S_{19} πράσινη καμπύλη.

Παράδειγμα 13.2.5 - 2

Όμοια η περιοδική συνάρτηση (Σχ. 13.2.5 - 3)

$$f(t) = t, \text{όταν} \quad -\pi \le t < \pi \quad \text{και} \quad f(t+2\pi) = f(t) \ \text{για κάθε} \ t \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Η f είναι μία **περιττή** συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$, οπότε $\alpha_n = 0$ για κάθε $n = 0, 1, \ldots$. Τότε σύμφωνα με τους τύπους $(13.2.5 - 4)$ ολοκληρώνοντας όμοια σε διάστημα πλάτους $T/2$, δηλαδή στο $[0, \pi]$ έχουμε

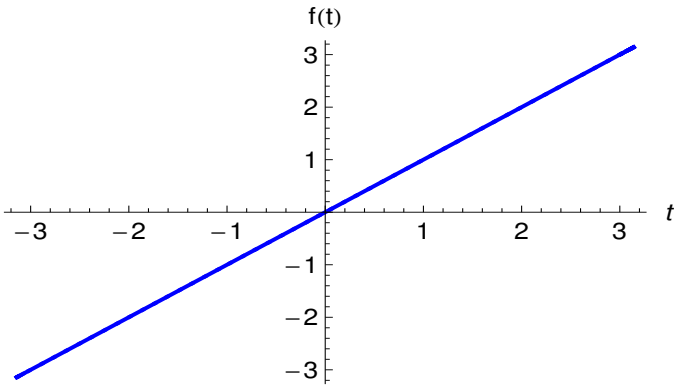
$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt = -\frac{2}{n\pi}\,t\cos(nt)\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt \\ &= -\frac{2(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

Ανάλογο διάγραμμα με αυτό του Σχ. 13.2.5 - 2 γίνεται και στην περίπτωση αυτή.

■

Άσκηση

Να αναπτυχθούν σε σειρά Fourier και να γίνει το γραμμικό φάσμα των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων $f(t)$, που ο περιορισμός τους στη θεμελιώδη περίοδο



Σχήμα 13.2.5 - 3: Παράδειγμα 13.2.5 - 2: η συνάρτηση $f(t)$, όταν $t \in [-\pi, \pi]$.

είναι:

i) $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{αν} \quad -\pi \le t < 0 \\ 1 & \text{αν} \quad 0 \le t < \pi \end{cases}$

ii) $f(t) = t\,; \quad -1 \le t < 1$

iii) $f(t) = t\,; \quad 0 \le t < 2\pi$

iv) $f(t) = \begin{cases} \sin 2t & \text{αν} \quad 0 \le t < \pi \\ 0, & \text{αν} \quad \pi \le t < 2\pi \end{cases}$

v) $f(t) = e^t\,; \quad 0 \le t < 1$

vi) $f(t) = t^2\,; \quad -\pi \le t < \pi$

vii) $f(t) = |\sin t|$

viii) $f(t) = \begin{cases} -t\,; & -\pi \le t < 0 \\ t\,; & 0 \le t < \pi. \end{cases}$

Απαντήσεις

(i) περιττή $\quad T = 2\pi$, $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\pi} \sin(nt)dt = \frac{2[1-(-1)^n]}{n\,\pi}$; $n = 1,\, 2,\, \ldots$,

(ii) ανάλογη του Παραδείγματος 13.2.5 - 2, $T = 2$, $b_n = -\frac{2(-1)^n}{n\,\pi}$; $n = 1,\, 2,\, \ldots$,

(iii) $a_0 = 2\pi\,, \quad a_n = 0, \quad b_n = -\frac{2}{n}$; $n = 1,\, 2,\, \ldots\,.$,

(iv) βλέπε Παράδειγμα 13.2.3 - 4,

(v) όμοια Παράδειγμα 13.2.3 - 3, $\quad a_0 = 2 - \frac{2}{e}\,, \quad a_n = \frac{2(e-1)}{e\left(1+4n^2\pi^2\right)}\,,$

$b_n = \frac{4n\pi(e-1)}{e\left(1+4n^2\pi^2\right)}$; $n = 1,\, 2,\, \ldots$,

(vi) άρτια $\quad a_0 = \frac{2\pi^2}{3}\,, \quad a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$; $n = 1,\, 2,\, \ldots$,

(vii) $T = \pi$. Όταν $t \in [0, \pi/2]$ είναι $|\sin t| = \sin t$. Λύση όμοια με Παράδειγμα 13.2.3 - 4,

$a_0 = \frac{4}{\pi}\,, \quad a_n = \frac{4}{\pi\left(1-4n^2\right)}$; $n = 1,\, 2,\, \ldots$,

(viii) άρτια $\quad T = 2\pi, \quad a_0 = \int_0^{\pi} t\,dt = \pi$, $a_n = \frac{2[-1+(-1)^n]}{n^2\pi}$; $n = 1,\, 2,\, \ldots\,.$

13.2.6 Εκθετική μορφή της σειράς Fourier

Έστω η περιοδική συνάρτηση $f(t)$ με θεμελιώδη περίοδο T, που το ανάπτυγμά της σε σειρά Fourier είναι

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\alpha_n \cos(n\omega t) + \beta_n \sin(n\omega t)\right], \qquad (13.2.6\text{ - }1)$$

όπου $\omega = 2\pi/T$.

Είναι ήδη γνωστό από το Μάθημα *Μιγαδικοί Αριθμοί* ότι από την ταυτότητα του Euler

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \sin\theta,$$

προκύπτουν οι τύποι

$$\sin\theta = \frac{e^{i\,\theta} - e^{-i\,\theta}}{2i} \quad \text{και} \quad \cos\theta = \frac{e^{i\,\theta} + e^{-i\,\theta}}{2}\,. \qquad (13.2.6\text{ - }2)$$

Αντικαθιστώντας στην (13.2.6−1) τους όρους του συνημιτόνου και του ημιτόνου με τις $(13.2.6-2)$ η σειρά διαδοχικά γράφεται

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\alpha_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + \beta_n \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i}\right] \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}\left(\alpha_n - i\beta_n\right) e^{in\omega t} + \frac{1}{2}\left(\alpha_n + i\beta_n\right) e^{-in\omega t}\right]. \end{aligned}$$

Αν

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\alpha_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}\left(\alpha_n - i\beta_n\right), \quad \text{και} \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}\left(\alpha_n + i\beta_n\right), \qquad (13.2.6\text{ - }3) \end{aligned}$$

τότε

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}\right) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{-in\omega t}, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}. \qquad (13.2.6\text{ - }4)$$

Η $(13.2.6-4)$ είναι γνωστή ως η **εκθετική** ή **μιγαδική μορφή** της σειράς Fourier.

Οι συντελεστές c_n με $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ υπολογίζονται ή μέσω των τύπων $(13.2.6-3)$, όταν είναι γνωστά τα α_n και β_n ή όπως αποδεικνύεται από την $f(t)$ σύμφωνα με τον τύπο

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega t}\,dt \quad \text{για κάθε} \quad n = 0,\, \pm1,\, \pm2,\, \ldots . \qquad (13.2.6\text{ - }5)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι πραγματική, από την $(13.2.6-5)$ προκύπτει ότι γενικά οι συντελεστές c_n είναι μιγαδικοί αριθμοί, για τους οποίους σύμφωνα με τους τύπους $(13.2.6-3)$ ισχύει:

i)
$$c_{-n} = \overline{c_n} \quad \text{για κάθε} \quad n = 1,\, 2,\, \ldots ,\, \text{ενώ} \qquad (13.2.6\text{ - }6)$$

ii) επειδή $c_n = |c_n|e^{i\theta_n}$ και $c_{-n} = |c_n|e^{-i\theta_n}$, πρέπει

$$|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \quad \text{για κάθε} \quad n = 1,\, 2,\, \ldots . \qquad (13.2.6\text{ - }7)$$

Όπως έχει ήδη αναπτυχθεί στην Παράγραφο 13.2.4, είναι δυνατόν και για την εκθετική μορφή της σειράς Fourier να οριστεί το αντίστοιχο γραμμικό φάσμα πλάτους, το οποίο όμως στην περίπτωση αυτή εκτείνεται από το $-\infty$ μέχρι το $+\infty$, επειδή οι τιμές της κυκλικής συχνότητας είναι και αρνητικές, δηλαδή $\pm\omega$, $\pm2\omega$, $\ldots$, όπως επίσης και το φάσμα των φάσεων.

Παράδειγμα 13.2.6 - 1

Έστω η περιοδική συνάρτηση

$$\tilde{g}(t) = e^{-t}, \quad \text{όταν} \quad 0 \le t < 1 \quad \text{και} \quad \tilde{g}(t+1) = \tilde{g}(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

του Παραδείγματος 13.2.3 - 3 (Σχ. 13.2.3 - 5) με θεμελιώδη περίοδο $T = 1$, δηλαδή $\omega = 2\pi$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(13.2.6 - 5)$ έχουμε

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{1}\int_0^1 e^{-t}e^{-in\omega t}\,dt = \int_0^1 e^{-t}e^{-2\pi n\,i\,t}\,dt \\ &= \int_0^1 e^{-(1+2n\pi\,i)\,t}\,dt = -\left.\frac{e^{-(1+2n\pi\,i)\,t}}{1+2n\pi\,i}\right|_0^1 \\ &= \frac{1-e^{-1}}{1+2n\pi\,i} = \left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{1-2n\pi\,i}{1+4n^2\pi^2} \qquad (13.2.6\text{ - }8) \end{aligned}$$

όπου

$$e^{-2n\pi\,i} = \cos(2n\pi) - i\,\sin(2n\pi) = 1.$$

Άρα σύμφωνα με την $(13.2.6 - 4)$ η εκθετική μορφή της σειράς Fourier είναι

$$\tilde{g}(t) = \left(1-\frac{1}{e}\right)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1-2n\pi\,i}{1+4n^2\pi^2}\,e^{2n\pi\,i\,t}. \qquad (13.2.6\text{ - }9)$$

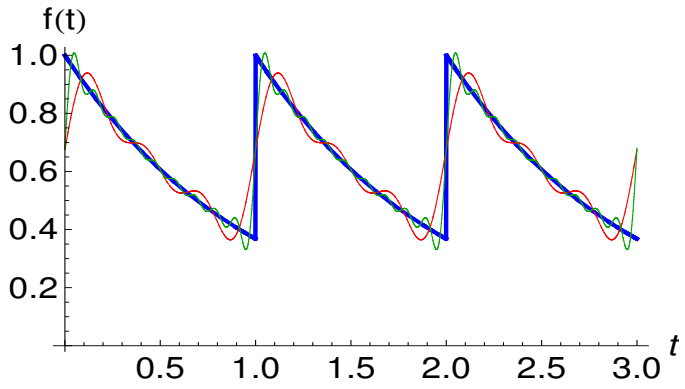
Ανάλογα με το Σχ. 13.2.3 - 6 δίνεται στο Σχ. 13.2.6 - 1 το διάγραμμα της $\tilde{g}(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο (έντονη μπλε καμπύλη), το διάγραμμα του αθροίσματος

$$S_3 = \left(1-\frac{1}{e}\right)\sum_{n=-3}^{3}\frac{1-2n\pi\,i}{1+4n^2\pi^2}\,e^{2n\pi\,i\,t} \qquad \text{(κόκκινη καμπύλη)}$$

και του S_9 (πράσινη καμπύλη). Παρατηρούμε ότι στα σημεία ασυνέχειας εξακολουθεί να εμφανίζεται το φαινόμενο Gibbs, ενώ τα διαγράμματα των S_3 και S_9 διέρχονται από τα σημεία ασυνέχειας $(t_i, g(t_i))$ με $t_i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

Από την $(13.2.6 - 8)$, όταν $n = 7$, προκύπτει

$$\begin{aligned} |c_{\pm 7}| &= 0.01437, \quad |c_{\pm 6}| = 0.01676, \quad |c_{\pm 5}| = 0.02011, \\ |c_{\pm 4}| &= 0.02513, \quad |c_{\pm 3}| = 0.03349, \quad |c_{\pm 2}| = 0.05014, \\ |c_{\pm 1}| &= 0.09936, \quad |c_0| = 0.63212. \qquad (13.2.6\text{ - }10) \end{aligned}$$



Σχήμα 13.2.6 - 1: Παράδειγμα 13.2.6 - 1: διάγραμμα της $\tilde{g}(t)$ όταν $t \in [0,3]$ μπλε καμπύλη, αθροίσματος S_3 κόκκινη και S_9 πράσινη.

Τότε από το αντίστοιχο γραμμικό φάσμα πλάτους (Σχ. 13.2.6 - 2), όπως και στο αντίστοιχο (Σχ. 13.2.4 - 5), προκύπτει η γρήγορη σύγκλιση της σειράς $(13.2.6-9)$ στην $\tilde{g}(t)$. Επίσης παρατηρούμε ότι οι τιμές $(13.2.6-10)$ επαληθεύουν τις $(13.2.6-6)$ - $(13.2.6-7)$.

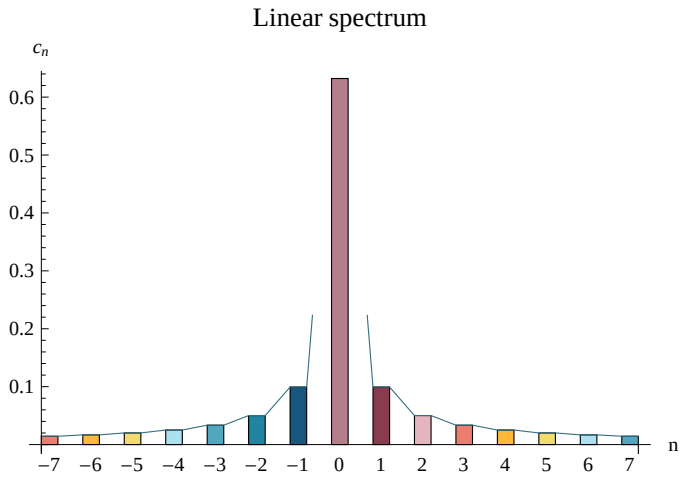
Το Σχ. 13.2.6 - 2 έγινε με τις εξής εντολές του MATHEMATICA:

Πρόγραμμα 13.2.6 - 1 (σειράς Fourier φάσμα πλάτους)

```
Clear["n"];T = 1;
cn = Integrate[(1/T) Exp[-t]*Exp[-I*n*2*Pi*t],{t,0,1}];
m1 = Array[b1, {15, 1}];
Do[n = i; x = N[Abs[cn]]; m1[[i + 8]] = x;
  Print["c", i, "=", x], {i, -7, 7}];
fgr1 = BarChart[m1, PlotLabel -> "Linear spectrum",
  Joined -> True,BarSpacing -> 1.50,
  AxesLabel->{"n", "|cn|"},ChartLabels -> {"-7","-6",
  "-5","-4","-3","-2","-1","0","1","2","3","4","5","6",
  "7"}, ChartStyle->24, PlotRange -> All]
```

Άσκηση

Να υπολογιστεί η εκθετική μορφή της σειράς Fourier των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων, που ο περιορισμός στη θεμελιώδη περίοδο είναι:



Σχήμα 13.2.6 - 2: Παράδειγμα 13.2.6 - 1: το γραμμικό φάσμα πλάτους (linear spectrum).

$i)$ $f(t) = t\,;\ -\pi \le t < \pi$ $iii)$ $f(t) = |\sin t|$

$ii)$ $f(t) = t^2\,;\ -\pi \le t < \pi$ $iv)$ $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{αν} \quad -\pi \le t < 0 \\ 1 & \text{αν} \quad 0 \le t < \pi. \end{cases}$

13.3 Μετασχηματισμός Fourier

13.3.1 Ορισμός

Ορισμός 13.3.1 - 1 (μετασχηματισμού Fourier). *Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και $\omega \in \mathbb{R}$. Τότε η μιγαδική συνάρτηση F που ορίζεται από το γενικευμένο ολοκλήρωμα του α' είδους*

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \qquad (13.3.1 - 1)$$

όταν αυτό υπάρχει, ορίζει τον μετασχηματισμό Fourier[11] *(Fourier transform) της f.*

[11] Βλέπε βιβλιογραφία και *http://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform* Επίσης *mathworld.wolfram.com/FourierTransform.html*

Ορισμός 13.3.1 - 2 (αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier). *Η συνάρτηση* $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t)$, *όταν*

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \qquad (13.3.1\text{ - }2)$$

ορίζει τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier.

Όταν η μεταβλητή t συμβολίζει τον χρόνο, τότε η ω συμβολίζει τη συχνότητα. Αποδεικνύεται ότι, όταν η f είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, δηλαδή όταν ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)dt| < +\infty, \qquad (13.3.1\text{ - }3)$$

τότε ο μετασχηματισμός Fourier της f υπάρχει. Η συνθήκη $(13.3.1-3)$ είναι *ικανή όχι όμως και αναγκαία*, δηλαδή είναι δυνατό να υπάρχουν συναρτήσεις, που να μην ικανοποιούν την $(13.3.1-3)$ και να έχουν μετασχηματισμό Fourier.

Παράδειγμα 13.3.1 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad |x| < \alpha \\ 0 & \text{αν} \quad |x| > \alpha \end{cases} \quad \text{με } \alpha > 0.$$

Τότε, αν $\omega \neq 0$, είναι

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-i\omega t}dt = \frac{2}{\omega}\sin(\omega\alpha).$$

Παράδειγμα 13.3.1 - 2

Όμοια, έστω

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{αν} \quad t > 0 \\ 0 & \text{αν} \quad t < 0. \end{cases}$$

Τότε

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{1+i\omega}\left[\lim_{t->+\infty} e^{-(1+i\omega)t} - 1\right] = \frac{1-i\omega}{1+\omega^2}\,. \end{aligned}$$

13.3.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Επειδή όπως είναι ήδη γνωστό ισχύει ότι $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$, η συνάρτηση $F(\omega)$ που ορίζεται από τον τύπο (13.3.1−1) είναι γενικά μία μιγαδική συνάρτηση, που γράφεται αναλυτικά ως

$$F(\omega) = R(\omega) + iX(\omega), \qquad (13.3.2\text{ - }1)$$

όπου

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt \qquad (13.3.2\text{ - }2)$$

το πραγματικό μέρος και

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt \qquad (13.3.2\text{ - }3)$$

το φανταστικό μέρος της. Η εκθετική μορφή της $F(\omega)$ τότε είναι

$$F(\omega) = |F(\omega)|e^{i\varphi(\omega)}, \qquad (13.3.2\text{ - }4)$$

όπου $|F(\omega)|$ το μέτρο και $\varphi(\omega)$ η φάση της F.

Θεωρώντας τώρα ότι η συνάρτηση $f(t)$ είναι πραγματική, αποδεικνύονται με τη βοήθεια των τύπων $(13.3.2-1)$ - $(13.3.2-3)$ οι παρακάτω προτάσεις, που ορίζουν τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier:

Πρόταση 13.3.2 - 1. *Η συνάρτηση R είναι άρτια ως προς ω, ενώ η X περιττή, δηλαδή*

$$R(-\omega) = R(\omega) \quad \textit{και} \quad X(-\omega) = -X(\omega).$$

Παράδειγμα 13.3.2 - 1

Έστω

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{αν} \quad t < 0 \ \text{ή} \ t > 1 \end{cases}$$

Τότε

$$\begin{aligned} F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{0}^{1} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega}\left(1 - e^{-i\omega}\right) \\ &= \frac{i}{\omega}\left(\cos\omega - 1\right) + \frac{\sin\omega}{\omega} = R(\omega) + X(\omega) \ \text{με} \ \omega \neq 0 \end{aligned}$$

Πρόταση 13.3.2 - 2. *$F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$, όπου $\overline{F(\omega)}$ η συζυγής συνάρτηση της $F(\omega)$ και αντίστροφα, δηλαδή όταν ισχύει η σχέση αυτή, η f είναι πραγματική συνάρτηση.*

Πρόταση 13.3.2 - 3. *Αν η $F(\omega)$ είναι πραγματική συνάρτηση, τότε η f είναι άρτια συνάρτηση και όταν η $F(\omega)$ είναι φανταστική, τότε η f είναι περιττή.*

Πρόταση 13.3.2 - 4. *Αν $F_1(\omega) = \mathcal{F}\left[f_1(t)\right]$, $F_2(\omega) = \mathcal{F}\left[f_2(t)\right]$ και $k, \lambda \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει η γραμμική ιδιότητα*

$$\mathcal{F}\left[kf_1(t) + \lambda f_2(t)\right] = \varkappa F_1(\omega) + \lambda F_2(\omega)$$

η οποία γενικεύεται επαγωγικά ως εξής:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{F}\left[\lambda_i f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathcal{F}\left[f_i(t)\right], \qquad (13.3.2 - 5)$$

όταν $\lambda_i \in \mathbb{R}$; $i = 1, 2, \ldots, n$ και $n = 1, 2, \ldots$.

Πρόταση 13.3.2 - 5. *Αν $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, τότε*

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \qquad (13.3.2 - 6)$$

όπου για $a = -1$ είναι $\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega)$.

Πρόταση 13.3.2 - 6. *Αν* $t_0 \in \mathbb{R}$, *τότε*

$$\mathcal{F}\left[f\left(t-t_0\right)\right] = F(\omega)e^{-i\omega t_0}. \qquad (13.3.2\text{ - }7)$$

Πρόταση 13.3.2 - 7. *Αν* $\omega_0 \in \mathbb{R}$, *τότε*

$$\mathcal{F}\left[f(t)e^{i\omega_0 t}\right] = F\left(\omega-\omega_0\right). \qquad (13.3.2\text{ - }8)$$

Πρόταση 13.3.2 - 8. *Ισχύει*

$$\mathcal{F}\left[f(t)\cos\left(\omega_0 t\right)\right] = \frac{1}{2}\left[F\left(\omega-\omega_0\right)+F\left(\omega+\omega_0\right)\right] \qquad (13.3.2\text{ - }9)$$

και

$$\mathcal{F}\left[f(t)\sin\left(\omega_0 t\right)\right] = \frac{1}{2}\left[F\left(\omega-\omega_0\right)+F\left(\omega+\omega_0\right)\right]. \qquad (13.3.2\text{ - }10)$$

Πρόταση 13.3.2 - 9. *Αν* $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$, *τότε*

$$\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega F(\omega)$$

και γενικά

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right] = (i\omega)^n F(\omega). \qquad (13.3.2\text{ - }11)$$

Πρόταση 13.3.2 - 10. *Αν* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = F(0) = 0$ *με* $\omega \neq 0$, *τότε*

$$\left[\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\right] = \frac{1}{i\omega}F(\omega) = \frac{1}{i\omega}\mathcal{F}[f(t)]. \qquad (13.3.2\text{ - }12)$$

Πρόταση 13.3.2 - 11. *Ισχύει*

$$\mathcal{F}[-itf(t)] = F'(\omega)$$

και γενικά για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ *ότι*

$$\mathcal{F}\left[t^n f(t)\right] = i^n F^{(n)}(\omega). \qquad (13.3.2 - 13)$$

Θα πρέπει να τονιστεί στο σημείο αυτό ότι πολλές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier είναι δυνατό να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις των αντίστοιχων ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace για $s = i\omega$.

13.4 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Bolton, W. (1994). *Fourier Series*. Pierson Education Limited. ISBN 978–0582–239–340.

[4] Don, E. (2006). *Schaum's Outlines – Mathematica*. Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN 978–960–461–000–6.

[5] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 14

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

14.1 Εισαγωγικές έννοιες

Στο μάθημα αυτό θα γίνει μια γενίκευση της ήδη γνωστής στον αναγνώστη έννοιας της πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής σε **δύο**, αντίστοιχα **τρεις** μεταβλητές.[1]

14.1.1 Ορισμοί

Ορισμός 14.1.1 - 1 (συνάρτησης πολλών μεταβλητών) *Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα $D \subseteq \mathbb{R}^3$ και $T \subseteq \mathbb{R}$ δύο τυχόντα μη κενά σύνολα. Τότε μία συνάρτηση δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών με πεδίο ορισμού το D και πεδίο τιμών το T είναι μία* **μονοσήμαντη** *απεικόνιση, έστω f, του συνόλου*

[1] Βλέπε επίσης βιβλιογραφία [3, 4].

D στο T, τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} D \ni (x,y) &\longrightarrow \quad f(x,y) = w \in T, \\ &\textit{αντίστοιχα} \\ D \ni (x,y,z) &\longrightarrow \quad f(x,y,z) = w \in T. \end{aligned} \tag{14.1.1 - 1}$$

Τα x, y, αντίστοιχα x, y, z είναι στην περίπτωση αυτή οι ανεξάρτητες μεταβλητές ή απλά για ευκολία στο εξής μεταβλητές ή επίσης όπως επίσης λέγεται τα στοιχεία (arguments) της f, ενώ η w είναι η εξαρτημένη μεταβλητή. Όμοια, όπως και στην περίπτωση της μιας μεταβλητής, η f ορίζει τον **τύπο** της συνάρτησης, δηλαδή περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η παραπάνω απεικόνιση.

Ο προσδιορισμός του πεδίου ορισμού D γίνεται όπως και στην περίπτωση της συνάρτησης με μία μεταβλητή, με τη διαφορά ότι προσδιορίζονται οι τιμές για τις οποίες ορίζεται η f για κάθε μεταβλητή x, y, αντίστοιχα x, y, z χωριστά και στη συνέχεια το D ως η ένωση των επιμέρους πεδίων ορισμού. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού D θα συμβολίζεται στο εξής με $f|D$ ή αναλυτικά $f(x,y)|D$, αντίστοιχα $f(x,y,z)|D$. Τα πεδία ορισμού και τιμών είναι μια **καμπύλη επιφάνεια** ή γενικότερα μια **τρισδιάστατη περιοχή** του χώρου.

Έστω $w = f(x,y)|D$, αντίστοιχα $w = f(x,y,z)|D$. Τότε η γραφική παράσταση της f θα είναι το σύνολο των σημείων

$$\{((x,y),w) \in D \times T, \quad \text{αντίστοιχα} \quad ((x,y,z),w) \in D \times T.\}$$

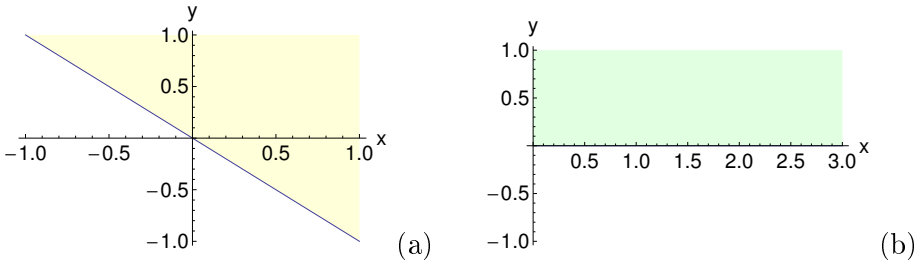
Παράδειγμα 14.1.1 - 1

Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$$f_1(x,y) = \sqrt{x+y}, \quad f_2(x,y) = \sqrt{x}+\sqrt{y} \quad \text{και} \quad f_3(x,y) = \ln\left(4 - x^2 - 4y^2\right).$$

Λύση. Επειδή από τον τύπο της f_1 πρέπει να προκύπτει πραγματικός αριθμός, το πεδίο ορισμού D_1 θα είναι

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x + y \geq 0\}.$$



Σχήμα 14.1.1 - 1: Παράδειγμα 14.1.1 - 1: (a) το πεδίο ορισμού $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x + y \geq 0, \}$ της συνάρτησης $f_1(x, y) = \sqrt{x + y}$. Η μπλε ευθεία έχει εξίσωση $x + y = 0$. (b) Το πεδίο ορισμού $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$ της $f_2(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Γραφικά το D_1 ορίζεται από το σύνολο των σημείων του επιπέδου που βρίσκονται στο άνω μέρος της ευθείας $x + y = 0$ (Σχ. 14.1.1 - 3a).[2]

Όμοια το πεδίο ορισμού D_2 της f_2 θα είναι

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\},$$

δηλαδή το 1ο τεταρτημόριο του Σχ. 14.1.1 - 3b.

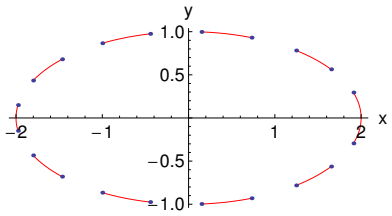
Τέλος, επειδή η λογαριθμική συνάρτηση ορίζεται μόνο για θετικές τιμές της μεταβλητής της, για το πεδίο ορισμού D_3 της f_3 πρέπει $4 - x^2 - 4y^2 > 0$ ή $1 > \frac{x^2}{4} + y^2$, οπότε

$$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\},$$

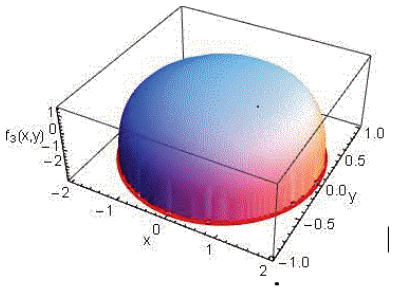
δηλαδή το πεδίο ορισμού είναι το εσωτερικό της έλλειψης με εξίσωση $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (Σχ. 14.1.1 - 2a). Στο Σχ. 14.1.1 - 2b δίνεται η γραφική παράσταση της f_3.

■

[2] Υπενθυμίζεται ότι η ανισότητα $Ax + By + \Gamma > 0$ λύνεται γραφικά, όταν χαραχθεί η ευθεία $\varepsilon : \quad Ax + By + \Gamma = 0$ και θεωρήσουμε το σύνολο των σημείων $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, που είναι στο άνω μέρος της ε.



(a)



(b)

Σχήμα 14.1.1 - 2: Παράδειγμα 14.1.1 - 1: (a) το πεδίο ορισμού $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\}$ της συνάρτησης $f_3(x,y) = \ln\left(4 - x^2 - 4y^2\right)$. Η διακεκομμένη κόκκινη καμπύλη είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. (b) Η γραφική παράσταση της $f_3(x,y)$. Η κόκκινη καμπύλη δεν συμπεριλαμβάνεται στο διάγραμμα.

Παράδειγμα 14.1.1 - 2

Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x,y) = \sin^{-1} x + \sqrt{xy}.$$

Λύση. Έστω

$$f_1(x,y) = \sin^{-1} x \quad \text{και} \quad f_2(x,y) = \sqrt{xy}.$$

Τότε, όπως είναι ήδη γνωστό από το Μάθημα *Πραγματικές Συναρτήσεις*, στη συνάρτηση $\sin x$, όταν το πεδίο ορισμού περιοριστεί στο $[-\pi/2, \pi/2]$, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $\sin^{-1} x$ ή $\arcsin x$ και έχει πεδίο ορισμού το $[-1,1]$, δηλαδή το πεδίο τιμών της $\sin x$. Επομένως το πεδίο ορισμού D_1 της f_1 είναι

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -1 \le x \le 1\}.$$

Η συνάρτηση

$$f_2(x,y) = \sqrt{xy}$$

ορίζεται, όταν $xy \geq 0$, δηλαδή, όταν τα x, y είναι ομόσημα. Άρα λαμβάνοντας υπόψη και το D_1 το πεδίο ορισμού της f θα είναι $D_f = D_2 \cup D_3$, όταν

$$\begin{aligned} D_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x \leq 0, \quad y \leq 0\} \quad \text{και} \\ D_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \quad y \geq 0\}. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 14.1.1 - 3

Όμοια το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$$f(x,y) = \sqrt{x+y} \quad \text{και} \quad g(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

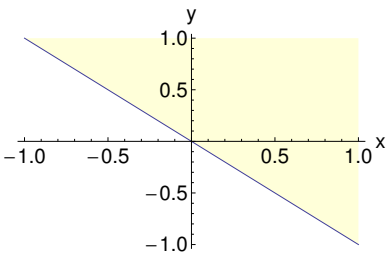
Λύση. Έστω D_f το πεδίο ορισμού της f, αντίστοιχα D_g της g. Τότε προφανώς είναι

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x+y \geq 0 \quad (\Sigma\chi.\ 14.1.1-3a)\ \},$$

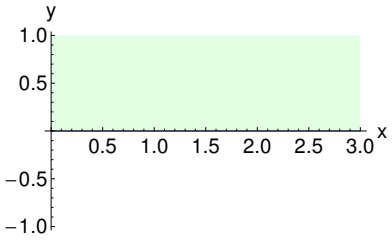
αντίστοιχα

$$D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0 \text{ και } y \geq 0 \quad (\Sigma\chi.\ 14.1.1-3b)\ \}.$$

■



(a)



(b)

Σχήμα 14.1.1 - 3: Παράδειγμα 14.1.1 - 4: (a) το πεδίο ορισμού $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x+y \geq 0\}$ της συνάρτησης $f(x,y) = \sqrt{x+y}$. Η μπλε ευθεία έχει εξίσωση $x+y=0$ και (b) το πεδίο ορισμού $D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$ της $g(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Παράδειγμα 14.1.1 - 4

Όμοια των συναρτήσεων

$$f(x,y,z)=\ln(x-y+4z) \quad \text{και} \quad g(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-9}}\,.$$

Λύση. Επειδή η λογαριθμική συνάρτηση ορίζεται μόνο για θετικές τιμές της μεταβλητής της, το πεδίο ορισμού D_f της f θα είναι

$$D_f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\quad x-y+4z>0\},$$

δηλαδή πρόκειται για το άνω μέρος του επιπέδου π με εξίσωση

$$\pi:\quad x-y+4z=0.$$

Υπενθυμίζεται στο σημείο αυτό από το Μάθημα *Αναλυτική Γεωμετρία* ότι η γενική μορφή της εξίσωσης του επιπέδου είναι

$$ax+by+cz=d, \tag{14.1.1 - 2}$$

που, όταν λυθεί ως προς z, ισοδύναμα γράφεται και

$$z=f(x,y)=Ax+By+D. \tag{14.1.1 - 3}$$

Η γραφική παράσταση ενός επιπέδου γενικά γίνεται με τον προσδιορισμό των σημείων τομής του επιπέδου με τους άξονες συντεταγμένων. Τότε ενώνοντας τα τρία παραπάνω σημεία τομής το δημιουργούμενο τρίγωνο δείχνει και τη μορφή του επιπέδου. Για παράδειγμα, έστω ότι ζητείται η γραφική παράσταση του επιπέδου $3x+4y+z=12$, που είναι της μορφής $(14.1.1-2)$ και σύμφωνα με την $(14.1.1-3)$ ισοδύναμα γράφεται

$$z=12-3x-4y, \quad \text{δηλαδή} \quad f(x,y)=12-3x-4y. \tag{14.1.1 - 4}$$

Τότε θέτοντας στην $(14.1.1-4)$ $x=y=0$ προσδιορίζεται ότι το σημείο τομής του επιπέδου με τον z-άξονα είναι το $(0,0,12)$. Όμοια το σημείο τομής με τον x-άξονα είναι το $(4,0,0)$ και με τον y-άξονα το $(0,3,0)$.

Η ανισότητα $ax+by+cz>0$ λύνεται γραφικά, όταν αρχικά γίνει η γραφική παράσταση του επιπέδου

$$\pi:\quad ax+by+cz=0$$

και στη συνέχεια θεωρηθεί το σύνολο των σημείων $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, που είναι στο άνω μέρος του π.

Το πεδίο ορισμού D_g της g, λόγω της τετραγωνικής ρίζας και του παρονομαστή, θα είναι

$$D_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 < 9\},$$

δηλαδή το εσωτερικό της σφαίρας με κέντρο το σημείο $(0, 0, 0)$ και ακτίνα $R = 3$. ∎

Από το Παράδειγμα 14.1.1 - 4 προκύπτει ότι στις περιπτώσεις συναρτήσεων τριών μεταβλητών το πεδίο ορισμού είναι ή μια επιφάνεια - περίπτωση πεδίου ορισμού D_f - ή ένας όγκος - πεδίο ορισμού D_g. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, έστω f, στην περίπτωση αυτή είναι δυνατόν να γίνει από το διάγραμμα του πεδίου τιμών T των σημείων, δηλαδή του συνόλου $T = \{f(x, y, z) \quad \text{με} \quad (x, y, z) \in D\}$, όταν D το πεδίο ορισμού της f και είναι γενικά μια επιφάνεια ή και ένας όγκος του χώρου των τριών διαστάσεων.

Άσκηση

Των παρακάτω συναρτήσεων να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού και να γίνει η γραφική παράσταση:

i) $\left(4 - x^2 - y^2\right)^{1/2}$

ii) $\ln(x - y)$

iii) $\left(9 - x^2\right)^{1/2} + \left(4 - y^2\right)^{1/2}$

iv) $\sin^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

v) $1/\ln(x + y + z)$,

vi) $\tan^{-1} y + \sqrt{xy}$,

vii) $\ln(xyz)$,

viii) $\ln\left(x^2 + y^2 - z^2\right)$.

Απαντήσεις

(i) $x^2 + y^2 \geq 0$,, (ii) $x - y > 0$, (iii) $-3 \leq x \leq 3$ και $-2 \leq y \leq 2$, (iv) $y \leq x$ και $x \neq 0$, (v) $x + y + z > 0$ και $x + y + z \neq 1$, (vi) $xy \geq 0$, (vii) $xyz > 0$, (viii) $x^2 + y^2 > z^2$.

14.1.2 Σύγκλιση συναρτήσεων δύο και τριών μεταβλητών

Ορισμός 14.1.2 - 1 (δύο μεταβλητών). *Έστω η συνάρτηση* $f(x,y)$ *με πεδίο ορισμού* $D \subseteq \mathbb{R}^2$. *Τότε θα είναι*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l, \tag{14.1.2 - 1}$$

τότε και μόνον όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *έτσι ώστε*

$$|f(x,y) - l| < \varepsilon \quad \textit{για κάθε} \quad (x,y) \in D, \quad \textit{και}$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta.$$

Ορισμός 14.1.2 - 2 (τριών μεταβλητών). *Έστω η συνάρτηση* $f(x,y,z)$ *με πεδίο ορισμού* $D \subseteq \mathbb{R}^3$. *Τότε θα είναι*

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = l, \tag{14.1.2 - 2}$$

τότε και μόνον όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *έτσι ώστε*

$$|f(x,y,z) - l| < \varepsilon \quad \textit{για κάθε} \quad (x,y,z) \in D, \quad \textit{και}$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta.$$

Σχετικά με τη διαδικασία υπολογισμού των επιμέρους οριακών τιμών στην περίπτωση του Ορισμού 14.1.2 - 1 ισχύει η παρακάτω πρόταση: [3]

Πρόταση 14.1.2 - 1. *Έστω η συνάρτηση* $f(x,y)$ *με* $(x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ *ανοικτό σύνολο και σημείο* $(x_0,y_0) \in D$. *Αν*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$$

[3] Ανάλογη πρόταση ισχύει και για την περίπτωση του Ορισμού 14.1.2 - 2 (βλέπε βιβλιογραφία).

και υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ *οι οριακές τιμές*

$$\lim_{x \to x_0} f(x,y) \quad \textit{και} \quad \lim_{y \to y_0} f(x,y),$$

τότε

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x \to x_0} \left[\lim_{y \to y_0} f(x,y) \right] \tag{14.1.2 - 3}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \left[\lim_{x \to x_0} f(x,y) \right] = l.$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε, όπως αυτό προκύπτει από το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 14.1.2 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \text{ με πεδίο ορισμού } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ με } (x,y) \neq (0,0)\}.$$

Τότε

$$\lim_{x \to 0} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{x-y}{x+y} = \begin{cases} \dfrac{0-y}{0+y} = -1 & \text{αν} \quad y \neq 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-0}{x+0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x'}{x'} = 1 & \text{αν} \quad y = 0, \end{cases}$$

ενώ

$$\lim_{y \to 0} f(x,y) = \lim_{y \to 0} \frac{x-y}{x+y} = \begin{cases} \dfrac{x-0}{x+0} = 1 & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{0-y}{0+y} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{-y'}{y'} = -1 & \text{αν} \quad x = 0, \end{cases}$$

Άρα

$$\lim_{x \to 0} \left[\lim_{y \to 0} f(x,y) \right] = 1, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \lim_{y \to 0} \left[\lim_{x \to 0} f(x,y) \right] = -1,$$

οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 14.1.2 - 1 το $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

Σημειώσεις 14.1.2 - 1

Ανάλογα με τις ιδιότητες των ορίων των συναρτήσεων μιας μεταβλητής ισχύει ότι:

- το όριο εφόσον υπάρχει, είναι μοναδικό,
- το όριο του αθροίσματος, της διαφοράς και του γινομένου ισούται με το άθροισμα των ορίων, της διαφοράς και του γινομένου. Όμοια του πηλίκου, όταν το όριο του παρονομαστή είναι διάφορο του μηδενός, ισούται με το πηλίκο των ορίων.

Άσκηση

Να υπολογιστούν οι οριακές τιμές των παρακάτω συναρτήσεων στο σημείο $(0,0)$

$i)$ $\dfrac{x-y^2}{x+y^2}$ $\qquad$ $iv)$ $\dfrac{x-2y}{x+y}$

$ii)$ $\dfrac{|xy|}{xy}$ $\qquad$ $v)$ $\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$

$iii)$ $\dfrac{y}{x^2+y^2}$ $\qquad$ $vi)$ $(1+y)\dfrac{\sin^2 x}{x}$.

Απαντήσεις

(i) $\lim_{x\to 0} f(x,y) = -1, \quad \lim_{y\to 0} f(x,y) = 1,$

(ii) $\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = 1$, όταν τα x, y ομόσημα και -1, όταν ετερόσημα,

(iii) $\lim_{x\to 0} f(x,y) = \frac{1}{y}, \quad \lim_{y\to 0} f(x,y) = 0,$

(iv) $\lim_{x\to 0} f(x,y) = -2, \quad \lim_{y\to 0} f(x,y) = 1,$

(v) $\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0, \quad \lim_{y\to 0} f(x,y) = x,$

(vi) $\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0, \quad \lim_{y\to 0} f(x,y) = \frac{\sin^2 x}{x}$.

14.1.3 Συνέχεια συναρτήσεων δύο και τριών μεταβλητών

Ανάλογα με την Παράγραφο 14.1.2 δίνεται και στην περίπτωση αυτή ο ορισμός της συνέχειας μιας συνάρτησης δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών.

Ορισμός 14.1.3 - 1 (συνέχειας). *Μία συνάρτηση $f(x,y)$, αντίστοιχα $f(x,y,z)$ με πεδίο ορισμού, έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα $D \subseteq \mathbb{R}^3$, θα είναι συνεχής στο σημείο $(x_0,y_0) \in D$, αντίστοιχα $(x_0,y_0,z_0) \in D$ τότε και μόνον, όταν*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

αντίστοιχα

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0).$$

Οι παραπάνω οριακές τιμές υπολογίζονται σύμφωνα με τους Ορισμούς 14.1.2 - 1, αντίστοιχα 14.1.2 - 2.

Παράδειγμα 14.1.3 - 1

Η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{αν} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{αν} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $(0,0)$, επειδή με ανάλογους υπολογισμούς με εκείνους του Παραδείγματος 14.1.2 - 1 προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] = 0, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right] = 0,$$

οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 14.1.2 - 1 είναι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0,$$

δηλαδή υπάρχει η οριακή τιμή και ισούται με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα 14.1.3 - 2

Η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x^2+y^2} & \alpha\nu \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \alpha\nu \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$. Η λύση, που προκύπτει με υπολογισμούς ανάλογους των Παραδειγμάτων 14.1.2 - 1 και 14.1.3 - 1, αφήνεται ως άσκηση.

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Οι παρακάτω προτάσεις που αναφέρονται στις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων δύο μεταβλητών αποτελούν μια γενίκευση των αντίστοιχων του Μαθήματος *Συνέχεια Συνάρτησης*, που αναφέρεται σε συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Πρόταση 14.1.3 - 1. *Αν f, $g|D$ συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο $(x_0,y_0)\in D$, τότε και οι συναρτήσεις $f\pm g$ και fg είναι συνεχείς στο σημείο $(x_0,y_0)\in D$.*

Πρόταση 14.1.3 - 2. *Αν f, $g|D$ συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο $(x_0,y_0)\in D$ και $f(x_0,y_0)\neq(0,0)$, τότε υπάρχει περιοχή $\varpi(x_0,y_0)$, τέτοια ώστε $f(x_0,y_0)\neq(0,0)$ για κάθε $x\in\varpi(x_0,y_0)$, οπότε η συνάρτηση $1/f$ έχει έννοια για κάθε $x\in D\cap\varpi(x_0,y_0)$ και είναι συνεχής στο σημείο $(x_0,y_0)\in D$.*

Σημειώσεις 14.1.3 - 1

- Ανάλογες προτάσεις ισχύουν και στην περίπτωση συναρτήσεων τριών μεταβλητών.
- Οι πολυωνυμικές και οι ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς συναρτήσεις στα πεδία ορισμού των. Όμοια οι εκθετικές, τριγωνομετρικές, υπερβολικές και οι αντίστροφες αυτών συναρτήσεις.

Άσκηση

Να εξεταστούν ως προς τη συνέχεια οι παρακάτω συναρτήσεις:

$i)$ $\sin(x+y)$ $\qquad$ $iv)$ $\dfrac{x}{x^2+y^2}$

$ii)$ $\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ $\qquad$ $v)$ $\dfrac{x+y}{1-\cos x}$

$iii)$ $\dfrac{x+y}{x-y}$ $\qquad$ $vi)$ $\dfrac{1}{x+y}$.

Απαντήσεις

(i) συνεχής στο $\mathbb{R}^2$, (ii) όμοια, (iii) συνεχής στο $\mathbb{R}^2$ με $x \neq y$,
(iv) συνεχής στο $\mathbb{R}^2$, (v) συνεχής στο $\mathbb{R}^2$ με $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$,
(vi) συνεχής στο $\mathbb{R}^2$ με $x \neq -y$.

14.2 Μερική παράγωγος

14.2.1 Ορισμοί

Ο γνωστός ορισμός της παραγώγου συνάρτησης μιας μεταβλητής[4] επεκτείνεται και στην περίπτωση μιας συνάρτησης δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών για κάθε μεταβλητή χωριστά θεωρώντας όλες τις άλλες μεταβλητές ως σταθερές και λέγεται μερική παράγωγος της συνάρτησης ως προς τη θεωρούμενη μεταβλητή.

Συγκεκριμένα έχουμε:

[4] **Ορισμός** παραγώγου συνάρτησης μιας μεταβλητής: έστω η συνάρτηση $f|D$, όπου $D \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα και σημείο $x_0 \in D$. Τότε για κάθε $x \in D - \{x_0\}$ με τον τύπο $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ορίζεται μία συνάρτηση, που λέγεται πηλίκο διαφορών ή κλίση της f στο σημείο x_0. Θα λέγεται ότι η f παραγωγίζεται στο σημείο $x_0 \in D$ και θα συμβολίζεται αυτό με $f'(x_0)$ τότε και μόνον, όταν υπάρχει η οριακή τιμή:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} . \end{aligned}$$

Ορισμός 14.2.1 - 1 (μερική παράγωγος). *Έστω μια συνάρτηση $f|S$ όπου S ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, αντίστοιχα του $\mathbb{R}^3$ και σημείο $(x_0, y_0) \in S$, αντίστοιχα $(x_0, y_0, z_0) \in S$. Τότε ορίζεται ως 1ης τάξης μερική παράγωγος (partial derivative) της f ως προς τη μεταβλητή x στο σημείο (x_0, y_0), αντίστοιχα (x_0, y_0, z_0), η παρακάτω οριακή, εφόσον υπάρχει, τιμή:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} &= f_x(x_0, y_0) = D_x f(x_0, y_0) \qquad (14.2.1 - 1) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}, \end{aligned}$$

αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} &= f_x(x_0, y_0, z_0) = D_x f(x_0, y_0, z_0) \qquad (14.2.1 - 2) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις 14.2.1 - 1

- Η οριακή τιμή $(14.2.1-1)$, αντίστοιχα $(14.2.1-2)$ είναι, όπως και στην περίπτωση της μιας μεταβλητής, πραγματικός αριθμός.
- Το σύμβολο (τελεστής)

  $$\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x = D_x$$

  δηλώνει 1ης τάξης μερική (partial) παράγωγο ως προς τη μεταβλητή ή συνιστώσα x, σε διάκριση με τον γνωστό συμβολισμό

  $$D = D^1 = \frac{d}{dx}$$

  για μια μεταβλητή.
- Όμοια ορίζονται οι μερικές παράγωγοι ως προς τις άλλες μεταβλητές.

Σημειώσεις 14.2.1 - 1

i) Ανάλογα με την περίπτωση της παραγώγου μιας μεταβλητής η μερική παράγωγος μιας συνάρτησης, έστω f, ως προς μια μεταβλητή της x σε ένα σημείο x_0, θα ορίζει τον **συντελεστή μεταβολής** της f στο σημείο αυτό κατά τον x-άξονα και γεωμετρικά θα ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ή διαφορετικά με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας του διαγράμματος της συνάρτησης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Όμοια για τις άλλες μεταβλητές.

ii) Οι συντελεστές μεταβολής των μεταβλητών στην περίπτωση (i) είναι δυνατόν να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, δηλαδή να έχουμε ταχύτερη μεταβολή ως προς x σε σύγκριση με τη μεταβολή ως προς y, κ.λπ.

iii) Όπως και στην περίπτωση της παραγώγου συνάρτησης μιας μεταβλητής αν για τη μερική παράγωγο μιας συνάρτησης, έστω την f_x, ισχύει ότι:

- $f_x(x_0, f(x_0)) = 0$, τότε η εφαπτομένη ευθεία στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι **παράλληλη** στη διεύθυνση του x-άξονα, ενώ, αν
- $f_x(x_0, f(x_0)) = +\infty$, τότε η εφαπτομένη ευθεία στο $(x_0, f(x_0))$ είναι **κάθετη** στον x-άξονα.

Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Ορισμός 14.2.1 - 2 (μερική παράγωγος). *Έστω μια συνάρτηση $f|S$ όπου S ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, αντίστοιχα του $\mathbb{R}^3$ και σημείο $(x_0, y_0) \in S$, αντίστοιχα $(x_0, y_0, z_0) \in S$. Τότε, αν η 1ης τάξης μερική παράγωγος της f ως προς τη μεταβλητή, έστω x, υπάρχει για κάθε $(x_0, y_0) \in S$, αντίστοιχα $(x_0, y_0, z_0) \in S$, τότε ορίζεται η μερική παράγωγος f_x στο S.*

Ανάλογος ορισμός ισχύει και για τις μεταβλητές y και z.

Έστω η συνάρτηση $f|S$. Αν υπάρχει η 1ης τάξης μερική παράγωγος της f, έστω ως προς x, τότε ορίζεται η 2ης τάξης μερική παράγωγος της f στο x ως εξής:

$$f_{x\,x} = f_{2x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad (14.2.1 - 3)$$

όπου όμοια το σύμβολο

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \partial_x x = \partial_{2x} = D_{xx}$$

δηλώνει 2ης τάξης μερική παράγωγο ως x.

Όμοια ορίζονται οι 3ης, 4ης και γενικά η ν-τάξης μερική παράγωγος της f στο x ως εξής:

$$\begin{aligned} f_{x\,x\,x} &= f_{3x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \\ f_{x\,x\,x\,x} &= f_{4x} = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right), \quad \text{και γενικά} \\ f_{\nu\,x} &= \frac{\partial^\nu f}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{\nu-1} f}{\partial x^{\nu-1}}\right). \end{aligned} \tag{14.2.1 - 4}$$

Επίσης ορίζονται οι παράγωγοι των παρακάτω μορφών

$$\begin{aligned} f_{x\,y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \\ f_{x\,x\,y} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \\ f_{x\,y\,y} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right), \quad \text{κ.λπ.} \end{aligned} \tag{14.2.1 - 5}$$

Οι παράγωγοι αυτές λέγονται πολλές φορές **ανάμεικτες** ή και **επάλληλες**.

Παρατήρηση 14.2.1 - 1

Οι παράγωγοι f_x, f_{xx}, ..., $f_{\nu\,x}$ είναι συναρτήσεις, ενώ οι αντίστοιχες παράγωγοί των στο σημείο (x_0, y_0), αντίστοιχα (x_0, y_0, z_0) είναι πραγματικοί αριθμοί. Ανάλογη παρατήρηση ισχύει και για τις μεταβλητές y και z. Ανάλογη παρατήρηση ισχύει για τις επάλληλες παραγώγους.

Σημείωση 14.2.1 - 1

Στην περίπτωση των επάλληλων παραγώγων η παραγώγιση αρχίζει από τον δεξιό δείκτη, δηλαδή αν για παράδειγμα ζητείται η μερική παράγωγος f_{xy}, τότε η σειρά παραγώγισης είναι: f_y και στη συνέχεια η παράγωγός της f_y ως προς x, δηλαδή

$$f_{xy} = (f_y)_x \,.$$

14.2.2 Υπολογισμός παραγώγων

Κανόνες παραγώγισης

[5]Οι γνωστοί κανόνες παραγώγισης των συναρτήσεων μιας μεταβλητής ισχύουν και στην περίπτωση της μερικής παραγώγου.

Κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό να γίνει μια υπενθύμιση με τη μορφή προτάσεων των παρακάτω κανόνων παραγώγισης των συναρτήσεων μιας μεταβλητής:

Πρόταση **(παράγωγος σταθεράς συνάρτησης).** *Έστω η συνάρτηση* $f \,|\, \mathbb{R}$ *όπου* $f(x) = c$ *σταθερά για κάθε* $x \in \mathbb{R}$. *Τότε*

$$f'(x) = 0 \quad \textit{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Πρόταση **(παράγωγος αθροίσματος).** *Έστω ότι οι συναρτήσεις* $f, g \,|\, D$ *είναι παραγωγίσιμες στο* D. *Τότε ισχύει*

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad \textit{για κάθε} \quad x \in D.$$

Η ιδιότητα γενικεύεται.

Πρόταση **(παράγωγος γινομένου).** *Έστω ότι οι συναρτήσεις* $f, g \,|\, D$ *είναι παραγωγίσιμες στο* D. *Τότε ισχύει*

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \textit{για κάθε} \quad x \in D.$$

[5]Βλέπε Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 6.

Όμοια η ιδιότητα γενικεύεται.

Επειδή προφανώς ισχύει $(\lambda f(x))' = \lambda f'(x)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά από τις παραπάνω προτάσεις προκύπτει τελικά η παρακάτω γραμμική ιδιότητα:

$$(kf(x) + \lambda g(x))' = kf'(x) + \lambda g'(x)$$

για κάθε $x \in D$ και $k,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Πρόταση. *Αν η συνάρτηση $f|D$ παραγωγίζεται στο D και επιπλέον υπάρχει $x_0 \in D$, έτσι ώστε $f'(x_0) \neq 0$, τότε*

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'_{x=x_0} = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x)}.$$

Πρόταση (παράγωγος πηλίκου). *Έστω ότι οι συναρτήσεις $f,\ g|D$ είναι παραγωγίσιμες στο D και επιπλέον $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D$. Τότε ισχύει*

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{για κάθε} \quad x \in D.$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση f δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών. Αν η f θεωρηθεί ως συνάρτηση μόνον της μεταβλητής x, ενώ οι άλλες μεταβλητές ως σταθερές, τότε προκύπτει ο παρακάτω κανόνας παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης:

Θεώρημα 14.2.2 - 1 (παράγωγος σύνθετης συνάρτησης).
Έστω οι συναρτήσεις

$$y = f(w)\,|\,D_1 \quad \text{και} \quad w = g(x)\,|\,D_2 \quad \text{όπου} \quad g(D_2) \subseteq D_1$$

και $D_1,\ D_2$ ανοικτά διαστήματα και η προκύπτουσα σύνθετη συνάρτηση

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{για κάθε} \quad x \in D_2.$$

Έστω επίσης ότι για ένα σημείο $x_0 \in D_2$ υπάρχει η παράγωγος $g'(x_0) = w_0'$ και η αντίστοιχη $y_0' = f'(w_0)$ στο σημείο $w_0 = g(x_0)$ με $w_0 \in D_1$. Τότε υπάρχει και η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $h(x)|D_2$ στο σημείο $x_0 \in D_2$ και ισχύει

$$\left.\frac{dh(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{df(w)}{dw}\right|_{w=w_0} \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = y_0'\ w_0'.$$

Το θεώρημα αυτό, που είναι γνωστό ως **κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης** (chain rule) για συναρτήσεις μιας μεταβλητής, όμοια εφαρμόζεται και για τις άλλες μεταβλητές.

Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 14.2.2 - 1, αν για κάθε $x \in D_2$ υπάρχει η παράγωγος $g'(x)$ και επιπλέον ότι για την αντίστοιχη τιμή $g(x) = w \in D_1$ υπάρχει η $f'(w) = f'(g(x))$, θα υπάρχει και η παράγωγος της $f(g(x))$ ως προς x για κάθε $x \in D_2$ και θα δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \frac{dg(x)}{dx} = f'_g \, g'_x. \qquad (14.2.2 - 1)$$

Με τον τύπο 14.2.2 - 1 υπολογίζονται οι παράγωγοι των σύνθετων συναρτήσεων μιας μεταβλητής, έστω x, οι κυριότερες των οποίων δίνονται στον Πίνακα 14.2.2 - 1.

Παράδειγμα 14.2.2 - 1

Να υπολογιστούν οι 1ης τάξης μερικές παράγωγοι της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^4 + 4\sqrt{y} - 5$$

Λύση. Διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} f_x &= \left(x^4 + 4\,y^{1/2} - 5\right)_x = \left(x^4\right)_x + \overbrace{\left(4\,y^{1/2} - 5\right)_x}^{0} \\ &= 4x^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= \left(x^4 + 4\,y^{1/2} - 5\right)_y = 4\,\overbrace{\left(y^{1/2}\right)_y}^{\frac{1}{2}\,y^{\frac{1}{2}-1}} + \overbrace{\left(x^4 - 5\right)_y}^{0} \\ &= 2\,y^{-1/2}. \end{aligned}$$

■

Πίνακας 14.2.2 - 1: παραγώγων των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων με μεταβλητή x.

α / α	Συνάρτηση	Παράγωγος
1	$f^a(x)$	$af'(x)f^{a-1}(x)$
2	$e^{f(x)}$	$f'(x)e^{f(x)}$
3	$\ln f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
4	$\sin f(x)$	$f'(x)\cos f(x)$
5	$\cos f(x)$	$-f'(x)\sin f(x)$
6	$\tan f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
7	$\cot f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$
8	$\tan^{-1} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$
9	$\sin^{-1} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
10	$\cos^{-1} f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
11	$\sinh f(x)$	$f'(x)\cosh f(x)$
12	$\cosh f(x)$	$f'(x)\sinh f(x)$
13	$\tanh f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\cosh^2 f(x)} = f'(x)\left[1-\tanh^2 f(x)\right]$
14	$\coth f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sinh^2 f(x)} = f'(x)\left[1-\coth^2 f(x)\right]$

Παράδειγμα 14.2.2 - 2

Όμοια της συνάρτησης

$$h(s,t) = t^2 \ln\left(s^2+1\right) + \frac{9}{t^3} - \sqrt[3]{s^4}.$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
h_s &= \left[t^2 \ln\left(s^2+1\right) + 9\,t^{-3} - s^{4/3}\right]_s \\
&= \left[t^2 \ln\left(s^2+1\right)\right]_s + 9\overbrace{\left(t^{-3}\right)_s}^{0} - \left(s^{4/3}\right)_s \\
&= t^2 \overbrace{\left[\ln\left(s^2+1\right)\right]_s}^{\text{τύπος 3 του Πίνακα 14.2.2 - 1}} - \frac{4}{3}\,s^{\frac{4}{3}-1} \\
&= t^2\,\frac{1}{s^2+1}\overbrace{\left(s^2+1\right)_s}^{2\,s} - \frac{4}{3}\,s^{1/3} \\
&= \frac{2\,s\,t^2}{s^2+1} - \frac{4}{3}\,s^{1/3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_t &= \left[t^2 \ln\left(s^2+1\right) + 9\,t^{-3} - s^{4/3}\right]_t \\
&= \overbrace{\left[t^2 \ln\left(s^2+1\right)\right]_t}^{\ln\left(s^2+1\right)\left(t^2\right)_t} + 9\overbrace{\left(t^{-3}\right)_s}^{-3\,t^{-4}} - \overbrace{\left(s^{4/3}\right)_s}^{0} \\
&= 2\,t\,\ln\left(s^2+1\right) - 27\,t^{-4}.
\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 14.2.2 - 3

Όμοια της

$$g(x,y,z) = x^2 y - y^2 z^3 + \sin(xy).$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} g_x &= \left[x^2y - y^2z^3 + \sin(xy)\right]_x \\ &= \overbrace{\left(x^2y\right)_x}^{y\left(x^2\right)_x = y\,2x} - \overbrace{\left(y^2z^3\right)_x}^{0} + \overbrace{\left[\sin(xy)\right]_x}^{(xy)_x\cos(xy)} \\ &= 2\,xy + \overbrace{(xy)_x}^{y(x)_x = y}\cos(xy) = 2xy + y\,\cos(xy), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_y &= \left[x^2y - y^2z^3 + \sin(xy)\right]_y \\ &= \overbrace{\left(x^2y\right)_y}^{x^2(y)_y = x^2} - \overbrace{\left(y^2z^3\right)_y}^{z^3\left(y^2\right)_y = z^3(2y)} + \left[\sin(xy)\right]_y \\ &= x^2 - 2\,y\,z^3 + (xy)_y\,\cos(xy) \\ &= x^2 - 2\,y\,z^3 + x\,\cos(xy), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_z &= \left[x^2y - y^2z^3 + \sin(xy)\right]_z \\ &= \overbrace{\left(x^2y\right)_y}^{0} - \overbrace{\left(y^2z^3\right)_y}^{y^2\left(z^3\right)_z = y^2\left(3z^2\right)} + \overbrace{\left[\sin(xy)\right]_z}^{0} = -3y^2z^2. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 14.2.2 - 4

Να υπολογιστούν οι 1ης και οι 2ης τάξης μερικές παράγωγοι της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y}\,e^{-x} + z^2.$$

Λύση. Όμοια διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} f_x &= \left(\frac{x}{y}\,e^{-x}+z^2\right)_x = \left(\frac{x}{y}\,e^{-x}\right)_x + \overbrace{\left(z^2\right)_x}^{0} \\ &= \frac{1}{y}\,\left(x\,e^{-x}\right)_x = \frac{1}{y}\left[\overbrace{(x)_x}^{1}\,e^{-x} + x\,\overbrace{\left(e^{-x}\right)_x}^{(-x)_x\,e^{-x}=-\,e^{-x}}\right] \\ &= \frac{(1-x)\,e^{-x}}{y}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \left[f_x(x,y,z)\right]_x = \left[\frac{(1-x)\,e^{-x}}{y}\right]_x \\ &= \frac{1}{y}\,\left[(1-x)\,e^{-x}\right]_x = \frac{1}{y}\left[\overbrace{(1-x)_x}^{-1}\,e^{-x} + (1-x)\,\overbrace{\left(e^{-x}\right)_x}^{-e^{-x}}\right] \\ &= \frac{(x-2)\,e^{-x}}{y}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= \left(\frac{x}{y}\,e^{-x}+z^2\right)_y = \left(\frac{x}{y}\,e^{-x}\right)_y + \overbrace{\left(z^2\right)_y}^{0} \\ &= \left(x\,e^{-x}\right)\,\overbrace{\left(y^{-1}\right)_y}^{-y-1-1=-y^{-2}} \\ &= -x\,y^{-2}\,e^{-x}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_{yy} &= \left(-x\,e^{-x}\,y^{-2}\right)_y = -x\,e^{-x}\,\overbrace{\left(y^{-2}\right)_y}^{-2\,y^{-3}} \\
&= 2\,x\,y^{-3}\,e^{-x},
\end{aligned}
$$

$$
f_z = \left(\frac{x}{y}\,e^{-x} + z^2\right)_z = \overbrace{\left(\frac{x}{y}\,e^{-x}\right)_z}^{0} + \left(z^2\right)_z = 2z,
$$

$$
f_{zz} = (2z)_z = 2,
$$

$$
\begin{aligned}
f_{xy} &= (f_y)_x \quad \text{η } f_y \text{ έχει ήδη υπολογιστεί παραπάνω} \\
&= \left(-x\,e^{-x}\,y^{-2}\right)_x \\
&= -y^{-2}\,\left(x\,e^{-x}\right)_x = -\frac{1}{y^2}\,\left[\overbrace{(x)_x}^{1}\,e^{-x} + x\,\overbrace{\left(e^{-x}\right)_x}^{-e^{-x}}\right] \\
&= \frac{(x-1)\,e^{-x}}{y^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{yx} &= (f_x)_y \quad \text{η } f_x \text{ έχει ήδη όμοια υπολογιστεί} \\
&= \left[\frac{(1-x)\,e^{-x}}{y}\right]_y = (1-x)\,e^{-x}\,\left(\frac{1}{y}\right)_y \\
&= (1-x)\,e^{-x}\,\left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{(x-1)\,e^{-x}}{y^2}, \quad \text{και όμοια}
\end{aligned}
$$

$$
f_{yz} = f_{zy} = 0,
$$

$$
f_{xz} = f_{zx} = 0.
$$

■

Σημείωση 14.2.2 - 1

Από το Παράδειγμα 14.2.2 - 4 προκύπτει ότι

$$f_{xy} = f_{yx}, \quad f_{yz} = f_{zy} \quad \text{και} \quad f_{xz} = f_{zx},$$

δηλαδή οι ανάμεικτες παράγωγοι 2ης τάξης των ίδιων ανά δύο μεταβλητών είναι ίσες.

Σχετικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 14.2.2 - 2 (Schwarz). *Έστω η συνάρτηση* $f(x,y)| \subseteq \mathbb{R}^2$, *όπου* S *ανοικτό σύνολο, της οποίας υπάρχουν οι* 2*ης τάξης μερικές παράγωγοι και είναι* **συνεχείς** *στο* S. *Τότε*

$$f_{xy} = f_{yx} \quad \textit{για κάθε} \quad (x,y) \in S. \tag{14.2.2 - 2}$$

Σημείωση 14.2.2 - 2

Το παραπάνω θεώρημα, που είναι επίσης γνωστό και ως θεώρημα των Schwarz-Clairaut, γενικεύεται για τρεις και περισσότερες μεταβλητές.

Παράδειγμα 14.2.2 - 5

Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{y}{x+y}\,.$$

Να υπολογιστεί η τιμή $f_{xyy}|_{(1,0)}$.

Λύση. Αρχικά από τη Σημείωση 14.2.1 - 1, σύμφωνα με την οποία στην περίπτωση των επάλληλων παραγώγων η παραγώγιση αρχίζει από τον δεξιό δείκτη, είναι

$$f_{xyy} = \frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x\,\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y^2}\right) = (f_{yy})_x\,. \tag{1}$$

Υπολογισμός της f_{yy}: διαδοχικά έχουμε

$$f_y = \left(\frac{y}{x+y}\right)_y = \frac{\overbrace{(y)_y}^{1}(x+y) - y\overbrace{(x+y)_y}^{0+1}}{(x+y)^2} = \frac{x}{(x+y)^2}\,,$$

$$\begin{aligned} f_{yy} &= \left[\frac{x}{(x+y)^2}\right]_y = x\left[(x+y)^{-2}\right]_y \\ &= x\left[-2\overbrace{(x+y)_y}^{1}(x+y)^{-2-1}\right] \\ &= x\left[-2(x+y)^{-3}\right] = -\frac{2\,x}{(x+y)^3}\,, \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε

$$\begin{aligned} f_{xyy} &= \left[-\frac{2\,x}{(x+y)^3}\right]_x = -2\left[\frac{x}{(x+y)^3}\right]_x \\ &= -2\,\frac{\overbrace{(x)_x}^{1}(x+y)^3 - x\,\overbrace{\left[(x+y)^3\right]_x}^{3(x+y)_x(x+y)^{3-1}}}{(x+y)^6} \\ &= -2\,\frac{(x+y)^3 - x\left[3(x+y)^2\right]}{(x+y)^6} = \frac{2(2x-y)}{(x+y)^4}\,. \end{aligned}$$

Άρα

$$f_{xyy}|_{(1,0)} = \left.\frac{2(2x-y)}{(x+y)^4}\right|_{(1,0)} = \frac{2(2\cdot 1-0)}{(1+0)^4} = 4.$$

■

Παράδειγμα 14.2.2 - 6

Έστω η συνάρτηση $f(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$. Δείξτε ότι[6]

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0. \qquad (14.2.2\text{ - }3)$$

[6] Η εξίσωση (14.2.2 – 3), που είναι γνωστή ως η **εξίσωση του Laplace** (Laplace equation), έχει σημαντικές εφαρμογές στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά (βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 4 - *Εξισώσεις Maxwell*). Η συνάρτηση f, που επαληθεύει την (14.2.2 – 3), λέγεται τότε και **αρμονική** συνάρτηση.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} f_x &= \left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\right]_x \qquad (1)\\ &= -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}-1}\overbrace{\left(x^2+y^2+z^2\right)_x}^{2x}\\ &= -x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2},\\ f_{xx} &= -\left[\overbrace{(x)_x}^{1}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right]-x\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right]_x\\ &= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\\ &\quad -x\left[-\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}-1}\overbrace{\left(x^2+y^2+z^2\right)_x}^{2x}\right]\\ &= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}+\frac{3}{2}x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}. \qquad (1) \end{aligned}$$

Λόγω της συμμετρίας της f όμοια έχουμε

$$f_{xx} = -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}+\frac{3}{2}y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}, \qquad (2)$$

$$f_{xx} = -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}+\frac{3}{2}z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}. \qquad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) και (3) προκύπτει τελικά η (14.2.2 – 3).

■

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν όλες οι 1ης και 2ης τάξης μερικές παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $\sqrt{x^2+y^2}$ *v*) $\dfrac{x}{x^2+y^2}$

ii) $e^{-x^2-y^2}$ *vi*) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$

iii) $\sin^2(x-y)$ *vii*) $\ln\left(x^2-y^2\right)$

iv) $\dfrac{x}{x+y}$ *viii*) $\dfrac{x}{y+z}$

2. Αν $f(x,y,z)=\ln(xy+z)$, να υπολογιστούν οι παράγωγοι

$$f_x, \quad f_y \quad \text{και} \quad f_z$$

στο σημείο $P(1,2,0)$.

3. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y)=e^x\sin y$ είναι αρμονική.

4. Δείξτε ότι, αν $f(x,y)=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$, τότε

$$x\,f_x+y\,f_y=2.$$

5. Όμοια, αν

$$f(x,y,z)=x+\frac{x-y}{y-z}\,, \quad \text{τότε} \quad f_x+f_y+f_z=1.$$

6. Αν $x=r\cos\theta$ και $y=r\sin\theta$, να υπολογιστεί η τιμή της ορίζουσας

$$A=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}.$$

7. Το εμβαδόν E του τραπεζίου με βάσεις a, b και ύψος h δίνεται από τον τύπο

$$E=\frac{1}{2}\,(a+b)h.$$

Να υπολογιστούν οι παράγωγοι E_a, E_b και E_h και στη συνέχεια να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία τους.

Απαντήσεις

1. (i) $f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_{xx} = \frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$, $f_{yy} = \frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$, $f_{xy} = -\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$.
(ii) συμμετρική $f_x = -2xe^{-x^2-y^2}$, $f_{xx} = 2\left(2x^2-1\right)e^{-x^2-y^2}$, $f_{xy} = 4xye^{-x^2-y^2}$ κ.λπ.
(iii) $f_x = \sin 2(x-y)$, $f_y = -\sin 2(x-y)$, $f_{xx} = f_{yy} = 2\cos 2(x-y)$, $f_{xy} = -2\cos 2(x-y)$.
(iv) $f_x = \frac{y}{(x+y)^2}$, $f_y = -\frac{x}{(x+y)^2}$, $f_{xx} = -\frac{2y}{(x+y)^3}$, $f_{yy} = \frac{2x}{(x+y)^3}$, $f_{xy} = \frac{x-y}{(x+y)^3}$.
(v) $f_x = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $f_y = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $f_{xx} = \frac{2x\left(x^2-3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$, $f_{yy} = -\frac{2x\left(x^2-3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$, $f_{xy} = \frac{2y\left(3x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$.
(vi) $f_x = \frac{1}{x}$, $f_y = -\frac{1}{x}$, $f_{xx} = -\frac{1}{x^2}$, $f_{yy} = \frac{1}{y^2}$, $f_{xy} = 0$.
(vii) $f_x = \frac{2x}{x^2-y^2}$, $f_y = -\frac{2y}{x^2-y^2}$, $f_{xx} = f_{yy} = -\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2-y^2\right)^2}$, $f_{xy} = \frac{4xy}{\left(x^2-y^2\right)^2}$.
(viii) $f_x = \frac{1}{y+z}$, $f_y = f_z = -\frac{x}{(y+z)^2}$, $f_{xx} = 0$, $f_{yy} = f_{zz} = \frac{2x}{(y+z)^3}$,, $f_{xy} = f_{xz} = -\frac{1}{(y+z)^2}$, $f_{yz} = \frac{2x}{(y+z)^3}$.
2. $f_x(P) = 1$, $f_y(P) = f_z(P) = \frac{1}{2}$. **3 - 5.** Προφανείς. **6.** $|A| = r$. **7.** $E_a = \frac{1}{2}bh$ κ.λπ.

14.2.3 Εφαπτόμενο επίπεδο

Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη ότι γεωμετρικά η παράγωγος μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής,[7] έστω f, σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ή διαφορετικά με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας του διαγράμματος της συνάρτησης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Τότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο αυτό δίνεται από τον τύπο

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Επεκτείνοντας την παραπάνω γεωμετρική ερμηνεία θεωρούμε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, έστω $z = f(x,y)$, με πεδίο ορισμού το $D \subseteq \mathbb{R}^2$ και σημείο $z_0 = (x_0, y_0) \in D$ στο οποίο να υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0)$. Τότε θεωρώντας το y σταθερό, η f_x θα είναι μια συνάρτηση

[7] Βλέπε Μάθημα *Παράγωγος Συνάρτησης - Γεωμετρική σημασία παραγώγου.*

της μεταβλητής x με διάγραμμα C_x, όπου σύμφωνα με τις Σημειώσεις 14.2.1 - 1 (i) η $f_x(x_0, y_0)$ θα ορίζει τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας ε_x του διαγράμματος C_x στο σημείο $f(x_0, y_0)$. Όμοια θεωρώντας το x σταθερό στην f_y, που είναι μια συνάρτηση του y με διάγραμμα C_y, η παράγωγος $f_y(x_0, y_0)$ θα ορίζει τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας ε_y του διαγράμματος C_y στο $f(x_0, y_0)$. Επομένως, όταν οι μεταβλητές (x, y) μεταβάλλονται στο D οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y θα μεταβάλλονται στον γεωμετρικό τόπο, που ορίζεται από την τομή των ευθειών ε_x και ε_y, δηλαδή στο επίπεδο, έστω π, που οι ευθείες αυτές ορίζουν.

Το π ορίζει στην περίπτωση αυτή το **εφαπτόμενο επίπεδο** (tangent plane) της επιφάνειας $z = f(x, y)$ και η εξίσωσή του αποδεικνύεται ότι δίνεται από τον τύπο[8]

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \qquad (14.2.3 - 1)$$

Τότε η εξίσωση του αντίστοιχου **κάθετου επιπέδου** (normal plane) δίνεται από τον τύπο

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \qquad (14.2.3 - 2)$$

Παρατήρηση 14.2.3 - 1

Σύμφωνα και με τις Σημειώσεις 14.2.1 - 1 περίπτωση (iii) αν στους παραπάνω υπολογισμούς προκύψει ότι για μια μερική παράγωγος έστω την f_x, είναι $f_x(x_0, y_0) = 0$, τότε το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο στον x-άξονα, ενώ το κάθετο επίπεδο τέμνει τον x-άξονα κάθετα στο σημείο $x = x_0$.

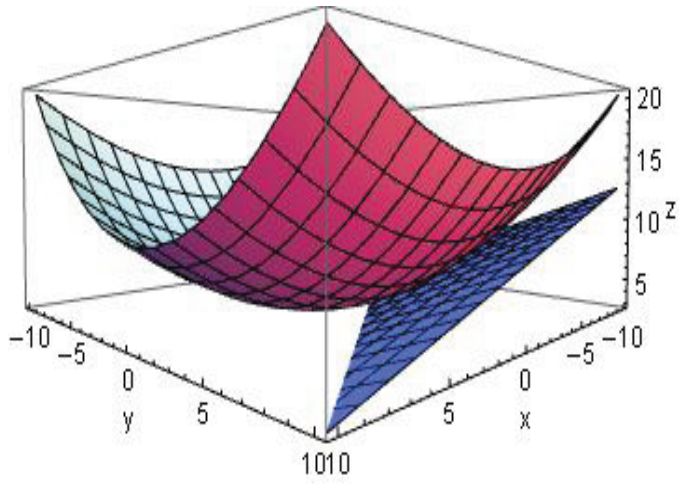
Παράδειγμα 14.2.3 - 1

Να υπολογιστεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας

$$z = f(x, y) = 3 + \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \quad \text{στο σημείο} \quad (x_0, y_0) = (-4, 3).$$

[8] Σύμφωνα και με την υποσημείωση του Παραδείγματος 14.1.1 - 4 η γενική μορφή της εξίσωσης του επιπέδου $ax + by + cz = d$, όταν λυθεί ως προς z, ισοδύναμα γράφεται

$$z = f(x, y) = Ax + By + D.$$



Σχήμα 14.2.3 - 1: Παράδειγμα 14.2.3 - 1 .

Λύση. Διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} z = f(x,y) &= 3 + \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}, & z_0 = f(4,-3) &= 5, \\ f_x(x,y) &= \frac{x}{8}, & f_x(4,-3) &= -\frac{1}{2}, \\ f_y(x,y) &= \frac{2y}{9}, & f_y(4,-3) &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο $(14.2.3-1)$ η εξίσωση του επιπέδου θα είναι (Σχ. 14.2.3 - 1)

$$z = 5 - \frac{1}{2}(x+4) + \frac{2}{3}(y-3),$$

ενώ του κάθετου επιπέδου σύμφωνα με τον τύπο $(14.2.3-2)$

$$\frac{x+4}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-3}{\frac{2}{3}} = \frac{z-5}{-1},$$

δηλαδή

$$4(x+4) = -3(y-3) = 2(z-5).$$

■

Στην περίπτωση που η εξίσωση της επιφάνειας δεν είναι της παραπάνω αναλυτικής (explicit) μορφής $z = f(x,y)$, αλλά ορίζεται πεπλεγμένα (implicit), δηλαδή είναι της μορφής $f(x,y,z) = 0$ ή διαφορετικά, όταν δεν είναι

δυνατόν να λυθεί η εξίσωση $f(x,y,z)=0$ μονοσήμαντα ως προς z, τότε οι παραπάνω εξισώσεις για το σημείο

$$(x_0,y_0,z_0) \quad \text{με} \quad f(x_0,y_0,z_0)=0,$$

αντίστοιχα γράφονται:

εφαπτόμενο επίπεδο

$$\begin{aligned} f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) &+ f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) \\ &+ f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0, \end{aligned} \tag{14.2.3 - 3}$$

κάθετο επίπεδο

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{f_y(x_0,y_0,z_0)}\,. \tag{14.2.3 - 4}$$

Παρατήρηση 14.2.3 - 2

Ισχύει και στην περίπτωση αυτή ανάλογη Παρατήρηση της 14.2.3 - 1.

Παράδειγμα 14.2.3 - 2

Να υπολογιστεί η εξίσωση του εφαπτόμενου και του κάθετου επιπέδου στην επιφάνεια

$$xy-z^3=0 \quad \text{στο σημείο} \quad (x,y)=(1,-1).$$

Λύση. Από την εξίσωση της επιφάνειας προκύπτει ότι

$$0=xy-z^3\,\big|_{x=1,\,y=-1}=-z^3-1, \quad \text{δηλαδή} \quad z=-1,$$

οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το $P(1,-1,-1)$.

Άρα

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= y, & f_x|_P &= -1, \\ f_y(x,y,z) &= x, & f_y|_P &= 1, \\ f_z(x,y,z) &= -3z^2, & f_z|_P &= -3. \end{aligned}$$

Επομένως σύμφωνα με τον τύπο $(14.2.3-3)$ η εξίσωση του επιπέδου θα είναι

$$-(x-1)+1(y+1)-3(z+1)=0,$$

δηλαδή

$$x-y+3z+1=0,$$

ενώ του κάθετου επιπέδου σύμφωνα με τον τύπο $(14.2.3-4)$

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{-3},$$

δηλαδή

$$1-x=y+1=-\frac{1}{3}(z+1).$$

■

Παράδειγμα 14.2.3 - 3

Όμοια η εξίσωση του εφαπτόμενου και του κάθετου επιπέδου στην επιφάνεια

$$3xy-z^3=a^3 \quad \text{στο σημείο} \quad (x,y)=(0,a).$$

Λύση. Από την εξίσωση της επιφάνειας προκύπτει ότι

$$a^3=3xy-z^3\,\big|_{\,x=0,\,y=a}=-z^3, \quad \text{δηλαδή} \quad z=-a,$$

οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το $P(0,a,-a)$.

Άρα

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= 3yz, & f_x|_P &= -3a^2,\\ f_z(x,y,z) &= 3xy-3z^2, & f_z|_P &= -3a^2,\\ f_y(x,y,z) &= 3xz, & f_y|_P &= 0, \end{aligned}$$

οπότε, επειδή $f_y|_P=0$, σύμφωνα με την Παρατήρηση 14.2.3 - 2 το εφαπτόμενο επίπεδο θα είναι παράλληλο στον y-άξονα, ενώ το κάθετο θα τέμνει κάθετα τον y-άξονα στο σημείο $y=a$.

Επομένως σύμφωνα με τον τύπο $(14.2.3-3)$ η εξίσωση του επιπέδου θα είναι

$$-3a^2(x-0)+0(y-a)-3a^2(z+a)=0,$$

δηλαδή

$$x + z + a = 0,$$

ενώ του κάθετου επιπέδου σύμφωνα με τον τύπο $(14.2.3-4)$

$$\frac{x-0}{-3a^2} = \frac{z+a}{-3a^2},$$

δηλαδή

$$x - z - a = 0.$$

■

Άσκηση

Να υπολογιστεί η εξίσωση του εφαπτόμενου και του κάθετου επιπέδου στις παρακάτω επιφάνειες:

i) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ στο σημείο $(1,-1)$,

ii) $f(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ στο σημείο $(1,1)$,

iii) $f(x,y,z) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8}$ στο σημείο $(4,3,4)$,

iv) της σφαίρας $x^2+y^2+z^2 = 2Rz$ στο σημείο $(R\cos t, R\sin t, R)$.

Απαντήσεις

(i) $f(1,-1) = \frac{1}{e^2}$, εφαπτόμενο επίπεδο: $4x-2y-5=0$, κάθετο $-\frac{1}{e^2}(x-1) = \frac{1}{e^2}(y+1) = \frac{1}{e^2} - z$,
(ii) $f(1,1) = \frac{\pi}{4}$, εφαπτόμενο επίπεδο: $2x-2y+\pi = 0$, κάθετο $2(x-1) = 2(1-y) = \frac{1}{4}(\pi - 4z)$,
(iii) εφαπτόμενο επίπεδο: $3x+4y-6z=0$, κάθετο $2(x-4) = \frac{3}{2}(y-3) = 4-z$,
(iv) εφαπτόμενο επίπεδο: $x\cos t + y\sin t - z = 0$, κάθετο $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{R\cos t} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{xt}{R\sin t} - 1\right) = \frac{R-z}{2R}$.

14.2.4 Η έννοια του διαφορικού

Είναι ήδη γνωστό ότι το διαφορικό 1ης τάξης μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής, έστω $f(x)|D$, συμβολίζεται με $d\,f(x)$ και ορίζεται από τον τύπο

$$d\,f(x) = f'(x)dx.$$

Η έννοια του διαφορικού 1ης τάξης για την περίπτωση συναρτήσεων δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών ορίζεται ανάλογα ως εξής:

Ορισμός 14.2.4 - 1 (διαφορικό) *Έστω ότι $f(x,y)|S \subseteq \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα $f(x,y,z)\,|S \subseteq \mathbb{R}^3$, όπου S ανοικτό σύνολο, είναι μία συνάρτηση δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών, της οποίας υποτίθεται ότι υπάρχουν στο S οι f_x, f_y, αντίστοιχα οι f_x, f_y, f_z.*

Τότε το διαφορικό 1ης τάξης της f ορίζεται ως

$$d\,f(x,y) = f_x\,dx + f_y\,dy, \quad \text{αντίστοιχα} \qquad (14.2.4\text{ - }1)$$

$$d\,f(x,y,z) = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz. \qquad (14.2.4\text{ - }2)$$

Αποδεικνύεται στην Ανάλυση ότι η ύπαρξη όλων των μερικών παραγώγων μιας συνάρτησης και η συνέχεια αυτών, συνεπάγονται πάντοτε την ύπαρξη του διαφορικού της συνάρτησης.

Υποθέτοντας ότι υπάρχουν στο S και όλες οι 2ης και 3ης τάξης παράγωγοι της f αποδεικνύεται ότι

$$d^2 f(x,y) = f_{xx}\,dx^2 + 2\,f_{xy}\,dxdy + f_{yy}\,dy^2 \qquad (14.2.4\text{ - }3)$$

$$d^3 f(x,y) = f_{xxx}\,dx^3 + 3\,f_{xxy}\,dx^2dy + 3\,f_{xyy}\,dx\,dy^2 + f_{yyy}\,dy^3 \quad \text{κ.λπ.} \qquad (14.2.4\text{ - }4)$$

Ανάλογοι τύποι ισχύουν για την περίπτωση συναρτήσεων τριών μεταβλητών, δηλαδή

$$d^2 f(x,y,z) = f_{xx}\,dx^2 + f_{yy}\,dy^2 + f_{zz}\,dz^2 + 2\,(f_{xy}\,dxdy + f_{yz}\,dydx + f_{zx}\,dzdx)\,, \quad \text{κ.λπ.} \qquad (14.2.4\text{ - }5)$$

Παράδειγμα 14.2.4 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = x^2 y^3.$$

Τότε

$$f_x = 2\,x\,y^3 \quad \text{και} \quad f_y = 3\,x^2 y^2,$$

οπότε σύμφωνα με την $(14.2.4-1)$ θα είναι

$$d\,f(x,y) = 2\,x\,y^3\,dx + 3\,x^2 y^2\,dy.$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \left(2\,xy^3\right)_x = 2\,y^3, \quad f_{yy} = \left(3\,x^2y^2\right)_y = 6\,x^2 y, \quad \text{και} \\ f_{xy} &= (f_y)_x = \left(3\,x^2y^2\right)_x = 6\,x\,y^2, \end{aligned}$$

οπότε από την $(14.2.4-2)$ προκύπτει

$$d^2 f = 2\,y^3\,dx^2 + 6\,x\,y^2\,dx\,dy + 6\,x^2 y\,dy^2.$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν τα διαφορικά 1ης και 2ης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $x^3 + y^3 - xy$ *iii)* $\ln(x+y-z)$

ii) $z\,\sin(x-y)$ *iv)* $z\,e^{x-y}$.

Απαντήσεις

(i) $f_x = 3x^2 - y$, $f_y = -x + 3y^2$, $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = -1$, $f_{yy} = 6y$,
(ii) $f_x = z\cos(x-y)$, $f_y = -z\cos(x-y)$, $f_z = \sin(x-y)$, $f_{xx} = -z\sin(x-y)$, $f_{yy} = -z\sin(x-y)$, $f_{zz} = 0,$, $f_{xy} = z\sin(x-y)$, $f_{yz} = -\cos(y-z)$, $f_{xz} = \cos(x-y)$,
(iii) $f_x = f_y = -f_z = (x+y-z)^{-1}$, $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = f_{xy} = -f_{yz} = -f_{xz} = -(x+y-z)^{-2}$,
(iv) $f_x = ze^{x-y}$, $f_y = -ze^{x-y}$, $f_z = e^{x-y}$, $f_{xx} = f_{yy} = ze^{x-y}$, $f_{zz} = 0,$, $f_{xy} = -ze^{x-y}$, $f_{yz} = -e^{x-y}$, $f_{xz} = e^{x-y}$.

14.2.5 Αλυσιδωτός κανόνας παραγώγισης

Το Θεώρημα 14.2.2 - 1 της Παραγράφου 14.2.2 διατυπώνεται επίσης ως εξής:

Θεώρημα 14.2.5 - 1 (παράγωγος σύνθετης συνάρτησης).
Έστω οι συναρτήσεις

$$y = f(x) \,|\, D_1 \quad \textit{και} \quad x = x(t) \,|\, D_2 \quad \textit{όπου,} \quad g(D_2) \subseteq D_1$$

και D_1, D_2 *ανοικτά διαστήματα και η προκύπτουσα σύνθετη συνάρτηση*

$$f(t) = (f \circ x)(t) = f(x(t)) \quad \textit{για κάθε} \quad t \in D_2.$$

Έστω επίσης ότι για ένα σημείο $t_0 \in D_2$ *υπάρχει η παράγωγος* $x'(t_0) = x'_0$ *και η αντίστοιχη* $y'_0 = f'(x_0)$ *στο σημείο* $x_0 = x(t_0)$ *με* $x_0 \in D_1$. *Τότε υπάρχει και η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης* $h(t)|D_2$ *στο σημείο* $t_0 \in D_2$ *και ισχύει*

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = y'_0\, x'_0. \qquad (14.2.5\text{ - }1)$$

Γενικότερα ο τύπος $(14.2.5-1)$ γράφεται επίσης ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{αν} \quad y &= f(x) \quad \text{και} \quad x = g(t), \quad \text{τότε} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \quad \text{ή} \quad y_t = y_x\, x_t\,. \end{aligned} \qquad (14.2.5\text{ - }2)$$

Ο τύπος αυτός γενικεύεται για την περίπτωση συναρτήσεων δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών[9] σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 14.2.5 - 2 *Έστω η συνάρτηση* $f(x,y) \,|\, S \subseteq \mathbb{R}^2$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z) \,|\, S \subseteq \mathbb{R}^3$ *και*

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

αντίστοιχα

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

[9] Για την περίπτωση ν-μεταβλητών βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 6.

για κάθε $t \in A \subseteq \mathbb{R}$, *όπου* A *ανοικτό σύνολο με τις αντίστοιχες τιμές της* f *να ανήκουν στο* S *για κάθε* $t \in A$ *και επιπλέον ότι υπάρχει η παράγωγος της* f *στο* $(x(t), y(t))$, *αντίστοιχα* $(x(t), y(t), z(t))$ *για κάθε* $t \in A$. *Τότε η συνάρτηση* $f = f(t)$ *παραγωγίζεται στο* t *και ισχύει*

$$\begin{aligned} \frac{d\,f(t)}{d\,t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\,t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\,t} \quad \acute{\eta} \\ f_t &= f_x\,\frac{dx}{d\,t} + f_y\,\frac{dy}{d\,t}, \end{aligned} \tag{14.2.5 - 3}$$

αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \frac{d\,f(t)}{d\,t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\,t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\,t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{d\,t} \quad \acute{\eta} \\ f_t &= f_x\,\frac{dx}{d\,t} + f_y\,\frac{dy}{d\,t} + f_z\,\frac{dz}{d\,t}. \end{aligned} \tag{14.2.5 - 4}$$

Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό ως **κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης** (chain rule) σύνθετης συνάρτησης για δύο, αντίστοιχα τρεις μεταβλητές.

Πόρισμα 14.2.5 - 1 *Έστω η συνάρτηση* $f(x,y) \mid S \subseteq \mathbb{R}^2$, *όπου* $y = g(x)$ *για κάθε* $x \in A \subseteq \mathbb{R}$, *όταν* A *ανοικτό σύνολο και επιπλέον υπάρχει η παράγωγος της* f *στο* (x,y) *για κάθε* $x \in A$. *Τότε η συνάρτηση* f *παραγωγίζεται στο* x *και ισχύει*

$$\frac{d\,f(x,y)}{d\,x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\,x}. \tag{14.2.5 - 5}$$

Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τον τύπο $(18.3.1-3)$ και παραλείπεται.

Παράδειγμα 14.2.5 - 1

Να υπολογιστεί η παράγωγος df/dt, όταν

$$f(x,y) = x^2y - y^2 \quad \text{και} \quad x = t^2, \quad y = 2t.$$

Λύση. Διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} f_x &= \left(x^2y - y^2\right)_x = \overbrace{\left(x^2y\right)_x}^{2xy} - \overbrace{\left(y^2\right)_x}^{0} = 2\overbrace{x}^{t^2}\overbrace{y}^{2t} = 4t^3\,, \\ f_y &= \left(x^2y - y^2\right)_y = \overbrace{\left(x^2y\right)_y}^{x^2} - \overbrace{\left(y^2\right)_y}^{2y} \\ &= \overbrace{x^2}^{\left(t^2\right)^2} - 2\overbrace{y}^{2t} = t^4 - 2t, \\ \frac{dx}{dt} &= 2t, \qquad \frac{dy}{dt} = 2. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο $(18.3.1-3)$ είναι

$$\frac{df}{dt} = 4t^3 \cdot 2t + \left(t^4 - 4t\right) \cdot 2 = 2t\left(5t^3 - 4\right).$$

■

Παράδειγμα 14.2.5 - 2

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = \ln(x+y+z), \quad \text{όταν} \quad x = \cos^2 t, \quad y = \sin^2 t \quad \text{και} \quad z = t^2.$$

Λύση. Διαδοχικά έχουμε[10]

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{x+y+z}\overbrace{(x+y+z)_x}^{1} = \frac{1}{x+y+z} \\ &= \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t + t^2} = \frac{1}{1+t^2}\,. \end{aligned}$$

Όμοια υπολογίζεται ότι

$$f_y = f_z = \frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{1+t^2}\,.$$

[10] Υπενθυμίζεται ότι: $[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Επίσης είναι

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \left(\cos^2 t\right)_t = -2\cos t \sin t,\\ \frac{dy}{dt} &= \left(\sin^2 t\right)_t = 2\cos t \sin t, \quad \text{και} \quad \frac{dz}{dt} = 2t.\end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο $(18.3.1-4)$ είναι

$$\frac{d\,f}{d\,t} = \frac{1}{1+t^2}\,(-2\cos t \sin t + 2\cos t \sin t + 2t) = \frac{2t}{1+t^2}\,.$$

■

Παράδειγμα 14.2.5 - 3

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x,y) = x\,\ln(xy) + y^3, \quad \text{όταν} \quad y = \cos\left(x^2+1\right).$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(14.2.5-7)$ είναι

$$\begin{aligned}f_x &= \left[x\,\ln(xy) + y^3\right]_x = \left[x\,\ln(xy)\right]_x + \overbrace{\left(y^3\right)_x}^{0},\\ &= \overbrace{(x)_x}^{1}\ln(xy) + x[\ln(xy)]_x\\ &= \ln(xy) + x\,\frac{\overbrace{(xy)_x}^{y(x)_x = y}}{xy}\\ &= \ln(xy) + x\,\frac{y}{xy} = \ln(xy) + 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_y &= \left(x\,\ln(xy) + y^3\right)_y = x\,\left[\ln(xy)\right]_y + \overbrace{\left(y^3\right)_y}^{3\,y^2}\\ &= x\,\frac{\overbrace{(xy)_y}^{x(y)_y = x}}{xy} + 3y^2 = \frac{x}{y} + 3\,y^2,\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\left(x^2+1\right)_x \sin\left(x^2+1\right) = -2\,x\,\sin\left(x^2+1\right),$$

οπότε

$$\frac{df}{dx} = \ln\left[x\cos\left(x^2+1\right)\right] + 1 - 2x^2\tan\left(x^2+1\right) - 6x\sin\left(x^2+1\right)\cos^2\left(x^2+1\right).$$

■

Γενικεύοντας το Θεώρημα 18.3.1 - 1 αποδεικνύεται ότι:[11]

Θεώρημα 14.2.5 - 3 *Έστω η συνάρτηση* $f(x,y) \mid S \subseteq \mathbb{R}^2$ *και* $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$ *για κάθε* $(s,t) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$, *όπου* A *ανοικτό σύνολο με τις αντίστοιχες τιμές της* f *να ανήκουν στο* S *για κάθε* $(s,t) \in A$ *και επιπλέον ότι υπάρχει η παράγωγος της* f *στο* $(x(s,t), y(s,t))$ *για κάθε* $(s,t) \in A$. *Τότε η συνάρτηση* $f = f(s,t)$ *παραγωγίζεται στο* (s,t) *και ισχύει*

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{ή}$$

$$f_s = f_x\frac{\partial x}{\partial s} + f_y\frac{\partial y}{\partial s}, \qquad (14.2.5\text{ - }6)$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{ή}$$

$$f_t = f_x\frac{\partial x}{\partial t} + f_y\frac{\partial y}{\partial t}. \qquad (14.2.5\text{ - }7)$$

Παράδειγμα 14.2.5 - 4

Έστω

$$f(x,y) = e^{2y}\sin 3x \quad \text{όπου} \quad x = \sqrt{s^2+t^2}, \quad y = st - t^2.$$

Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι f_s και f_t.

Λύση. Αρχικά υπολογίζονται οι παρακάτω κοινοί και στους δύο τύπους

[11] Βλέπε βιβλιογραφία.

$(14.2.5-6)$ και $(14.2.5-7)$ όροι ως εξής:

$$\begin{aligned} f_x &= \left(e^{2y}\sin 3x\right)_x = e^{2y}\,(\sin 3x)_x = e^{2y}\,(3\cos 3x) \\ &= 3\,e^{2y}\cos 3x = 3\,e^{2\left(st-t^2\right)}\cos\left(3\sqrt{s^2+t^2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= \left(e^{2y}\sin 3x\right)_y = \left(e^{2y}\right)_y \sin 3x = 2e^{2y}\,\sin 3x \\ &= 2e^{2y}\sin 3x = 2\,e^{2\left(st-t^2\right)}\sin\left(3\sqrt{s^2+t^2}\right). \end{aligned}$$

Τύπος $(14.2.5-6)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s} &= \left(\sqrt{s^2+t^2}\right)_s = \left[\left(s^2+t^2\right)^{1/2}\right]_s \\ &= \frac{1}{2}\left(s^2+t^2\right)_s\left(s^2+t^2\right)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\,2s\,\left(s^2+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \left(st-t^2\right)_s = t.$$

Άρα

$$\begin{aligned} f_s &= f_x\,\frac{\partial x}{\partial s} + f_y\,\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= e^{2\left(st-t^2\right)}\left[\frac{3\,s\,\cos\left(3\,\sqrt{s^2+t^2}\right)}{\sqrt{s^2+t^2}} + 2\,t\,\sin\left(3\,\sqrt{s^2+t^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Τύπος $(14.2.5-7)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \left(\sqrt{s^2+t^2}\right)_t = \left[\left(s^2+t^2\right)^{1/2}\right]_t \\ &= \frac{1}{2}\left(s^2+t^2\right)_t\left(s^2+t^2\right)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\,2t\,\left(s^2+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{t}{\sqrt{s^2+t^2}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left(st-t^2\right)_t = s-2t.$$

Άρα

$$\begin{aligned} f_t &= f_x \frac{\partial x}{\partial t} + f_y \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= e^{2(st-t^2)} \left[\frac{3t \cos\left(3\sqrt{s^2+t^2}\right)}{\sqrt{s^2+t^2}} + 2(s-2t) \sin\left(3\sqrt{s^2+t^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

■

Τελεστής Laplace

Κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό να οριστεί ο παρακάτω τελεστής Laplace ή και διαφορικός τελεστής 2ης τάξης, που χρησιμοποιείται στην περιγραφή των εξισώσεων πολλών φυσικών φαινομένων και στη συνέχεια να δοθούν οι εκφράσεις του σε πολικές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες. Ο αναγνώστης για τις εφαρμογές του τελεστή παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

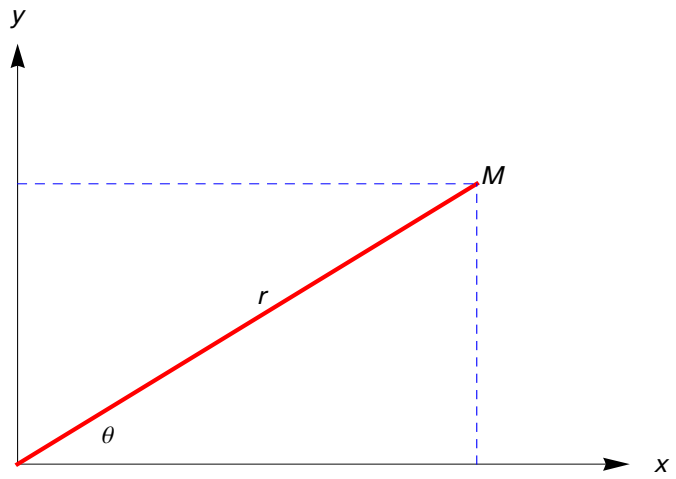
Ορισμός 14.2.5 - 1 (τελεστής Laplace). *Έστω ότι η συνάρτηση* $f(x,y) \mid S \subseteq \mathbb{R}^2$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z) \mid S \subseteq \mathbb{R}^3$ *έχει τουλάχιστον* 2*ης τάξης μερικές παραγώγους για κάθε* $(x,y) \in S$, *αντίστοιχα* $(x,y,z) \in S$. *Τότε ο τελεστής Laplace ή και διαφορικός τελεστής* 2*ης, αντίστοιχα* 3*ης τάξης ορίζεται ως εξής:*

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \textit{αντίστοιχα} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned} \tag{14.2.5 - 8}$$

Εφαρμογή 14.2.5 - 1 (πολικές συντεταγμένες (r,θ))

Να υπολογιστεί η παράσταση

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{xx} + f_{yy} \tag{14.2.5 - 9}$$



Σχήμα 14.2.5 - 1: πολικές συντεταγμένες (r, θ).

σε πολικές συντεταγμένες (Σχ. 19.1.5 - 3), όταν όπως είναι ήδη γνωστό οι πολικές συντεταγμένες (r, θ) δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \qquad \text{με } r \geq 0 \text{ και } \theta \in [0, 2\pi) \text{ ή } \theta \in (-\pi, \pi].$$

Λύση. Εφαρμόζοντας τους τύπους $(14.2.5-6)$ και $(14.2.5-7)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\overbrace{\frac{\partial x}{\partial r}}^{\cos\theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\overbrace{\frac{\partial y}{\partial r}}^{\sin\theta} \\ &= \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\,, \end{aligned} \tag{1}$$

οπότε παραγωγίζοντας ως προς r την (1) προκύπτει

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= \cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial x}+\sin\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial y}\\
&= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\quad(\text{Θεώρημα } 14.2.2-2)\\
&\overset{(1)}{=} \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&\quad+\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\cos\theta\sin\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\\
&\quad+\sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\
&= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\,\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\,\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,. \tag{2}$$

Όμοια με την (1) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial\theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\overbrace{\frac{\partial x}{\partial\theta}}^{-r\sin\theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\overbrace{\frac{\partial y}{\partial\theta}}^{r\cos\theta}\\
&= -r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Παραγωγίζοντας την (3) ως προς θ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= r\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}+\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= r\left[-\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}-\sin\theta\,\overbrace{\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}^{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)}\right]+r\left[-\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}+\cos\theta\,\overbrace{\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}^{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)}\right]\\
&= r\left[-\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}-\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial x}\left(-r\,\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}+r\,\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]\\
&\quad\ r\left[-\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}+\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial y}\left(-r\,\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}+r\,\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]\\
&= -r\overbrace{\left(\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)}^{\frac{\partial f}{\partial r}}\\
&\quad +r^2\sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-r^2\sin\theta\,\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\
&\quad -r^2\sin\theta\,\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+r^2\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}=-r\,\frac{\partial f}{\partial r}+r^2\left(\sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\sin\theta\,\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \tag{4}$$

Συνδυάζοντας τις (2) και (4) προκύπτει τότε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= \left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\\
&\quad +\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r}\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r}\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

Από την (5) έχουμε την παρακάτω έκφραση της (18.4.2 − 4) σε πολικές συντεταγμένες:

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \tag{14.2.5 - 10}$$

που γράφεται και

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\,. \qquad (14.2.5\text{ - }11)$$

■

Με ανάλογους υπολογισμούς προκύπτει ότι ο τελεστής Laplace σε

- **κυλινδρικές συντεταγμένες** (r,θ,z), που δίνονται από τις σχέσεις (Σχ. 14.2.5 - 2a)

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta,\ \ z = z$$
$$\text{με } r \geq 0,\ \ \theta \in [0,2\pi) \text{ ή } \theta \in (-\pi,\pi] \ \text{ και } \ z \in \mathbb{R}.$$

είναι

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- ενώ σε **σφαιρικές συντεταγμένες** (r,θ,φ), που ορίζονται από τις σχέσεις (Σχ. 14.2.5 - 2b)

$$x = r\cos\theta\sin\phi,\ \ y = r\sin\theta\sin\phi,\ \ z = r\cos\phi$$

$$\text{με } r \geq 0 \text{ και } \theta \in [0,\pi],\ \ \phi \in [0,2\pi) \text{ ή } \phi \in (-\pi,\pi],$$

είναι

$$\nabla^2 f \ = \ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)$$

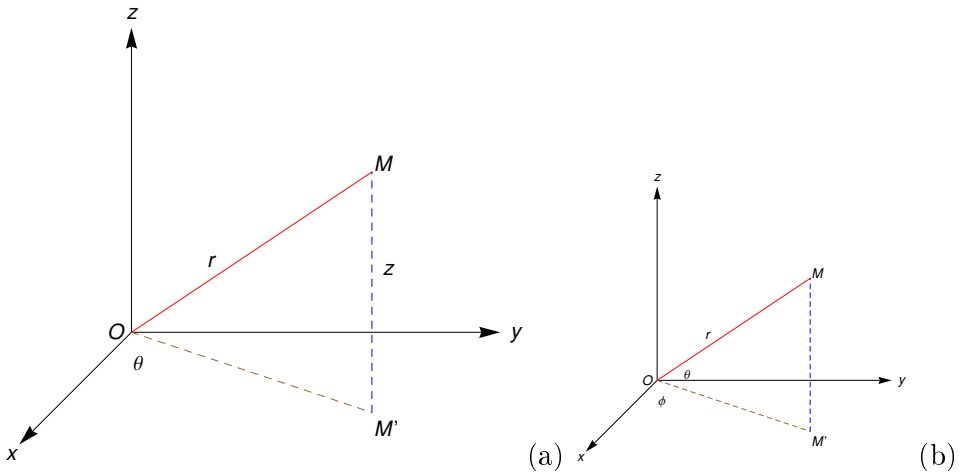
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\,.$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η παράγωγος f_t των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x,y) = e^{xy} + \sin(x-y)$, όταν $x = t$, $y = -t$,

ii) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, όταν $x = \cosh t$, $y = \sinh t$,



Σχήμα 14.2.5 - 2: (a) οι κυλινδρικές (r,θ,z) και (b) οι σφαιρικές (r,θ,φ) συντεταγμένες.

iii) $f(x,y,z)=\ln\left(x^2+y^2-z^2\right)$, όταν $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$,

iv) $f(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}$, όταν $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$.

2. Όμοια οι παράγωγοι f_s και f_t των

i) $f(x,y)=x^2+y^2$, όταν $x=s+t$, $y=s-t$,

ii) $f(x,y)=x^2-y^2$, όταν $x=s^2-t^2$, $y=st$,

iii) $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$, όταν $x=e^{-s}\cos t$, $y=e^{-s}\sin t$.

Απαντήσεις

1. (i) $f_x=ye^{xy}+\cos(x-y)$, $f_x=xe^{xy}-\cos(x-y)$, $f_t=-2e^-t^2+2\cos 2t$,
(ii) $f_x=\frac{y\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $f_y=\frac{x\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $f_t=\frac{1}{\cosh^2 2t}$,
(iii) $f_x=\frac{2x}{x^2+y^2-z^2}$, $f_x=\frac{2y}{x^2+y^2-z^2}$, $f_z=-\frac{2z}{x^2+y^2-z^2}$, $f_t=2$,
(iv) $f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $f_x=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $f_z=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $f_t=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

2. Εφαρμόζοντας τους τύπους $(14.2.5-6)$ και $(14.2.5-7)$ έχουμε
(i) $f_x=2x$, $f_y=2y$, $f_s=4s$, $f_t=4t$,

(ii) $f_x = 2x, \quad f_y = -2y, \quad f_s = 4\left(s^3 - 2st^2\right), \quad f_t = 4t\left(t^2 - 2s^2\right),$
(iii) $f_x = -2xe^{-x^2-y^2}, \quad f_y = -2ye^{-x^2-y^2}, \quad f_s = 2e^{-e^{-2s}}, \quad f_t = 0.$

14.3 Ακρότατα

14.3.1 Τοπικά ακρότατα

Ορισμός 14.3.1 - 1 (τοπικό ακρότατο). *Έστω η συνάρτηση* $f(x,y) \mid S \subseteq \mathbb{R}^2$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z) \mid S \subseteq \mathbb{R}^3$, *όπου* S *ανοικτό σύνολο και σημείο* $P_0 = (x_0, y_0)$, *αντίστοιχα* $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. *Τότε θα λέγεται ότι το* P_0, *αντίστοιχα το* $\tilde{P}_0$ *είναι θέση τοπικού μεγίστου, αντίστοιχα τοπικού ελαχίστου της* f *τότε και μόνον, όταν υπάρχει περιοχή* $\varpi(x_0, y_0)$ *του* P_0, *αντίστοιχα* $\varpi(x_0, y_0, z_0)$ *του* $\tilde{P}_0$, *έτσι ώστε*

- μέγιστο

  $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z) \leq f(x_0, y_0, z_0)$,

- ελάχιστο

  $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z) \geq f(x_0, y_0, z_0)$

για κάθε $(x,y) \in \varpi(x_0, y_0) \cap S$, *αντίστοιχα* $(x,y,z) \in \varpi(x_0, y_0, z_0) \cap S$.

Σε κάθε περίπτωση το σημείο αυτό λέγεται θέση τοπικού ακρότατου (relative extremum) της f με τιμή $f(x_0, y_0)$, αντίστοιχα $f(x_0, y_0, z_0)$.

Ορισμός 14.3.1 - 2 (ολικό ακρότατο). *Έστω η συνάρτηση* $f(x,y) \mid S \subseteq \mathbb{R}^2$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z) \mid S \subseteq \mathbb{R}^3$, *όπου* S *ανοικτό σύνολο και σημείο* $P_0 = (x_0, y_0)$, *αντίστοιχα* $\tilde{P}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. *Τότε θα λέγεται ότι το* P_0, *αντίστοιχα το* $\tilde{P}_0$ *είναι θέση ολικού μεγίστου, αντίστοιχα ολικού ελαχίστου (extremum) της* f *τότε και μόνον, όταν*

- μέγιστο

  $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z) \leq f(x_0, y_0, z_0)$,

- ελάχιστο

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0),\ \textit{αντίστοιχα}\ f(x,y,z) \geq f(x_0,y_0,z_0)$$

για κάθε $(x,y) \in S$, *αντίστοιχα* $(x,y,z) \in S$.

Σε κάθε περίπτωση το σημείο αυτό λέγεται θέση **ολικού ακρότατου** της f με τιμή $f(x_0,y_0)$, αντίστοιχα $f(x_0,y_0,z_0)$.

Δίνονται στη συνέχεια οι συνθήκες που πρέπει να πληρούνται, έτσι ώστε μία συνάρτηση να έχει ακρότατα.

Θεώρημα 14.3.1 - 1 (αναγκαία συνθήκη ακρότατου). *Έστω η συνάρτηση* $f(x,y) \mid S \subseteq \mathbb{R}^2$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z) \mid S \subseteq \mathbb{R}^3$, *όπου* S *ανοικτό σύνολο. Αν το σημείο* $P_0 = (x_0,y_0)$, *αντίστοιχα* $P_0 = (x_0,y_0,z_0) \in S$ *είναι ένα ακρότατο (stationary point) της* f *και υπάρχουν όλες οι* 1*ης τάξης μερικές παράγωγοι της* f *στο σημείο αυτό, τότε αυτές πρέπει να είναι ίσες με το μηδέν.*

Ακρότατο συνάρτησης δύο μεταβλητών

Στο παρακάτω θεώρημα γίνεται χρήση των εξής συμβολισμών:

$$A = f_{xx}(x_0,y_0), \quad B = f_{xy}(x_0,y_0), \quad C = f_{yy}(x_0,y_0)$$

$$\Delta = AC - B^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}. \qquad (14.3.1\text{ - }1)$$

Θεώρημα 14.3.1 - 2 (ικανή συνθήκη ακρότατου). *Έστω η συνάρτηση* $f(x,y) \mid S \subseteq \mathbb{R}^2$, *όπου* S *ανοικτό σύνολο, της οποίας υπάρχουν στο* S *και είναι συνεχείς συναρτήσεις όλες οι* 1*ης και* 2*ης τάξης μερικές παράγωγοι. Αν το σημείο* $(x_0,y_0) \in S$ *είναι τέτοιο ώστε*

$$f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0, \qquad (14.3.1\text{ - }2)$$

τότε, αν

$\Delta > 0$, και

- **$A < 0$** ή $C < 0$
  το (x_0, y_0) είναι θέση **μεγίστου** *της f,*
- **$A > 0$** ή $C > 0$
  το (x_0, y_0) είναι θέση **ελαχίστου** *της f.*

$\Delta < 0$

τότε δεν υπάρχει ακρότατο. Στην περίπτωση αυτή το (x_0, y_0) είναι σημείο **καμπής** *του διαγράμματος της f.*

$\Delta = 0$

το **θεώρημα δεν εφαρμόζεται**, *δηλαδή ενδέχεται να υπάρχει ή όχι ακρότατο.*

Σημειώσεις 14.3.1 - 1

i) Τα σημεία που επαληθεύουν τη συνθήκη $(14.3.1-2)$ λέγονται **κρίσιμα σημεία** (critical ή stationary points) και είναι θέσεις πιθανών ακρότατων της $f(x, y)$.

ii) Το σημείο (x_0, y_0) που επαληθεύει την $(14.3.1-1)$ πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, διαφορετικά δεν είναι σημείο πιθανού ακρότατου.

Παράδειγμα 14.3.1 - 1

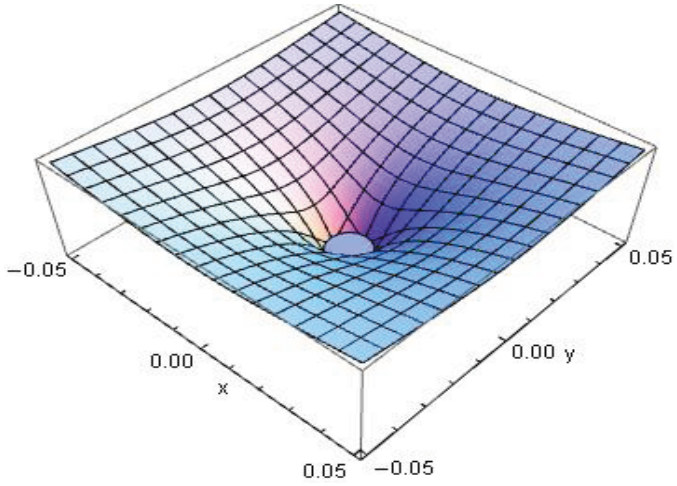
Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right) \quad \text{με πεδίο ορισμού} \quad D = \mathbb{R}^2 - (0, 0).$$

Τότε από τον τύπο $(14.3.1-2)$ προκύπτει

$$f_x = \frac{\left(x^2+y^2\right)_x}{x^2+y^2} = \frac{2x}{x^2+y^2} = 0, \quad \text{και}$$

$$f_y = \frac{\left(x^2+y^2\right)_y}{x^2+y^2} = \frac{2y}{x^2+y^2} = 0,$$



Σχήμα 14.3.1 - 1: Παράδειγμα 14.3.1 - 1.

οπότε $x = y = 0$, δηλαδή το σημείο $P(0,0) \notin D$ (Σχ. 14.3.1 - 1) και επομένως το σημείο P **δεν** είναι πιθανό ακρότατο.

Παράδειγμα 14.3.1 - 2

Να μελετηθεί ως την ύπαρξη ακρότατων η συνάρτηση

$$f(x,y) = xy \quad \text{με πεδίο ορισμού} \quad D = \mathbb{R}^2.$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(14.3.1-2)$ είναι

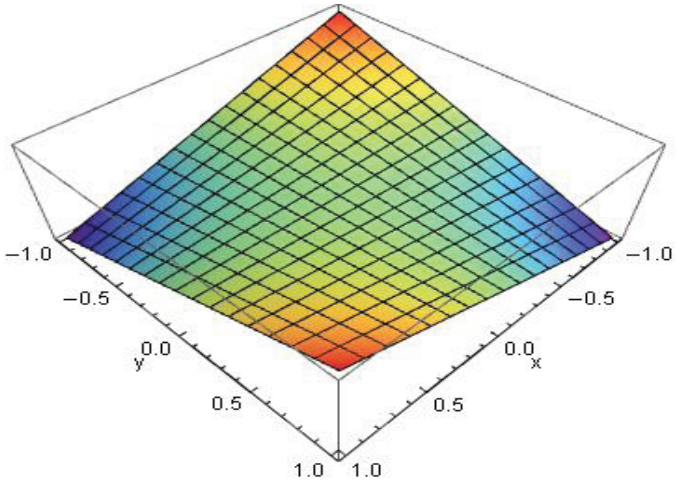
$$f_x = x = 0 \quad \text{και} \quad f_y = y = 0,$$

οπότε έχουμε πιθανό ακρότατο στο σημείο $P(0,0)$.

Από τις σχέσεις $(14.3.1-1)$ προκύπτουν

$$A = f_{xx} = 0, \quad B = f_{xy} = 1, \quad C = f_{yy} = 0, \quad \Delta = -1 < 0.$$

Άρα σύμφωνα με τη συνθήκη (II) του Θεωρήματος 14.3.1 - 2 το P είναι **σημείο καμπής** του διαγράμματος της f (Σχ. 14.3.1 - 2). ∎



Σχήμα 14.3.1 - 2: Παράδειγμα 14.3.1 - 2.

Παράδειγμα 14.3.1 - 3

Όμοια η συνάρτηση

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad \text{με} \quad D = \mathbb{R}^2.$$

Λύση. Από τον τύπο $(14.3.1-2)$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x = 3x^2 - 3y &= 0 \\ f_y = 3y^2 - 3x &= 0. \end{aligned}$$

Τότε από την 1η εξίσωση προκύπτει $y = x^2$, οπότε αντικαθιστώντας στη 2η έχουμε

$$3\left(x^2\right)^2 - 3x = 3x\left(x^3 - 1\right) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 1.$$

Άρα τα πιθανά ακρότατα είναι στα σημεία:

$$P_1(0,0) \quad \text{και} \quad P_2(1,1).$$

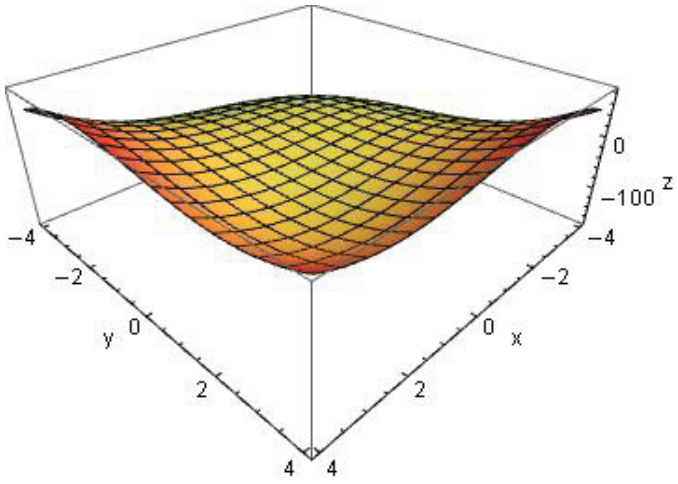
Από τις σχέσεις $(14.3.1-1)$ για το σημείο $(x,y)\in D$ έχουμε

$$\begin{aligned} A &= f_{xx}=6x, \quad B=f_{xy}=-3, \quad C=f_{yy}=6y \quad \text{και} \\ \Delta &= AC-B^2=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}=36\,xy-9. \end{aligned}$$

Τότε από τις συνθήκες (I-III) του Θεωρήματος 14.3.1 - 2 για τα παραπάνω σημεία προκύπτουν (Σχ. 14.3.1 - 3):

P_1: $\Delta|_{P_1(0,0)}=-9<0$, δηλαδή είναι **σημείο καμπής**,

P_2: $\Delta|_{P_2(1,1)}=27>0$ και $A|_{P_2(1,1)}=6>0$, δηλαδή υπάρχει **ελάχιστο** με τιμή $f(1,1)=3$.



Σχήμα 14.3.1 - 3: Παράδειγμα 14.3.1 - 3.

■

Παράδειγμα 14.3.1 - 4

Όμοια η συνάρτηση

$$f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2 \quad \text{με} \quad D = \mathbb{R}^2.$$

Λύση. Από τον τύπο $(14.3.1-2)$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x = 6xy - 6x &= 0 \\ f_y = 3x^2 + 3y^2 - 6y &= 0. \end{aligned}$$

Τότε από την 1η εξίσωση προκύπτει $6x(y-1) = 0$, δηλαδή ή $x = 0$ ή $y = 1$. Τότε από τη 2η εξίσωση έχουμε

$x = 0$:

$$3y^2 - 6y = 3y(y-2) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad y = 0 \quad \text{ή} \quad y = 2,$$

$y = 1$:

$$3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 1.$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι:

$$P_1(0,0), \quad P_2(0,2), \quad P_3(1,1) \quad \text{και} \quad P_4(-1,1).$$

Οι σχέσεις $(14.3.1-1)$, όταν εφαρμοστούν γενικά για το σημείο $(x,y) \in D$, δίνουν

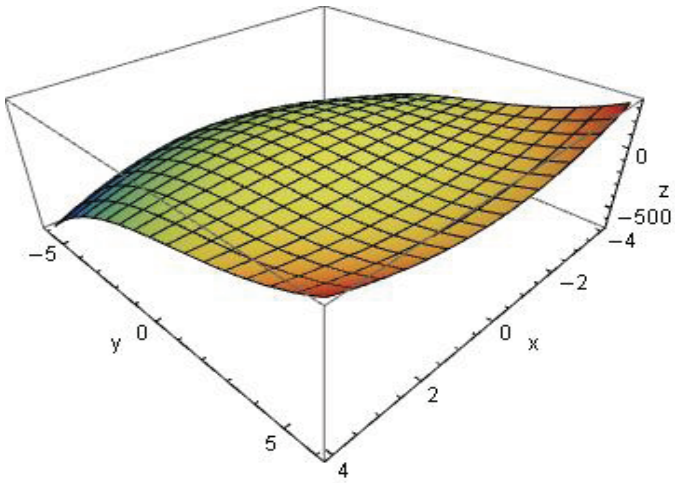
$$A = f_{xx} = 6y - 6, \quad B = f_{xy} = 6x, \quad C = f_{yy} = 6y - 6 \quad \text{και}$$

$$\Delta = AC - B^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6y-6 & 6x \\ 6x & 6y-6 \end{vmatrix}$$

$$= 36(y-1)^2 - 36x^2.$$

Τότε από τις συνθήκες (I-III) του Θεωρήματος 14.3.1 - 2 για τα παραπάνω σημεία προκύπτουν (Σχ. 14.3.1 - 4):

- P_1: $\Delta|_{P_1(0,0)} = 36 < 0$ και $A|_{P_1(0,0)} = -6 > 0$,
  δηλαδή υπάρχει **μέγιστο** (ολικό) με τιμή $f(0,0) = 2$,
- P_2: $\Delta|_{P_2(0,2)} = 36 > 0$ και $A|_{P_2(0,2)} = 6 > 0$,
  δηλαδή **ελάχιστο** (ολικό) με τιμή $f(0,2) = -2$,
- P_3: $\Delta|_{P_3(1,1)} = -36 < 0$, **σημείο καμπής**, και
- P_4: $\Delta|_{P_4(-1,1)} = -36 < 0$, όμοια **σημείο καμπής**.



Σχήμα 14.3.1 - 4: Παράδειγμα 14.3.1 - 4.

■

Άσκηση

Να μελετηθούν για την ύπαρξη ακρότατων οι παρακάτω συναρτήσεις $f(x,y)$:

i) $x^2 + xy + y^2 + 4x - 4y + 3$ *iii)* $x^3 - 6xy + y^3$

ii) $x^3 - 3x + xy^2$ *iv)* $e^{-x^2-y^2}$

και να γίνει η γραφική παράστασή των.

Απαντήσεις

(i) $f_x = 2x + 4$, $f_y = 2y - 4$, κρίσιμο σημείο: $P(-1, 0)$, $\Delta = 4$, $A = 2$ min,
(ii) $f_x = 3x^2 + y^2 - 3$, $f_y = 2xy$, $\Delta = 12x^2 - 4y^2$, σημεία: $P_1(-2, 2)$ max,
$P_2(1, 0)$ min, $P_3\left(0, \sqrt{3}\right)$ και $P_4\left(0, -\sqrt{3}\right)$ καμπής,
(iii) $f_x = 3x^2 - 6y$, $f_y = -6x + 3y^2$, $\Delta = 36(xy - 1)$, πραγματικές λύσεις στα σημεία:
$P_1(0, 0)$ καμπής και $P_2(2, 2)$ min,
(iv) $f_x = -2xe^{-x^2-y^2}$, $f_y = -2ye^{-x^2-y^2}$, $\Delta = 4\left(1 - 2x^2 - 2y^2\right)e^{-x^2-y^2}$,
σημείο: $P(0, 0)$ min.

Ακρότατα συνάρτησης τριών μεταβλητών

Θεώρημα 14.3.1 - 3 (ικανή συνθήκη ακρότατου). *Έστω η συνάρτηση* $f(x, y, z)\ |S \subseteq \mathbb{R}^3$, *όπου* S *ανοικτό σύνολο, της οποίας υπάρχουν στο* S *και είναι συνεχείς συναρτήσεις όλες οι πρώτης και δευτέρας τάξης μερικές παράγωγοι. Έστω σημείο* $P_0 = P_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, *τέτοιο ώστε*

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0, z_0) = f_z(x_0, y_0, z_0) = 0. \qquad (14.3.1 - 1)$$

Αν

$$A = f_{xx}(x_0, y_0, z_0), \quad B = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{P_0} \quad \text{και}$$

$$C = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}_{P_0}, \qquad (14.3.1 - 2)$$

τότε η $f(x, y, z)\ |S \subseteq \mathbb{R}^3$ *έχει:*

I. **μέγιστο**, *όταν*
$A < 0$, $B > 0$ *και* $C < 0$,

II. **ελάχιστο**, *όταν*
$A > 0$, $B > 0$ *και* $C > 0$.

Όμοια σύμφωνα με τις Σημειώσεις 14.3.1 - 1 (I) τα σημεία που επαληθεύουν τη συνθήκη $(14.3.1-1)$ λέγονται επίσης κρίσιμα σημεία και είναι θέσεις πιθανών ακρότατων της $f(x,y,z)$.

Παράδειγμα 14.3.1 - 5

Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 5.$$

Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(14.3.1-1)$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x = 2x - 2 &= 0 \\ f_y = 2y &= 0 \\ f_z = 2z &= 0 \end{aligned}$$

από τη λύση του οποίου προκύπτει ως πιθανό σημείο ακρότατου το $(x_0,y_0,z_0) = (1,0,0)$.

Σύμφωνα με τις σχέσεις $(14.3.1-2)$ είναι

$$A = f_{xx}(1,0,0) = 2 > 0,$$

$$B = \left| \begin{array}{cc} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{array} \right|_{(1,0,0)} = 4 > 0, \text{ και}$$

$$C = \left| \begin{array}{ccc} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{array} \right|_{(1,0,0)} = 8 > 0,$$

δηλαδή επαληθεύεται η συνθήκη (II) του Θεωρήματος 14.3.1 - 3, οπότε στο σημείο $P(1,0,0)$ η f έχει **ελάχιστο** με τιμή $f(1,0,0) = -4$.

Άσκηση

Να προσδιοριστούν τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων $f(x,y,z)$:

i) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11$

ii) $-2x^2 + x - y^2 + 2y - z^2 + 4z + 10.$

Απαντήσεις

(i) $f_x = 2x - 2$, $f_y = 2y + 4$, $f_z = 2z - 6$, κρίσιμο σημείο $P(1, -2, 3)$, $A = 2 > 0$, $B = 4 > 0$, $C = 8 > 0$ min,

(ii) $f_x = 1 - 4x$, $f_y = 2 - 2y$, $f_z = 4 - 2z$, κρίσιμο σημείο $P\left(\frac{1}{4}, 1, 2\right)$, $A = -4 < 0$, $B = 8 > 0$, $C = -16 < 0$ max.

Δίνεται στην επόμενη παράγραφο μια σημαντική εφαρμογή των ακρότατων των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.

14.3.2 Μέθοδος των ελάχιστων τετραγώνων

Είναι ήδη γνωστό από το Μάθημα *Ορισμένο Ολοκλήρωμα* ότι, όταν η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι της μορφής

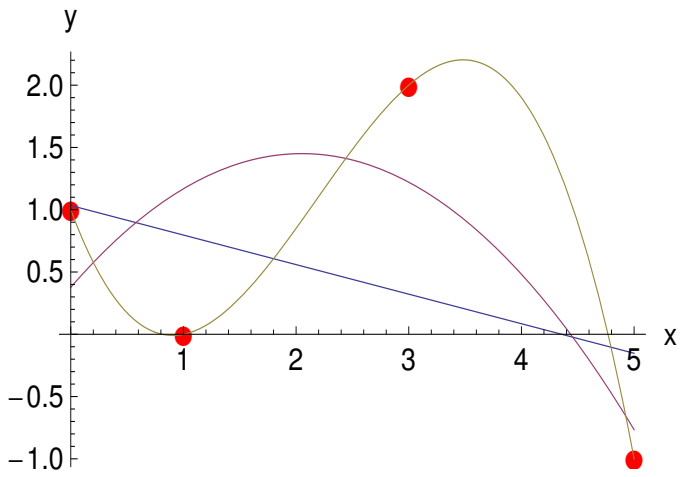
$$e^{-x^2}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \sin x^2, \quad \frac{e^x}{x} \quad \text{κ.λπ.},$$

τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται με καμιά από τις γνωστές μεθόδους, επειδή με κανέναν μετασχηματισμό η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν ανάγεται σε υπολογίσιμη θεωρητικά μορφή. Με δεδομένο ότι η ολοκλήρωση πολυωνύμου είναι πάντοτε δυνατή, μια λύση στις παραπάνω περιπτώσεις είναι η αντικατάσταση της ολοκληρωτέας συνάρτησης με πολυώνυμο. Η αντικατάσταση αυτή σημαίνει τότε **προσέγγιση** της ολοκληρωτέας συνάρτησης με την πολυωνυμική, οπότε για την ακρίβεια της λύσης, πρέπει κάθε φορά να ελέγχεται και το σφάλμα που προκύπτει μετά από την προσέγγιση αυτή.

Εκτός της ήδη γνωστής στον αναγνώστη προσέγγισης από το παραπάνω μάθημα με το πολυώνυμο του Taylor,[12] μια άλλης μορφής πολυωνυμική προσέγγιση είναι δυνατόν να γίνει ως εξής:
Έστω ότι x_0, x_1, ..., x_n είναι $n + 1$ **διαφορετικά** μεταξύ τους σημεία ενός διαστήματος $[a, b]$ και $f(x)$ μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού επίσης το $[a, b]$ και της οποίας είναι γνωστές οι τιμές $y_i = f(x_i)$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n$. Τότε υπάρχει πάντοτε ένα πολυώνυμο, έστω P_n βαθμού $\leq n$ της μορφής

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0, \qquad (14.3.2 - 1)$$

[12] Για τη γενίκευση του τύπου του Taylor για συναρτήσεις 2 και 3 μεταβλητών βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [2].



Σχήμα 14.3.2 - 1: Δεδομένα: $S = \{(0,1),(1,0),(3,2),(5,-1)\}$. Προσέγγιση με πολυώνυμο βαθμού: 3ου (πράσινη), 2ου - παραβολή (κόκκινη) και 1ου - ευθεία (μπλε καμπύλη).

όταν $a_i \in \mathbb{R}$; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$, έτσι ώστε (Σχ. 14.3.2 - 1) το P_n να προσεγγίζει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο ή διαφορετικά με **άριστο τρόπο** (best approximation ή **best fitting**) τα σημεία (data)

$$S = \{(x_i, y_i) \quad \text{με} \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n\}\,. \tag{14.3.2 - 2}$$

Τότε το πολυώνυμο αυτό για τον συγκεκριμένο κάθε φορά βαθμό θα δίνει και το ελάχιστο δυνατό σφάλμα. Το πρόβλημα είναι γνωστό ως πρόβλημα της **διακριτής προσέγγισης** (discrete approximation).

Η απάντηση στο παραπάνω πρόβλημα δίνεται στη συνέχεια και όπως θα διαπιστωθεί, είναι μια εφαρμογή των ακρότατων μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

Περίπτωση I πολυώνυμο 1ου βαθμού

Έστω ότι το σύνολο των σημείων S στην $(14.3.2-2)$ προσεγγίζεται από ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού της μορφής

$$P_1(x) = P(x) = ax + b, \tag{14.3.2 - 3}$$

δηλαδή η προσέγγιση των δεδομένων γίνεται με μια ευθεία. Αν θεωρηθεί το σημείο $(x_i, y_i) \in S$, τότε η τιμή y_i προσεγγίζεται από την τιμή

$$\tilde{y}_i = P(x_i) = ax_i + b,$$

οπότε το αντίστοιχο απόλυτο σφάλμα της προσέγγισης στην περίπτωση αυτή θα είναι

$$e_i = |y_i - \tilde{y}_i| = |y_i - (ax_i + b)|.$$

Επομένως για το ολικό σφάλμα, έστω $\tilde{E}$, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \tilde{e}_1 + \ldots + \tilde{e}_n \\ &= |y_1 - (ax_1 + b)| + \ldots + |y_n - (ax_n + b)|. \end{aligned} \quad (14.3.2\text{ - }4)$$

Προφανώς $\tilde{E} = \tilde{E}(a, b)$, δηλαδή $\tilde{E}$ είναι μια συνάρτηση των a, b. Άρα το πρόβλημα του υπολογισμού του πολυωνύμου $P(x) = ax + b$ στην $(14.3.2 - 3)$ ανάγεται στον υπολογισμό των a και b, έτσι ώστε το σφάλμα $\tilde{E}$ στην $(14.3.2 - 4)$ να είναι **ελάχιστο**. Τότε σύμφωνα με το [13]Θεώρημα $(14.3.1 - 1)$ η **αναγκαία** συνθήκη για να συμβαίνει αυτό είναι:

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial a} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \tilde{E}}{\partial b} = 0. \quad (14.3.2\text{ - }5)$$

Εύκολα όμως διαπιστώνεται ότι η $(14.3.2 - 5)$ λόγω και του απολύτου δεν παραγωγίζεται,[14] οπότε το πρόβλημα στη μορφή αυτή δεν λύνεται.

Στη **διακριτή μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων** (discrete least squares method), σε αντίθεση με την $(14.3.2 - 4)$, προσδιορίζονται οι σταθερές a και

[13] Θεώρημα (αναγκαία συνθήκη ακρότατου). *Έστω η συνάρτηση $f(x, y) \,|\, S \subseteq \mathbb{R}^2$, όπου S ανοικτό σύνολο. Αν το σημείο $P_0 = (x_0, y_0)$ είναι ένα ακρότατο της f και υπάρχουν όλες οι 1ης τάξης μερικές παράγωγοι της f στο σημείο αυτό, τότε αυτές πρέπει να είναι ίσες με το μηδέν.*

[14] Έστω για ευκολία ότι απαλείφονται τα απόλυτα. Τότε

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial a} = -x_1 - \ldots - x_n = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \tilde{E}}{\partial b} = -1 - \ldots - 1 = -n = 0$$

άτοπο.

b, έτσι ώστε το **ολικό τετραγωνικό σφάλμα** E, δηλαδή το

$$\begin{aligned} E &= e_1^2 + \ldots + e_n^2 \\ &= [y_1 - (ax_1 + b)]^2 + \ldots + [y_n - (ax_n + b)]^2 \end{aligned} \qquad (14.3.2\text{ - }6)$$

να είναι **ελάχιστο**.

Τότε από την $(14.3.2-6)$ προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)\,x_i = 0, \quad \text{και} \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b) = 0 \end{aligned}$$

που τελικά γράφεται μετά τις πράξεις ως εξής:

$$\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\overbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^0}^{n} &= \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{aligned} \qquad (14.3.2\text{ - }7)$$

Το γραμμικό σύστημα $(14.3.2-7)$ λέγεται τότε και **σύστημα κανονικών εξισώσεων** (normal equations) και από τη λύση του προκύπτει ότι:

$$a = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \qquad (14.3.2\text{ - }8)$$

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \qquad (14.3.2\text{ - }9)$$

Πίνακας 14.3.2 - 1: Παράδειγμα 14.3.2 - 1.

x_i	y_i	$x_i\, y_i$	x_i^2
-0.5	1.2	-0.6	0.25
0.3	2.0	0.6	0.09
0.7	1.0	0.7	0.49
1.5	-1.0	-1.5	2.25
2.0	3.2	-0.8	3.08

Παράδειγμα 14.3.2 - 1

Να προσδιοριστεί με τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων το πολυώνυμο πρώτου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα:

x_i	-0.5	0.3	0.7	1.5
y_i	1.2	2.0	1.0	-1.0

Λύση. Σύμφωνα με τα παραπάνω δεδομένα δημιουργείται ο Πίνακας 14.3.2 - 1. Τότε από τους τύπους $(14.3.2-9)$ και $(14.3.2-9)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} a &= \frac{4\cdot(-0.8)-2\cdot(3.2)}{4\cdot(3.08)-2^2} \approx -1.1539 \quad \text{και} \\ b &= \frac{(3.08)\cdot(3.2)-(-0.8)\cdot 2}{4\cdot(3.08)-2^2} \approx 1.3769, \end{aligned}$$

δηλαδή $P(x) = -1.1539\, x + 1.3769$ (Σχ. 14.3.2 - 2). ∎

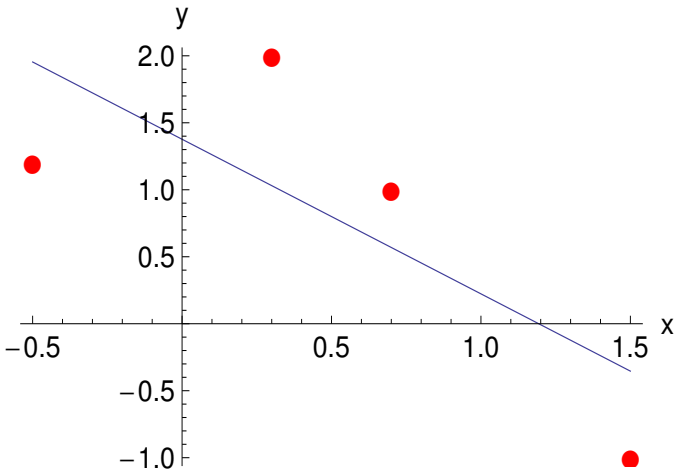
Περίπτωση II πολυώνυμο m-βαθμού

Στην περίπτωση αυτή ζητείται η προσέγγιση του συνόλου S στην $(14.3.2-2)$ με ένα πολυώνυμο m-βαθμού της μορφής $(14.3.2-1)$, δηλαδή

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m,$$

όταν

$$\mathbf{m < n - 1}. \qquad (14.3.2\text{ - }10)$$



Σχήμα 14.3.2 - 2: Παράδειγμα 14.3.2 - 1. Η εξίσωση της ευθείας είναι $y = -1.1539\,x + 1.3769$.

Τότε, όμοια με την Περίπτωση Ι, εκλέγονται οι σταθερές a_0, a_1, ..., a_m, έτσι ώστε το ολικό τετραγωνικό σφάλμα

$$\begin{aligned} E &= e_1^2 + \ldots + e_n^2 \\ &= [y_1 - P_m(x_1)]^2 + \ldots + [y_n - P_m(x_n)]^2 \end{aligned}$$

να είναι ελάχιστο.

Το σφάλμα E διαδοχικά γράφεται

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} P_m(x_i)\, y_i + \sum_{i=1}^{n} [P_m(x_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j\right) y_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j\right) y_i + \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} a_j a_k \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{j+k}\right). \end{aligned}$$

Όπως και στην περίπτωση του πολυωνύμου 1ου βαθμού μία αναγκαία

συνθήκη προκύπτει από τον τύπο $(14.3.1-2)$ ως εξής:[15]

$$\frac{\partial E}{\partial a_j}=0 \quad \text{για κάθε} \quad j=0,\,1,\,\ldots,\,m. \qquad (14.3.2\text{ - }11)$$

Το σύστημα $(14.3.2-11)$ γράφεται

$$\frac{\partial E}{\partial a_j}=-2\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^j+2\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=1}^{n} x_i^{j+k}=0,$$

οπότε

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k}=\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j \quad \text{για κάθε} \quad j=0,\,1,\,\ldots,\,n$$

από την οποία προκύπτει το παρακάτω γραμμικό σύστημα **κανονικών εξισώσεων**:

$$\begin{aligned}
a_0\sum_{i=1}^{n} x_i^0+a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^1+\ldots+a_m\sum_{i=1}^{n} x_i^m &= \sum_{i=1}^{n} y_i\,x_i^0\\
a_0\sum_{i=1}^{n} x_i^1+a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\ldots+a_m\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} &= \sum_{i=1}^{n} y_i\,x_i^1\\
&\vdots \qquad (14.3.2\text{ - }12)\\
a_0\sum_{i=1}^{n} x_i^m+a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1}+\ldots+a_m\sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} &= \sum_{i=1}^{n} y_i\,x_i^m\,.
\end{aligned}$$

με $m+1$ εξισώσεις και $m+1$ αγνώστους τους συντελεστές a_j του πολυωνύμου, στο οποίο ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων είναι συμμετρικός.

Αποδεικνύεται ότι το σύστημα $(14.3.2-12)$ έχει ακριβώς μία λύση, όταν τα σημεία $x_i;\ i=1,2,\ldots,n$ είναι **διαφορετικά** μεταξύ τους.

---

[15] Το Θεώρημα $(14.3.1-1)$ γενικεύεται ως εξής:

Θεώρημα **(αναγκαία συνθήκη ακρότατου).** *Έστω η συνάρτηση* $f\,(x_1,\ldots,x_m)\mid S\subseteq \mathbb{R}^m$, *όπου* S *ανοικτό σύνολο. Αν το σημείο* $P=(x_1,\ldots,x_m)$ *είναι ένα ακρότατο της* f *και υπάρχουν όλες οι* 1*ης τάξης μερικές παράγωγοι της* f *στο σημείο αυτό, τότε αυτές πρέπει να είναι ίσες με το μηδέν.*

Σημείωση 14.3.2 - 1

Κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό να διευκρινιστεί ότι μια γενίκευση του παραπάνω προβλήματος, δηλαδή η προσέγγιση των σημείων S με ένα πολυώνυμο $P_m(x)$ με την απαίτηση το άθροισμα των σφαλμάτων $E = \sum_{i=1}^{n} e_i^k$ με $k \geq 3$, να είναι ελάχιστο, καταλήγει μετά και την εφαρμογή της συνθήκης $(14.3.2-11)$ σε μη γραμμικό σύστημα. Επομένως η μέθοδος με την απαίτηση αυτή δεν είναι εφαρμόσιμη.

Παράδειγμα 14.3.2 - 2

Να προσδιοριστεί με τη διακριτή μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων το πολυώνυμο 2ου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα του Παραδείγματος 14.3.2 - 1.

Λύση. Επειδή ο αριθμός των σημείων είναι $n = 4$, σύμφωνα με τη συνθήκη $(14.3.2-10)$ ο μεγαλύτερος δυνατός βαθμός m του πολυωνύμου θα είναι $m < 4-1$, δηλαδή $m = 2$.

Έστω $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ το ζητούμενο πολυώνυμο. Τότε το σύστημα $(14.3.2-12)$ γράφεται

$$\begin{aligned}
a_0 \sum_{i=1}^{4} x_i^0 \;+\; a_1 \sum_{i=1}^{4} x_i^1 \;+\; a_2 \sum_{i=1}^{4} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{4} y_i\, x_i^0 \\
a_0 \sum_{i=1}^{4} x_i^1 \;+\; a_1 \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \;+\; a_2 \sum_{i=1}^{4} x_i^3 &= \sum_{i=1}^{4} y_i\, x_i^1 \quad , \\
a_0 \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \;+\; a_1 \sum_{i=1}^{4} x_i^3 \;+\; a_2 \sum_{i=1}^{4} x_i^4 &= \sum_{i=1}^{4} y_i\, x_i^2,
\end{aligned}$$

οπότε σύμφωνα με τον Πίνακα 14.3.2 - 2 έχουμε

$$\begin{aligned}
4a_0 \;+\; 2.0a_1 \;+\; 3.08a_2 &= 3.2 \\
2.0a_0 \;+\; 3.08a_1 \;+\; 3.62a_2 &= -0.8 \\
3.08a_0 \;+\; 3.62a_1 \;+\; 5.3732a_2 &= -1.28
\end{aligned}$$

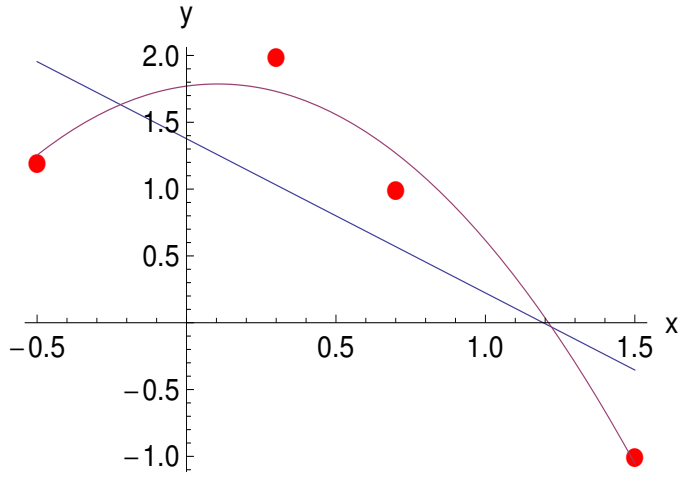
από τη λύση του οποίου προκύπτει ότι το πολυώνυμο είναι (Σχ. 14.3.2 - 3)

$$P_2(x) = -1.4583\, x^2 + 0.3045\, x + 1.7707.$$

■

Πίνακας 14.3.2 - 2: Παράδειγμα 14.3.2 - 2.

x_i	y_i	$x_i\,y_i$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2\,y_i$
-0.5	1.2	-0.6	0.25	-0.125	0.0625	0.30
0.3	2.0	0.6	0.09	0.027	0.0081	0.18
0.7	1.0	0.7	0.49	0.343	0.2401	0.49
1.5	-1.0	-1.5	2.25	3.375	5.0625	-2.25
2.0	3.2	-0.8	3.08	3.62	5.3732	-1.28



Σχήμα 14.3.2 - 3: Παράδειγμα 14.3.2 - 2. Η καμπύλη ορίζεται από το πολυώνυμο $P_2(x) = -1.4583\,x^2 + 0.3045\,x + 1.7707$, ενώ η ευθεία (Παράδειγμα 14.3.2 - 1) έχει εξίσωση $y = -1.1539\,x + 1.3769$.

14.3.3 Απόλυτα ακρότατα

Επεκτείνοντας την έννοια των ακρότατων της Παραγράφου 14.3.1 ζητείται ο υπολογισμός των ακρότατων μιας συνάρτησης, έστω $f(x,y)$, σε μια κλειστή περιοχή,[16] έστω D του πεδίου ορισμού της με $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Τα ακρότατα της περίπτωσης αυτής λέγονται **απόλυτα** και χαρακτηρίζονται στα Μαθηματικά με τον γενικότερο όρο ως πρόβλημα της **βελτιστοποίησης** (mathematical optimization) των τιμών μιας συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της D, όταν $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Η μελέτη βασίζεται στο παρακάτω θεώρημα (extreme value theorem):

Θεώρημα 14.3.3 - 1 *Αν η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι ορισμένη και συνεχής σε μια περιοχή $D \subseteq \mathbb{R}^2$, τότε υπάρχουν σημεία (x_1,y_1), $(x_2,y_2) \in D$, έτσι ώστε η $f(x_1,y_1)$ να είναι η μέγιστη και η $f(x_1,y_1)$ η ελάχιστη τιμή της f στο D.*

Σημείωση 14.3.3 - 1

Η διαδικασία προσδιορισμού των απόλυτων ακρότατων γίνεται με τα παρακάτω βήματα:

I. υπολογισμός των κρίσιμων σημείων της f στο D, και[17]

II. εύρεση της μέγιστης, αντίστοιχα ελάχιστης τιμής της f στο σύνορο του D.

Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή των περιπτώσεων (I) και (II) ορίζουν τότε τα απόλυτα ακρότατα της f στο D.

---

[16] Υπενθυμίζεται ότι:

Ορισμός. *Μια περιοχή στο $\mathbb{R}^2$ θα λέγεται **κλειστή**, όταν περιέχει και το σύνορό της, ενώ θα λέγεται **ανοικτή**, όταν δεν το περιέχει.*

Επομένως η περιοχή $D = [-1,1] \times [0,2]$ είναι κλειστή, ενώ η $D = [-1,1] \times [0,2]$ ανοικτή.

Ορισμός. *Μια περιοχή στο $\mathbb{R}^2$ θα λέγεται **φραγμένη**, όταν είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι ανήκει σε έναν πεπερασμένο δίσκο.*

[17] Δεν απαιτείται η εφαρμογή του Θεωρήματος 14.3.1 - 3 στην περίπτωση αυτή.

Παράδειγμα 14.3.3 - 1

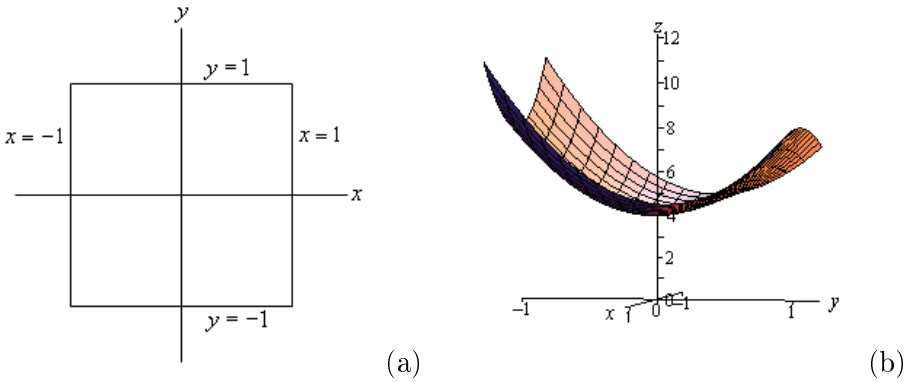
Να υπολογιστούν τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2x^2y + 4$$

στο τετράγωνο (Σχ. 14.3.3 - 1a)

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -1 \leq x \leq 1 \text{ και } -1 \leq y \leq 1\}.$$

Λύση. Σύμφωνα με τη Σημείωση 14.3.3 - 1 έχουμε:



(a) (b)

Σχήμα 14.3.3 - 1: Παράδειγμα 14.3.3 - 1: (a) το τετράγωνο $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -1 \leq x \leq 1 \text{ και } -1 \leq y \leq 1\}$ και (b) το διάγραμμα της $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2x^2y + 4$, όταν $(x,y) \in D$.

βήμα I: Από τον τύπο $(14.3.1 - 2)$ προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x = 2x - 4xy &= 0 \\ f_y = 8y - 2x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Τότε από την 2η εξίσωση προκύπτει $y = \frac{x^2}{4}$, οπότε αντικαθιστώντας στην 1η έχουμε

$$x - 4x\,\frac{x^2}{4} = 2x - x^3 = x\left(2 - x^2\right) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad x = 0, \pm\sqrt{2}.$$

Επειδή όμως πρέπει οι τιμές να ανήκουν στο D, δεκτή γίνεται μόνον η τιμή $x=0$. Αντικαθιστώντας την τιμή $x=0$ στη 2η εξίσωση του συστήματος προκύπτει ότι $y=0$. Άρα το κρίσιμο σημείο της f είναι το

$$P(0,0) \quad \text{με αντίστοιχη τιμή} \quad f(0,0)=4. \tag{1}$$

βήμα II: Η εύρεση της μέγιστης, αντίστοιχα ελάχιστης τιμής της f στο σύνορο του D γίνεται ως εξής:

i) $x=1, \quad -1\le y\le 1$, οπότε $f(1,y)=g_1(y)=4y^2-2y+5$. Τότε $g_1'(y)=8y-2$, οπότε το κρίσιμο σημείο της g_1 υπολογίζεται από την εξίσωση $g_1'(y)=0$, δηλαδή είναι το $y=\frac{1}{4}\in D$. Άρα για την περίπτωση αυτή έχουμε

$$P_1\left(1,\frac{1}{4}\right), \quad f\left(1,\frac{1}{4}\right)=g_1\left(\frac{1}{4}\right)=4.75. \tag{2}$$

ii) $x=-1, \quad -1\le y\le 1$, οπότε $f(-1,y)=g_2(y)=4y^2-2y+5=g_1(y)$, δηλαδή είναι η περίπτωση (i).

iii) $y=1, \quad -1\le x\le 1$, οπότε $f(x,1)=f_1(x)=8-x^2$. Τότε $f_1'(x)=-2x$, οπότε το κρίσιμο σημείο της f_1 υπολογίζεται από την εξίσωση $f_1'(x)=0$, δηλαδή είναι το $x=0\in D$. Άρα έχουμε

$$P_2\,(0,1)\,, \quad f\,(0,1)=f_1(0)=8. \tag{3}$$

iv) $y=-1, \quad -1\le x\le 1$, οπότε $f(x,-1)=f_2(x)=8+3x^2$. Τότε $f_2'(x)=6x$, οπότε το κρίσιμο σημείο της f_2 όμοια υπολογίζεται ότι είναι το $x=0\in D$. Άρα έχουμε

$$P_3\,(0,-1)\,, \quad f\,(0,-1)=f_2(0)=8. \tag{4}$$

v) Στα παραπάνω πιθανά σημεία των απόλυτων ακρότατων πρέπει να συνυπολογιστούν και οι κορυφές του τετραγώνου D, δηλαδή:

$$\begin{array}{lllll} \text{σημείο:} & A_1\,(-1,-1) & \text{με τιμή} & f\,(-1,-1) & = \quad 11 \\ & A_2\,(1,-1) & & f\,(-1,1) & = \quad 11 \\ & A_3\,(1,1) & & f\,(1,1) & = \quad 7 \\ & A_4\,(-1,1) & & f\,(-1,1) & = \quad 7. \end{array} \tag{5}$$

βήμα III: Από τις (1)-(5) προκύπτουν τα εξής:

- το σημείο $P(0,0)$ ορίζει το απόλυτο ελάχιστο, επειδή η f έχει τη μικρότερη τιμή 4 από όλες τις άλλες σε αυτό,
- τα σημεία $B_1(-1,-1)$ και $B_2(1,-1)$ ορίζουν τις απόλυτα μέγιστες τιμές, επειδή η f έχει τη μεγαλύτερη τιμή 11 σε αυτά (Σχ. 14.3.3 - 1b). ∎

Παράδειγμα 14.3.3 - 2

Όμοια τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x,y) = 2x^2 - y^2 + 6y$$

στον κυκλικό δίσκο

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 \leq 16\}.$$

Λύση. Διαδοχικά σύμφωνα και με τη Σημείωση 14.3.3 - 1 έχουμε:

βήμα I: Από τον τύπο $(14.3.1-2)$ προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x = 4x &= 0 \\ f_y = -2y + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Άρα το κρίσιμο σημείο της f είναι το

$$P(0,3) \in D \quad \text{με αντίστοιχη τιμή} \quad f(0,3) = 9. \tag{1}$$

βήμα II: Η εύρεση της μέγιστης, αντίστοιχα ελάχιστης τιμής της f στο σύνορο του D, δηλαδή στην περιφέρεια του κύκλου $x^2 + y^2 \leq 16$ γίνεται ως εξής:

i) από την εξίσωση $x^2+y^2 = 16$ προκύπτει $x^2 = 16-y^2$, οπότε αντικαθιστώντας στην f έχουμε

$$g(y) = 2\left(16 - y^2\right) - y^2 + 6y = 32 - 3y^2 + 6y.$$

Επομένως το πρόβλημα στην περίπτωση αυτή ανάγεται στην εύρεση των ακρότατων της g, όταν το y ανήκει στον παραπάνω κυκλικό δίσκο, δηλαδή, όταν $-4 \leq y \leq 4$. Τότε $g'(y) = -6y + 6$, οπότε $y = 1$ και επειδή $x^2 = 16 - y^2$, τελικά τα κρίσιμα σημεία για την περίπτωση αυτή είναι:

$$\begin{array}{rrcrcl} \text{σημείο:} & P_1\left(-\sqrt{15}, 1\right) \in D & \text{με τιμή} & f\left(-\sqrt{15}, 1\right) & = & 35 \\ & P_2\left(\sqrt{15}, 1\right) \in D & & f\left(\sqrt{15}, 1\right) & = & 35. \end{array} \tag{2}$$

ii) Στα παραπάνω πιθανά σημεία των απόλυτων ακρότατων πρέπει να συνυπολογιστούν και εκείνα που προκύπτουν από τις τιμές στα άκρα του διαστήματος $[-4, 4]$ για τη μεταβλητή y, δηλαδή οι τιμές $y = \pm 4$ όπου προφανώς $x = 0$. Άρα έχουμε

$$\begin{array}{rrcrcl} \text{σημείο:} & A_1\left(0, -4\right) & \text{με τιμή} & f\left(0, -4\right) & = & -40 \\ & A_2\left(0, 4\right) & & f\left(0, 4\right) & = & 8. \end{array} \tag{3}$$

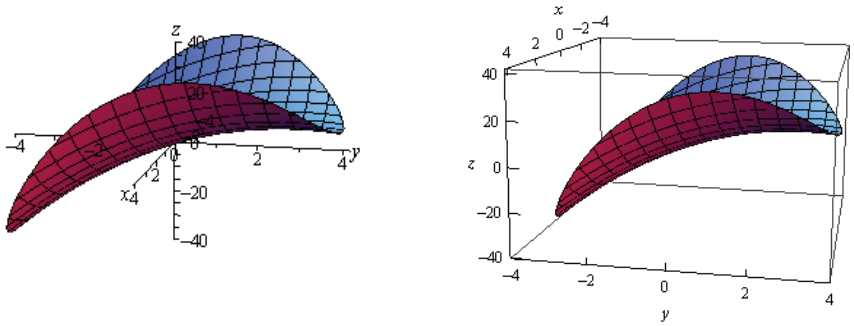
βήμα III: Από τις (1)-(3) προκύπτουν τα εξής:

- το σημείο $A_1\left(0, -4\right)$ ορίζει το απόλυτο ελάχιστο, επειδή η f έχει τη μικρότερη τιμή -40 από όλες τις άλλες σε αυτό,
- τα σημεία $P_1\left(-\sqrt{15}, 1\right)$ και $P_2\left(\sqrt{15}, 1\right)$ ορίζουν τις απόλυτα μέγιστες τιμές, επειδή η f έχει τη μεγαλύτερη τιμή 35 σε αυτά (Σχ. 14.3.3 - 2).

■

14.3.4 Ακρότατα με συνθήκες - Μέθοδος του Lagrange

Στην προηγούμενη παράγραφο μελετήθηκε το πρόβλημα της βελτιστοποίησης των τιμών μιας συνάρτησης, έστω $f(x, y)$, σε μια κλειστή περιοχή του πεδίου ορισμού της f. Γενικεύοντας το παραπάνω πρόβλημα στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί η βελτιστοποίηση μιας συνάρτησης $f(x, y)$, αντίστοιχα $f(x, y, z)$, όταν τα (x, y), αντίστοιχα τα (x, y, z) επαληθεύουν ορισμένες συνθήκες (constraints) της μορφής $\phi(x, y) = 0$, αντίστοιχα $\phi(x, y, z) = 0$ (coupling equation ή equality constraint). Τα ακρότατα του είδους αυτού είναι γνωστά ως



Σχήμα 14.3.3 - 2: Παράδειγμα 14.3.3 - 2: Δύο διαφορετικές όψεις του διαγράμματος της $f(x,y) = 2x^2 - y^2 + 6y$, όταν $(x,y) \in D$.

ακρότατα με συνθήκη (conditional extremum) και είναι επίσης μια μορφή της με συνθήκη μαθηματικής βελτιστοποίησης μιας συνάρτησης. Η μέθοδος λύσης που θα χρησιμοποιηθεί είναι γνωστή ως **μέθοδος πολλαπλασιαστών του Lagrange** (Lagrange multiplier).[18]

Περίπτωση μιας συνθήκης

Ζητείται ο προσδιορισμός των ακρότατων μιας συνάρτησης, έστω $f(x,y)$, αντίστοιχα $f(x,y,z)$, όταν ισχύει η παρακάτω συνθήκη:

$$\phi(x,y) = 0, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \phi(x,y,z) = 0. \tag{14.3.4 - 1}$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο του Lagrange ορίζεται αρχικά μία βοηθητική συνάρτηση (auxiliary function)

$$\Lambda(x,y) = f(x,y) + \lambda\,\phi(x,y), \tag{14.3.4 - 2}$$

αντίστοιχα

$$\Lambda(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda\,\phi(x,y,z) \tag{14.3.4 - 3}$$

που λέγεται και **συνάρτηση του Lagrange**, στην οποία η παράμετρος λ είναι ένας προσδιοριστέος πολλαπλασιαστής. Επομένως το πρόβλημα ανάγεται

[18] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_multiplier*

πλέον στον προσδιορισμό των ακρότατων της Λ. Έχοντας υπόψη τις (14.3.1−1) προκύπτει ότι οι αναγκαίες συνθήκες είναι

$$\begin{aligned} \Lambda_x = f_x + \lambda\phi_x &= 0 \\ \Lambda_y = f_y + \lambda\phi_y &= 0, \end{aligned} \qquad (14.3.4 \text{ - } 4)$$

αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \Lambda_x = f_x + \lambda\phi_x &= 0 \\ \Lambda_y = f_y + \lambda\phi_y &= 0 \\ \Lambda_z = f_z + \lambda\phi_z &= 0. \end{aligned} \qquad (14.3.4 \text{ - } 5)$$

Από τη λύση των παραπάνω συστημάτων θα προκύψουν οι άγνωστοι συναρτήσει του λ, δηλαδή

$$x = x(\lambda), \quad y = y(\lambda) \quad \text{και} \quad z = z(\lambda).$$

Αντικαθιστώντας στην $(14.3.4-1)$ προσδιορίζεται τότε το λ και στη συνέχεια οι τιμές x_0 και y_0, αντίστοιχα x_0, y_0 και z_0 που επαληθεύουν το σύστημα $(14.3.4-4)$, αντίστοιχα $(14.3.4-5)$.

Σημείωση 14.3.4 - 1

Όμοια, όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, επειδή λόγω της συνθήκης $(14.3.4-1)$ το πεδίο ορισμού της f θα είναι μια φραγμένη περιοχή του $\mathbb{R}^2$, αντίστοιχα του $\mathbb{R}^3$, θα εφαρμόζεται και στην περίπτωση αυτή το Θεώρημα 14.3.3 - 1. Τότε το σημείο $P(x_0, y_0)$, που προσδιορίζεται με την παραπάνω διαδικασία, θα είναι ακρότατο της $f(x, y)$ με συνθήκη τη $\phi(x, y) = 0$, αντίστοιχα το $P(x_0, y_0, z_0)$ θα είναι ακρότατο της $f(x, y, z)$ με συνθήκη τη $\phi(x, y, z) = 0$. Το είδος του ακρότατου (μέγιστο ή ελάχιστο) υπολογίζεται από τις τιμές τις

$$f(x_0, y_0), \quad \text{αντίστοιχα} \quad f(x_0, y_0, z_0) \quad \text{στο σημείο} \quad P.$$

Παράδειγμα 14.3.4 - 1

Να προσδιοριστούν τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x, y) = xy \quad \text{με συνθήκη} \quad \phi(x, y) = x + y - 1 = 0.$$

Λύση. Σύμφωνα με την $(14.3.4-2)$ η συνάρτηση του Lagrange γράφεται

$$\Lambda(x,y) = xy + \lambda\,(x+y-1)\,.$$

Τότε από το σύστημα $(14.3.4-4)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \Lambda_x = y+\lambda &= 0 \qquad\qquad & y &= -\lambda \\ & \text{οπότε} & & \\ \Lambda_y = x+\lambda &= 0, & x &= -\lambda. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη συνθήκη

$$\phi(x,y) = x+y-1 = 0$$

προκύπτει ότι

$$-2\lambda = 1, \quad \text{δηλαδή} \quad \lambda = -\frac{1}{2}\,.$$

Άρα

$$x = y = \frac{1}{2}\,, \quad \text{δηλαδή το κρίσιμο σημείο είναι το} \quad P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 14.3.4 - 1 ο προσδιορισμός του είδους του ακρότατου γίνεται αντικαθιστώντας στην f την τιμή $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, οπότε

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0, \quad \text{δηλαδή μέγιστο.}$$

■

Παράδειγμα 14.3.4 - 2

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x,y) = 5x - 3y \quad \text{με συνθήκη} \quad \phi(x,y) = x^2+y^2-136 = 0.$$

Λύση. Γεωμετρικά στο παραπάνω πρόβλημα ζητείται ο προσδιορισμός των μέγιστων και των ελάχιστων τιμών των συντεταγμένων τομής του επιπέδου $z = f(x,y)$ με τον κύλινδρο $\phi(x,y)$ με βάση κυκλικό δίσκο ακτίνας $\sqrt{136}$.

Σύμφωνα με την $(14.3.4-2)$ η συνάρτηση του Lagrange για την περίπτωση αυτή γράφεται

$$\Lambda(x,y) = 5x - 3y + \lambda\left(x^2+y^2-136\right).$$

Τότε από το σύστημα $(14.3.4-4)$ προκύπτει ότι

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_x = 2\lambda x + 5 &=& 0 \\ \Lambda_y = 2\lambda y - 3 &=& 0, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad \begin{array}{rcl} x &=& -\dfrac{5}{2\lambda} \\ y &=& \dfrac{3}{2\lambda}. \end{array}$$

Αντικαθιστώντας στη συνθήκη $\phi(x,y) = x^2+y^2-136 = 0$ προκύπτει

$$\frac{25}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\,\lambda^2} = 136 \quad \text{ή} \quad \lambda^2 = \frac{1}{16}, \quad \text{δηλαδή} \quad \lambda = \pm\frac{1}{4}.$$

Επομένως, όταν

$$\lambda = \frac{1}{4} \quad \text{είναι} \quad x=-10 \quad \text{και} \quad y=6 \quad \text{σημείο} \quad P_1(-10,6),$$

$$\lambda = -\frac{1}{4} \qquad x=10 \quad \text{και} \quad y=-6 \quad \text{σημείο} \quad P_2(10,-6).$$

Για να προσδιορίσουμε το είδος του ακρότατου, όμοια σύμφωνα με την Παρατήρηση 14.3.4 - 1, αντικαθιστούμε τις παραπάνω τιμές στην f, δηλαδή

$$\begin{array}{rcl} \text{σημείο} \quad P_1(-10,6): \quad f(-10,6) &=& -68 < 0 \quad \textbf{ελάχιστο}, \\ P_2(10,-6): \quad f(10,-6) &=& 68 > 0 \quad \textbf{μέγιστο}. \end{array}$$

■

Παράδειγμα 14.3.4 - 3

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = xyz \quad \text{με συνθήκη την} \quad \phi(x,y,z) = x+y+z-1 = 0,$$

όταν $x,\ y,\ z \geq 0$.

Λύση. Σύμφωνα με την $(14.3.4-3)$ η συνάρτηση του Lagrange γράφεται

$$\Lambda(x,y,z) = xyz + \lambda\left(x+y+z-1\right).$$

Τότε από το σύστημα $(14.3.4-5)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \Lambda_x = yz + \lambda &= 0 \\ \Lambda_y = zx + \lambda &= 0 \\ \Lambda_z = xy + \lambda &= 0, \end{aligned}$$

που γράφεται

$$yz = -\lambda \tag{1}$$
$$zx = -\lambda \tag{2}$$
$$xy = -\lambda. \tag{3}$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$yz = zx \quad \text{ή} \quad z(y-x) = 0,$$

οπότε διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

$$z = 0 \quad \text{ή} \tag{4}$$
$$y = x \tag{5}$$

- Αν ισχύει η (4), τότε από την (1) ή την (2) προκύπτει ότι $\lambda = 0$, οπότε από την (3) έχουμε $xy = 0$, δηλαδή

  $$x = 0 \quad \text{ή} \quad y = 0.$$

  Συνδυάζοντας τις λύσεις αυτές με τη συνθήκη $\phi(x,y,z) = x+y+z-1 = 0$ έχουμε

  $$z = 0, \quad x = 0, \quad y = 1 \qquad \text{σημείο} \quad P_1(0,1,0) \tag{6}$$
  $$z = 0, \quad y = 0, \quad x = 1 \qquad \text{σημείο} \quad P_2(1,0,0) \tag{7}$$

- Αν ισχύει η (5), τότε έχουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

  i) $x = y = 0$. Όμοια συνδυάζοντας τις λύσεις αυτές με τη συνθήκη $\phi(x,y,z) = x+y+z-1 = 0$, προκύπτει $z = 1$, δηλαδή το σημείο

  $$P_3(0,0,1). \tag{8}$$

ii) $x = y \neq 0$. Τότε από τις (2) και (3) προκύπτει ότι

$$xz = xy \quad \text{ή} \quad x(z-y) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad y = z$$

και επειδή $x \neq 0$, πρέπει $y = z$. Άρα τελικά $x = y = z$. Τότε όμοια από τη συνθήκη $\phi(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0$ έχουμε

$$3x = 1, \quad \text{δηλαδή} \quad x = \frac{1}{3} \qquad \text{σημείο} \quad P_4\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad (9)$$

Για να προσδιορίσουμε το είδος του ακρότατου στις περιπτώσεις (6)-(9), όμοια σύμφωνα με την Παρατήρηση 14.3.4 - 1, αντικαθιστούμε τις τιμές στην f, οπότε στα αντίστοιχα σημεία έχουμε

$$f(0,0,1) = 0, \quad f(0,1,0) = 0, \qquad f(1,0,0) = 0 \quad \textbf{ελάχιστα},$$
$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} \qquad \textbf{μέγιστο}.$$

Σημείωση: στο παράδειγμα αυτό εξετάστηκε και η τιμή $\lambda = 0$. ∎

Παράδειγμα 14.3.4 - 4

Να προσδιοριστούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με τον μέγιστο δυνατό όγκο, όταν το εμβαδόν της επιφάνειάς του είναι $64\,\mathrm{cm}^2$.

Λύση. Έστω x το μήκος, y το πλάτος και z το ύψος όπου $x, y, z > 0$. Τότε είναι γνωστό ότι ο όγκος V δίνεται από τον τύπο

$$V = xyz,$$

ενώ το εμβαδόν από τον

$$E = 2(xy + yz + zx).$$

Επομένως το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό των ακρότατων της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = xyz \quad \text{με συνθήκη} \quad \phi(x,y,z) = 2(xy + yz + zx) - 64 = 0,$$

δηλαδή

$$f(x,y,z) = xyz \quad \text{με συνθήκη} \quad \phi(x,y,z) = xy + yz + zx - 32 = 0,$$

Σύμφωνα με την $(14.3.4-3)$ η συνάρτηση του Lagrange γράφεται

$$\Lambda(x,y,z) = xyz + \lambda\left(xy + yz + zx - 32\right).$$

Τότε από το σύστημα $(14.3.4-5)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \Lambda_x = yz + \lambda(y+z) &= 0 \\ \Lambda_y = zx + \lambda(z+x) &= 0 \\ \Lambda_z = xy + \lambda(x+y) &= 0 \end{aligned}$$

που γράφεται

$$\begin{aligned} yz &= -\lambda(y+z) && (1)\\ zx &= -\lambda(z+x) && (2)\\ xy &= -\lambda(x+y). && (3) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με x, την (2) με y και την (3) με z προκύπτει

$$\begin{aligned} yz &= -\lambda(y+z) && (4)\\ zx &= -\lambda(z+x) && (5)\\ xy &= -\lambda(x+y) && (6) \end{aligned}$$

Από τις (5) και (6) έχουμε

$$-\lambda(y+z) = -\lambda(z+x), \quad \text{δηλαδή} \quad \lambda(xz - yz) = 0,$$

οπότε ή

- $\lambda = 0$ που απορρίπτεται, επειδή τότε $yz = 0$, οπότε ή $y = 0$ ή $z = 0$ άτοπο,
- $xz - yz = 0$ που, επειδή $z \neq 0$, δίνει

$$x = y. \qquad (7)$$

Όμοια από τις (6) και (7) προκύπτει ότι

$$y = z. \tag{8}$$

Άρα

$$x = y = z$$

και αντικαθιστώντας στην (4), δηλαδή στη συνθήκη

$$\phi(x, y, z) = xy + yz + zx - 32 = 3x^2 - 32 = 0,$$

επειδή x, y, $z > 0$, προκύπτει ότι η λύση είναι

$$x_0 = y_0 = z_0 = \sqrt{\frac{32}{3}},$$

δηλαδή υπάρχει ακρότατο στο σημείο

$$P\,(x_0, y_0, z_0) \quad \text{με τιμή} \quad f\,(x_0, y_0, z_0) \approx 10.67 > 0,$$

οπότε σύμφωνα και με την Παρατήρηση 14.3.4 - 1 έχουμε μέγιστο. ∎

Παράδειγμα 14.3.4 - 5

Όμοια να προσδιοριστούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με τον μέγιστο δυνατό όγκο, που περικλείεται από το ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Λύση. Όπως προκύπτει από την εξίσωση του ελλειψοειδούς, το κέντρο του είναι το σημείο $(0, 0, 0)$. Επομένως το ίδιο σημείο θα πρέπει να είναι και το κέντρο του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, οπότε οι κορυφές του θα είναι στα σημεία $(\pm x, \pm y, \pm z)$ όπου x, y, $z > 0$, οπότε ο όγκος του στην περίπτωση αυτή θα δίνεται από τον τύπο

$$V = 2x\,2y\,2z = 8xyz.$$

Άρα το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό των ακρότατων της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = 8xyz \quad \text{με συνθήκη την} \quad \phi(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Σύμφωνα με την $(14.3.4-3)$ η συνάρτηση του Lagrange γράφεται

$$\Lambda(x,y,z) = 8xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

οπότε από το σύστημα $(14.3.4-5)$ προκύπτει

$$\begin{aligned}\Lambda_x = 8yz + 2\lambda\frac{x}{a^2} &= 0\\ \Lambda_y = 8zx + \lambda\frac{y}{b^2} &= 0\\ \Lambda_z = 8xy + \lambda\frac{z}{c^2} &= 0.\end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς λ τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε

$$\lambda = -4a^2\frac{yz}{x} = -4b^2\frac{zx}{y} = -4c^2\frac{xy}{z},$$

οπότε

$$y^2a^2 = x^2b^2 \quad \text{και} \quad z^2b^2 = y^2c^2, \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}. \qquad (1)$$

Τότε αντικαθιστώντας στη συνθήκη

$$\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1 = 0$$

προκύπτει

$$1 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 3\frac{x^2}{a^2}, \quad \text{οπότε} \quad x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Επειδή $x>0$, προκύπτει ότι $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, οπότε τελικά από την (1) έχουμε ακρότατο στο σημείο

$$P\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{με μέγιστο όγκο} \quad V(P) = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}.$$

Σημείωση: στο παράδειγμα αυτό δεν απαιτήθηκε ο υπολογισμός του λ. ∎

Περίπτωση δύο συνθηκών

[19] Ζητείται ο προσδιορισμός των πιθανών ακρότατων μιας συνάρτησης $f(x,y,z)$, όταν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

$$g(x,y,z)=0, \quad \text{αντίστοιχα} \quad h(x,y,z)=0. \tag{14.3.4 - 24}$$

Όμοια, όπως και στην περίπτωση της μιας συνθήκης, με τη μέθοδο του Lagrange ορίζεται η συνάρτηση

$$\Lambda(x,y,z) \;=\; f(x,y,z)+\lambda\, g(x,y,z)+\mu\, h(x,y,z) \tag{14.3.4 - 25}$$

στην οποία οι παράμετροι λ, μ είναι προσδιοριστέοι πολλαπλασιαστές, οπότε το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό των ακρότατων της Λ. Έχοντας υπόψη τις $(14.3.1-1)$ προκύπτει ότι οι αναγκαίες συνθήκες είναι

$$\begin{aligned} \Lambda_x = f_x+\lambda\, g_x+\mu\, h_x &= 0\\ \Lambda_y = f_y+\lambda\, g_y+\mu\, h_y &= 0\\ \Lambda_z = f_z+\lambda\, g_z+\mu\, h_z &= 0. \end{aligned} \tag{14.3.4 - 26}$$

Από τη λύση του παραπάνω συστήματος θα προκύψουν οι άγνωστοι συναρτήσει των λ, μ, δηλαδή $x=x(\lambda,\mu)$, $y=y(\lambda,\mu)$ και $z=z(\lambda,\mu)$. Αντικαθιστώντας στην $(14.3.4-24)$ προσδιορίζονται τα λ, μ και στη συνέχεια οι τιμές x_0, y_0 και z_0 που επαληθεύουν το σύστημα $(14.3.4-26)$.

Άσκηση

Να προσδιοριστούν τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

i) x^2+y^2 με συνθήκη την $x+y=1$,

ii) $x+2y$ με $x^2+y^2=5$,

iii) $\cos^2 x+\cos^2 y$ με $x-y=-\dfrac{\pi}{4}$,

iv) $x+y-z-4$ με $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1$.

[19] Για εφαρμογές και γενίκευση του προβλήματος βλέπε βιβλιογραφία.

Απαντήσεις

(i) $\Lambda(x,y)=x^2+y^2+\lambda\,(x+y-1)$, $\Lambda_x=2x+\lambda$, $\Lambda_y=2y+\lambda$, $\lambda=-1$,
σημείο $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ max,
(ii) $\Lambda(x,y)=x+2y+\lambda\left(x^2+y^2-5\right)$, $\Lambda_x=1+2x\lambda$, $\Lambda_y=2+2y\lambda$, $\lambda=\pm\frac{1}{2}$,
σημεία: $P_1\,(-1,-2)$ min και $P_2\,(1,2)$ max,
(iii) $\Lambda(x,y)=\cos^2 x+\cos^2 y+\lambda\left(x-y+\frac{\pi}{4}\right)$, $\Lambda_x=\lambda-\sin 2x$, οπότε $x=\frac{1}{2}\,\sin^{-1}\lambda$,
$\Lambda_y=-\lambda-\sin 2y$, οπότε $y=-\frac{1}{2}\,\sin^{-1}\lambda$, $\lambda=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, σημείο $P\left(-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right)$ max,
(iv) $\Lambda(x,y,z)=x+y-z-4+\lambda\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}-1\right)$, $\Lambda_x=1+\frac{1}{2}\,x\lambda$, $\Lambda_y=1+\frac{2}{9}\,y\lambda$, $\Lambda_z=-1+\frac{1}{8}\,z\lambda$, $\lambda=\pm\frac{\sqrt{29}}{2}$, σημεία: $P_1\left(-\frac{4}{\sqrt{29}},-\frac{9}{\sqrt{29}},\frac{16}{\sqrt{29}}\right)$ min και $P_2\left(\frac{4}{\sqrt{29}},\frac{9}{\sqrt{29}},-\frac{16}{\sqrt{29}}\right)$ max.

14.4 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[2] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Αθήνα: Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[3] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[4] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 15

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

15.1 Εισαγωγικές έννοιες

Από την Άλγεβρα είναι γνωστή η έννοια της αλγεβρικής εξίσωσης ή και του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων. Στις εξισώσεις ή και τα συστήματα αυτά οι άγνωστοι υπολογίζονται τότε στο σύνολο των πραγματικών ή γενικότερα των μιγαδικών αριθμών.

Υπάρχουν όμως προβλήματα καθαρά μαθηματικά, αλλά και γενικότερα των εφαρμοσμένων επιστημών, που οδηγούν σε εξισώσεις, όπου οι παρουσιαζόμενες άγνωστες συναρτήσεις της μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών, εμφανίζονται με τις παραγώγους τους διαφόρων τάξεων. Οι εξισώσεις αυτές λέγονται τότε **διαφορικές εξισώσεις** (differential equations). Οι διαφορικές εξισώσεις που οι άγνωστες συναρτήσεις εξαρτώνται από μία μεταβλητή, λέγονται **συνήθεις διαφορικές εξισώσεις** (ΣΔΕ), ενώ εκείνες που εξαρτώνται από περισσότερες της μιας μεταβλητές λέγονται **διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους** (ΜΔΕ).

Επομένως η εξίσωση

- $$y' + xy + \sin 2x = 0,$$

όπου η άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ εξαρτάται από μια μεταβλητή, την x και εμφανίζεται με την πρώτη παράγωγό της είναι μία συνήθης διαφορική εξίσωση 1ης τάξης,

- $$x^2 y''' + xy' + \left(x^2 - y^2\right) y + e^x = 0,$$

  όπου $y = y(x)$, είναι όμοια μία συνήθης διαφορική εξίσωση 3ης τάξης, ενώ

- $$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$$

  όπου η άγνωστη συνάρτηση $u = u(x,t)$ εξαρτάται από τις μεταβλητές x και t, είναι μία διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους 2ης τάξης ως προς x και t.

Στο μάθημα αυτό θα εξεταστούν μόνον οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και από την κατηγορία αυτή μόνον αυτές που έχουν άμεσο ενδιαφέρον στις τεχνολογικές εφαρμογές.[1]

15.1.1 Ορισμοί και σχετικά θεωρήματα

Ορισμός 15.1.1 - 1. *Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης ν- τάξης είναι*

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(\nu)}\right) = 0, \qquad (15.1.1 - 1)$$

όπου $y = y(x) \,|\, (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ *μία άγνωστη προσδιοριστέα συνάρτηση και η* $y^{(k)}(x) \,|\, (a,b)$ *για κάθε* $k = 1, 2, \ldots, \nu$ *συμβολίζει την* k*-τάξης παράγωγο της* y*.*

Αν υπάρχει συνάρτηση $y(x)$, που να επαληθεύει την $(15.1.1 - 1)$, τότε αυτή θα λέγεται **γενική λύση** ή και **ολοκληρωτική καμπύλη** της.

[1] Ο αναγνώστης για εκτενέστερη μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 5, 6], στο βιβλίο Α. Μπράτσος [4] Κεφ. 12 και στη διεύθυνση
https : //en.wikipedia.org/wiki/Binomial_theorem.

Αποδεικνύεται ότι η γενική λύση της $(15.1.1-1)$ έχει γενικά τη μορφή

$$y(x) = \varphi\left(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_\nu\right), \qquad (15.1.1\text{ - }2)$$

όπου $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$ αυθαίρετες σταθερές, δηλαδή η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $(15.1.1-1)$ περιέχει τόσες αυθαίρετες σταθερές όσες και η τάξη της.

Στη γενική λύση $(15.1.1-2)$ οι ν το πλήθος σταθερές c_1, c_2, ..., c_ν προσδιορίζονται, όταν δοθούν σε ένα σημείο του πεδίο ορισμού, έστω το $x_0 \in (a,b)$, οι παρακάτω ν - αρχικές συνθήκες:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = {y_0}', \quad \ldots, \quad y^{(\nu-1)}(x_0) = {y_0}^{(\nu-1)}. \qquad (15.1.1\text{ - }3)$$

Τότε, επειδή $y(x) = \varphi\left(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_\nu\right)$, από την $(15.1.1-2)$ παραγωγίζοντας την $y(x)$ στο σημείο x_0 διαδοχικά μέχρι και την $\nu-1$ τάξη και λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες $(15.1.1-3)$ προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} y_0 &= \varphi\left(x_0, c_1, c_2, \ldots, c_\nu\right) \\ y_0' &= {\varphi_x}'\left(x_0, c_1, c_2, \ldots, c_\nu\right) \\ &\ldots \\ y_0^{(\nu-1)} &= {\varphi_x}^{(\nu-1)}\left(x_0, c_1, c_2, \ldots, c_\nu\right). \end{aligned} \qquad (15.1.1\text{ - }4)$$

Το σύστημα $(15.1.1-4)$ έχει ν - εξισώσεις με ν - αγνώστους τις σταθερές c_1, c_2, ..., c_ν. Η αντικατάσταση των τιμών των σταθερών που προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος $(15.1.1-4)$ στην $y(x)$ ορίζει τότε τη μερική λύση της $(15.1.1-1)$.

Ορισμός 15.1.1 - 2 (πρόβλημα αρχικής τιμής). *Η διαφορική εξίσωση* $(15.1.1-1)$ *με τις αρχικές συνθήκες* $(15.1.1-3)$*, δηλαδή η*

$$\begin{aligned} y^{(\nu)} &= f\left(x, y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}\right) \quad \textit{με τις} \\ y^{(i)}\left(x_0\right) &= y_0^{(i)} \quad \textit{για κάθε } i = 0, 1, \ldots, \nu-1, \end{aligned} \qquad (15.1.1\text{ - }5)$$

ορίζει ένα πρόβλημα αρχικής τιμής (initial value problem ή IVP) ν *- τάξης.*

Παράδειγμα 15.1.1 - 1

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' - 2y = 0, \quad \text{όπου} \quad y = y(x).$$

Λόγω της ύπαρξης της $y''(x)$ η διαφορική εξίσωση είναι τάξης $\nu = 2$, οπότε η γενική της λύση σύμφωνα με την $(15.1.1 - 2)$ θα είναι της μορφής $y(x) = \varphi(x, y, c_1, c_2)$, όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές. Αποδεικνύεται ότι η γενική της λύση είναι στην περίπτωση αυτή

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

Έστω τώρα ότι ζητείται η μερική λύση, που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες:

i) $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$, αντίστοιχα

ii) $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

Λύση. Σύμφωνα και με την $(15.1.1 - 3)$ έχουμε

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}, \quad \text{οπότε} \quad y'(x) = c_1 e^x - 2c_2 e^{-2x}.$$

Επειδή στην περίπτωση αυτή οι αρχικές συνθήκες δίνονται στο σημείο $x_0 = 0$, θέτοντας $x = 0$ στις $y(x)$ και $y'(x)$ προκύπτει σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες (i), αντίστοιχα (ii) το σύστημα:

i)

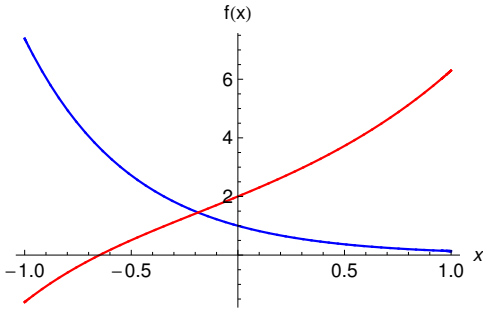
$$\begin{array}{rcrcl} c_1 & + & c_2 & = & 1 \\ c_1 & - & 2c_2 & = & -2, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad c_1 = 0 \text{ και } c_2 = 1,$$

δηλαδή η μερική λύση είναι η $y = e^{-2x}$ (Σχ. 15.1.1 - 1) - μπλε καμπύλη, αντίστοιχα

ii)

$$\begin{array}{rcrcl} c_1 & + & c_2 & = & 21 \\ c_1 & - & 2c_2 & = & 3, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad c_1 = \frac{7}{3} \text{ και } c_2 = -\frac{1}{3},$$

με μερική λύση $y = \frac{7}{3}\, e^x - \frac{1}{3}\, e^{-2x}$ (Σχ. 15.1.1 - 1) - κόκκινη καμπύλη.



Σχήμα 15.1.1 - 1: Παράδειγμα 15.1.1 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x)$, όταν $x \in [-1, 1]$ στην περίπτωση (i) μπλε και (ii) κόκκινη καμπύλη.

■

[2]Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στις εφαρμογές παρουσιάζει μια ειδική κατηγορία διαφορικών εξισώσεων, που είναι γνωστή ως **γραμμικές διαφορικές εξισώσεις** (linear differential equations). Οι εξισώσεις αυτές ορίζονται στη συνέχεια.

Ορισμός 15.1.1 - 3 (μη ομογενής γραμμική). *Μία διαφορική εξίσωση που γράφεται στη μορφή*

$$y^{(\nu)} + f_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)} + \ldots + f_1(x)y' + f_0(x)y = r(x), \qquad (15.1.1 - 6)$$

όπου η $r(x)$ και οι συντελεστές $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_{\nu-1}(x)$ είναι γνωστές συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς για κάθε $x \in (a, b)$, λέγεται μη ομογενής γραμμική (nonhomogeneous linear) διαφορική εξίσωση ν -τάξης.

Ενδεικτικά, στα προβλήματα του ηλεκτρισμού, η $r(x)$ ορίζει την είσοδο (source term).

Ορισμός 15.1.1 - 4 (μη γραμμική). *Λέγεται μη γραμμική (nonlinear) διαφορική εξίσωση, κάθε διαφορική εξίσωση, που δεν είναι δυνατόν να γραφεί στη μορφή* $(15.1.1 - 6)$.

Ορισμός 15.1.1 - 5 (ομογενής γραμμική). *Ορίζεται ως ομογενής γραμμική (homogeneous linear) διαφορική εξίσωση ν - τάξης, κάθε διαφορική εξίσωση*

[2]Βλέπε βιβλιογραφία και:
https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_differential_equation

της μορφής $(15.1.1-6)$ *με* $r(x)=0$, *δηλαδή η*

$$y^{(\nu)}+f_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)}+\ldots+f_1(x)y'+f_0(x)y=0. \qquad (15.1.1\text{ - }7)$$

Αποδεικνύεται το παρακάτω σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα 15.1.1 - 1 *Αν* y_h *είναι η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης* $(15.1.1-7)$ *και* y_p *μία μερική (particular) λύση της μη ομογενούς* $(15.1.1-6)$, *τότε η γενική λύση της* $(15.1.1-6)$ *είναι*

$$y=y_h+y_p. \qquad (15.1.1\text{ - }8)$$

Σημείωση 15.1.1 - 1

Η μερική λύση y_p, σε αντίθεση με τη λύση y_h της ομογενούς, **δεν** περιέχει σταθερές.

Ορισμός 15.1.1 - 6. *Ορίζεται ως μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση* ν*-τάξης με σταθερούς συντελεστές, κάθε εξίσωση της μορφής* $(15.1.1-6)$, *όπου οι συναρτήσεις* $f_k(x)$ *είναι σταθερές για κάθε* $k=0,1,\ldots,\nu-1$, *δηλαδή η*

$$y^{(\nu)}+a_{\nu-1}y^{(\nu-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y=r(x), \qquad (15.1.1\text{ - }9)$$

όταν a_k *σταθερές για κάθε* $k=0,1,\ldots,\nu-1$.

Ορισμός 15.1.1 - 7. *Ορίζεται ως ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση* ν*-τάξης με σταθερούς συντελεστές, κάθε εξίσωση της μορφής* $(15.1.1-9)$, *όπου* $r(x)=0$, *δηλαδή η*

$$y^{(\nu)}+a_{\nu-1}y^{(\nu-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y=0, \qquad (15.1.1\text{ - }10)$$

όταν a_k *σταθερές για κάθε* $k=0,1,\ldots,\nu-1$.

Στην περίπτωση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $(15.1.1-10)$ η λύση της προσδιορίζεται θέτοντας

$$y = e^{\lambda x} \quad \text{με} \quad \lambda \text{ σταθερά.} \qquad (15.1.1 \text{ - } 11)$$

Τότε

$$y'(x) = \lambda\, e^{\lambda x}, \quad y''(x) = \lambda^2\, e^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad y^{(\nu)}(x) = \lambda^{\nu}\, e^{\lambda x},$$

οπότε, επειδή προφανώς $e^{\lambda x} \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αντικαθιστώντας στην $(15.1.1-10)$ προκύπτει τελικά ότι

$$\lambda^{\nu} + a_{\nu-1}\lambda^{\nu-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0. \qquad (15.1.1 \text{ - } 12)$$

Η $(15.1.1-12)$ είναι η **χαρακτηριστική εξίσωση** (characteristic ή auxiliary equation) της $(15.1.1-10)$ και από τη λύση της προκύπτουν οι ν - το πλήθος ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$, που ορίζουν τις τιμές του λ στην $(15.1.1-11)$. Σύμφωνα με την $(15.1.1-2)$ αποδεικνύεται ότι η γενική λύση της $(15.1.1-10)$, όταν οι ρίζες είναι απλές, είναι της μορφής

$$y_h(x) = c_1\, e^{\lambda_1 x} + c_2\, e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_\nu\, e^{\lambda_\nu x}, \qquad (15.1.1 \text{ - } 13)$$

ενώ όταν μια ρίζα, έστω η λ, έχει πολλαπλότητα ρ με $\rho \leq \nu$, τότε

$$y_h(x) = (c_1 + \ldots + c_\rho)\; e^{\lambda x} + c_{\rho+1}\, e^{\lambda_{\rho+1} x} + \ldots + c_\nu\, e^{\lambda_\nu x}. \qquad (15.1.1 \text{ - } 14)$$

Εφαρμογές της παραπάνω θεωρίας στις περιπτώσεις των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1ης και 2ης τάξης θα δοθούν στις επόμενες παραγράφους.

15.2 Διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης

15.2.1 Ορισμοί

Ορισμός 15.2.1 - 1. *Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης είναι*

$$F\left(x, y, y'\right) = 0, \qquad (15.2.1 \text{ - } 1)$$

όπου η άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ και υπάρχει η $y'(x)$ για κάθε $x \in (a,b)$.

Τότε η λύση $y(x)$, εφόσον είναι δυνατόν να προσδιοριστεί, θα ορίζει τη λύση της $(15.2.1-1)$.

Ορισμός 15.2.1 - 2. *Μια διαφορική εξίσωση 1ης τάξης της μορφής* $(15.2.1-1)$ *θα λέγεται ότι γράφεται σε* **λυμένη μορφή** *(explicit formula), όταν*

$$y' = f(x, y). \qquad (15.2.1 - 2)$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση η $(15.2.1-1)$ θα λέγεται ότι ορίζεται με **πεπλεγμένη μορφή** (implicit formula).

Ως ειδική περίπτωση του Ορισμού 15.1.1 - 2 δίνεται ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 15.2.1 - 3. *Μία λυμένη διαφορική εξίσωση 1ης τάξης, που επαληθεύει μία αρχική τιμή, δηλαδή η*

$$y' = f(x, y) \quad με \quad y_0 = y(x_0), \qquad (15.2.1 - 3)$$

θα λέγεται ότι ορίζει ένα **πρόβλημα αρχικής τιμής** *(initial value problem) 1ης τάξης.*

Εξετάζεται στη συνέχεια μια ειδική κατηγορία των διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης, που είναι απαραίτητη για τα επόμενα.

15.2.2 Διαφορικές εξισώσεις χωρισμένων μεταβλητών

Ορισμός 15.2.2 - 1. *Κάθε διαφορική εξίσωση της μορφής*[3]

$$g(y)\, y' = f(x), \quad με\ x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}\ και\ y = y(x) \in (\gamma, \delta) \subseteq \mathbb{R} \quad (15.2.2 - 1)$$

λέγεται ότι ορίζει μια διαφορική εξίσωση με **χωρισμένες μεταβλητές**.

Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη από τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης ο συμβολισμός

$$y' = y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}, \quad \text{οπότε} \quad dy(x) = y'(x)\, dx.$$

[3] Βλέπε επίσης *http://en.wikipedia.org/wiki/Separation_of_variables*

Επομένως το κλάσμα $dy(x)/dx$ είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως το πηλίκο των διαφορικών $dy(x)$ και dx, οπότε η $(15.2.2-1)$ γράφεται

$$g(y)\,y' = f(x) \quad \text{γράφεται} \quad g(y)dy = f(x)dx,$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης προκύπτει τελικά ότι

$$\int \mathbf{g(y)dy} = \int \mathbf{f(x)dx} + \mathbf{c}, \qquad (15.2.2\text{ - }2)$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά. Αν υποτεθεί ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς, τότε τα ολοκληρώματα στην $(15.2.2-2)$ υπάρχουν, οπότε από τον υπολογισμό τους προκύπτει η γενική λύση της $(15.2.2-1)$.

Παρατηρήσεις 15.2.2 - 1

Από την $(15.2.2-2)$ προκύπτουν τα εξής:

i) η σταθερά c συμπεριλαμβάνει τις σταθερές που προκύπτουν από την ολοκλήρωση του αριστερού και του δεξιού μέλους. Επομένως **δεν** απαιτείται στην $(15.2.2-2)$ η πρόσθεση άλλων σταθερών.

ii) Μετά τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, θα πρέπει η $(15.2.2-2)$ να λυθεί ως προς y. Αν αυτό δεν είναι δυνατόν, τότε λέγεται ότι η λύση της $(15.2.2-1)$ δίνεται με **πεπλεγμένη μορφή**.

iii) Αν κάποιο από τα ολοκληρώματα στην $(15.2.2-2)$ δεν υπολογίζεται, τότε αναζητούνται προσεγγιστικές λύσεις[4] της $(15.2.2-2)$.

iv) Έστω ότι για την αναγωγή της $(15.2.2-1)$ στη μορφή $(15.2.2-2)$ απαιτείται η διαίρεση με το y, οπότε πρέπει να υποτεθεί $y \neq 0$. Τότε, αν στη γενική λύση η τιμή $y=0$ δεν συμπεριλαμβάνεται, θα λέγεται ότι η $y=0$ είναι μια **ιδιάζουσα** ή **προφανής λύση** (trivial solution) της $(15.2.2-1)$.

[4] Βλέπε βιβλιογραφία: Προσεγγιστική λύση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων και βιβλίο Α. Μπράτσος [3] Κεφ. 10.

Παράδειγμα 15.2.2 - 1

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y\,y' + 4x = 0 \tag{1}$$

που διαδοχικά γράφεται

$$y\,\frac{dy}{dx} + 4x = 0 \quad \text{ή} \quad y\,dy = -4x\,dx,$$

οπότε ολοκληρώνοντας

$$\frac{y^2}{2} = -4\,\frac{x^2}{2} + c,$$

όταν c μια αυθαίρετη σταθερά. Άρα έχουμε την παρακάτω με πεπλεγμένη μορφή γενική λύση της (1)

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = c. \tag{2}$$

Η (2) για τις διάφορες τιμές της σταθεράς c παριστάνει μια οικογένεια ελλείψεων (Σχ. 15.2.2 - 1).

Παράδειγμα 15.2.2 - 2

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$\left(x^2+1\right) y' - y^2 = 0 \quad \text{όπου } y_0 = y(0) = 1. \tag{3}$$

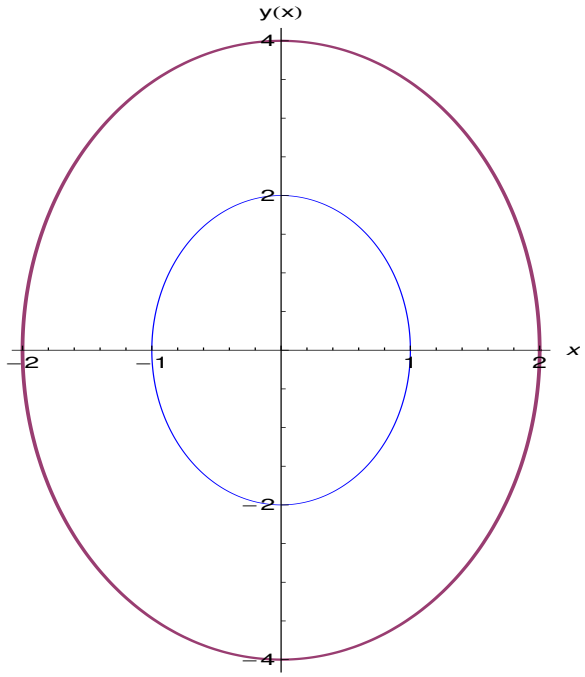
Λύση. Είναι $1 + x^2 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Υποθέτοντας ότι $y \neq 0$ η (3) γράφεται

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{1+x^2}\,,$$

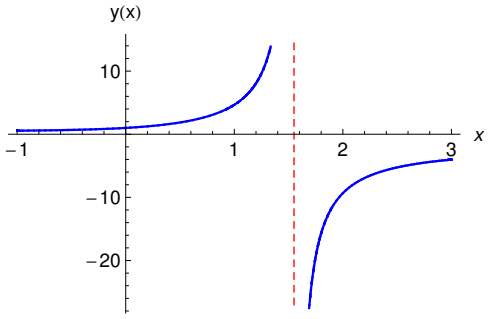
οπότε ολοκληρώνοντας

$$-\frac{1}{y} = \tan^{-1} x + c,$$

όταν c αυθαίρετη σταθερά.



Σχήμα 15.2.2 - 1: Παράδειγμα 15.2.2 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x)$, όταν $c = 1$ μπλε και $c = 4$ κόκκινη έλλειψη.



Σχήμα 15.2.2 - 2: Παράδειγμα 15.2.2 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x)$, όταν $x \in [-2,5]$ με κάθετη ασύμπτωτη (διακεκομμένη ευθεία) την $x \approx 1.5574$.

Επομένως η γενική λύση της (3) είναι

$$y = -\frac{1}{\tan^{-1} x + c}\,. \tag{4}$$

Σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 15.2.2 - 1 (iv), επειδή για την εύρεση της γενικής λύσης έχει υποτεθεί $y \neq 0$, εξετάζεται αν η $y = 0$ συμπεριλαμβάνεται στη γενική λύση (4). Επειδή αυτό δεν συμβαίνει, η $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (3).

Υπολογισμός μερικής λύσης

Σύμφωνα με την (3) η αρχική συνθήκη είναι $y(0) = 1$. Τότε από την (4) έχουμε

$$1 = -\frac{1}{\underbrace{\tan^{-1} 0}_{0} + c}\,, \quad \text{δηλαδή} \quad c = -1.$$

Άρα η μερική λύση της (3) είναι

$$y = \frac{1}{1 - \tan^{-1} x} \tag{5}$$

με $1 - \tan^{-1} x \neq 0$, δηλαδή $x \not\approx 1.5574$ - κάθετη ασύμπτωτη στο Σχ. 15.2.2 - 2. ∎

Η εύρεση της γενικής λύσης του Παραδείγματος 15.2.2 - 2 με το MATHEMATICA γίνεται με την εντολή:

Πρόγραμμα 15.2.2 - 1 (λύση διαφορικής εξίσωσης)

```
DSolve[(x^2+1)y'[x]-(y[x])^2==0,y[x],x]
```

ενώ της μερικής λύσης με την:

```
DSolve[{(x^2+1)y'[x]-(y[x])^2==0,y[0]==1},y[x],x]
```

Παρατήρηση 15.2.2 - 1

Πολλές φορές για να απλουστεύσουμε την έκφραση της γενικής λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης, η αυθαίρετη σταθερά c αντικαθίσταται από την επίσης αυθαίρετη σταθερά $\ln c$ με $c > 0$. Η αντικατάσταση αυτή δεν περιορίζει τη γενικότητα της λύσης, επειδή $(\ln c) \in \mathbb{R}$.

Σημείωση 15.2.2 - 1

Όταν υπάρχουν τιμές της μεταβλητής που μηδενίζουν τον συντελεστή της y', οπότε η διαφορική εξίσωση γίνεται μια εξίσωση με άγνωστο το y, τότε οι τιμές αυτές εξετάζονται χωριστά.

Παράδειγμα 15.2.2 - 3

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(1 - \cos x)y' = y \sin x. \tag{6}$$

Λύση. Σύμφωνα και με τη Σημείωση 15.2.2 - 1 πρέπει $1 - \cos x \neq 1$, δηλαδή $x \neq k\pi$ με $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, ενώ αν $x = k\pi$, τότε προφανώς η (6) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

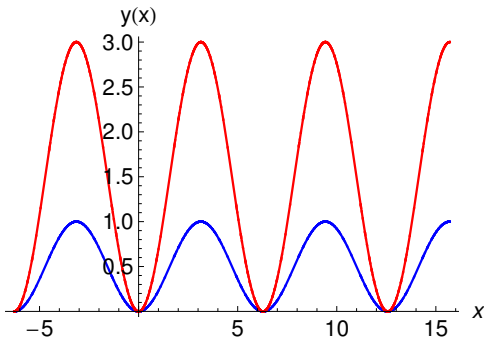
Έστω τώρα ότι $y \neq 0$. Τότε διαδοχικά έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \sin x}{1 - \cos x} \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{y} = \frac{\sin x\, dx}{1 - \cos x}, \quad \text{δηλαδή}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{(1 - \cos x)'\, dx}{1 - \cos x}.$$

Άρα ολοκληρώνοντας προκύπτει ότι

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{(1 - \cos x)'\, dx}{1 - \cos x} + c, \quad \text{δηλαδή} \quad \ln|y| = \ln|1 - \cos x| + c,$$



Σχήμα 15.2.2 - 3: Παράδειγμα 15.2.2 - 3: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = c\,\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ με $x \in [-2\pi, 5\pi]$, όταν $c = 1$ μπλε και $c = 3$ κόκκινη καμπύλη.

που σύμφωνα και με την Παρατήρηση 15.2.2 - 1 γράφεται

$$\ln|y| = \ln|1-\cos x| + \ln c = \ln|c\,(1-\cos x)| \quad \text{με} \quad c > 0,$$

δηλαδή $|y| = |c\,(1-\cos x)|$ ή ισοδύναμα $y = \pm\, c\,(1-\cos x)$ με $c > 0$, οπότε

$$y = c\,(1-\cos x) \quad \text{με} \quad c \neq 0.$$

Επειδή $2\sin^2\frac{x}{2} = 1-\cos x$, από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η γενική λύση της (6) τελικά γράφεται

$$y = c\,\sin^2\left(\frac{x}{2}\right), \quad \text{όταν} \quad c \neq 0. \tag{7}$$

Η γραφική παράσταση της (7) για τις τιμές $c = 1,\, 3$ δίνεται στο Σχ. 15.2.2 - 3.

Επειδή για την εύρεση της γενικής λύσης (7) έχει υποτεθεί $y \neq 0$ και η τιμή $y = 0$, εφόσον στην (7) είναι $c \neq 0$, δεν συμπεριλαμβάνεται στη γενική λύση, η $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (6). ∎

Παράδειγμα 15.2.2 - 4

Όμοια η

$$x \ln x \, y' - y = 0, \quad \text{όταν} \quad y(e) = 1. \tag{8}$$

Λύση. Λόγω του παράγοντα $\ln x$ πρέπει $x > 0$. Έστω $y \neq 0$. Τότε από την (8) υποθέτοντας ότι και $\ln x \neq 0$, δηλαδή $x \neq 1$, διαφορετικά πρέπει $y = 0$, άτοπο, έχουμε

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x \ln x} = \frac{d \ln x}{\ln x}.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση όμοια σύμφωνα με την Παρατήρηση 15.2.2 - 1 και το Παράδειγμα 15.2.2 - 3 προκύπτει ότι

$$\ln |y| = \ln |\ln x| + \ln c = \ln |c \, \ln x| \quad \text{με} \quad c > 0.$$

Άρα

$$y = \pm c \, \ln x,$$

δηλαδή η γενική λύση της (8) τελικά γράφεται

$$y = c \ln x, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0 \quad \text{και} \quad x > 0 \text{ με } x \neq 1. \tag{9}$$

Επειδή $y(e) = 1$, από την (9) προκύπτει $c = 1$, οπότε η μερική λύση της (8) είναι

$$y = \ln x.$$

Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (8).

Εφαρμογή 15.2.2 - 1 (ορθογώνιες τροχιές)

Έστω ότι μία οικογένεια καμπύλων του xy-επιπέδου επαληθεύει την εξίσωση

$$F(x, y, c) = 0 \tag{15.2.2 - 3}$$

όπου $y = y(x)$ και c μία παράμετρος. Ζητείται να προσδιοριστεί μια άλλη οικογένεια καμπύλων, έστω η $G(x, y, c) = 0$, που να τέμνει κάθετα κάθε καμπύλη της $(15.2.2 - 3)$. Η G ορίζει τότε τις **ορθογώνιες τροχιές** της $(15.2.2 - 3)$.

Λύση. Παραγωγίζοντας την $(15.2.2 - 3)$ και απαλείφοντας την παράμετρο c

μεταξύ της $(15.2.2-3)$ και της εξίσωσης που προκύπτει μετά την παραγώγισή της, έχουμε μία διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y).$$

Άρα οι ορθογώνιες τροχιές της $(15.2.2{-}3)$ θα είναι οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)}. \qquad (15.2.2\text{ - }4)$$

■

Παράδειγμα 15.2.2 - 5

Αν η οικογένεια καμπυλών είναι η

$$x^2 + y^2 = c,$$

τότε

$$2x + yy' = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad y' = -\frac{x}{y}\,.$$

Άρα η ζητούμενη οικογένεια καμπύλων θα προκύψει από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\,,$$

δηλαδή είναι η

$$y = c\,x \quad \text{όπου} \quad c \quad \text{σταθερά}.$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Ασκήσεις

1. Αν $y = y(x)$, να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

i) $\left(x^2+1\right)y' - x = 0$ *iii)* $x\left(1+x^2\right)y' = y$

ii) $y' - xy(y-1) = 0$ *iv)* $y' + y\tan x = 0; \quad y(\pi) = 2.$

2. Να υπολογιστούν οι ορθογώνιες τροχιές των οικογενειών των καμπυλών $y = ce^{-x}$ και $x^2 - y^2 = cx$.

Απαντήσεις

1. (i) $y = c + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$, (ii) $y = \frac{1}{1-ce^{x^2/2}}$,, (iii) $y = cx\left(1+x^2\right)^{-1/2}$
(iv) $= -2\cos x$.
2. Ανάλογα με το Παράδειγμα 15.2.2 - 5.

15.2.3 Πλήρεις διαφορικές εξισώσεις

Ορισμός 15.2.3 - 1. *Μία διαφορική εξίσωση 1ης τάξης της μορφής*

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \qquad (15.2.3\text{ - }1)$$

λέγεται **πλήρης** *ή* **ακριβής**[5] *(exact differential equation) τότε και μόνον, όταν υπάρχει συνάρτηση, έστω $u = u(x,y)$, που λέγεται* **παράγουσα** *(potential function) της $(15.2.3-1)$, τέτοια ώστε*

$$(\alpha) \qquad u_x = P \quad \textit{και} \quad (\beta) \qquad u_y = Q. \qquad (15.2.3\text{ - }2)$$

[6]Επειδή για το ολικό διαφορικό της u ισχύει ότι στην

$$du = du(x,y) = u_x\,dx + u_y\,dy$$

σύμφωνα και με τις συνθήκες $(15.2.3-2)$ θα πρέπει στην περίπτωση αυτή να ισχύει ότι

$$du = u_x\,dx + u_y\,dy = P\,dx + Q\,dy = 0,$$

οπότε

$$u(x,y) = c \qquad (15.2.3\text{ - }3)$$

με c αυθαίρετη σταθερά, που ορίζει και τη **γενική λύση** της $(15.2.3-1)$.

Έστω τώρα ότι οι συναρτήσεις P και Q είναι ορισμένες και συνεχείς στις περιοχές D_1 και D_2 αντίστοιχα και ότι τα σύνορα των περιοχών αυτών είναι κλειστές καμπύλες που δεν τέμνονται μεταξύ τους. Τότε σύμφωνα και με τις συνθήκες $(15.2.3-2)$, επειδή είναι

$$P_y = (u_x)_y = u_{yx} \quad \text{και} \quad Q_x = (u_y)_x = u_{xy},$$

[5]Βλέπε βιβλιογραφία και
https://en.wikipedia.org/wiki/Exact_differential_equation
[6]Βλέπε Μάθημα *Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών - Ολικό διαφορικό.*

αν υποτεθεί ότι οι 2ης τάξης μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς συναρτήσεις, θα πρέπει σύμφωνα με γνωστό θεώρημα[7] και τα δεύτερα μέλη τους να είναι ίσα, δηλαδή $P_y = Q_x$.

Επομένως έχει αποδειχθεί το παρακάτω θεώρημα, που είναι και το κριτήριο για την ύπαρξη μιας πλήρους διαφορικής εξίσωσης:

Θεώρημα 15.2.3 - 1 (κριτήριο πληρότητας). *Έστω η διαφορική εξίσωση*

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \qquad (15.2.3\text{ - }4)$$

όπου οι P και Q υποτίθεται ότι έχουν συνεχείς παραγώγους 2ης τάξης. Τότε ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι πλήρης η $(15.2.3-4)$, είναι

$$\mathbf{P_y = Q_x}. \qquad (15.2.3\text{ - }5)$$

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος είναι το παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα 15.2.3 - 1. *Κάθε διαφορική εξίσωση χωρισμένων μεταβλητών, δηλαδή κάθε διαφορική εξίσωση της μορφής*

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$$

είναι πλήρης.

Παράδειγμα 15.2.3 - 1

Σύμφωνα με το Θεώρημα 15.2.3 - 1 έχουμε ότι η διαφορική εξίσωση

- $$\left(xy^2 + x\right)dx + yx^2 dy = 0$$

[7] Θεώρημα **(Schwarz)** *14.2.2 - 2: Έστω η συνάρτηση $f(x,y)|S \subseteq \mathbb{R}^2$, όπου S ανοικτό σύνολο, της οποίας υπάρχουν οι 2ης τάξης μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς στο S. Τότε*

$$f_{xy} = f_{yx} \quad \text{για κάθε} \quad (x,y) \in S.$$

είναι πλήρης, επειδή

$$P_y = \left(xy^2 + x\right)_y = 2xy = \left(x^2 y\right)_x = Q_x,$$

ενώ η

- $$\cos y\, dx + \left(y^2 + x \sin y\right) dy = 0$$

δεν είναι, επειδή

$$P_y = -\sin y \neq \sin y = Q_x.$$

Υπολογισμός της παράγουσας

Έστω τώρα ότι η (15.2.3−1) είναι πλήρης. Τότε η (15.2.3−2α): $u_x = P(x, y)$, όταν ολοκληρωθεί ως προς x προκύπτει ότι

$$u(x, y) = \int P(x, y)\, dx + c$$

με c αυθαίρετη σταθερά, που επειδή η ολοκλήρωση γίνεται ως προς x, η c θα περιέχει στη γενική περίπτωση και τη μεταβλητή y, δηλαδή $c = k(y)$.

Άρα

$$u(x, y) = \int P(x, y)\, dx + k(y). \qquad (15.2.3 \text{ - } 6)$$

Τότε η $k(y)$ προσδιορίζεται παραγωγίζοντας την $(15.2.3 - 6)$ ως προς y, δηλαδή

$$u_y = \left(\int P(x, y)\, dx\right)_y + \frac{d\, k(y)}{dy}$$

που σύμφωνα με την $(15.2.3 - 2\beta)$ γράφεται

$$Q(x, y) = \left(\int P(x, y)\, dx\right)_y + \frac{d\, k(y)}{dy},$$

δηλαδή

$$d\, k(y) = \left[Q(x, y) - \left(\int P(x, y)\, dx\right)_y\right] dy$$

που είναι μια διαφορική εξίσωση χωρισμένων μεταβλητών, οπότε τελικά ολοκληρώνοντας

$$k(y) = \int \left[Q(x,y) - \left(\int P(x,y)\, dx \right)_y \right] dy. \qquad (15.2.3\text{ - }7)$$

Παράδειγμα 15.2.3 - 2

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(2xy - 3x^2\right) dx + \left(x^2 - 2y\right) dy = 0. \qquad (1)$$

Λύση. Είναι

$$u_x = P(x,y) = 2xy - 3x^2 \quad \text{και} \quad u_y = Q(x,y) = x^2 - 2y. \qquad (2)$$

Επομένως

$$P_y = 2x = Q_x, \qquad (3)$$

δηλαδή επαληθεύεται η συνθήκη $(15.2.3 - 2)$ και επομένως η (1) είναι πλήρης.

Τότε ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία ο υπολογισμός της παράγουσας γίνεται ολοκληρώνοντας την

$$u_x = P(x,y) = 2xy - 3x^2 \quad \text{ως προς} \quad x,$$

οπότε

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int P(x,y)\, dx + k(y) = \int \left(2xy - 3x^2\right) dx + k(y) \\ &= x^2 y - x^3 + k(y), \end{aligned} \qquad (4)$$

όταν η $k(y)$ υπολογίζεται παραγωγίζοντας την (4) ως προς y, δηλαδή

$$u_y = \overbrace{\left(x^2 y - x^3\right)_y}^{x^2} + \frac{dk(y)}{dy}$$

ή επειδή σύμφωνα με την (2) είναι $u_y = x^2 - 2y$, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$x^2 - 2y = x^2 + \frac{dk(y)}{dy} \quad \text{ή} \quad \frac{dk(y)}{dy} = -2y,$$

οπότε $dk(y) = -2y\,dy$ και τελικά

$$k(y) = -y^2. \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας την (5) στην (4) προκύπτει ότι η παράγουσα της (1) είναι

$$u(x,y) = x^2y - x^3 - y^2,$$

οπότε σύμφωνα με την $(15.2.3-3)$ η γενική της λύση θα είναι $u(x,y) = c$, όταν c αυθαίρετη σταθερά, δηλαδή

$$x^2y - x^3 - y^2 = c.$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές:

Πρόγραμμα 15.2.3 - 1 (πλήρης διαφορική εξίσωση)

```
P[x_, y_] := 2 x y - 3 x^2; Q[x_, y_] := x^2 - 2 y;
z = Integrate[P[x, y], x] +
   Integrate[Q[x, y] - D[Integrate[P[x, y], x], y], y];
Print["Solution : ", z, " = c"]
```

■

Σημείωση 15.2.3 - 1

Διευκρινίζεται ότι ανάλογα με την ευκολία του προβλήματος, η διαδικασία υπολογισμού της u είναι δυνατόν να αρχίσει από τη συνθήκη $(15.2.3-2\beta)$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$u(x,y) = \int Q(x,y)\,dy + k(x), \tag{15.2.3 - 8}$$

όπου

$$k(x) = \int \left[\left(P(x,y) - \int Q(x,y)\,dy \right)_x \right] dx, \tag{15.2.3 - 9}$$

όπως αυτό γίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 15.2.3 - 3

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(y+4)dx + xdy = 0. \tag{1}$$

Λύση. Είναι

$$u_x = P(x,y) = y+4 \quad \text{και} \quad u_y = Q(x,y) = x. \tag{2}$$

Επομένως

$$P_y = 1 = Q_x, \tag{3}$$

δηλαδή επαληθεύεται η συνθήκη $(15.2.3-2)$ και επομένως η (1) είναι πλήρης.

Τότε ολοκληρώνοντας την

$$u_y = Q(x,y) = x \quad \text{ως προς} \quad x,$$

έχουμε

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int Q(x,y)\,dy + k(x) = \int x\,dy + k(y) \\ &= xy + k(x), \end{aligned} \tag{4}$$

όταν η $k(x)$ υπολογίζεται παραγωγίζοντας την (4) ως προς x, δηλαδή

$$u_x = \overbrace{(xy)_x}^{y} + \frac{dk(x)}{dx}$$

ή επειδή σύμφωνα με την (2) είναι $u_x = y+4$, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$y+4 = y + \frac{dk(x)}{dx} \quad \text{ή} \quad \frac{dk(x)}{dx} = 4,$$

οπότε $dk(x) = 4\,dx$ και τελικά

$$k(x) = 4x. \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας την (5) στην (4) προκύπτει ότι η παράγουσα της (1) είναι

$$u(x,y) = xy + 4x$$

και η γενική της λύση

$$xy + 4x = c,$$

όταν c αυθαίρετη σταθερά.

Όμοια ο υπολογισμός με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές:

Πρόγραμμα 15.2.3 - 2 (πλήρης διαφορική εξίσωση)

```
P[x_, y_] := y+4; Q[x_, y_] := x;
z = Integrate[Q[x, y], y] +
   Integrate[P[x, y] - D[Integrate[Q[x, y], y], x], x];
Print["Solution : ", z, " = c"]
```

■

Ολοκληρωτικός παράγοντας

Εξετάζεται στη συνέχεια η περίπτωση, όπου μία διαφορική εξίσωση της μορφής

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (15.2.3\text{ - }10)$$

δεν είναι πλήρης, αλλά που μετά από πολλαπλασιασμό της με μια κατάλληλη συνάρτηση, που λέγεται **ολοκληρωτικός παράγοντας** (integrating factor) ή **πολλαπλασιαστής του Euler**[8] (Euler multiplier), μετατρέπεται σε πλήρη.

Σχετικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 15.2.3 - 2. *Αν η διαφορική εξίσωση* (15.2.3−10) *δεν είναι πλήρης, αλλά έχει μία λύση της μορφής* $u(x,y) = c$*, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας ολοκληρωτικός παράγοντας.*

Απόδειξη. Από τη λύση $u(x,y) = c$ προκύπτει

$$du = u_x\,dx + u_y\,dy = 0. \qquad (1)$$

Συγκρίνοντας την $(15.2.3-10)$ με την (1) έχουμε

$$\frac{u_x}{u_y} = \frac{P}{Q}\,. \qquad (2)$$

[8] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Integrating_factor*

Επειδή η (2) πρέπει να ισχύει ως ταυτότητα, θα υπάρχει μία συνάρτηση, έστω $F(x,y)$, τέτοια ώστε

$$u_x = F(x,y)P(x,y) \quad \text{και} \quad u_y = F(x,y)Q(x,y). \tag{3}$$

Τότε σύμφωνα με την (3) έχουμε

$$du = u_x\,dx + u_y\,dy = F\,P\,dx + F\,Q\,dy = F\,(P\,dx + Q\,dy)\,, \tag{4}$$

δηλαδή η $F(x,y)$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της $(15.2.3-10)$.

Από την (4) προκύπτει τότε ότι η συνάρτηση

$$G(u)\,F\,(P\,dx + Q\,dy) = G(u)\,du, \tag{5}$$

όπου $G(u)$ αυθαίρετη συνάρτηση του u, είναι όμοια ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της $(15.2.3-10)$, δηλαδή υπάρχουν άπειροι το πλήθος ολοκληρωτικοί παράγοντες της $(15.2.3-10)$. ∎

Ο προσδιορισμός του ολοκληρωτικού παράγοντα γενικά είναι δύσκολος και πολλές φορές ξεπερνά σε δυσκολία και τη λύση αυτής της ίδιας της διαφορικής εξίσωσης. Στον Πίνακα 15.2.3 - 1 δίνονται οι ολοκληρωτικοί παράγοντες για τις περιπτώσεις που οι συναρτήσεις P και Q πληρούν ορισμένες συνθήκες, ενώ στον Πίνακα 15.2.3 - 2 οι ολοκληρωτικοί παράγοντες, που συνήθως εμφανίζονται στα περισσότερα των προβλημάτων.

Σημείωση 15.2.3 - 2

Ο Πίνακας 15.2.3 - 1 ισχύει και όταν $\quad f(x) = 1 \quad$ ή $\quad g(y) = 1.$

Παράδειγμα 15.2.3 - 4

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(y^2 - x\right)\,dx + 2y\,dy = 0. \tag{1}$$

Λύση. Η (1) δεν είναι πλήρης, επειδή

$$P_y = 2y \neq 0 = Q_x.$$

Πίνακας 15.2.3 - 1: Υπολογισμός του ολοκληρωτικού παράγοντα.

α/α	Συνθήκη	Ολοκληρωτικός παράγοντας
1	$\frac{1}{Q}(P_y - Q_x) = f(x)$	$F(x,y) = \exp\left[\int f(x)\,dx\right]$
2	$\frac{1}{P}(Q_x - P_y) = g(y)$	$F(x,y) = \exp\left[\int g(y)\,dy\right]$
3	$\frac{P_y - Q_x}{yQ - xP} = h(xy)$	$F(x,y) = \exp[H(xy)], \quad \frac{dH(s)}{ds} := h(s)$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{Q}(P_y - Q_x) = \frac{1}{2y}(2y - 0) = 1 = f(x), \tag{2}$$

οπότε σύμφωνα με την περίπτωση 1 του Πίνακα 15.2.3 - 1 προκύπτει ότι η (1) γίνεται πλήρης, όταν πολλαπλασιαστούν και τα δύο μέλη της με τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$F(x,y) = e^{\int f(x)\,dx} = e^{\int dx} = e^x.$$

Τότε η (1) μετά τον πολλαπλασιασμό με e^x γράφεται

$$\left(y^2 e^x - x e^x\right)dx + 2ye^x dy = 0, \tag{3}$$

που είναι πλήρης και η λύση της, επειδή είναι ευκολότερη η ολοκλήρωση του όρου $2ye^x dy$, σύμφωνα και με το Παράδειγμα 15.2.3 - 3 υπολογίζεται ως εξής:

$$u(x,y) = \int Q(x,y)\,dy + k(x) = \int 2ye^x\,dy + k(y) = y^2 e^x + k(x), \tag{4}$$

όταν η $k(x)$ υπολογίζεται παραγωγίζοντας την (4) ως προς x, οπότε

$$u_x = y^2 e^x + \frac{k(x)}{dx}$$

Πίνακας 15.2.3 - 2: με τους κυριότερους ολοκληρωτικούς παράγοντες.

α/α	Διαφορική εξίσωση	ολοκληρωτικός παράγοντας	τέλειο διαφορικό
1	$y\,dx - x\,dy$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(\dfrac{y}{x}\right)$
2	$y\,dx - x\,dy$	$\dfrac{1}{y^2}$	$\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = d\left(\dfrac{x}{y}\right)$
3	$y\,dx - x\,dy$	$-\dfrac{1}{xy}$	$\dfrac{x\,dy - y\,dx}{xy} = d\left[\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]$
4	$y\,dx - x\,dy$	$-\dfrac{1}{x^2+y^2}$	$\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = d\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]$
5	$y\,dx + x\,dy$	$\dfrac{1}{xy}$	$\dfrac{y\,dx + x\,dy}{xy} = d\left[\ln(xy)\right]$
6	$y\,dx + x\,dy$	$\dfrac{1}{(xy)^n},\ \ n > 1$	$\dfrac{y\,dx + x\,dy}{(xy)^n} = \dfrac{d\left[(xy)^{1-n}\right]}{1-n}$
7	$y\,dx + x\,dy$	$\dfrac{1}{x^2+y^2}$	$\dfrac{x\,dy + y\,dx}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}\,d\left[\ln\left(x^2+y^2\right)\right]$
8	$y\,dx + x\,dy$	$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^n};\ \ n > 1$	$\dfrac{y\,dx + x\,dy}{(x^2+y^2)^n} = \dfrac{d\left[\left(x^2+y^2\right)^{1-n}\right]}{2(1-n)}$
9	$ay\,dx + bx\,dy$	$x^{a-1}y^{b-1}$	$d\left(x^a y^b\right)$

ή σύμφωνα με την (3), επειδή $u_x = y^2 e^x - xe^x$, τελικά

$$dk(x) = -xe^x\,dx.$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$k(x) = -\int xe^x\,dx = -xe^x + e^x,$$

οπότε η παράγουσα της (1) είναι

$$u(x,y) = y^2 e^x - xe^x + e^x$$

και η γενική της λύση $y^2 e^x - xe^x + e^x = c$, όταν c αυθαίρετη σταθερά, δηλαδή

$$y^2 - x + 1 = c\,e^{-x}.$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές:

Πρόγραμμα 15.2.3 - 3 (ολοκληρωτικός παράγοντας - συνθήκη 1)

```
P[x_, y_] := y^2 - x; Q[x_, y_] := 2 y;
Print["Condition 1  f(x) = ", w/Q[x, y]]
w = Simplify[D[P[x, y], y] - D[Q[x, y], x]];
F = Simplify[Exp[Integrate[w/Q[x, y], x]]];
Print["Potential function F(x,y) = ", F]
P1[x_, y_] := P[x, y] F; Q1[x_, y_] := Q[x, y] F
Print["Exact condition = ", Simplify[D[P1[x, y], y] - D[Q1[x, y], x]]]
z = Integrate[P1[x, y], x] +
   Integrate[Q1[x, y] - D[Integrate[P1[x, y], x], y], y];
Print["Solution : ", Simplify[z], " = c"]
```

■

Παράδειγμα 15.2.3 - 5

Όμοια η μη πλήρης διαφορική εξίσωση

$$y\,dx - \left(x + 6y^2\right) dy = 0. \tag{5}$$

Για την (5) εφαρμόζεται η συνθήκη (2) του Πίνακα 15.2.3 - 1 με

$$g(y) = -\frac{2}{y},$$

οπότε

$$F(x,y) = e^{\int g(y)\,dy} = e^{-2\int \frac{dy}{y}} = e^{-2\ln|y|} = e^{\ln y^{-2}} = \frac{1}{y^2}\,.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (5) με την $F(x,y) = \frac{1}{y^2}$ τελικά προκύπτει ότι

$$\frac{1}{y}\,dx - \left(\frac{x}{y^2} + 6\right)\,dy = 0$$

που είναι μια πλήρης διαφορική εξίσωση από την οποία τελικά προκύπτει ως γενική λύση η

$$\frac{x}{y} - 6y = c,$$

όταν c αυθαίρετη σταθερά.

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές:

Πρόγραμμα 15.2.3 - 4 (ολοκληρωτικός παράγοντας - συνθήκη 2)

```
P[x_, y_] := y; Q[x_, y_] :=-(x + 6 y^2);
w = D[Q[x, y], x] - D[P[x, y], y];
Print["Condition 2  g(y) = ", w/P[x, y]]
F = Simplify[Exp[Integrate[w/P[x, y], y]]];
Print["Potential function F(x,y) = ", F]
P1[x_, y_] := P[x, y] F; Q1[x_, y_] := Q[x, y] F
Print["Exact condition = ", Simplify[D[P1[x, y], y] - D[Q1[x, y], x]]]
z = Integrate[P1[x, y], x] +
   Integrate[Q1[x, y] - D[Integrate[P1[x, y], x], y], y];
Print["Solution : ", Simplify[z], " = c"]
```

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις υπολογίζοντας σε κάθε περίπτωση τον ολοκληρωτικό παράγοντα, εφόσον αυτό απαιτείται:

i) $\left(4x^3y^3 - 2xy\right)\,dx + \left(3x^4y^2 - x^2\right)\,dy = 0,$

ii) $\left(2x - ye^x\right)\,dx - e^x\,dy = 0,$

iii) $(x+y)\,dx + \tan x\,dy = 0,$

iv) $y^2\,dx + (xy-1)\,dy = 0$,

v) $3x^2y^2\,dx + \left(2x^3y + x^3y^4\right)\,dy = 0$.

2. Όμοια τα παρακάτω προβλήματα αρχικής τιμής:

i) $(y\,dx + dy)\,e^x = 0; \quad y(0) = 1$,

ii) $(x-3)\,dx + (y-3)\,dy = 0; \quad y(3) = 0$,

iii) $(1+e^x)\,yy' = e^x; \quad y(1) = 1$,

iv) $2\,(y\sin 2x + \cos 2x)\,dx = \cos 2x\,dy; \quad y(\pi) = 0$,

v) $(xe^{xy} + 2y)\,y' + ye^{xy} = 0; \quad y(0) = 1$,

vi) $y(xy+1)\,dx + x(xy-1)\,dy = 0; \quad y(1) = 1$.

3. Δείξτε ότι η διαφορική εξίσωση

$$\left(axy^2 + by\right)\,dx + \left(bx^2y + ay\right)\,dy = 0$$

είναι πλήρης, όταν $a = b$. Στη συνέχεια υπολογίστε τη μερική λύση της, όταν $y(1) = 1$.

Απαντήσεις

1. i) Πλήρης, γενική λύση $-x^2y + x^4y^3 = c$.
ii) Συνθήκη 1, $F(x,y) = e^{-2x}$, γενική λύση $\frac{1}{2}\,e^{-2x}\,(-1-2x+2ye^x) = c$.
iii) Συνθήκη 1, $F(x,y) = \cos x$, γενική λύση $\cos x + (x+y)\sin x = c$.
iv) Συνθήκη 2, $F(x,y) = \frac{1}{y}$, γενική λύση $xy - \ln y = c$.
v) Συνθήκη 2, $F(x,y) = e^{\frac{y^3}{3}}$, γενική λύση $x^3y^2\,e^{\frac{y^3}{3}} = c$.
2. i) Πλήρης, γενική λύση $ye^x = c$, μερική με $c = 1$.
ii) Πλήρης, γενική λύση $\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) - 3(x+y) = c$, μερική με $c = -\frac{9}{2}$.
iii) Συνθήκη 2, $F(x,y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$, γενική λύση $e^{-\frac{y^2}{2}}\,(1+e^x) = c$,
μερική με $c = 1+e$.
iv) Πλήρης, γενική λύση $-y\cos 2x + \sin 2x$, μερική με $c = 0$.
v) Πλήρης, γενική λύση $y^2 + e^{xy} = c$, μερική με $c = 2$.
vi) Συνθήκη 3, $F(x,y) = \frac{1}{2xy}$, γενική λύση $\frac{1}{2}\,(xy + \ln x - \ln y)$,
μερική με $c = \frac{1}{2}$.
3. $P_y - Q_x = (a-b)(2xy-1)$, γενική λύση $axy + \frac{1}{2}ax^2y^2 = c$, μερική $c = \frac{3a}{2}$.

Ο υπολογισμός της λύσης της Άσκησης **2**vi με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές:

Πρόγραμμα 15.2.3 - 5 (ολοκληρωτικός παράγοντας - συνθήκη 3)

```
P[x_, y_] := y (x y + 1); Q[x_, y_] := x (x y - 1);
w = Simplify[D[P[x, y], y] - D[Q[x, y], x]]
Print["Condition 3"]
F = Simplify[1/(x P[x, y] - y Q[x, y])];
Print["Potential function F(x,y) = ", F]
P1[x_, y_] := P[x, y] F
Q1[x_, y_] := Q[x, y] F
Print["Exact condition = ", Simplify[D[P1[x, y], y] - D[Q1[x, y], x]]]
z = Integrate[P1[x, y], x] +
   Integrate[Q1[x, y] - D[Integrate[P1[x, y], x], y], y];
Print["Solution : ", Simplify[z], " = c"]
Print["Constant c = ", z /. {x -> 1, y -> 1}]
```

15.2.4 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Ορισμός 15.2.4 - 1. *Μία συνάρτηση* $f(x)$ *λέγεται* **ομογενής** *βαθμού* ν, *όταν*

$$f(\lambda x) = \lambda^{\nu} f(x) \quad \textit{για κάθε} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{15.2.4 - 1}$$

Ο αντίστοιχος ορισμός για μια συνάρτηση δύο μεταβλητών γράφεται:

Ορισμός 15.2.4 - 2. *Μία συνάρτηση* $f = f(x, y)$ *λέγεται* **ομογενής** *βαθμού* ν, *όταν*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\nu} f(x, y) \quad \textit{για κάθε} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{15.2.4 - 2}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό:

- η συνάρτηση $f(x,y) = y^2 - xy + 4x^2$ είναι ομογενής βαθμού $\nu = 2$, επειδή

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda y)^2 - (\lambda x)(\lambda y) + 4(\lambda x)^2 \\ &= \lambda^2 \left(y^2 - xy + 4x^2\right) = \lambda^2 f(x,y), \end{aligned}$$

- η $g(x,y) = (x-y)^{1/2}$ είναι ομογενής βαθμού $\nu = 1/2$, επειδή

$$g(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x - \lambda y)^{1/2} = \lambda^{1/2}(x-y)^{1/2} = \lambda^{1/2} g(x,y),$$

- η $h(x,y) = \frac{1}{x-y}$ είναι ομογενής βαθμού $\nu = -1$, επειδή

$$h(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda x - \lambda y} = \frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{x-y} = \lambda^{-1} h(x,y),$$

- ενώ όλες οι συναρτήσεις

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{y+x}{y-x} \quad \text{και} \quad \ln y - \ln x = \ln \frac{y}{x}$$

ομογενείς βαθμού $\nu = 0$.

Ορισμός 15.2.4 - 3. *Η διαφορική εξίσωση*

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \qquad (15.2.4\text{ - }3)$$

θα λέγεται **ομογενής**[9] *(homogeneous differential equation), όταν οι συναρτήσεις* $P(x,y)$ *και* $Q(x,y)$ *είναι ομογενείς συναρτήσεις του ίδιου βαθμού.*

Επειδή η $(15.2.4-3)$ γράφεται και

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = f(x,y),$$

όπου σύμφωνα με τον Ορισμό 15.2.4 - 3 είναι

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = -\frac{P(\lambda x, \lambda y)}{Q(\lambda x, \lambda y)} = -\frac{\lambda^\nu P(x,y)}{\lambda^\nu Q(x,y)} \\ &= -\lambda^0\,\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \lambda^0\, f(x,y) \end{aligned}$$

ο παραπάνω ορισμός γενικότερα γράφεται:

[9] Βλέπε βιβλιογραφία και
https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_differential_equation

Ορισμός 15.2.4 - 4. *Η διαφορική εξίσωση*

$$y' = f(x, y) \tag{15.2.4 - 4}$$

θα λέγεται **ομογενής**, *όταν η συνάρτηση* $f(x, y)$ *είναι ομογενής βαθμού* $\nu = 0$.

Άμεση συνέπεια του Ορισμού 15.2.4 - 3 είναι ότι:

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y) \quad \text{για κάθε} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{15.2.4 - 5}$$

Τότε, αν $x = 1$, προκύπτει ότι $f(\lambda, \lambda y) = f(1, y)$, δηλαδή

$$f(x, xy) = f(1, y). \tag{15.2.4 - 6}$$

Υπολογισμός της λύσης

Για τη λύση της $(15.2.4 - 4)$ θεωρείται ο μετασχηματισμός

$$\mathbf{y = x\,u}, \quad \text{όπου} \quad u = u(x), \tag{15.2.4 - 7}$$

οπότε σύμφωνα με τον γνωστό κανόνα παραγώγισης γινομένου των συναρτήσεων x και $u = u(x)$ έχουμε

$$y' = x'\,u + x\,u' = u + x\,u',$$

δηλαδή

$$\frac{dy}{dx} = u + x\,\frac{du}{dx}\,. \tag{15.2.4 - 8}$$

Αντικαθιστώντας τις $(15.2.4{-}6)$ και $(15.2.4{-}8)$ στην $(15.2.4{-}4)$ προκύπτει ότι

$$x\,\frac{du}{dx} = f(1, u) - u$$

και τελικά

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}\,, \tag{15.2.4 - 9}$$

δηλαδή η λύση της $(15.2.4 - 4)$ ή ισοδύναμα της $(15.2.4 - 3)$ ανάγεται στη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης χωρισμένων μεταβλητών.

Σημείωση 15.2.4 - 1

Η σχέση $(15.2.4-8)$ για την περίπτωση που η ομογενής διαφορική εξίσωση είναι της μορφής $(15.2.4-3)$ γράφεται

$$dy = u\,dx + x\,du. \qquad (15.2.4\text{ - }10)$$

Παράδειγμα 15.2.4 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}\,. \qquad (1)$$

Λύση. Η (1) είναι ομογενής της μορφής $(15.2.4-4)$ βαθμού $\nu = 2$, επειδή σύμφωνα με τον Ορισμό 15.2.4 - 4 ισχύει

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = f(x,y) \quad \text{για κάθε} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Επομένως εφαρμόζοντας στην (1) τον μετασχηματισμό $(15.2.4-7)$, δηλαδή $y = x\,u$, οπότε σύμφωνα με τη σχέση $(15.2.4-8)$ είναι $y' = u + x\,u'$, διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} u + x\,\frac{du}{dx} &= \frac{2x(xu)}{x^2 - (xu)^2} = \frac{2x^2u}{x^2\,(1-u^2)} \\ &= \frac{2u}{1-u^2}\,, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} x\,\frac{du}{dx} &= \frac{2u}{1-u^2} - u = \frac{u + u^3}{1-u^2} \\ &= \frac{u\left(1+u^2\right)}{1-u^2}\,. \end{aligned} \qquad (2)$$

Η (2), που είναι της μορφής $(15.2.4-9)$, γράφεται

$$\frac{1-u^2}{u\,(1+u^2)}\,du = \frac{1}{x}\,dx \qquad (3)$$

που είναι μια διαφορική εξίσωση χωρισμένων μεταβλητών.

Η ρητή συνάρτηση στο 1ο μέλος της (3) αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

$$\frac{1-u^2}{u\,(1+u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{1+u^2} = \cdots = \frac{1}{u} - \frac{2u}{1+u^2}\,. \tag{4}$$

Επομένως ολοκληρώνοντας κατά μέλη την (3) σύμφωνα με την (4) έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-u^2}{u\,(1+u^2)}\,du &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{1+u^2}\right) du \\
&= \ln|u| - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) = \ln\left(\frac{|u|}{1+u^2}\right) \\
&= (\text{2ο μέλος}) \quad \int \frac{dx}{x} \\
&= \ln|x| + c = \ln|x| + \ln|c| = \ln|xc|,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\frac{u}{1+u^2} = cx\,, \quad \text{όταν} \quad c \quad \text{αυθαίρετη σταθερά.}$$

Αντικαθιστώντας τη μεταβλητή u σύμφωνα με την (15.2.4−7) στην παραπάνω λύση προκύπτει τελικά ότι η γενική λύση της (1) είναι

$$c\left(x^2+y^2\right) = y. \tag{5}$$

Η (5) για τις διάφορες τιμές της σταθεράς c παριστάνει μία οικογένεια κύκλων, που εφάπτονται στον άξονα των x στο σημείο 0.

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος, που προκύπτει από το 1ο μέλος της (15.2.4−9), γίνεται στην περίπτωση που η εξίσωση είναι της μορφής (15.2.4−4) με τις παρακάτω εντολές του MATHEMATICA:

Πρόγραμμα 15.2.4 - 1 (ομογενής διαφορική εξίσωση)

```
f[x_, y_] := 2 x y/(x^2 - y^2); z = Simplify[f[1, u] - u]
w = Integrate[1/z, u]; FullSimplify[w /. u -> y/x]
```

■

Παράδειγμα 15.2.4 - 2

Όμοια να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(x^3+2xy^2\right)\,dx+\left(y^3+2x^2y\right)\,dy=0,\quad \text{όταν}\quad y(1)=1. \tag{6}$$

Λύση. Η (6) είναι ομογενής βαθμού $\nu=3$ της μορφής $(15.2.4-3)$, επειδή σύμφωνα με τον Ορισμό 15.2.4 - 3 ισχύει

$$\begin{aligned} P(\lambda x,\lambda y) &= (\lambda x)^3+2(\lambda x)(\lambda y)^2=\lambda^3\left(x^3+2xy^2\right)=\lambda^3P(x,y)\\ Q(\lambda x,\lambda y) &= (\lambda y)^3+2(\lambda x)^2(\lambda y)=\lambda^3\left(y^3+2x^2y\right)=\lambda^3Q(x,y). \end{aligned}$$

Η (6), όταν $x\neq 0$, γράφεται στη μορφή $(15.2.4-4)$, όταν $x\neq 0$, ως εξής:

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{x^3+2xy^2}{y^3+2x^2y}=f(x,y)\,. \tag{7}$$

Επομένως εφαρμόζοντας στην (7) τον μετασχηματισμό $(15.2.4-7)$, δηλαδή $y=x\,u$, ανάλογα με το Παράδειγμα 15.2.4 - 1 διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} u+x\,\frac{du}{dx} &= -\frac{x^3+2x(x\,u)^2}{(x\,u)^3+2x^2(x\,u)}\\ &= -\frac{1+2u^2}{2u+u^3}\,, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$x\,\frac{du}{dx}=-\frac{1+2u^2}{2u+u^3}-u=-\frac{1+4u^2+u^4}{2u+u^3}\,.$$

Άρα

$$\frac{2u+u^3}{1+4u^2+u^4}\,du+\frac{1}{x}\,dx=0 \tag{8}$$

που είναι μια διαφορική εξίσωση χωρισμένων μεταβλητών.

Επειδή

$$\begin{aligned} I &= \int\frac{2u+u^3}{1+4u^2+u^4}\,du=\frac{1}{4}\int\frac{\left(1+4u^2+u^4\right)'}{1+4u^2+u^4}\,du\\ &= \frac{1}{4}\ln\left(1+4u^2+u^4\right) \end{aligned}$$

από την (8) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{4}\ln\left(1+4u^2+u^4\right)+\ln|x|=c$$

με c αυθαίρετη σταθερά ή

$$\ln\left(1+4u^2+u^4\right)+\overbrace{4\ln|x|}^{\ln|x|^4=\ln x^4}=4c=c^*$$

ή

$$\ln\left[x^4\left(1+4u^2+u^4\right)\right]=\overbrace{c^*}^{\ln c}$$

και τελικά

$$x^4\left(1+4u^2+u^4\right)=c,$$

οπότε αντικαθιστώντας όπου $u=y/x$ προκύπτει ότι η γενική λύση της (6) είναι

$$x^4+4x^2y^2+y^4=c.$$

Επειδή $y(1)=1$ προκύπτει τότε από τη γενική λύση ότι $c=6$, οπότε η μερική λύση της (6) είναι

$$x^4+4x^2y^2+y^4=6.$$

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος, που προκύπτει από το 1ο μέλος της (15.2.4−9), γίνεται στην περίπτωση που η εξίσωση είναι της μορφής (15.2.4−3) με τις παρακάτω εντολές του MATHEMATICA:

Πρόγραμμα 15.2.4 - 2 (ομογενής διαφορική εξίσωση)

```
f[x_, y_] := 2 x y/(x^2 - y^2); z = Simplify[f[1, u] - u]
w = Integrate[1/z, u]; FullSimplify[w /. u -> y/x]
```

■

Άσκηση

Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

i) $xy'+\left(x^2+y^2\right)^{1/2}=y$

ii) $(x+y)y'=x-y$

iii) $xy'=y+x\,e^{y/x}$

iv) $(x-y)dx+x\,dy=0$

v) $x^3yy'=x^4+3x^2y^2+y^4$

vi) $xyy'=x^2+y^2$, όταν $y(1)=-2$.

Απαντήσεις

i) $f(x,y)=\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)/x\,,\quad f(1,u)-u=-\sqrt{1+u^2},\quad$ ολοκλήρωμα 1ου μέλους της $(15.2.4-9)$: $I=-\sinh^{-1}\frac{y}{x}\,,\quad$ γενική λύση: $\quad cx=e^{-\sinh^{-1}\frac{y}{x}}$.

ii) $f(x,y)=(x-y)/(x+y)\,,\quad f(1,u)-u=-\frac{-1+2u+u^2}{1+u},\quad$ ολοκλήρωμα: $I=-\frac{1}{2}\ln\left(-1+2u+u^2\right)=\ln\frac{\left(-x^2+2xy+y^2\right)^{-1/2}}{x}\,,\quad$ γενική λύση: $cx^4\left(y^2+2xy-x^2\right)=1.$

iii) $f(x,y)=(y-x)/x\,,\quad f(1,u)-u=-e^{-u},\quad$ ολοκλήρωμα: $\quad I=-e^{-\frac{y}{x}},\quad$ γενική λύση: $cx=e^I$.

iv) $f(x,y)=(y-x)/x\,,\quad f(1,u)-u=-1,\quad$ ολοκλήρωμα: $\quad I=-u\quad$ γενική λύση: $cx=e^{-\frac{y}{x}}$.

v) $f(x,y)=\left(x^4+3x^2y^2+y^4\right)/x^3y\,,\quad f(1,u)-u=-\frac{1}{u}+2u+u^3\,,\quad$ ολοκλήρωμα: $I=-\frac{1}{2\left(1+u^2\right)}\,,\quad$ γενική λύση: $\quad cx=e^{-\frac{x^2}{2\left(x^2+y^2\right)}}$.

vi) $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)/xy\,,\quad f(1,u)-u=\frac{1}{u},,\quad$ ολοκλήρωμα: $\quad I=\frac{y^2}{2x^2}\,,\quad$ γενική λύση: $cx=e^{\frac{y^2}{2x^2}}\quad$ και μερική, όταν $c=e^2$.

15.2.5 Γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης

[10] Σύμφωνα με τον Ορισμό 15.1.1 - 3 η γενική μορφή της **μη ομογενούς** γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης είναι

$$\mathbf{y'+f(x)y=r(x)},\qquad (15.2.5\text{ - }1)$$

[10]

Ορισμός *15.1.1 - 3: Μία διαφορική εξίσωση που γράφεται στη μορφή*

$$y^{(\nu)}+f_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)}+\ldots+f_1(x)y'+f_0(x)y=r(x),$$

όπου η $r(x)$ και οι συντελεστές $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_{\nu-1}(x)$ είναι γνωστές συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς για κάθε $x\in(a,b)$, λέγεται μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση ν -τάξης.

όπου $y = y(x)$ και $f(x)$, $r(x)$ συνεχείς συναρτήσεις με $r(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}$.

Τότε η αντίστοιχη **ομογενής** της $(15.2.5-1)$ σύμφωνα και με τον Ορισμό 15.1.1 - 5 θα είναι:

$$\mathbf{y' + f(x)y = 0}, \quad \text{όταν} \quad x \in (a,b). \tag{15.2.5 - 2}$$

Λύση ομογενούς

Η $(15.2.5-2)$, που είναι μια διαφορική εξίσωση με χωρισμένες μεταβλητές, αν $y \neq 0$, γράφεται

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx, \quad \text{οπότε} \quad \ln|y| = -\int f(x)\,dx + c^*,$$

όπου c^* αυθαίρετη σταθερά. Άρα

$$|y| = e^{-\int f(x)\,dx + c^*} = e^{-\int f(x)\,dx} \underbrace{e^{c^*}}_{c\neq 0\ \text{σταθερά}}, \quad \text{δηλαδή}$$

$$y = \pm c\, e^{-\int f(x)\,dx},$$

οπότε η γενική λύση y_h της ομογενούς εξίσωσης $(15.2.5-2)$ θα είναι

$$y_h(x) = c\, e^{-\int f(x)\,dx} \quad \text{με} \quad c \neq 0, \tag{15.2.5 - 3}$$

όπου προφανώς είναι $y > 0$, όταν $c > 0$ και $y < 0$, όταν $c < 0$. Τότε, επειδή η τιμή $y = 0$ δεν περιλαμβάνεται στη λύση $(15.2.5-3)$, θα είναι μια ιδιάζουσα λύση της $(15.2.5-2)$.

Λύση μη ομογενούς - Μέθοδος του Lagrange

Για τον προσδιορισμό της μερικής λύσης $y_p(x)$ της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $(15.2.5-1)$, δηλαδή της

$$y' + f(x)y = r(x),$$

εφαρμόζεται η μέθοδος του Lagrange. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή η σταθερά c στη γενική λύση $(15.2.5-3)$ της ομογενούς, δηλαδή στην

$$y_h(x) = c\, e^{-\int f(x)\,dx}$$

θεωρείται ως συνάρτηση του x.

Έστω ότι είναι $c = k(x)$, οπότε η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$y_h(x) = y(x) = k(x)\, e^{-\overbrace{\int f(x)\,dx}^{q(x)}} = k(x)\, e^{-q(x)},$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} y(x) &= k(x)\, e^{-q(x)}, \quad \text{όταν} \qquad (15.2.5\text{ - }4)\\ q(x) &= \int f(x)\,dx \quad \text{και} \quad q'(x) = f(x). \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της $(15.2.5-4)$ έχουμε

$$\begin{aligned} y' = y'(x) &= k'(x)\, e^{-q(x)} + k(x)\,[-q(x)]'\, e^{-q(x)}\\ &= k'(x)\, e^{-q(x)} - k(x)\, f(x)\, e^{-q(x)}. \qquad (15.2.5\text{ - }5) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις $(15.2.5-4)$ και $(15.2.5-5)$ στην $y' + f(x)y = r(x)$ τελικά προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} k'(x) &= r(x)\, e^{q(x)} \quad \text{ή} \quad \frac{d\,k(x)}{dx} = r(x)\, e^{q(x)}, \quad \text{δηλαδή}\\ d\,k(x) &= r(x)\, e^{q(x)}\, dx, \end{aligned}$$

οπότε ολοκληρώνοντας

$$k(x) = \int r(x)\, e^{q(x)}\, dx. \qquad (15.2.5\text{ - }6)$$

Αντικαθιστώντας την $(15.2.5-6)$ στην $(15.2.5-4)$ προκύπτει ότι η μερική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $(15.2.5-1)$, δηλαδή της

$$y' + f(x)y = r(x),$$

είναι[11]

$$y_p(x) = e^{-q(x)} \int r(x)\, e^{q(x)}\, dx. \qquad (15.2.5\text{ - }7)$$

Επειδή σύμφωνα με την $(15.2.5-4)$ είναι

$$q(x) = \int f(x)\, dx,$$

από το [12]Θεώρημα 15.1.1 - 1, την $(15.2.5-7)$ και την $(15.2.5-3)$ προκύπτει ότι η γενική λύση $y(x)$ της $y' + f(x)y = r(x)$, γράφεται

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= c\, e^{-\int f(x)\,dx} + e^{-\int f(x)\,dx} \int r(x)\, e^{\int f(x)\,dx}\, dx \\ &= e^{-\int f(x)\,dx} \left[\int r(x)\, e^{\int f(x)\,dx}\, dx + c \right] \\ &= e^{-q(x)} \left[\int r(x)\, e^{q(x)}\, dx + c \right]. \end{aligned}$$

Άρα η **γενική λύση** $y(x)$ της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης $(15.2.5-1)$ είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{y(x)} &= \mathbf{y_h + y_p} \qquad (15.2.5\text{ - }8) \\ &= e^{-q(x)} \left[\int r(x)\, e^{q(x)}\, dx + c \right], \end{aligned}$$

για κάθε $x \in (a,b)$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

[11] Υπενθυμίζεται ότι η μερική λύση δεν περιέχει σταθερά - Σημείωση 15.1.1 - 1.

[12]

Θεώρημα *15.1.1 - 1: Αν y_h είναι η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $y^{(\nu)} + f_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)} + \ldots + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$ και y_p μία μερική λύση της μη ομογενούς $y^{(\nu)} + f_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)} + \ldots + f_1(x)y' + f_0(x)y = r(x)$, τότε η γενική λύση της μη ομογενούς είναι*

$$y = y_h + y_p.$$

Παράδειγμα 15.2.5 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + 2\,x\,y = e^{-x^2}, \quad \text{όταν } y(0) = 1. \tag{1}$$

Λύση. Έστω $y \neq 0$. Τότε συγκρίνοντας την αντίστοιχη ομογενή

$$y' - 2xy = 0$$

με την $(15.2.5-2)$ προκύπτει ότι $f(x) = 2x$. Άρα από την $(15.2.5-3)$ για τη λύση της ομογενούς έχουμε

$$y_h(x) \;=\; c\,e^{-\int f(x)\,dx} = c\,e^{-2\int x\,dx} = c\,e^{-x^2},$$

όταν $c \neq 0$. Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της ομογενούς.

Μη ομογενής

Είναι $f(x) = 2\,x$, οπότε από την $(15.2.5-4)$ προκύπτει ότι

$$q(x) = \int f(x)\,dx = \int 2\,x\,dx = x^2.$$

Επειδή $r(x) = e^{-x^2}$, από την $(15.2.5-7)$ έχουμε

$$\begin{aligned} y_p(x) \;&=\; e^{-q(x)}\,\left[\int r(x)\,e^{q(x)}\,dx\right] \\ &=\; e^{-x^2}\,\left[\int e^{-x^2}\,e^{x^2}\,dx\right] = x\,e^{-x^2}. \end{aligned}$$

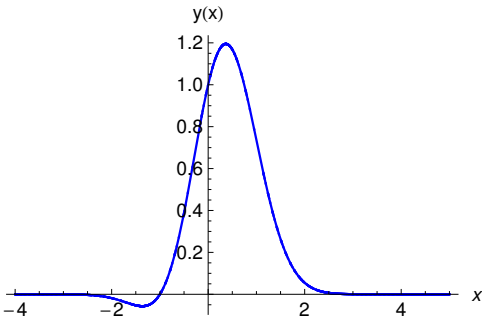
Άρα σύμφωνα με την $(15.2.5-8)$ η γενική λύση της (1) θα είναι

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x^2}\,(x + c)\,, \tag{2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Επειδή από την (1) έχουμε ότι η αρχική τιμή είναι $y(0) = 1$, η μερική λύση θα προκύψει από τη (2) θέτοντας $x = 0$. Τότε

$$1 = y(0) = 1(0 + c), \quad \text{οπότε} \quad c = 1$$



Σχήμα 15.2.5 - 1: Παράδειγμα 15.2.5 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-x^2}(x+1)$, όταν $x \in [-4, 5]$.

και η μερική λύση της (1) θα είναι (Σχ. 15.2.5 - 1)

$$y(x) = e^{-x^2}(x+1).$$

■

Παράδειγμα 15.2.5 - 2

Όμοια η

$$x\,y' - y = x^2, \quad \text{όταν } y(1) = 0. \tag{3}$$

Λύση. Αν $x = 0$, τότε προφανώς είναι και $y = 0$. Έστω $x \neq 0$ Τότε η (3) γράφεται

$$y' - \frac{y}{x} = x, \quad \text{όταν } y(1) = 0. \tag{4}$$

με αντίστοιχη ομογενή την

$$y' - \frac{y}{x} = 0. \tag{5}$$

Έστω $y \neq 0$. Τότε όμοια συγκρίνοντας την (5) με την $(15.2.5 - 2)$ προκύπτει ότι $f(x) = -\frac{1}{x}$. Άρα από την $(15.2.5 - 3)$ για τη λύση της ομογενούς έχουμε

$$y_h(x) \;=\; c\,e^{-\int f(x)\,dx} = c\,e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx} = c\,e^{\ln|x|} = c\,|x|,$$

όταν $c \neq 0$, δηλαδή $y = \pm c\,x$. Επομένως τελικά η λύση της ομογενούς είναι:

$$y_h(x) = c\,x, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0.$$

Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (5).

Μη ομογενής

Επειδή είναι $f(x) = -\frac{1}{x}$, από την $(15.2.5-4)$ προκύπτει ότι

$$q(x) = \int f(x)\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx = -\ln|x|.$$

Τότε, επειδή $r(x) = x$, από την $(15.2.5-7)$ έχουμε για τη μερική λύση της μη ομογενούς

$$y_p(x) = e^{-q(x)}\left[\int r(x)\,e^{q(x)}\,dx\right] = e^{-(-\ln|x|)}\left[\int x\,e^{-\ln|x|}\,dx\right]$$

$$= |x|\int x\,\frac{1}{|x|}\,dx = \begin{cases} x\displaystyle\int x\,\frac{1}{x}\,dx = x^2 & \text{αν} \quad x>0, \\ -x\displaystyle\int x\,\frac{1}{-x}\,dx = x^2 & \text{αν} \quad x<0, \end{cases}$$

δηλαδή

$$y_p(x) = x^2.$$

Άρα σύμφωνα με την $(15.2.5-8)$ η γενική λύση της (4) είναι

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = x(x+c), \tag{6}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

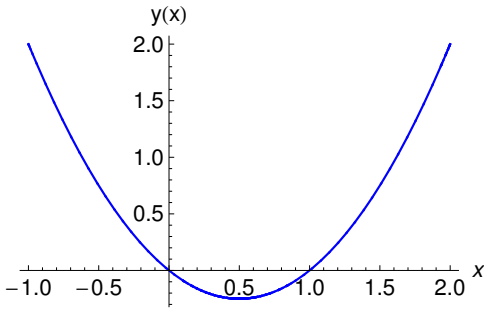
Επειδή από την (4) έχουμε ότι η αρχική τιμή είναι $y(1) = 0$, η μερική λύση θα προκύψει από τη (6) θέτοντας $x = 1$. Άρα

$$0 = y(1) = 1 + c, \quad \text{οπότε} \quad c = -1$$

και η μερική λύση της (4) θα είναι (Σχ. 15.2.5 - 2)

$$y(x) = -x + x^2.$$

■



Σχήμα 15.2.5 - 2: Παράδειγμα 15.2.5 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = -x + x^2$, όταν $x \in [-1, 2]$.

Παράδειγμα 15.2.5 - 3

Όμοια η

$$y' - y\cos x = \cos x, \quad \text{όταν } y(0) = 1. \tag{7}$$

Λύση. Έστω $y \neq 0$. Όμοια συγκρίνοντας την αντίστοιχη ομογενή

$$y' - y\cos x = 0$$

με την $(15.2.5-2)$ προκύπτει ότι $f(x) = -\cos x$, οπότε από την $(15.2.5-3)$ έχουμε

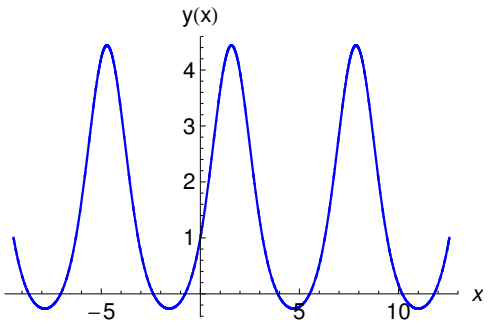
$$y_h(x) \quad = \quad c\, e^{-\int f(x)\,dx} = c\, e^{-\int(-\cos x)\,dx} = c\, e^{\sin x},$$

όταν $c \neq 0$. Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της ομογενούς.

Μη ομογενής

Όμοια από την $(15.2.5-4)$ προκύπτει ότι

$$q(x) = \int f(x)\,dx = -\int \cos x\,dx = -\sin x$$



Σχήμα 15.2.5 - 3: Παράδειγμα 15.2.5 - 3: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = -1 + 2\,e^{\sin x}$, όταν $x \in [-3\pi, 4\pi]$.

και επειδή $r(x) = \cos x$, από την $(15.2.5 - 7)$ έχουμε για τη μερική λύση της μη ομογενούς

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-q(x)} \left[\int r(x)\, e^{q(x)}\, dx\right] = e^{-(-\sin x)} \left[\int \cos x\, e^{-\sin x}\, dx\right] \\ &= e^{\sin x} \int e^{-\sin x}\, d\sin x = -\, e^{\sin x} \left[\int e^{-\sin x}\, d(-\sin x)\right] \\ &= -e^{\sin x} \left[e^{-\sin x}\right] = -e^0 = -1. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την $(15.2.5 - 8)$ η γενική λύση της (7) είναι

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = -1 + c\, e^{\sin x}, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0. \tag{8}$$

Επειδή από την (7) έχουμε ότι η αρχική τιμή είναι $y(0) = 1$, η μερική λύση θα προκύψει από την (8) θέτοντας $x = 0$. Άρα

$$1 = y(0) = -1 + c\, e^0, \quad \text{οπότε} \quad c = 2$$

και η μερική λύση της (7) θα είναι (Σχ. 15.2.5 - 3)

$$y(x) = -1 + 2\, e^{\sin x}.$$

Η μελέτη της περιοδικότητας ή μη της μερικής λύσης αφήνεται ως άσκηση. ∎

Άσκηση

Να λυθούν οι παρακάτω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις:

i) $y' + 2xy = -x^3 + x; \quad y(0) = -1,$

ii) $y' \cos x - y \sin x = \sin x; \quad y(0) = 0,$

iii) $y' + \dfrac{y}{1+x^2} = \dfrac{1}{1+x^2}; \quad y(0) = 0,$

iv) $xy' - y = x^2 \cos x; \quad y(\pi/2) = 0.$

Απαντήσεις

(i) $y(x) = \frac{1}{2}\left(2 - x^2\right) + c\, e^{-x^2}$, μερική: $c = -\frac{1}{2}$,
(ii) $y(x) = -1 + \frac{1}{\cos x}$, μερική: $c = 1$,
(iii) $y(x) = 1 + c \exp\left(-\tan^{-1} x\right)$, μερική: $c = -1$,
(iv) $y(x) = c\, x + x \sin x$, μερική: $c = -1$.

15.2.6 Διαφορική εξίσωση του Bernoulli

Η διαφορική εξίσωση

$$y' + f(x)y = g(x)y^a, \quad \text{όταν} \quad a \in \mathbb{R} \tag{15.2.6 - 1}$$

είναι γνωστή ως η **διαφορική εξίσωση του Bernoulli**[13] (Bernoulli differential equation).

Παρατηρούμε ότι:

- αν

  i)

  $$a = 0, \quad \text{τότε γράφεται} \quad y' + f(x)y = g(x),$$

  δηλαδή η $(15.2.6 - 1)$ είναι μια **γραμμική μη ομογενής**, ενώ, αν

[13] Βλέπε βιβλιογραφία και
https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_differential_equation

ii)

$$a = 1, \quad \text{τότε} \quad y' + [f(x)y - g(x)]\, y = 0,$$

είναι μια **γραμμική ομογενής** διαφορική εξίσωση. Και στις δύο περιπτώσεις (i) και (ii) λύνεται σύμφωνα με την Παράγραφο 15.2.5.

- $a \neq 0\,, 1$ η $(15.2.6-1)$ είναι **μη γραμμική**. Στην περίπτωση αυτή θεωρείται ο μετασχηματισμός

$$u(x) = [y(x)]^{1-a}\,, \qquad (15.2.6\text{ - }2)$$

οπότε

$$u'(x) = (1-a)\,[y(x)]^{-a}\, y'(x). \qquad (15.2.6\text{ - }3)$$

Λύνοντας την $(15.2.6-3)$ ως προς $y'(x)$ προκύπτει τότε ότι

$$y'(x) = \frac{[y(x)]^a}{1-a}\, u'(x). \qquad (15.2.6\text{ - }4)$$

Αντικαθιστώντας την $(15.2.6-4)$ στην $(15.2.6-1)$ διαδοχικά έχουμε

$$\frac{[y(x)]^a}{1-a}\, u'(x) + f(x)y(x) = g(x)y^a(x)$$

ή διαιρώντας και τα δύο μέλη με $\dfrac{[y(x)]^a}{1-a}$

$$u'(x) + (1-a)f(x)\frac{y(x)}{[y(x)]^a} = (1-a)g(x)\frac{y(x)}{[y(x)]^a}\,,$$

δηλαδή τελικά η $(15.2.6{-}1)$ μετασχηματίζεται στην παρακάτω **γραμμική εξίσωση**:

$$u' + (1-a)f(x)u = (1-a)g(x). \qquad (15.2.6\text{ - }5)$$

Παράδειγμα 15.2.6 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' - 5y = -5xy^3, \quad \text{όταν} \quad y = y(x). \qquad (1)$$

Λύση. Η (1) είναι της μορφής $(15.2.6-1)$ με

$$f(x) = -5, \quad g(x) = -5x \quad \text{και} \quad a = 3.$$

Σύμφωνα με την $(15.2.6-3)$ εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό

$$u(x) = y^{-2}(x)$$

η (1) μετασχηματίζεται στην

$$u' + (-2)(-5)u = (-2)(-5x),$$

δηλαδή

$$u' + 10u = 10x. \tag{2}$$

Η (2) είναι μια μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση, που σύμφωνα με την Παράγραφο 15.2.5 έχει γενική λύση

$$u = c\, e^{10x} + x - \frac{1}{10}\,, \tag{3}$$

όταν c αυθαίρετη σταθερά.

Αντικαθιστώντας στην (3) όπου $u = y^{-2}$ προκύπτει ότι η γενική λύση της (1) είναι

$$y^{-2} = c\, e^{10x} + x - \frac{1}{10}\,.$$

Η παραπάνω λύση με το MATHEMATICA υπολογίζεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 15.2.6 - 1 (Bernoulli equation)

```
a = 3;f[x_] := -5;g[x_] := -5 x;
Print["Transformed equation : ",
 u' + (1 - a) f[x] u, " = ", (1 - a) g[x]]
z = DSolve[u'[x] + (1 - a) f[x] u[x] == (1 - a) g[x], u[x], x];
Print["General solution  y(x) = ", Simplify[z /. u -> y^(1 - a)]]
```

■

Άσκηση

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις του Bernoulli:

i)	$y' + xy = x/y$	*iv)*	$4yy' + 2y^2 \cos x = \sin 2x$
ii)	$\left(1+x^2\right) y' + xy = y^3$	*v)*	$4y' - y\tan x + y^5 \sin 2x = 0$
iii)	$x^2 y' + 2xy = y^3$	*vi)*	$y' + y = y^{1/2} e^x; \quad y(0) = 1.$

Απαντήσεις

Αρχικά πρέπει να γίνει αναγωγή ορισμένων εξισώσεων στη μορφή $(15.2.6-1)$.
i) Μετασχηματισμένη διαφορική εξίσωση $(15.2.6-5)$: $u' + 2ux = 2x$, γενική λύση: $y^2(x) = 1 + c\, e^{-x^2}$.
ii) $(15.2.6-5)$: $u' - \frac{2ux}{1+x^2} = -\frac{2}{1+x^2}$, γενική λύση: $y^{-2}(x) = -x - \left(1+x^2\right)\tan^{-1} x + c\left(1+x^2\right)$.
iii) $(15.2.6-5)$: $u' - \frac{4u}{x} = -\frac{2}{x^2}$, γενική λύση: $y^{-2}(x) = \frac{2}{5x} + c\, x^4$.
iv) $(15.2.6-5)$: $u' + u\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, γενική λύση: $y^2(x) = -1 + \sin x + c\, e^{-\sin x}$.
v) $(15.2.6-5)$: $u' + u\tan x = \sin 2x$, γενική λύση: $y^{-4}(x) = (c - 2\cos x)\cos x$.
vi) $(15.2.6-5)$: $u' + \frac{u}{2} = \frac{e^x}{2}$, γενική λύση: $y^{1/2}(x)\frac{e^x}{3} + c\, e^{-\frac{x}{2}}$. Μερική λύση, όταν $c = \frac{2}{3}$.

15.2.7 Διαφορική εξίσωση του Riccati

Η διαφορική εξίσωση

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \qquad (15.2.7\text{ - }1)$$

είναι γνωστή ως η **διαφορική εξίσωση του Riccati**[14] (Riccati equation).

Παρατηρούμε ότι: αν

- $p(x) = 0$, η $(15.2.7-1)$ γράφεται

$$y' - q(x)y = r(x), \qquad (15.2.7\text{ - }2)$$

δηλαδή είναι μια **μη ομογενής γραμμική** διαφορική εξίσωση.

[14] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Riccati_equation*

- $r(x) = 0$, η $(15.2.7-1)$ γράφεται

$$y' - q(x)y = y^2 p(x), \qquad (15.2.7\text{ - }3)$$

δηλαδή είναι μια διαφορική εξίσωση του **Bernoulli**.

Στις περιπτώσεις όπου $p(x)\,r(x) \neq 0$, αν και **δεν** υπάρχει γενική μέθοδος λύσης της $(15.2.7-1)$, όταν είναι γνωστή μία λύση της, έστω η $y_1(x)$, τότε θέτοντας

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}\,, \qquad (15.2.7\text{ - }4)$$

οπότε

$$y'(x) = y_1'(x) - \frac{z'(x)}{z^2(x)}\,, \qquad (15.2.7\text{ - }5)$$

και αντίστροφο μετασχηματισμό

$$z(x) = \frac{1}{y(x) - y_1(x)}\,, \qquad (15.2.7\text{ - }6)$$

η $(15.2.7-1)$ διαδοχικά μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} y_1'(x) - \frac{z'(x)}{z^2(x)} &= p(x)\left(y_1^2(x) + 2\,\frac{y_1(x)}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)}\right) \\ &\quad + q(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{z(x)}\right) + r(x) \end{aligned}$$

από την οποία, επειδή η $y_1(x)$ είναι λύση της $(15.2.7-1)$, προκύπτει τελικά ότι

$$z'(x) + \left[2y_1(x)p(x) + q(x)\right] z = -p(x) \qquad (15.2.7\text{ - }7)$$

που είναι μια **γραμμική εξίσωση** και λύνεται κατά τα γνωστά.

Παράδειγμα 15.2.7 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = y^2 - y - 2, \qquad (1)$$

όταν μια λύση της είναι η $y_1(x) = 2$.

Λύση. Η (1) είναι της μορφής $(15.2.7-1)$ με $p(x) = 1$, $q(x) = 1$ και $r(x) = -2$, όπου προφανώς η $y_1(x) = 2$ είναι μια λύση της.

Θέτοντας σύμφωνα με τη $(15.2.7-4)$

$$z = 2 + \frac{1}{z}\,, \tag{2}$$

η (1) σύμφωνα με την $(15.2.7-7)$ μετασχηματίζεται στην

$$z' + 3z = -1, \tag{3}$$

που είναι μια μη ομογενής διαφορική εξίσωση με γενική λύση

$$z = -\frac{1}{3} + c\, e^{-3x}, \tag{4}$$

όταν c αυθαίρετη σταθερά.

Αντικαθιστώντας στην (4) σύμφωνα με την $(15.2.7-6)$:

$$z = \frac{1}{y-2}\,,$$

τελικά προκύπτει ότι η λύση της (1) είναι

$$y = 2 + \frac{3}{-1 + 3c\, e^{-3x}}\,.$$

Η λύση της (3) με το MATHEMATICA υπολογίζεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 15.2.7 - 1 (Ricatti equation)

```
p[x_] := 1; q[x_] := -1; y1 = 2;
Print["Transformed equation : ",
 z' + (2 y1 p[x] + q[x]) z, " = ", -p[x]]
w = DSolve[z'[x] + (2 y1 p[x] + q[x]) z[x] == -p[x], z[x], x]
Print["General solution  z(x) = ", w]
```

Άσκηση

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις του Riccati, όταν μια λύση των είναι της μορφής $y = a/x$:

i) $x^2y' - x^2y^2 - xy - 1 = 0$ *iii)* $4y' + y^2 + 4x^{-2} = 0$

ii) $y' + y^2 = 2x^{-2}$ *iv)* $x^2y' = x^2y^2 + xy - 3.$

Απαντήσεις

Αρχικά πρέπει να γίνει αναγωγή ορισμένων εξισώσεων στη μορφή $(15.2.6-1)$.
i) Λύση $y_1(x) = -\frac{1}{x}$. Μετασχηματισμένη διαφορική εξίσωση $(15.2.7-7)$: $z' - \frac{z}{x} = -1$, γενική λύση: $z(x) = c\,x - x\ln x$.
ii) $y_1(x) = -\frac{2}{x}$. Εξίσωση $(15.2.7-7)$: $z' + \frac{4z}{x} = 1$, λύση: $z(x) = \frac{x}{5} + \frac{c}{x^5}$.
$y_2(x) = \frac{1}{x}$. Εξίσωση $(15.2.7-7)$: $z' - \frac{2z}{x} = 1$, λύση: $z(x) = -x + c\,x^2$.
iii) $y_1(x) = \frac{2}{x}$. Εξίσωση $(15.2.7-7)$: $z' - \frac{z}{x} = \frac{1}{4}$, λύση: $z(x) = c\,x + \frac{1}{4}\,x\,\ln x$.
iv) $y_1(x) = \frac{1}{x}$. Εξίσωση $(15.2.7-7)$: $z' + \frac{3z}{x} = -1$, λύση: $z(x) = -\frac{x}{4} + \frac{c}{x^3}$.

15.2.8 Γραμμική 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

[15]Από τον Ορισμό 15.1.1 - 6 προκύπτει ότι η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωσης 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές έχει τη μορφή

$$\mathbf{y' + a\,y = r(x)}, \qquad (15.2.8\text{ - }1)$$

όταν α σταθερά, $y = y(x)$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ και αντίστοιχη **ομογενή** την

$$\mathbf{y' + a\,y = 0}. \qquad (15.2.8\text{ - }2)$$

Έστω $y \neq 0$. Σύμφωνα με την $(15.1.1-11)$, αντικαθιστώντας στην $(16.3.1-2)$ $y = e^{\lambda x}$ με λ σταθερά προκύπτει ότι η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς είναι

$$\lambda + a = 0 \quad \text{με ρίζα} \quad \lambda = -a. \qquad (15.2.8\text{ - }3)$$

---

[15] **Ορισμός** *15.1.1 - 6: Ορίζεται ως μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση ν-τάξης με σταθερούς συντελεστές, κάθε εξίσωση της μορφής* $(15.1.1-6)$*:* $y^{(\nu)} + f_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)} + \ldots + f_1(x)y' + f_0(x)y = r(x)$*, όπου οι συναρτήσεις* $f_k(x)$ *είναι σταθερές για κάθε* $k = 0,\,1,\,\ldots,\,\nu-1$*, δηλαδή η*

$$y^{(\nu)} + a_{\nu-1}y^{(\nu-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = r(x),$$

όταν a_k *σταθερές για κάθε* $k = 0,\,1,\,\ldots,\,\nu-1$.

Επομένως η γενική λύση της ομογενούς θα είναι:

$$\mathbf{y_h = c\, e^{-ax}}, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0. \tag{15.2.8 - 4}$$

Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της $(16.3.1 - 2)$.

Επειδή

$$f(x) = a, \quad \text{οπότε} \quad q(x) = \int f(x)\, dx = ax,$$

σύμφωνα με την $(15.2.5 - 4)$ η μερική λύση y_p της μη ομογενούς θα είναι

$$\mathbf{y_p(x) = e^{-ax}\ \left[\int e^{ax}\ r(x)\, dx\right]}. \tag{15.2.8 - 5}$$

Τότε από το Θεώρημα 15.1.1 - 1 προκύπτει ότι η γενική λύση της $(16.3.1 - 1)$ είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \qquad (15.2.8 - 6)\\ &= e^{-\alpha x}\ \left[\int e^{ax}\ r(x)\, dx + c\right] \end{aligned}$$

για κάθε $x \in (a, b)$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Παράδειγμα 15.2.8 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + 2y = e^{-3x}, \quad \text{όταν} \quad y(0) = 0. \tag{1}$$

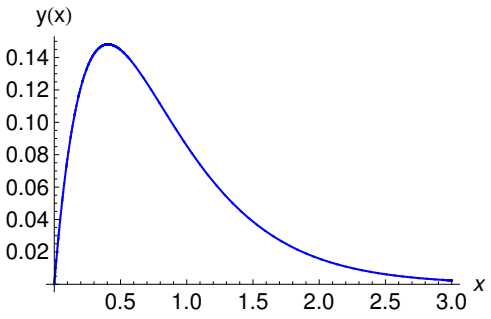
Λύση. Η αντίστοιχη ομογενής της (1) είναι η

$$y' + 2y = 0,$$

οπότε σύμφωνα με την $(15.2.8{-}3)$ η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι $\lambda{+}2 = 0$ με ρίζα την $\lambda = -2$. Άρα από την $(15.2.8 - 4)$ προκύπτει ότι η λύση της ομογενούς είναι

$$y_h = c\, e^{-2x}, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0, \tag{2}$$

όταν προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της.



Σχήμα 15.2.8 - 1: Παράδειγμα 16.3.1 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-3x}\,(-1 + e^{x})$, όταν $x \in [0, 3]$.

Μη ομογενής

Είναι $f(x) = a = 2$ και $r(x) = e^{-3x}$, οπότε σύμφωνα με την $(15.2.8 - 5)$ η μερική λύση y_p της (1) είναι

$$y_p(x) = e^{-2x} \int e^{2x}\, e^{-3x}\, dx = e^{-2x} \overbrace{\int e^{-x}\, dx}^{-e^{-x}} = -e^{-3x}. \tag{3}$$

Επομένως από την $(15.2.8 - 6)$ και τις (2), (3) η γενική λύση της (1) προκύπτει ότι είναι η

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = -e^{-3x} + c\, e^{-2x} \tag{4}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Επειδή από την (1) έχουμε ότι η αρχική τιμή είναι $y(0) = 0$, η μερική λύση θα προκύψει από τη (4) θέτοντας $x = 0$. Άρα $0 = y(0) = -1 + c$, οπότε $c = 1$ και η μερική λύση της (1) θα είναι (Σχ. 16.3.1 - 1)

$$y(x) = e^{-3x}\,(-1 + e^{x})\,.$$

■

Παράδειγμα 15.2.8 - 2

Όμοια να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + y = e^{-x}, \quad \text{όταν} \quad y(0) = -1. \tag{5}$$

Λύση. Η αντίστοιχη ομογενής της (5) είναι η

$$y' + y = 0,$$

οπότε σύμφωνα με την (15.2.8−3) η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι $\lambda+1=0$ με ρίζα την $\lambda=-1$. Άρα όμοια η λύση της ομογενούς είναι

$$y_h = c\,e^{-x}, \quad \text{όταν} \quad c \neq 0, \tag{6}$$

όταν η τιμή $y=0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της.

Μη ομογενής

Είναι $f(x)=a=1$ και $r(x)=e^{-x}$, οπότε σύμφωνα με την $(15.2.8-5)$ η μερική λύση y_p της (5) είναι

$$y_p(x) = e^{-x}\int e^{x}\,e^{-x}\,dx = e^{-x}\int dx = x\,e^{-x}. \tag{7}$$

Επομένως από την (15.2.8−6) και τις (6), (7) προκύπτει ότι η γενική λύση της (5) είναι η

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}\,(x+c)\,, \tag{8}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c\neq 0$.

Επειδή σύμφωνα με την (5) η αρχική τιμή είναι $y(0)=-1$, η μερική λύση θα προκύψει από τη (8) θέτοντας $x=0$. Άρα $-1=y(0)=1(0+c)$, οπότε $c=-1$ και η μερική λύση της (5) θα είναι (Σχ. 16.3.1 - 2)

$$y(x) = e^{-x}\,(-1+x)\,.$$

■

Παράδειγμα 15.2.8 - 3

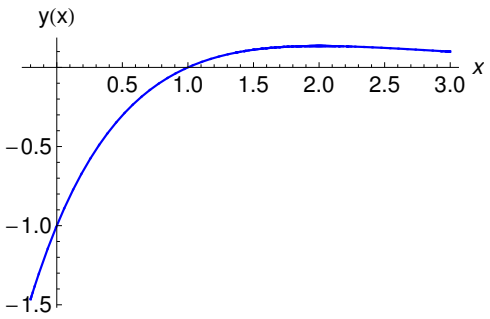
Όμοια διαφορική εξίσωση

$$y' + y = \sin 2x, \quad \text{όταν} \quad y(0)=0. \tag{9}$$

Λύση. Η αντίστοιχη ομογενής της (9) είναι $y'+y=0$, οπότε όμοια με την $(15.2.8-3)$ η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι $\lambda+1=0$ με ρίζα την $\lambda=-1$. Άρα η λύση της ομογενούς είναι

$$y_h = c\,e^{-x}, \quad \text{όταν} \quad c\neq 0. \tag{10}$$

Προφανώς η τιμή $y=0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της.



Σχήμα 15.2.8 - 2: Παράδειγμα 16.3.1 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-x}\,(-1+x)$, όταν $x \in [-0.2, 3]$.

Μη ομογενής

Είναι $f(x) = a = 1$ και $r(x) = \sin 2x$, οπότε σύμφωνα με την $(15.2.8-5)$ η μερική λύση y_p της (9) είναι[16]

$$y_p(x) = e^{-x}\left[\int e^x \sin 2x\,dx\right] = e^{-x}\left[\frac{e^x}{5}\,(-2\cos 2x + \sin 2x)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\,(-2\cos 2x + \sin 2x)\ . \tag{11}$$

Επομένως από την $(15.2.8-6)$ και τις (10), (11) η γενική λύση της (9) προκύπτει ότι είναι η

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c\,e^{-x} + \frac{1}{5}\,(-2\cos 2x + \sin 2x)\,, \tag{12}$$

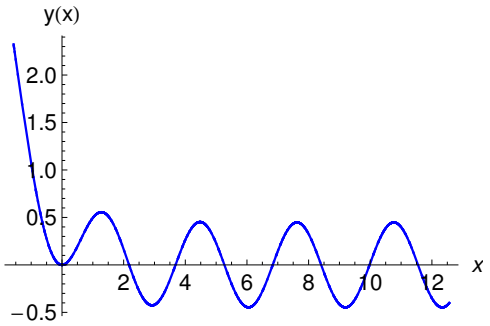
για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Επειδή από την (9) έχουμε ότι η αρχική τιμή είναι $y(0) = 0$, η μερική λύση θα προκύψει από τη (12) θέτοντας $x = 0$. Άρα $0 = y(0) = c + \frac{1}{5}(-2+0)$, οπότε $c = \frac{2}{5}$ και η μερική λύση της (9) θα είναι (Σχ. 16.3.1 - 3)

$$y(x) = \frac{2}{5}\,e^{-x} + \frac{1}{5}\,(-2\cos 2x + \sin 2x)\,. \tag{13}$$

Από τη λύση (13) προκύπτουν τα εξής:

[16] **Παραγοντική ολοκλήρωση** - γινόμενο εκθετικής με τριγωνομετρική συνάρτηση: εφαρμόζεται δύο φορές η παραγοντική ολοκλήρωση (βλέπε Μάθημα *Αόριστο Ολοκλήρωμα*).



Σχήμα 15.2.8 - 3: Παράδειγμα 16.3.1 - 3: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = \frac{2}{5}\, e^{-x} + \frac{1}{5}\, (-2\cos 2x + \sin 2x)$, όταν $x \in [-\pi/2, 4\pi]$.

i) $\lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty$,

ii) όταν $x \geq \pi$, ο όρος e^{-x} πρακτικά μηδενίζεται, οπότε η λύση γράφεται

$$\begin{aligned} y(x) &\approx \frac{1}{5}\,(-2\cos 2x - \sin 2x) = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{5}\sin(2x+\phi) \\ &\approx 0.45\sin(2x+\phi), \quad \text{όταν} \quad \phi = \arctan(-2) \approx -1.107\,\text{rad}, \end{aligned}$$

δηλαδή εκτελεί μια αμείωτη περιοδική ταλάντωση πλάτους 0.45.

■

15.2.9 Εφαρμογές

Εφαρμογή 15.2.9 - 1 (φόρτιση πυκνωτή)

Έστω πυκνωτής χωρητικότητας C που πρόκειται να φορτιστεί με τη βοήθεια πηγής σταθερής ΗΕΔ E διαμέσου ωμικής αντίστασης R. Όταν ο διακόπτης είναι ανοικτός, δεχόμαστε ότι ο πυκνωτής είναι κενός, δηλαδή

$$q_0 = q(0) = 0 \quad \text{αρχική συνθήκη.}$$

Κλείνοντας τον διακόπτη στο κύκλωμα υπάρχουν δύο ΗΕΔ, που είναι αυτή της πηγής E και αυτής που επικρατεί στους οπλισμούς του πυκνωτή. Εφαρμόζοντας

τον 2ο κανόνα του Kirchhoff έχουμε $E - q/C = iR$, που επειδή $i = dq/dt = q'(t)$, τελικά γράφεται

$$q' + \frac{1}{RC}\, q = \frac{E}{R} \quad \text{όπου} \quad q = q(t). \tag{15.2.9 - 1}$$

Η $(15.2.9-1)$ είναι μία μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές της μορφής $(16.3.1-1)$:

$$y' + a\, y = r(t) \quad \text{με} \quad a = \frac{1}{RC} \quad \text{και} \quad r(t) = \frac{E}{R}\,,$$

όπου η αντίστοιχη ομογενής είναι της μορφής: $(16.3.1-1)$: $y' + a\, y = 0$, δηλαδή

$$q' + \frac{1}{RC}\, q = 0. \tag{15.2.9 - 2}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της $(15.2.9-2)$ είναι η $\lambda + 1/RC = 0$ με ρίζα την $\lambda = -1/RC$. Επομένως σύμφωνα με την $(15.2.8-4)$ η γενική λύση q_h της ομογενούς θα είναι:

$$q_{_h}(t) = k\, e^{-at} = k\, e^{-\frac{t}{RC}}\,,$$

όταν k αυθαίρετη σταθερά με $k \neq 0$, ενώ σύμφωνα $(15.2.8-5)$ η μερική λύση q_p της μη ομογενούς θα είναι:

$$\begin{aligned} q_{_p}(t) &= e^{-at}\, \left[\int e^{at}\, r(t)\, dt\right] = e^{-\frac{t}{RC}}\, \left[\int e^{\frac{t}{RC}}\, \left(\frac{E}{R}\right)\, dt\right] \\ &= CE\, e^{-\frac{t}{RC}}\, \left[\int e^{\frac{t}{RC}}\, \left(\frac{t}{RC}\right)'\, dt\right] \\ &= CE\, e^{-\frac{t}{RC}}\, \left(e^{\frac{t}{RC}}\right) = CE. \end{aligned}$$

Τότε η **γενική λύση** της $(15.2.9-1)$ σύμφωνα με την $(15.2.8-4)$ είναι

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t) = CE + ke^{-\frac{t}{RC}}\,.$$

Αλλά σύμφωνα με την αρχική συνθήκη είναι $q_0 = 0$, οπότε αντικαθιστώντας στη γενική λύση προκύπτει ότι

$$0 = CE + k \cdot 1, \quad \text{δηλαδή} \quad k = -CE.$$

Άρα η **μερική λύση** της $(15.2.9-1)$ είναι

$$q(t) = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right). \qquad (15.2.9\text{ - }3)$$

Εφαρμογή 15.2.9 - 2 (κύκλωμα RL)

Όμοια εφαρμόζοντας τον 2ο κανόνα του Kirchhoff έχουμε την παρακάτω διαφορική εξίσωση του κυκλώματος RL:

$$\frac{d\,i}{dt} + \frac{R}{L}\,i = \frac{E}{L} \quad \text{όπου} \quad i = i(t). \qquad (15.2.9\text{ - }4)$$

Η $(15.2.9-4)$ είναι όμοια μία μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές της μορφής $(16.3.1-1)$:

$$y' + a\,y = r(t) \quad \text{με} \quad a = \frac{R}{L} \quad \text{και} \quad r(t) = \frac{E}{L},$$

με αντίστοιχη ομογενή: $(16.3.1-1)$: $y' + a\,y = 0$, δηλαδή

$$i' + \frac{R}{L}\,i = 0. \qquad (15.2.9\text{ - }5)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της $(15.2.9-6)$ είναι η $\lambda + R/L = 0$ με ρίζα την $\lambda = -R/L$. Επομένως σύμφωνα με την $(15.2.8-4)$ η **γενική λύση** i_h της ομογενούς θα είναι:

$$i_{_h}(t) = k\,e^{-at} = k\,e^{-\frac{R}{L}\,t},$$

όταν k αυθαίρετη σταθερά με $k \neq 0$, ενώ σύμφωνα $(15.2.8-5)$ η **μερική λύση** i_p της μη ομογενούς θα είναι:

$$\begin{aligned} i_{_p}(t) &= e^{-at}\left[\int e^{at}\,r(t)\,dt\right] = e^{-\frac{R}{L}\,t}\left[\int e^{\frac{R}{L}\,t}\left(\frac{E}{L}\right)dt\right] \\ &= \frac{E}{R}\,e^{-\frac{R}{L}\,t}\left[\int e^{\frac{R}{L}\,t}\left(\frac{R\,t}{L}\right)'dt\right] \\ &= \frac{E}{R}\,e^{-\frac{R}{L}\,t}\left(e^{\frac{R}{L}\,t}\right) = \frac{E}{R}. \end{aligned}$$

Τότε η γενική λύση της $(15.2.9-4)$ σύμφωνα με την $(15.2.8-4)$ είναι

$$i = \frac{E}{R} + k\, e^{-\frac{R}{L}\, t}.$$

Αν το αρχικό ρεύμα (αρχική συνθήκη) του κυκλώματος είναι $i(0) = i_0$, οπότε $k = i_0 - E/R$, η μερική λύση της $(15.2.9-4)$ γράφεται τελικά στη μορφή

$$i = \frac{E}{R} + \left(i_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}\, t}. \qquad (15.2.9\text{ - }6)$$

Ο τελευταίος όρος στην $(15.2.9-6)$ μηδενίζεται, όταν ο χρόνος t απειρίζεται, οπότε στην περίπτωση αυτή εύκολα προκύπτει ότι $i_{\max} = E/R$.

Άσκηση

Να λυθούν οι παρακάτω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις:

$i)$ $y' + y = x;\ y(0) = -1$ $\qquad$ $v)$ $y' + 3y = e^{-x}\,\sin 2x;\ y(0) = 0$

$ii)$ $y' + 4y = e^{-3x};\ y(0) = 0$ $\qquad$ $vi)$ $y' + y = \sin^2 x;\ y(0) = -1$

$iii)$ $y' + y = x\, e^{-x};\ y(0) = 0$ $\qquad$ $vii)$ $y' + 4y = 1 - \sinh x;\ y(0) = 0$

$iv)$ $y' + y = \sin 2x;\ y(0) = 0$ $\qquad$ $viii)$ $y' + y = \sin x\, \cos 2x;\ y(0) = 0.$

Απαντήσεις

(i) $y(x) = -1 + x + c\, e^{-x}$, μερική: $c = 0$,
(ii) $y(x) = e^{-3x} + c\, e^{-4x}$, μερική: $c = -1$,
(iii) $y(x) = \frac{1}{2}\, x^2 e^{-x} + c\, e^{-x}$, μερική: $c = 0$,
(iv) $y(x) = c\, e^{-x} + \frac{1}{2}\,(-2\cos 2x + \sin 2x)$, μερική: $c = \frac{2}{5}$,
(v) , $y(x) = c\, e^{-3x} + \frac{e^{-x}}{13}\,(-3\cos 3x + 2\sin 3x)$, μερική: $c = -\frac{1}{13}$,
(vi) $y(x) = c\, e^{-x} + \frac{1}{10}\,(5 - \cos 2x - \sin 2x)$, μερική: $c = -\frac{14}{10}$,
(vii) $y(x) = c\, e^{-4x} - \frac{1}{60}\,\left(10 - 15e^{x} + 6e^{2x}\right)$, μερική: $c = -\frac{19}{60}$,
(viii) $y(x) = c\, e^{-x} + \frac{1}{20}\,(5\cos x - 3\cos 3x - 5\sin x + \sin 3x)$, μερική: $c = -\frac{1}{10}$.

15.3 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης

15.3.1 Ορισμοί

Ορισμός 15.3.1 - 1 *Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης είναι*

$$F\left(x, y, y', y''\right) = 0, \qquad (15.3.1 - 1)$$

όταν η άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Τότε η y, εφόσον υπάρχει, θα ορίζει τη λύση της $(15.3.1 - 1)$.

Σημαντικό ενδιαφέρον στις εφαρμογές από το σύνολο των εξισώσεων της μορφής $(15.3.1 - 1)$ παρουσιάζει η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης. Συγκεκριμένα σύμφωνα και με τον Ορισμό 15.1.1 - 3 έχουμε:[17]

Ορισμός 15.3.1 - 3 (μη ομογενής) *Η γενική μορφή της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης είναι*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x), \qquad (15.3.1 - 2)$$

όταν f, g και r συνεχείς συναρτήσεις με $r(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Ορισμός 15.3.1 - 4 (ομογενής) *Η γενική μορφή της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης είναι*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0. \qquad (15.3.1 - 3)$$

όταν f και g συνεχείς συναρτήσεις για κάθε $x \in (a, b)$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

---

[17] **Ορισμός** *15.1.1 - 3: Μία διαφορική εξίσωση που γράφεται στη μορφή*

$$y^{(\nu)} + f_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)} + \ldots + f_1(x)y' + f_0(x)y = r(x),$$

όπου η $r(x)$ και οι συντελεστές $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_{\nu-1}(x)$ είναι γνωστές συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς για κάθε $x \in (a, b)$, λέγεται μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση ν -τάξης.

Στη συνέχεια του μαθήματος εξετάζονται αναλυτικά οι κυριότερες μορφές των $(15.3.1-2)$ και $(15.3.1-3)$ με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή αυτών που κύρια εμφανίζονται στις εφαρμογές, ενώ ο αναγνώστης παραπέμπεται για μια εκτενέστερη μελέτη στη βιβλιογραφία.

15.3.2 Ομογενής γραμμική με σταθερούς συντελεστές

[18]Από τον Ορισμό 15.1.1 - 7 και τον Ορισμό 15.3.1 - 4 προκύπτει ότι η γενική μορφή της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$\mathbf{y'' + ay' + by = 0}, \qquad (15.3.2\text{ - }1)$$

όταν a, b σταθερές, $y = y(x)$ με $x \in (\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{R}$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$.

Έστω $y \neq 0$, διαφορετικά η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της $(16.3.2-1)$. Τότε αντικαθιστώντας κατά τα γνωστά στην $(16.3.2-1)$

$$y = e^{\lambda x} \quad \text{με} \quad \lambda \quad \text{σταθερά}$$

προκύπτει ότι η **χαρακτηριστική εξίσωση** στην περίπτωση αυτή είναι

$$F(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0. \qquad (15.3.2\text{ - }2)$$

Έστω $\Delta = a^2 - 4b$ η διακρίνουσα της $(15.3.2-2)$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για το πρόσημο της Δ:

---

[18]

Ορισμός *15.1.1 - 7: Ορίζεται ως ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση ν-τάξης με σταθερούς συντελεστές, κάθε εξίσωση της μορφής* $(15.1.1-9)$*:* $y^{(\nu)} + a_{\nu-1}y^{(\nu-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = r(x)$*, όπου* $r(x) = 0$*, δηλαδή η*

$$y^{(\nu)} + a_{\nu-1}y^{(\nu-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0,$$

όταν a_k *σταθερές για κάθε* $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ \nu-1$.

$\Delta > 0$

Τότε έχουμε δύο πραγματικές διαφορετικές ρίζες λ_1, λ_2, οπότε η **γενική λύση** της $(16.3.2-1)$ θα είναι

$$\mathbf{y_h(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}}, \qquad (15.3.2\text{ - }3)$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Παράδειγμα 15.3.2 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = 0 \quad \text{και} \quad y_0' = y'(0) = 1. \qquad (1)$$

Λύση. Η (1) είναι μια γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση 2ης τάξης. Αντικαθιστώντας στην (1)

$$y = e^{\lambda x} \quad \text{με} \quad \lambda \quad \text{σταθερά}$$

προκύπτει ότι η χαρακτηριστική εξίσωσή της είναι

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta < 0 \quad \text{και ρίζες} \quad \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -2.$$

Τότε από την $(15.3.2-3)$ έχουμε ότι η η γενική λύση της (1) είναι

$$y_h(x) = c_1\, e^{-3x} + c_2\, e^{-2x}, \qquad (2)$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

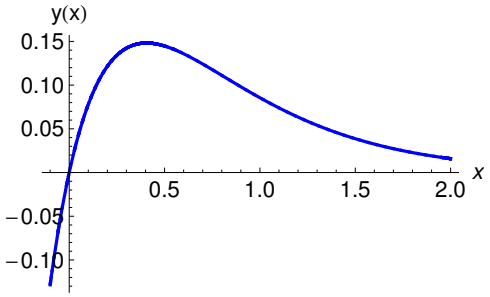
Οι σταθερές προσδιορίζονται από την (2) και τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 1$ ως εξής:

$$\begin{array}{rcrcrcl} y_h(0) &=& c_1 &+& c_2 &=& 0 \\ y_h'(0) &=& -3c_1 &-& 2c_2 &=& 1, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad \begin{array}{rcl} c_1 &=& -1 \\ c_2 &=& 1\,. \end{array}$$

Άρα η μερική λύση της (1) είναι (Σχ. 16.3.2 - 1)

$$y(x) = y_h(x) = -e^{-3x} + e^{-2x}.$$

Η λύση στην περίπτωση αυτή είναι γνωστή ως **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ισχυρή απόσβεση**. ∎



Σχήμα 15.3.2 - 1: Παράδειγμα 16.3.2 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y_h(x) = -e^{-3x} + e^{-2x}$, όταν $x \in [-0.1, 2]$.

$\Delta = 0$

Έχουμε μία διπλή πραγματική ρίζα την $\lambda = -a/2$. Στην περίπτωση αυτή η **γενική λύση** έχει τη μορφή

$$\mathbf{y_h(x) = (c_1 + x\, c_2)\ e^{\lambda x}}, \qquad (15.3.2 - 4)$$

όταν όμοια c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Παράδειγμα 15.3.2 - 2

Όμοια να λυθεί η εξίσωση

$$y'' + 4y' + 4y = 0, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = 1 \quad \text{και} \quad y'_0 = y'(0) = 1. \qquad (3)$$

Λύση. Όμοια η χαρακτηριστική της εξίσωση της (3) είναι

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta = 0 \quad \text{και διπλή ρίζα την} \quad \lambda = -2.$$

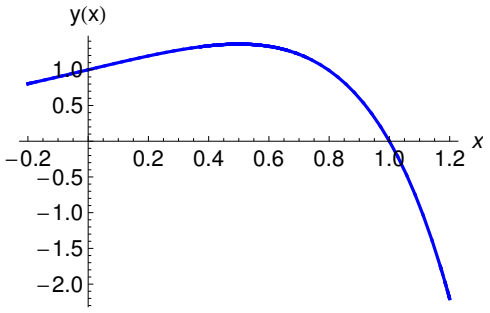
Τότε σύμφωνα με την $(15.3.2 - 4)$ η γενική της λύση είναι

$$y_h(x) = (c_1 + c_2\, x)\ e^{-2x}, \qquad (4)$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Οι σταθερές προσδιορίζονται από την (4) και τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$ και $y'(0) = 1$ ως εξής:

$$\begin{array}{rcrcrcl} y_h(0) &=& c_1 &+& &=& 1 \\ y'_h(0) &=& 2c_1 &+& c_2 &=& 1, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad \begin{array}{rcl} c_1 &=& 1 \\ c_2 &=& -1. \end{array}$$



Σχήμα 15.3.2 - 2: Παράδειγμα 16.3.2 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y_h(x) = e^{-2x}(1-x)$, όταν $x \in [-0.2, 1.2]$.

Άρα η μερική λύση της (3) είναι (Σχ. 16.3.2 - 2)

$$y_h(x) = e^{-2x}(1-x).$$

Η μερική λύση περιγράφει την **κρίσιμη απόσβεση**. Επειδή $e^{-2x} \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η $y_h(x) = 0$, όταν $x_0 = 1$. Το x_0 στην περίπτωση αυτή λέγεται **σημείο στατικής ισορροπίας**. ∎

$\Delta < 0$

Έχουμε δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, έστω τις

$$\lambda = p + i\,\omega \quad \text{και} \quad \bar{\lambda} = p - i\,\omega \quad \text{όπου} \quad i = \sqrt{-1} \quad \text{και} \quad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Τότε, επειδή σύμφωνα με τον τύπο του Euler[19] ισχύει ότι $e^{i\,\omega} = \cos\omega + i\,\sin\omega$, πρέπει

$$\begin{aligned} y_h(x) &= c_1^* e^{\lambda x} + c_2^* e^{\bar{\lambda} x} = c_1^* e^{(p+i\,\omega)x} + c_2^* e^{(p-i\,\omega)x} \\ &= c_1^* e^{px} e^{i\,\omega x} + c_2^* e^{px} e^{-i\,\omega x} \\ &= c_1^* e^{px}\,[\cos(\omega x) + i\,\sin(\omega x)] \\ &\quad + c_2^* e^{px}\,[\cos(\omega x) - i\,\sin(\omega x)] \\ &= e^{px}\,[(c_1^* + c_2^*)\cos(\omega x) + i\,(c_1^* + c_2^*)\sin(\omega x)]\,, \end{aligned}$$

[19] Βλέπε Μάθημα *Μιγαδικοί Αριθμοί*.

δηλαδή η **γενική λύση** της $(16.3.2-1)$ είναι

$$\mathbf{y_h(x) = e^{px}\,[c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x)]}, \qquad (15.3.2\text{ - }5)$$

όταν όμοια c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Η (15.3.2–5) χρησιμοποιώντας γνωστές τριγωνομετρικές σχέσεις μετασχηματίζεται διαδοχικά ως εξής:

αν $c_2 \neq 0$ και $\tan\varphi = c_1/c_2$ με $-\pi \leq \varphi < \pi$, τότε

$$\begin{aligned}
A &= c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x)\\
&= c_2\left[\frac{c_1}{c_2}\cos(\omega x) + \sin(\omega x)\right]\\
&= c_2\left[\tan\varphi\cos(\omega x) + \sin(\omega x)\right]\\
&= c_2\left[\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos(\omega x) + \sin(\omega x)\right]\\
&= \frac{c_2}{\underbrace{\cos\varphi}_{\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}}}\left[\sin\varphi\cos(\omega x) + \cos\varphi\sin(\omega x)\right]\\
&= c_2\sqrt{1+\tan^2\varphi}\,\sin\left(\omega x+\varphi\right)\\
&= c_2\sqrt{1+\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2}\,\sin\left(\omega x+\varphi\right)\\
&= \sqrt{c_1^2+c_2^2}\,\sin\left(\omega x+\varphi\right),
\end{aligned}$$

δηλαδή τελικά

$$\mathbf{y_h(x) = C\,e^{px}\sin(\omega x + \phi)}, \qquad (15.3.2\text{ - }6)$$

όπου $C = \sqrt{c_1^2+c_2^2}$.

Στην $(15.3.2-6)$ η γωνία $\omega = \mathrm{Im}(\lambda)$ εκφράζει την **κυκλική συχνότητα**, ενώ η ϕ τη **φάση**.[20]

[20] Για φυσική ερμηνεία βλέπε
http://el.wikipedia.org/wiki/Απλή_αρμονική_ταλάντωση και
http://el.wikipedia.org/wiki/Φάση_(κυματική)

Παράδειγμα 15.3.2 - 3

Όμοια η εξίσωση

$$16y'' + 8y' + 17y = 0, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = 1 \quad \text{και} \quad y_0' = y'(0) = 0. \tag{5}$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της (5) είναι

$$F(\lambda) = 16\lambda^2 + 8\lambda + 17 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta < 0$$

$$\text{και ρίζες} \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{4} + i, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{4} - i,$$

οπότε σύμφωνα με την $(15.3.2-5)$ έχουμε τη γενική λύση

$$y_h(x) = e^{-\frac{x}{4}} \left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right), \tag{6}$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Οι σταθερές προσδιορίζονται από την (6) και τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$ και $y'(0) = 0$ ως εξής:

$$\begin{array}{rcrcrcl} y_h(0) &=& c_1 &+& 0 &=& 1 \\ y_h'(0) &=& -\frac{1}{4}c_1 &+& c_2 &=& 0, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad \begin{array}{rcl} c_1 &=& 1 \\ c_2 &=& \frac{1}{4}. \end{array}$$

Άρα η μερική λύση της (5) είναι (Σχ. 16.3.2 - 3)

$$y_h(x) = e^{-x/4} \left(\cos x + \frac{1}{4} \sin x\right).$$

Η λύση περιγράφει μια **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ασθενή απόσβεση**.

Η μερική λύση γράφεται στη μορφή $15.3.2-6)$ ως εξής:

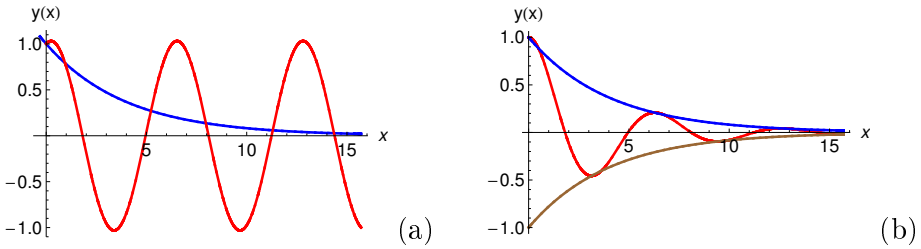
$$C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{\sqrt{17}}{4} \approx 1.030\,776, \quad \text{ενώ}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right) \approx 1.325\,818 = \frac{21\pi}{50},$$

όταν γίνει αντιστοιχία της τιμής $\phi = 1.325\,818$ με την $\pi = 3.14$. Άρα

$$y_h(x) = 1.030\,776\, e^{-x/4} \sin(x + \phi). \tag{7}$$

Από τη μερική λύση (7) προκύπτουν τα εξής:



Σχήμα 15.3.2 - 3: Παράδειγμα 16.3.2 - 2, όταν $x \in [0, 5\pi]$:(a) το διάγραμμα της $y_1 = e^{-x/4}$ μπλε (απόσβεση), και της $\cos x + \frac{1}{4}\sin x$ κόκκινη καμπύλη (αμείωτη ταλάντωση), ενώ στο διάγραμμα (b) της μερικής λύσης $y_h(x) = e^{-x/4}\left(\cos x + \frac{1}{4}\sin x\right)$, όπου η καφέ καμπύλη είναι το διάγραμμα της $y_2 = -e^{-x/4}$. Η απόσβεση προκαλεί τελικά τον μηδενισμό της μερικής λύσης.

i) Επειδή $|\sin(x+\phi)| \leq 1$, η γραφική παράσταση της $y_h(x)$ είναι μία καμπύλη, που περιορίζεται γενικά από τις καμπύλες

$$y_1 = e^{-x/4} \quad \text{και} \quad y_2 = -e^{-x/4}.$$

ii) Η περίοδος T της ταλάντωσης, όπου

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi,$$

είναι ανεξάρτητη από τις αρχικές συνθήκες y_0 και y_0', ενώ αυτό δεν συμβαίνει με τις σταθερές C και ϕ.

iii) Ο όρος

$$e^{px} = e^{-x/4}$$

πρακτικά μηδενίζεται μετά από αρκετό χρόνο, που σημαίνει όμοια, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση της ισχυρής απόσβεσης του Παραδείγματος 16.3.2 - 1, ότι το σώμα επανέρχεται στη θέση της αρχικής ισορροπίας.

■

Άσκηση

Αν $y = y(x)$, να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

i) $y'' + 4y' + 5y = 0; \quad y'_0 = y_0 = 1,$

ii) $y'' - y' - 12y = 0; \quad y'_0 = 1, \quad y_0 = 0,$

iii) $y'' + 2y' + 10y = 0; \quad y'_0 = 1, \quad y_0 = 0,$

iv) $y'' + 25y = 0; \quad y'_0 = y_0 = 1,$

v) $y'' + 2y' + 4y = 0; \quad y'_0 = 1, \quad y_0 = 0,$

vi) $y'' - 2y' + y = 0; \quad y'_0 = -1, \quad y_0 = 1.$

Απαντήσεις

(i) $e^{-2x}\,(\cos x + 3\,\sin x)$, (ii) $\frac{1}{7}\,\left(-e^{-3x} + e^{4x}\right)$, (iii) $\frac{1}{3}\,e^{-x}\,\sin 3x$,
(iv) $\frac{1}{5}\,(5\cos 5x + \sin 5x)$, (v) $\frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{-x}\,\sin\left(\sqrt{3}\,x\right)$, (vi) $-e^{x}\,(-1 + 2x)$.

Δίνονται στη συνέχεια χαρακτηριστικές εφαρμογές της Παραγράφου 15.3.2 στη Μηχανική και τον Ηλεκτρισμό.

15.3.3 Εφαρμογές στη Μηχανική

Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις λύσης των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές εφαρμόζονται σε προβλήματα ταλαντώσεων της Μηχανικής και, όπως θα διαπιστωθεί στην επόμενη παράγραφο, εντελώς ανάλογα και στα αντίστοιχα προβλήματα του Ηλεκτρισμού. Και στις δύο περιπτώσεις η άγνωστη συνάρτηση, που περιγράφει την ταλάντωση, θεωρείται ως συνάρτηση του χρόνου t.

Έστω ελατήριο που το ένα του άκρο είναι σταθερό, ενώ το άλλο του άκρο κινείται κατά τη διεύθυνση της κατακορύφου. Στο ελεύθερο άκρο του προσαρτάται σώμα μάζας m, υποθέτοντας ότι η μάζα αυτή είναι τέτοια, ώστε η μάζα του ελατηρίου να θεωρείται αμελητέα. Όπως είναι γνωστό από τη Φυσική, όταν το σώμα έλκεται προς τα κάτω και κατόπιν αφήνεται ελεύθερο, εκτελεί μία κίνηση - ταλάντωση - κατά τη διεύθυνση της κατακορύφου. Θεωρώντας ότι δεν υπάρχουν άλλες εξωτερικές δυνάμεις που να ενεργούν στο σώμα, οι μόνες δυνάμεις στην περίπτωση αυτή είναι:

i) η δύναμη της βαρύτητας $F_1 = mg$, όπου m η μάζα του σώματος και g η επιτάχυνση της βαρύτητας,

ii) η δύναμη του ελατηρίου $F_2 = ks$ (**νόμος του Hooke**), όπου με s συμβολίζεται η απομάκρυνση του σώματος και k η σταθερά του ελατηρίου.

Έστω s_0 η αρχική απομάκρυνση. Τότε

$$ks_0 = mg. \qquad (15.3.3 - 1)$$

Αν τώρα η συνάρτηση $y = y(t)$ εκφράζει την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση της στατικής ισορροπίας τη χρονική στιγμή t σύμφωνα με τον νόμο του Hooke θα πρέπει θεωρώντας πάντοτε ως θετική φορά την κίνηση προς τα κάτω η δύναμη του ελατηρίου να είναι $F_2 = -ks_0 - ky$. Τότε

$$F_1 + F_2 = mg - ks_0 - ky,$$

που λόγω της $(15.3.3 - 1)$ τελικά γράφεται

$$F_1 + F_2 = -ky. \qquad (15.3.3 - 2)$$

Εφαρμογή 15.3.3 - 1 (αμείωτη ελεύθερη αρμονική ταλάντωση)

Οι μόνες δυνάμεις που ενεργούν στο σύστημα είναι αυτές που περιγράφονται από τη σχέση $(15.3.3 - 1)$. Εφαρμόζοντας τον 2ο νόμο του Newton, έχουμε

$$my'' + ky = 0$$

που ισοδύναμα γράφεται

$$y'' + \frac{k}{m}\, y = 0. \qquad (15.3.3 - 3)$$

Η (15.3.3–3) είναι μία ομογενής διαφορική εξίσωση 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές της μορφής $(16.3.2 - 1)$: $y'' + ay' + by = 0$ με $\alpha = 0$. Σύμφωνα με την $(15.3.2 - 2)$ η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$F(\lambda) = \lambda^2 + b = \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0,$$

όπου προφανώς είναι $k/m > 0$. Επομένως οι ρίζες της είναι οι **φανταστικοί αριθμοί**

$$\lambda = \sqrt{-\frac{k}{m}} = i\sqrt{\frac{k}{m}} = i\,\omega \quad \text{και} \quad \overline{\lambda} = -i\sqrt{\frac{k}{m}} = -i\,\omega.$$

Άρα σύμφωνα με την $(15.3.2-5)$ η γενική λύση είναι

$$y_h(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

που με την $(15.3.2-6)$ ισοδύναμα γράφεται

$$y_h(t) = C \sin(\omega t + \varphi), \qquad (15.3.3\text{ - }4)$$

όταν

$$C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}; \quad \tan \varphi = \frac{c_1}{c_2} \quad \text{και} \quad -\pi \leq \varphi < \pi.$$

Η $(15.3.3-4)$ παριστάνει μία **αμείωτη ελεύθερη αρμονική ταλάντωση** με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi/\omega$.

Εφαρμογή 15.3.3 - 2 (ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση)

Στο σώμα ενεργούν εκτός από τις δυνάμεις F_1 και F_2 και μία δύναμη F_3 που θεωρείται ότι αντιδρά στην κίνηση και είναι ανάλογη προς την ταχύτητα v, δηλαδή

$$F_3 = -pv = -p\frac{dy}{dt},$$

όπου p η σταθερά απόσβεσης (το αρνητικό σημείο φανερώνει ότι η F_3 έχει φορά αντίθετη της φοράς της ταχύτητας). Τότε η $(15.3.3-2)$ γράφεται

$$F_1 + F_2 + F_3 = -ky - py',$$

οπότε όμοια σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton έχουμε

$$my'' + py' + ky = 0.$$

ή ισοδύναμα

$$y'' + \frac{p}{m}\, y' + \frac{k}{m}\, y = 0. \qquad (15.3.3\text{ - }5)$$

Η $(15.3.3-5)$ είναι όμοια μία ομογενής διαφορική εξίσωση 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές της μορφής $(16.3.2-1)$: $y'' + ay' + by = 0$, που έχει σύμφωνα με την $(15.3.2-2)$ την παρακάτω χαρακτηριστική εξίσωση:

$$F(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = \lambda^2 + \frac{p}{m}\,\lambda + \frac{k}{m} = 0. \qquad (15.3.3\text{ - }6)$$

Έστω

$$\Delta = \frac{1}{m^2}\,\left(p^2 - 4mk\right)$$

η διακρίνουσα της $(15.3.3-6)$. Διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

- $\Delta > 0$, δηλαδή $p^2 > 4mk$
  Τότε η $(15.3.3-6)$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες ρίζες, έστω τις
  $$\lambda_1 = -(\alpha - \beta) \quad \text{και} \quad \lambda_2 = -(\alpha + \beta)$$
  με
  $$\alpha = \frac{p}{2m} \quad \text{συντελεστής απόσβεσης και} \quad \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{2},$$
  οπότε σύμφωνα και με την $(15.3.2-3)$ η γενική λύση είναι της μορφής
  $$y_h(t) = c_1 e^{-(\alpha-\beta)\,t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)\,t}. \qquad (15.3.3\text{ - }7)$$
  Η λύση παριστάνει μία **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ισχυρή απόσβεση**.

  Επειδή εύκολα διαπιστώνεται ότι $\alpha > \beta > 0$, δηλαδή η εκθετική συνάρτηση στην παραπάνω λύση είναι της μορφής e^{-kt} με $k > 0$, οπότε $\lim_{t\to+\infty} e^{-kt} = 0$, τελικά το σώμα δεν εκτελεί ταλάντωση, αλλά πρακτικά μετά από παρέλευση αρκετού χρόνου επανέρχεται στη θέση της αρχικής ισορροπίας. Στο Παράδειγμα 16.3.2 - 1 έχει δοθεί ανάλογη λύση με το αντίστοιχο διάγραμμα (Σχ. 16.3.2 - 1).

- $\Delta = 0$, δηλαδή $p^2 = 4mk$
  Τότε η $(15.3.3-6)$ έχει μία διπλή πραγματική ρίζα την
  $$\lambda = -\frac{p}{2m} = -\alpha,$$
  οπότε σύμφωνα και με την $(15.3.2-4)$ η γενική λύση είναι της μορφής
  $$y_h(t) = (c_1 + t c_2)\, e^{-\alpha t} \qquad (15.3.3\text{ - }8)$$
  (**κρίσιμη απόσβεση**).

  Επειδή $e^{-\alpha t} \neq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και ο όρος $c_1 + tc_2$ μηδενίζεται το πολύ μία φορά, δηλαδή όταν $t^* = -c_1/c_2$ με $C_2 \neq 0$ (εξίσωση 1ου βαθμού ως προς t), από την $(15.3.3-8)$ προκύπτει τότε ότι θα πρέπει να υπάρχει το πολύ ένα πέρασμα από τη θέση της στατικής ισορροπίας $y = 0$. Αν οι σταθερές c_1, c_2 είναι ετερόσημες, οπότε $t > 0$, αυτό

συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t^* = -c_1/c_2$, ενώ, όταν οι c_1, c_2 είναι ομόσημες, δεν συμβαίνει ποτέ. Στο Παράδειγμα 16.3.2 - 2 έχει δοθεί ανάλογη λύση με το αντίστοιχο διάγραμμα (Σχ. 16.3.2 - 2).

- $\Delta < 0$, δηλαδή $p^2 < 4mk$
  Τότε η $(15.3.3-6)$ έχει ρίζες μιγαδικές συζυγείς τις

$$\lambda = -\alpha + i\omega \quad \text{και} \quad \bar{\lambda} = -\alpha - i\omega,$$

όπου

$$\omega = \frac{\sqrt{4mk - p^2}}{2m} \quad (\textbf{κυκλική συχνότητα}),$$

οπότε σύμφωνα και με τις $(15.3.2-5)$ και $(15.3.2-6)$ η γενική λύση είναι της μορφής

$$\begin{aligned} y_h(t) &= = e^{-\alpha t}\left(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t\right) \\ &= C e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \phi), \end{aligned} \qquad (15.3.3\text{ - }9)$$

όταν

$$C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}; \quad \tan \phi = \frac{c_1}{c_2} \quad \text{με } c_2 \neq 0 \text{ και } -\pi \leq \phi < \pi.$$

Η κίνηση αυτή είναι μία **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ασθενή απόσβεση**. Ανάλογα με τις προηγούμενες δύο περιπτώσεις στο Παράδειγμα 16.3.2 - 3 έχει δοθεί λύση σε αντίστοιχο πρόβλημα και έχει γίνει μελέτη της συμπεριφοράς της λύσης στο διάγραμμα του Σχ. 16.3.2 - 3.

15.3.4 Εφαρμογές στον Ηλεκτρισμό

Εφαρμογή 15.3.4 - 3 (κύκλωμα RLC)

Έστω κύκλωμα RLC όπου το μόνο αίτιο απόσβεσης είναι η ωμική αντίσταση R. Εφαρμόζοντας τον 2ο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα έχουμε

$$\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = iR$$

που επειδή $i = -dq/dt$ γράφεται

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0 \qquad (15.3.4\text{ - }1)$$

(**κύκλωμα Thompson**).

Η $(15.3.4-1)$ είναι της μορφής $(16.3.2-1)$ με χαρακτηριστική εξίσωση

$$F(\lambda)=\lambda^2+\frac{R}{L}\,\lambda+\frac{1}{LC}=0. \qquad (15.3.4\text{ - }2)$$

Έστω

$$\Delta=\frac{1}{L^2}\left(R^2-\frac{4L}{C}\right).$$

η διακρίνουσα της $(15.3.4-2)$.

Ανάλογα συμπεράσματα εκείνων της Εφαρμογής 15.3.3 - 2 της Παραγράφου 15.3.3 είναι δυνατόν να προκύψουν και στην περίπτωση αυτή. Περιληπτικά δίνονται οι λύσεις της $(15.3.4-1)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $\Delta>0$, δηλαδή $R>2\sqrt{L/C}$

  Τότε έχουμε ρίζες πραγματικές και άνισες τις

  $$\lambda_1=-\frac{R}{2L}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2L}=-k+m,\quad \lambda_2=-\frac{R}{2L}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2L}=-k-m,$$

  οπότε σύμφωνα με την $(15.3.2-3)$ η λύση είναι

  $$i_h=c_1e^{-(k-m)t}+c_2e^{-(k+m)t}. \qquad (15.3.4\text{ - }3)$$

  Η $(15.3.4-3)$ παριστάνει μία **απεριοδική ταλάντωση**.

- $\Delta=0$, δηλαδή $R=2\sqrt{L/C}$

  Σύμφωνα με την $(15.3.2-4)$ έχουμε τη λύση

  $$i_h=(c_1+tc_2)\,e^{-kt} \qquad (15.3.4\text{ - }4)$$

  που είναι γνωστή ως **κρίσιμη απόσβεση**.

- $\Delta<0$, δηλαδή $R<2\sqrt{L/C}$

  Σύμφωνα με την $(15.3.2-6)$ έχουμε τελικά ότι

  $$i_h=i_0e^{-kt}\,\sin(\omega t+\phi), \qquad (15.3.4\text{ - }5)$$

  όπου

  $$i_0=\sqrt{c_1^2+c_2^2};\quad \tan\phi=\frac{c_1}{c_2},\quad \text{όταν } c_2\neq 0 \text{ και } -\pi\le\phi<\pi.$$

  Η λύση παριστάνει μία **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ισχυρή απόσβεση**.

- **Ειδική περίπτωση**, όταν $R = 0$
  Τότε η $(15.3.4-1)$ γράφεται

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC}\, i = 0 \qquad (15.3.4\text{ - }6)$$

  με γενική λύση όμοια σύμφωνα με την $(15.3.2-6)$ της μορφής

$$i_h = i_0 \sin(\omega t + \phi), \qquad (15.3.4\text{ - }7)$$

  όπου i_0 κατάλληλη σταθερά και

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,.$$

  Η λύση παριστάνει **αμείωτη αρμονική ταλάντωση** με κυκλική συχνότητα ω. Η περίπτωση αυτή είναι ανάλογη της Εφαρμογής 15.3.3 - 1 της Παραγράφου 15.3.3.

15.3.5 Μη ομογενής με σταθερούς συντελεστές

[21]Από τον Ορισμό 15.1.1 - 6 και τον Ορισμό 15.3.1 - 3 προκύπτει ότι η γενική μορφή της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$\mathbf{y'' + ay' + by = r(x)}, \qquad (15.3.5\text{ - }1)$$

όταν $a, b \in \mathbb{R}$, $y = y(x)$, $r(x) \neq 0$ με $x \in (\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{R}$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$.

[22]Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 15.1.1 - 1 η γενική λύση $y = y(t)$ της $(16.3.2-4)$ είναι $y = y_h + y_p$, όπου y_h είναι η γενική λύση της αντίστοιχης

[21]

Ορισμός *15.1.1 - 6: Ορίζεται ως μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση ν-τάξης με σταθερούς συντελεστές, κάθε εξίσωση της μορφής* $(15.1.1-6)$ *όπου οι συναρτήσεις* $f_k(x)$ *είναι σταθερές για κάθε* $k = 0, 1, \ldots, \nu-1$, *δηλαδή η*

$$y^{(\nu)} + a_{\nu-1} y^{(\nu-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = r(x),$$

όταν a_k *σταθερές για κάθε* $k = 0, 1, \ldots, \nu-1$.

[22]

ομογενούς, δηλαδή της $(16.3.2-1)$ και y_p μία μερική λύση της μη ομογενούς $(16.3.2-4)$.

Από τις μεθόδους προσδιορισμού της μερικής λύσης y_p της μη ομογενούς $(16.3.2-4)$ θα εξεταστεί μόνον η μέθοδος που δίνεται στη συνέχεια. Ο αναγνώστης παραπέμπεται για μια εκτενέστερη μελέτη στη βιβλιογραφία.

Μέθοδος του Lagrange

Σύμφωνα με τη μέθοδο του Lagrange για τον προσδιορισμό της μερικής λύσης y_p θεωρείται ότι στη γενική λύση

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (15.3.5\text{ - }2)$$

της αντίστοιχης ομογενούς της $(16.3.2-4)$, δηλαδή της

$$y'' + ay' + by = 0,$$

οι σταθερές c_1 και c_2 είναι συναρτήσεις του x, που πρέπει να προσδιοριστούν, έτσι ώστε να επαληθεύεται η $(16.3.2-4)$, δηλαδή η

$$y'' + ay' + by = r(x).$$

Έστω $c_1 = k_1(x)$ και $c_2 = k_2(x)$, οπότε η $(15.3.5-2)$ γράφεται

$$\mathbf{y_p(x) = k_1(x)y_1(x) + k_2(x)y_2(x).} \qquad (15.3.5\text{ - }3)$$

Τότε

$$y_p'(x) = k_1'(x)y_1(x) + k_1(x)y_1'(x) + k_2'(x)y_2(x) + k_2(x)y_2'(x). \qquad (15.3.5\text{ - }4)$$

Στη $(15.3.5-4)$ οι συναρτήσεις $k_1(x)$ και $k_2(x)$ εκλέγονται, έτσι ώστε

$$k_1'(x)y_1(x) + k_2'(x)y_2(x) = 0, \qquad (15.3.5\text{ - }5)$$

Θεώρημα *15.1.1 - 1: Αν y_h είναι η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $y^{(\nu)} + f_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)} + \ldots + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$ και y_p μία μερική λύση της μη ομογενούς $y^{(\nu)} + f_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)} + \ldots + f_1(x)y' + f_0(x)y = r(x)$, τότε η γενική λύση της μη ομογενούς είναι*

$$y = y_h + y_p.$$

οπότε από την $(15.3.5-4)$ προκύπτει τότε ότι

$$y_p(x)'' = k_1(x)y_1''(x) + k_1'(x)y_1'(x) + k_2(x)y_2''(x) + k_2'(x)y_2'(x). \quad (15.3.5\text{ - }6)$$

Αντικαθιστώντας τις $(15.3.5-4)$, $(15.3.5-5)$ και $(15.3.5-6)$ στην $(16.3.2-4)$, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι y_1 και y_2 είναι λύσεις της $(16.3.2-1)$, έχουμε

$$\begin{aligned} r(x) &= \underbrace{k_1y_1''} + k_1'y_1' + \overbrace{k_2y_2''} + k_2'y_2' + a\left(\underbrace{k_1y_1'} + \overbrace{k_2y_2'}\right) + b\left(\underbrace{y_1k_1} + \overbrace{y_2k_2}\right) \\ &= k_1\left(y_1'' + \alpha\, y_1' + \beta\, y_1\right) + k_2\left(y_2'' + \alpha\, y_2' + \beta\, y_2\right) + k_1'y_1' + k_2'y_2' \\ &= k_1'y_1' + k_2'y_2'. \end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$k_1'(x)y_1'(x) + k_2'(x)y_2'(x) = r(x). \quad (15.3.5\text{ - }7)$$

Οι εξισώσεις $(15.3.5-5)$ και $(15.3.5-7)$ ορίζουν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους τις συναρτήσεις $k_1'(x)$ και $k_2'(x)$, από τη λύση του οποίου προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} k_1(x) &= -\int \frac{r(x)\, y_2(x)}{u(x)}\, dx \quad \text{και} \quad k_2(x) = \int \frac{r(x)\, y_1(x)}{u(x)}\, dx\,, \quad \text{όταν} \\ u(x) &= y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x). \quad (15.3.5\text{ - }8) \end{aligned}$$

Τότε σύμφωνα και με την $(15.3.5-2)$ η γενική λύση της $(16.3.2-4)$ θα είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{y(x)} &= y_{_h}(x) + y_p(x) \quad (15.3.5\text{ - }9) \\ &= \mathbf{c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + k_1(x)\, y_1(x) + k_2(x)\, y_2(x)}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 15.3.5 - 1

Αν $y = y(t)$, να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y' + 3y = -x, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = 0 \quad \text{και} \quad y_0' = y'(0) = 1. \quad (1)$$

Λύση. Η (1) είναι μια μη ομογενής 2ης τάξης διαφορική εξίσωση με αντίστοιχη ομογενή την

$$y'' + 4y' + 3y = 0. \tag{2}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (2) είναι η

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

με διακρίνουσα $\Delta = 4 > 0$, οπότε οι ρίζες της θα είναι οι πραγματικοί αριθμοί, έστω

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = -3.$$

Άρα σύμφωνα με την $(15.3.2-3)$ η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_{_h}(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-3x}, \tag{3}$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Έστω

$$r(x) = -x, \quad y_1(x) = e^{-x} \quad \text{και} \quad y_2(x) = e^{-3x},$$

οπότε

$$y_1'(x) = -e^{-x} \quad \text{και} \quad y_2'(x) = -3e^{-3x}.$$

Τότε από την $(15.3.5-8)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} u(x) &= y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) \\ &= e^{-x}(-3e^{-3x}) - e^{-x}\, e^{-3x} = -2e^{-4x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1(x) &= -\int \frac{r(x)\, y_2(x)}{u(x)}\, dx = -\int \frac{-x\, e^{-3x}}{-2e^{-4x}}\, dx = -\frac{1}{2}\int x\, e^{x}\, dx \\ &= (\text{παραγοντική ολοκλήρωση}) \cdots = -\frac{1}{2}\, e^{x}\, (x-1)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2(x) &= \int \frac{r(x)\, y_1(x)}{u(x)}\, dx = \int \frac{-x\, e^{-x}}{-2e^{-4x}}\, dx = \frac{1}{2}\int x\, e^{3x}\, dx \\ &= (\text{παραγοντική ολοκλήρωση}) \cdots = \frac{1}{2}\, e^{3x}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right). \end{aligned}$$

Η μερική λύση y_p της μη ομογενούς της (1) προκύπτει τότε από την $(15.3.5-3)$ ως εξής:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= k_1(x)y_1(x) + k_2(x)y_2(x) \\ &= -\frac{1}{2}\,e^{x}\,(x-1)\,e^{-x} + \frac{1}{2}\,e^{3x}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{-3x} \\ &= \frac{1}{9}(4-3x). \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την $(15.3.5-9)$ η γενική λύση της (1) θα είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= c_1\,e^{-x} + c_2\,e^{-3x} + \frac{1}{9}(4-3x). \end{aligned} \tag{4}$$

Η μερική λύση της (1) προκύπτει τότε από την (4) σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος ως εξής:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 + \frac{1}{9}(4-0) = c_1 + c_2 + \frac{4}{9} = 0 \\ y'(0) &= -c_1 - 3c_2 + \frac{1}{9}(-3) = -c_1 - 3c_2 - \frac{1}{3} = 1, \end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcl} c_1 & + & c_2 & = & -\frac{4}{9} \\ c_1 & + & 3c_2 & = & -\frac{4}{3}, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad c_1 = 0 \quad \text{και} \quad c_2 = -\frac{4}{9}\,.$$

Άρα η μερική λύση της (1) είναι (Σχ. 15.3.5 - 1)

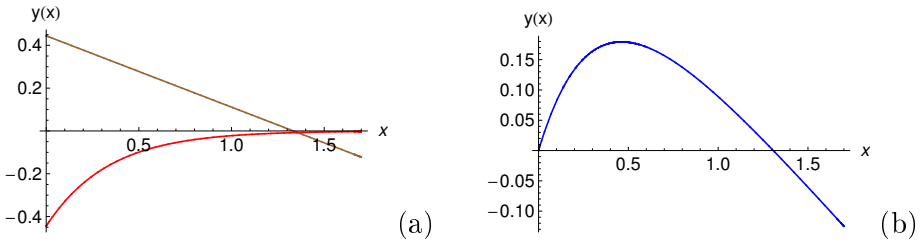
$$y(x) = -\frac{4}{9}\,e^{-3x} + \frac{1}{9}(4-3x).$$

■

Παράδειγμα 15.3.5 - 2

Όμοια να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y' + 3y = \sin x, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = y_0' = y'(0) = 0. \tag{5}$$



Σχήμα 15.3.5 - 1: Παράδειγμα 15.3.5 - 1, όταν $x \in [0, 1.7]$: (a) το διάγραμμα της μερικής λύσης $y_p = \frac{1}{9}(4 - 3x)$ (ευθεία) καφέ και της $-\frac{4}{9}\, e^{-3x}$ κόκκινη καμπύλη, ενώ στο διάγραμμα (b) της μερικής λύσης $y(x) = -\frac{4}{9}\, e^{-3x} + \frac{1}{9}(4 - 3x)$. Η λύση, εκτός από το σημείο $x = 0$, τέμνει άλλη μια φορά τον x-άξονα (θέση ισορροπίας).

Λύση. Το παράδειγμα αυτό είναι όμοιο με το Παράδειγμα 15.3.5 - 1 και διαφέρει μόνον ως προς τη συνάρτηση $r(x)$, όπου στην περίπτωση αυτή είναι $r(x) = \sin x$.

Επομένως η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης $y'' + 4y' + 3y = 0$ θα είναι όμοια

$$y_h(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-3x}, \tag{6}$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές, ενώ σύμφωνα με την $(15.3.5 - 8)$ έχουμε

$$\begin{aligned} u(x) &= y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) \\ &= e^{-x}(-3e^{-3x}) - e^{-x}\, e^{-3x} = -2e^{-4x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1(x) &= -\int \frac{r(x)\, y_2(x)}{u(x)}\, dx = -\int \frac{\sin x\, e^{-3x}}{-2e^{-4x}}\, dx = \frac{1}{2}\int e^{x} \sin x\, dx \\ &= (\text{παραγοντική ολοκλήρωση}) \cdots = \frac{1}{4}\, e^{x}\, (\sin x - \cos x)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2(x) &= \int \frac{r(x)\, y_1(x)}{u(x)}\, dx = \int \frac{\sin x\, e^{-x}}{-2e^{-4x}}\, dx = -\frac{1}{2}\int e^{3x} \sin x\, dx \\ &= (\text{παραγοντική ολοκλήρωση}) \cdots = \frac{1}{20}\, e^{3x}\, (-3\sin x + \cos x)\,. \end{aligned}$$

Η μερική λύση y_p της μη ομογενούς της (5) προκύπτει τότε από την

$(15.3.5-3)$ ως εξής:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= k_1(x)y_1(x) + k_2(x)y_2(x) \\ &= \frac{1}{4}\,e^{x}\,(\sin x - \cos x)\,e^{-x} + \frac{1}{20}\,e^{3x}\,(-3\sin x + \cos x)\,e^{-3x} \\ &= \frac{1}{10}(\sin x - 2\cos x). \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την $(15.3.5-9)$ η γενική λύση της (5) θα είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= c_1\,e^{-x} + c_2\,e^{-3x} + \frac{1}{10}(\sin x - 2\cos x). \end{aligned} \tag{7}$$

Η μερική λύση της (5) προκύπτει τότε από την (7) σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος ως εξής:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 + \frac{1}{10}(0-2) = c_1 + c_2 - \frac{1}{5} = 0 \\ y'(0) &= -c_1 - 3c_2 + \frac{1}{10}(-1+0) = -c_1 - 3c_2 - \frac{1}{10} = 0, \end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε το σύστημα

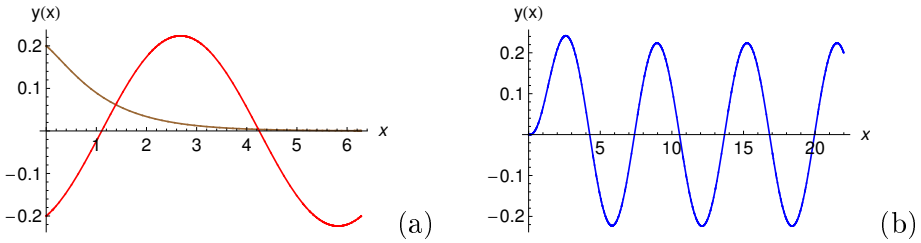
$$\begin{array}{rcrcl} c_1 & + & c_2 & = & \frac{1}{5} \\ c_1 & + & 3c_2 & = & \frac{1}{10}, \end{array} \qquad \text{οπότε} \quad c_1 = \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad c_2 = -\frac{1}{20}\,.$$

Άρα η μερική λύση της (5) είναι

$$y(x) = \frac{1}{4}\,e^{-x} - \frac{1}{20}\,e^{-3x} + \frac{1}{10}\,(\sin x - 2\cos x)\,.$$

Παρατηρούμε τα εξής (Σχ. 15.3.5 - 2):

- ο όρος
$$\frac{1}{4}\,e^{-x} - \frac{1}{20}\,e^{-3x}$$
τελικά μηδενίζεται (**απόσβεση**), που είναι δυνατόν στην περίπτωση αυτή να χαρακτηριστεί ως ισχυρή, ενώ ο όρος



Σχήμα 15.3.5 - 2: Παράδειγμα 15.3.5 - 2, όταν $x \in [0, 2\pi]$: (a) το διάγραμμα της λύσης $\frac{1}{4}\, e^{-x} - \frac{1}{20}\, e^{-3x}$ καφέ καμπύλη (**ισχυρή απόσβεση**) και της $\frac{1}{10}\,(\sin x - 2\cos x)$ κόκκινη καμπύλη (**αμείωτη ταλάντωση**), ενώ στο διάγραμμα (b) της μερικής λύσης $y(x) = \frac{1}{4}\, e^{-x} - \frac{1}{20}\, e^{-3x} + \frac{1}{10}\,(\sin x - 2\cos x)$, όταν $x \in [0, 7\pi]$. Η λύση τελικά περιγράφει μια αμείωτη ταλάντωση.

- $$\frac{1}{10}\,(\sin x - 2\cos x)$$
  εκτελεί μια **αμείωτη ταλάντωση**.
- Τελικά η μερική λύση $y(x)$ περιγράφει μια αμείωτη ταλάντωση.

■

Παράδειγμα 15.3.5 - 3

Όμοια της

$$y'' + 2y' + y = e^{-2x}, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = y_0' = y'(0) = 0. \tag{8}$$

Λύση. Η ομογενής εξίσωση της (8) είναι η

$$y'' + 2y' + y = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση την

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

και διακρίνουσα $\Delta = 0$, οπότε έχουμε μια πραγματική διπλή ρίζα, έστω την

$$\lambda = -1.$$

Άρα σύμφωνα με την $(15.3.2-4)$ η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_h(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x}, \tag{9}$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Έστω

$$r(x) = e^{-2x}, \quad y_1(x) = e^{-x} \quad \text{και} \quad y_2(x) = xe^{-x},$$

οπότε

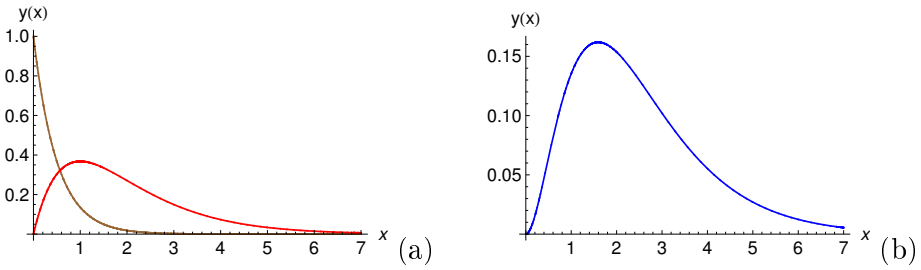
$$y_1'(x) = -e^{-x} \quad \text{και} \quad y_2'(x) = e^{-x} - xe^{-x}.$$

Τότε όμοια από την $(15.3.5-8)$ προκύπτει

$$\begin{aligned}
u(x) &= y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) \\
&= e^{-x}\left(e^{-x} - xe^{-x}\right) - \left(-e^{-x}\right)\, x\, e^{-x} = e^{-2x}, \\
k_1(x) &= -\int \frac{r(x)\, y_2(x)}{u(x)}\, dx = -\int \frac{e^{-2x}\, x\, e^{-x}}{e^{-2x}}\, dx \\
&= -\int x\, e^{-x}\, dx = \cdots = x\, e^{-x} + e^{-x}, \\
k_2(x) &= \int \frac{r(x)\, y_1(x)}{u(x)}\, dx = \int \frac{e^{-2x}\, e^{-x}}{e^{-2x}}\, dx \\
&= \int e^{-x}\, dx = -e^{-x}.
\end{aligned}$$

Η μερική λύση y_p της μη ομογενούς της (8) προκύπτει τότε από την $(15.3.5-3)$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= k_1(x)y_1(x) + k_2(x)y_2(x) \\
&= e^{-x}\left(x\, e^{-x} + e^{-x}\right) + x\, e^{-x}\left(-e^{-x}\right) \\
&= e^{-2x}.
\end{aligned}$$



Σχήμα 15.3.5 - 3: Παράδειγμα 15.3.5 - 3, όταν $x \in [0,7]$: (a) το διάγραμμα της μερικής λύσης $y_p = e^{-2x}$ καφέ και της $x\,e^{-x}$ κόκκινη καμπύλη, ενώ στο διάγραμμα (b) της μερικής λύσης $y(x) = e^{-2x}\,(1 + x\,e^{x} - e^{x})$. Η λύση παρουσιάζει ισχυρή απόσβεση και το σύστημα επανέρχεται στη θέση της αρχικής ισορροπίας.

Άρα σύμφωνα με την $(15.3.5-9)$ η γενική λύση της (8) θα είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= c_1\,e^{-x} + c_2\,x\,e^{-x} + e^{-2x}. \end{aligned} \tag{10}$$

Η μερική λύση της (8) προκύπτει τότε από την (10) σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος ως εξής:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} y(0) & = & c_1 & + & 0 & +1 & = & c_1 & +1 & = & 0 \\ y'(0) & = & -c_1 & + & c_2 - 0 & -2 & = & -c_1 & + & c_2 & -2 & = & 0, \end{array}$$

δηλαδή έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcl} c_1 & & & = & -1 \\ -c_1 & + & c_2 & = & 2, \end{array} \qquad \text{οπότε} \quad c_1 = -1 \quad \text{και} \quad c_2 = 1.$$

Άρα η μερική λύση της (8) είναι (Σχ. 15.3.5 - 3)

$$y(x) = e^{-2x} + x\,e^{-x} - e^{-x} = e^{-2x}\,(1 + x\,e^{x} - e^{x})$$

(**ισχυρή απόσβεση**).

■

Παράδειγμα 15.3.5 - 4

Όμοια η

$$y'' + 4y = \sin x, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = y'_0 = y'(0) = 0. \tag{11}$$

Λύση. Η ομογενής εξίσωση της (11) είναι

$$y'' + 4y = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση την

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta < 0 \quad \text{και ρίζες} \quad \lambda = 2\,i, \quad \overline{\lambda} = -2\,i.$$

Άρα σύμφωνα με την $(15.3.2-5)$ η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_h(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x, \tag{12}$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Έστω

$$r(x) = \sin x, \quad y_1(x) = \cos 2x \quad \text{και} \quad y_2(x) = \sin 2x,$$

οπότε

$$y'_1(x) = -2\sin 2x \quad \text{και} \quad y'_2(x) = 2\cos 2x.$$

Τότε όμοια από την $(15.3.5-8)$ είναι

$$\begin{aligned} u(x) &= y_1(x)\,y'_2(x) - y'_1(x)\,y_2(x) \\ &= \cos 2x\,(\sin 2x)' - (\cos 2x)'\sin 2x \\ &= 2\left(\sin^2 2x + \cos^2 2x\right) = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1(x) &= -\int \frac{r(x)\,y_2(x)}{u(x)}\,dx = -\int \frac{\sin x\,\sin 2x}{2}\,dx \\ &= -\int \frac{\sin x\,2\sin x\cos x}{2}\,dx = -\int \sin^2 x(\sin x)'\,dx \\ &= -\frac{1}{3}\sin^3 x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2(x) &= \int \frac{r(x)\,y_1(x)}{u(x)}\,dx = \int \frac{\sin x\,\cos 2x}{2}\,dx \\ &\quad (2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)) \\ &= \frac{1}{4}\int \sin 3x\,dx - \frac{1}{4}\int \sin x\,dx \\ &= -\frac{1}{12}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x. \end{aligned}$$

Η μερική λύση y_p της μη ομογενούς της (11) προκύπτει τότε από την $(15.3.5-3)$ ως εξής:

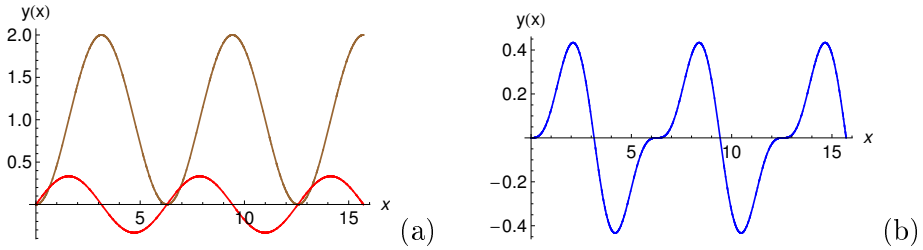
$$\begin{aligned} y_p(x) &= k_1(x)y_1(x) + k_2(x)y_2(x) \\ &= -\frac{1}{3}\sin^3 x\,\cos 2x + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x\right)\sin 2x \\ &= \frac{1}{3}\sin x. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την $(15.3.5-9)$ η γενική λύση της (11) θα είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{1}{3}\sin x. \end{aligned} \tag{13}$$

Η μερική λύση της (11) προκύπτει τότε από την (13) σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος ως εξής:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + 0 + 0 = 0 \\ y'(0) &= 0 + 2c_2 + \frac{1}{3} = 0, \end{aligned}$$



Σχήμα 15.3.5 - 4: Παράδειγμα 15.3.5 - 4, όταν $x \in [0, 5\pi]$: (a) το διάγραμμα της λύσης $-(\cos x - 1)$ καφέ και της μερικής $\frac{1}{3}\sin x$ κόκκινη καμπύλη, ενώ στο διάγραμμα (b) της μερικής λύσης $y(x) = -\frac{1}{3}(\cos x - 1)\sin x$. Η λύση περιγράφει μια αμείωτη ταλάντωση.

οπότε

$$c_1 = 0 \quad \text{και} \quad c_2 = -\frac{1}{6}.$$

Άρα η μερική λύση της (11) είναι (Σχ. 15.3.5 - 4)

$$y(x) = -\frac{1}{3}(\cos x - 1)\sin x$$

(**αμείωτη ταλάντωση**).

■

Παράδειγμα 15.3.5 - 5

Όμοια η

$$y'' + 2y' + 10y = 1, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = y_0' = y'(0) = 0. \tag{14}$$

Λύση. Η ομογενής εξίσωση της (14) είναι

$$y'' + 2y' + 10y = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση την

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta < 0 \\ \text{και ρίζες} \qquad & \lambda = -1 + 3\,i, \quad \overline{\lambda} = -1 - 3\,i. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την $(15.3.2-5)$ η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_h(x) = e^{-x}\,(c_1\,\cos 3x + c_2\,\sin 3x)\,, \tag{15}$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Έστω

$$r(x) = 1, \quad y_1(x) = e^{-x}\cos 3x \quad \text{και} \quad y_2(x) = e^{-x}\sin 3x,$$

οπότε

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -e^{-x}\cos 3x - 3e^{-3x}\sin 3x, \quad \text{και} \\ y_2'(x) &= -e^{-x}\sin 3x + 3e^{-3x}\cos 3x. \end{aligned}$$

Τότε όμοια από την $(15.3.5-8)$ είναι

$$\begin{aligned} u(x) &= y_1(x)\,y_2'(x) - y_1'(x)\,y_2(x) \\ &= e^{-x}\cos 3x\left(-e^{-x}\sin 3x + 3\,e^{-x}\cos 3x\right) \\ &\quad -e^{-x}\sin 3x\left(-e^{-x}\cos 3x - 3\,e^{-x}\sin 3x\right) \\ &= 3\,e^{-x}\left(\cos^2 3x + \sin^2 3x\right) = 3\,e^{-2x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1(x) &= -\int \frac{r(x)\,y_2(x)}{u(x)}\,dx = -\int \frac{1\cdot\ e^{-2x}\sin 3x}{3\,e^{-x}}\,dx \\ &= -\frac{1}{3}\int e^{x}\,\sin 3x\,dx \\ &\quad (\text{διπλή παραγοντική ολοκλήρωση}) \\ &= -\frac{e^x}{10}\,(-3\,\cos 3x + \sin 3x)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2(x) &= \int \frac{r(x)\,y_1(x)}{u(x)}\,dx = \int \frac{1\cdot\ e^{-x}\cos 3x}{3\,e^{-2x}}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int e^x\,\cos 3x\,dx \\ &\quad \text{(διπλή παραγοντική ολοκλήρωση)} \\ &= \frac{e^x}{10}\,(\cos 3x + 3\,\sin 3x)\,. \end{aligned}$$

Η μερική λύση y_p της μη ομογενούς της (14) προκύπτει τότε από την $(15.3.5-3)$ ως εξής:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= k_1(x)y_1(x) + k_2(x)y_2(x) \\ &= -\frac{e^x}{10}\,(-3\,\cos 3x + \sin 3x)\,e^{-x}\cos 3x \\ &\quad +\frac{e^x}{10}\,(\cos 3x + 3\,\sin 3x)\,e^{-x}\sin 3x \\ &= \frac{1}{10}\,. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την $(15.3.5-9)$ η γενική λύση της (14) θα είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= e^{-x}\,(c_1\,\cos 3x + c_2\,\sin 3x) + \frac{1}{10}\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Η μερική λύση της (14) προκύπτει τότε από την (16) σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος ως εξής:

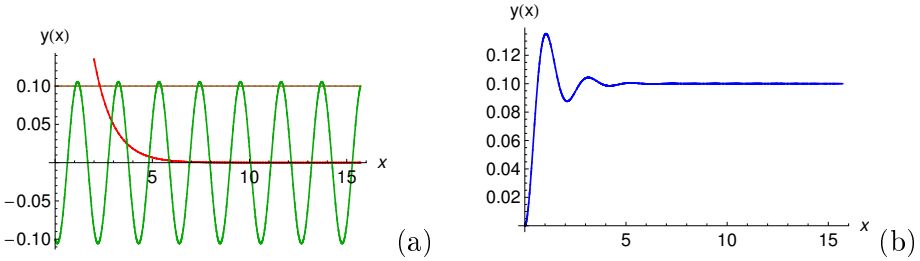
$$\begin{aligned} y(0) &= \quad c_1 \quad + \quad 0 \quad + \quad \frac{1}{10} \quad = 0 \\ y'(0) &= -c_1 \quad + \quad 3c_2 \quad + \quad 0 \quad = 0, \end{aligned}$$

οπότε

$$c_1 = -\frac{1}{10} \quad \text{και} \quad c_2 = -\frac{1}{30}\,.$$

Επομένως η μερική λύση της (14) είναι

$$y(x) = \frac{1}{10} - \frac{e^{-x}}{10}\left(\cos 3x + \frac{1}{3}\,\sin 3x\right).$$



Σχήμα 15.3.5 - 5: Παράδειγμα 15.3.5 - 5, όταν $x \in [0, 5\pi]$: (a) το διάγραμμα της $y_1 = \frac{1}{10}$ (**σταθερή συνάρτηση**) καφέ ευθεία, $y_2 = e^{-x}$ κόκκινη καμπύλη (**απόσβεση**) και $y_3 = -\frac{1}{10}\left(\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x\right)$ πράσινη καμπύλη (**αμείωτη ταλάντωση**), ενώ στο διάγραμμα (b) της μερικής λύσης $y(x) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\left(e^{-x}\cos 3x + \frac{1}{3}e^{-x}\sin 3x\right)$. Η λύση τελικά περιγράφει μια σταθερή κατάσταση.

Παρατηρούμε τα εξής (Σχ. 15.3.5 - 5):

- το διάγραμμα της μερικής λύσης $y_p(x) = \frac{1}{10}$ είναι μια ευθεία παράλληλη στον x-άξονα,

- του όρου e^{-x} είναι μια καμπύλη, που τείνει στον x-άξονα ασυμπτωτικά (**απόσβεση**), που είναι δυνατόν στην περίπτωση αυτή να χαρακτηριστεί ως ισχυρή, ενώ

- ο όρος

$$-\frac{1}{10}\left(\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x\right)$$

εκτελεί μια **αμείωτη ταλάντωση**.

- Τελικά η μερική λύση $y(x)$ περιγράφει μια σταθερή κατάσταση με τελική τιμή ασυμπτωτικά $\frac{1}{10}$.

■

15.3.6 Εφαρμογές

Εφαρμογές στη Μηχανική (εξαναγκασμένη ταλάντωση)

Στην Παράγραφο 15.3.3 η μελέτη της κίνησης του σώματος είχε στηριχθεί στη μη ύπαρξη εξωτερικών δυνάμεων που να ενεργούν στο σώμα κατά τη διάρκεια της κίνησής του (ελεύθερη ταλάντωση). Η μελέτη της κίνησης επεκτείνεται θεωρώντας ότι στο σώμα ενεργεί εξωτερική δύναμη που περιγράφεται από τη συνάρτηση $F(t)$. Τότε η εξίσωση της κίνησης γράφεται

$$my'' + py' + ky = F(t) \qquad (15.3.6\text{ - }1)$$

που είναι μία μη ομογενής διαφορική εξίσωση 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές της μορφής (16.3.2−4): $y''+ay'+by = r(x)$. Στην περίπτωση αυτή η $F(t)$ λέγεται είσοδος, η $y = y(t)$ έξοδος και το είδος της κίνησης **εξαναγκασμένη ταλάντωση**. Η γενική λύση της $(15.3.6-1)$ προκύπτει τότε σύμφωνα με τα παραπάνω.

Εφαρμογές στον Ηλεκτρισμό

Έστω ότι στο κύκλωμα RLC εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ηλεκτρεγερτική δύναμη $E_0 \sin \omega t$. Εφαρμόζοντας τον 2ο κανόνα του Kirchoff, έχουμε

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + Ri = E_0 \sin \omega t,$$

οπότε, παραγωγίζοντας ως προς t και αντικαθιστώντας όπου $i = i(t)$ με $i = dq/dt$, προκύπτει τελικά

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{1}{L}E_0\omega \cos \omega t. \qquad (15.3.6\text{ - }2)$$

Η $(15.3.6-2)$ είναι όμοια μια μη ομογενής διαφορική εξίσωση 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές της μορφής (16.3.2−4), που λύνεται κατά τα γνωστά.

Τέλος, πρέπει να αναφερθεί στο σημείο αυτό ότι στις περισσότερες των περιπτώσεων, η λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης είναι αδύνατη. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι. Ο αναγνώστης παραπέμπεται προς τούτο στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [3] Κεφ. 10.

Άσκηση

1. Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις, όταν $y = y(x)$ και $y_0 = y_0' = 0$:

i) $y'' + 4y' + 13y = e^{-x}$

ii) $y'' + y = \cos x$

iii) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$

iv) $y'' + 2y' + y = \sin x$

v) $y'' + y' = e^{-x}\sin x$

vi) $y'' + 4y' + 3y = 4\,e^{-x}$.

Απαντήσεις

(i) $u(x) = 3$, $k_1(x) = \frac{e^{-x}}{30}\,(3\cos 3x + \sin 3x)$, $k_2(x) = -\frac{e^{-x}}{30}\,(\cos 3x - 3\sin 3x)$,
$y_p(x) = \frac{e^{-x}}{10}$, $y(x) = \frac{1}{30}\,e^{-2x}\,(3e^{x} - 3\cos 3x - \sin 3x)$.

(ii) $u(x) = 1$, $k_1(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\,\sin 2x$, $k_2(x) = -\frac{1}{2}\,\cos^2 x$,
$y_p(x) = -\frac{1}{2}\,x\cos x$, $y(x) = \frac{1}{2}\,(-x\cos x + \sin x)$.

(iii) $u(x) = -3e^{-3x}$, $k_1(x) = x$, $k_2(x) = -e^{-x}$,
$y_p(x) = e^{-x}(x-1)$, $y(x) = e^{-2x}\,[1 + e^{x}\,(x-1)]$.

(iv) $u(x) = e^{-2x}$, $k_1(x) = -\frac{e^{x}}{2}\,(\cos x - x\cos x + x\sin x)$, $k_2(x) = \frac{e^{x}}{2}\,(\sin x - \cos x)$,
$y_p(x) = -\frac{\cos x}{2}$, $y(x) = \frac{1}{2}\,e^{-x}\,(1 + x - e^{x}\cos x)$.

(v) $u(x) = -e^{-x}$, $k_1(x) = -\frac{e^{-x}}{2}\,(\cos x + \sin x)$, $k_2(x) = \cos x$,
$y_p(x) = \frac{e^{-x}}{2}\,(\cos x - \sin x)$, $y(x) = \frac{1}{2}\,e^{-x}\,(-2 + e^{x} + \cos x - \sin x)$.

(vi) $u(x) = -2e^{-4x}$, $k_1(x) = 2x$, $k_2(x) = -e^{-2x}$,
$y_p(x) = e^{-x}(2x-1)$, $y(x) = e^{-3x}\,\left[1 + e^{2x}\,(2x-1)\right]$.

15.4 Βιβλιογραφία

[1] Αθανασιάδη, Α. (1997). *Διαφορικές Εξισώσεις*. Εκδόσεις Διόσκουροι. ISBN 960–650–00–4.

[2] Αλικάκος, Ν. & Καλογερόπουλος, Γ. (2003). *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*. Σύγχρονη Εκδοτική. ISBN 978–960–816–563–2.

[3] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[4] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[5] Bronson, R. (1978). *Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις*. Εκδόσεις ΕΣΠΙ Εκδοτική. ISBN 978–000–761–014–3.

[6] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 16

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

16.1 Μετασχηματισμός Laplace

16.1.1 Ορισμός

[1]

Ορισμός 16.1.1 - 1 (ορισμός μετασχηματισμού). *Έστω $f(t)$ μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού $[0,+\infty]$ και $\sigma > 0$ σταθερά. Τότε ορίζεται ως μετασχηματισμός Laplace (Laplace transform) της f και συμβολίζεται με $\mathcal{L}[f(t)]$ ή συντομότερα $\mathcal{L}(f)$, η συνάρτηση που ορίζεται από την τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος του α' είδους*[2]

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-s\,t}dt \quad με \quad s \geq \sigma, \tag{16.1.1 - 1}$$

[1] Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 5] και *http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform*

[2] Βλέπε Α. Μπράτσος [4] Κεφ. 8 και Μάθημα *Ορισμένο Ολοκλήρωμα - Γενικευμένα ολοκληρώματα*

όταν το ολοκλήρωμα υπάρχει.

Σημείωση 16.1.1 - 1

Η παράμετρος s είναι δυνατόν να είναι και μιγαδικός αριθμός, αν υποτεθεί ότι $\mathrm{Re}(s) \geq 0$.

Ο αρχικός μετασχηματισμός χρησιμοποιήθηκε από τον Laplace για την επίλυση ενός προβλήματος στις πιθανότητες. Χρησιμοποιείται στη λύση διαφορικών εξισώσεων, στη Φυσική και τη Μηχανική κ.λπ. Στις περιπτώσεις που το πρόβλημα εξαρτάται από τον χρόνο, ο μετασχηματισμός το ανάγει από το *πεδίο του χρόνου* στο *πεδίο συχνοτήτων*, όπου η επίλυσή του γενικά γίνεται ευκολότερα.

Στην $(16.1.1-1)$ η $f(t)$ λέγεται τότε ο **αντίστροφος μετασχηματισμός** (inverse transform) της $F(s)$ και συμβολίζεται με

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]. \qquad (16.1.1\text{ - }2)$$

Ο υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού θα γίνει στη συνέχεια του μαθήματος.

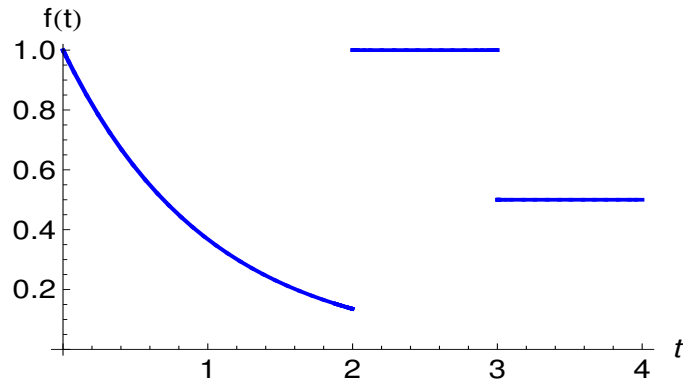
Στο εξής θα θεωρείται ότι το s είναι πραγματικός αριθμός και θα συμβολίζεται με τα κεφαλαία γράμματα F, X, I κ.λπ. οι μετασχηματισμένες κατά Laplace συναρτήσεις των f, x, i κ.λπ., αντίστοιχα.

16.1.2 Θεώρημα ύπαρξης

Ορισμός 16.1.2 - 1. *Μια συνάρτηση $f(t)$ με πεδίο ορισμού το $[a,b]$ θα λέγεται* **κατά τμήματα συνεχής** *(Σχ. 16.1.2 - 1), όταν είναι ορισμένη για κάθε $t \in [a,b]$ και υποδιαιρώντας το διάστημα $[a,b]$ σε ν το πλήθος υποδιαστήματα της μορφής (a_k, b_k); $k = 1, 2, \ldots, \nu$ το όριό της στα άκρα του διαστήματος (a_k, b_k) είναι πεπερασμένο για κάθε $k = 1, 2, \ldots, \nu$.*

Ο ορισμός αυτός εύκολα γενικεύεται για την περίπτωση που η συνάρτηση $f(t)$ έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$.

Ορισμός 16.1.2 - 2. *Μια συνάρτηση $f(t)$ λέγεται* **συνάρτηση εκθετικής τάξης** *(function of exponential order), όταν υπάρχουν σταθερές γ, t_0 και M*



Σχήμα 16.1.2 - 1: συνάρτηση $f(t)$ συνεχής για κάθε $t \in [0,2) \cup (2,3) \cup (3,4)$, ενώ παρουσιάζει ασυνέχεια στα σημεία $t = 2, 3$ με $\lim_{t\to 2-0} e^{-t} = e^{-1}$, $\lim_{t\to 2+0} f(t) = 1$, $\lim_{t\to 3-0} f(t) = 1$ και $\lim_{t\to 3+0} f(t) = 0.5$.

με $t_0, M > 0$, *έτσι ώστε*

$$|f(t)| < M\, e^{\gamma\, t} \quad \textit{για κάθε} \quad t > t_0. \tag{16.1.2 - 1}$$

Τότε το γ ορίζει την τάξη της f.

Στο παρακάτω θεώρημα δίνεται η συνθήκη που πρέπει να ισχύει, έτσι ώστε να υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης.

Θεώρημα 16.1.2 - 1 (ύπαρξης του μετασχηματισμού). *Έστω η συνάρτηση* $f(t)$ *που είναι ορισμένη για κάθε* $t \in [0, +\infty)$. *Αν η* f *είναι*

i) κατά τμήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα της μορφής $[0, \alpha]$, *όπου* $\alpha > 0$,

ii) εκθετικής τάξης, δηλαδή υπάρχουν σταθερές γ, t_0 *και* M *με* $t_0, M > 0$, *έτσι ώστε*

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma\, t} \quad \textit{για κάθε } t \in [0, +\infty), \tag{16.1.2 - 2}$$

τότε ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ *υπάρχει για κάθε* $s > \gamma$.

Η απαίτηση της κατά τμήματα συνεχούς συνάρτησης και η ισχύς της (16.1.2 – 2) είναι επίσης γνωστές και ως **συνθήκες Dirichlet** (Dirichlet conditions) για τον μετασχηματισμό Laplace. Το σύνολο των συναρτήσεων f με πεδίο ορισμού $[0, +\infty)$ που ικανοποιούν τις συνθήκες Dirichlet, δηλαδή των συναρτήσεων που υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace, θα συμβολίζεται στο εξής με $D_{\mathcal{L}}$.

Δίνονται στη συνέχεια οι μετασχηματισμοί Laplace ορισμένων συναρτήσεων με τον Ορισμό 16.1.1 - 1.

Παράδειγμα 16.1.2 - 1

Έστω

$$f(t) = A \quad \text{όπου} \quad A \quad \text{σταθερά.}$$

Τότε[3]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= F(s) = \int_0^{+\infty} Ae^{-st}dt = -\frac{A}{s}\lim_{x+\infty} e^{-st}\Big|_0^x \\ &= -\frac{A}{s}\left(\lim_{x+\infty} e^{-sx} - e^0\right) = \frac{A}{s} \quad \text{με} \quad s > 0. \end{aligned}$$

Άρα

$$\mathcal{L}(A) = \frac{A}{s} \quad \text{με} \quad s > 0. \qquad (16.1.2 - 3)$$

Παράδειγμα 16.1.2 - 2

Όμοια, έστω $f(t) = e^{-at}$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[e^{-at}\right] &= \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t}\,dt \\ &= -\frac{1}{s+a}\lim_{x\to+\infty} e^{-(s+a)t}\Big|_0^x = -\frac{1}{s+a}\left[\lim_{x\to+\infty} e^{-(s+a)x} - e^0\right] \\ &= \frac{1}{s+a}, \quad \text{όταν} \quad s+a > 0. \end{aligned}$$

[3] Η συνάρτηση e^x ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ ισχύει:

$$\lim_{x\,\to\,-\infty} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\,\to\,+\infty} = +\infty.$$

Άρα

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}\right] = \frac{1}{s+a} \quad \text{με} \quad s+a>0. \tag{16.1.2 - 4}$$

Επομένως

$$\mathcal{L}\left[e^{3t}\right] = \mathcal{L}\left[e^{-(-3)\,t}\right] = \frac{1}{s+3} \quad \text{με} \quad s+3>0.$$

16.1.3 Ιδιότητες του μετασχηματισμού

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, που με τη χρήση τους υπολογίζονται οι μετασχηματισμοί των διαφόρων συναρτήσεων.[4]

Θεώρημα 16.1.3 - 1 (γραμμική ιδιότητα). *Έστω* $f, g \in D_{\mathcal{L}}$. *Τότε αν* $k, \lambda \in \mathbb{R}$ *ισχύει*

$$\mathcal{L}[kf(t)+\lambda g(t)] = k\mathcal{L}[f(t)] + \lambda\mathcal{L}[g(t)]. \tag{16.1.3 - 1}$$

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται για ν-το πλήθος συναρτήσεις.

Παράδειγμα 16.1.3 - 1

Είναι γνωστό ότι αν $f(t) = \sin t$, τότε $\sin t = \left(e^{it} - e^{-it}\right)/2i$, όπου i η φανταστική μονάδα. Σύμφωνα με τον τύπο $(16.1.2-4)$ και τη γραμμική ιδιότητα έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sin t) &= \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left(e^{it}\right) - \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left(e^{-it}\right) = \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left(e^{-(-\mathbf{i})\,t}\right) - \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left(e^{-it}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s+(-i)} - \frac{1}{s+i}\right) = \frac{1}{s^2+1},\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2+1}. \tag{16.1.3 - 2}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι

$$\mathcal{L}(\cos t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{it} + e^{-it}\right] = \frac{s}{s^2+1} \tag{16.1.3 - 3}$$

[4] Οι ιδιότητες αυτές αποδεικνύεται στη συνέχεια του μαθήματος ότι ισχύουν επίσης και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.

και

$$\mathcal{L}(\sinh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{at} - e^{-at}\right] = \frac{s}{s^2 - a^2}\,, \qquad (16.1.3\text{ - }4)$$

$$\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{at} + e^{-at}\right] = \frac{a}{s^2 - a^2}\,, \qquad (16.1.3\text{ - }5)$$

όταν $s > a > 0$.

Θεώρημα 16.1.3 - 2. *Αν* $f \in D_{\mathcal{L}}$ *με* $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, *τότε*

$$\mathcal{L}[f(kt)] = \frac{1}{k}\,F\left(\frac{s}{k}\right) \quad \mu\varepsilon \quad k > 0. \qquad (16.1.3\text{ - }6)$$

Παράδειγμα 16.1.3 - 2

Σύμφωνα με το Θεώρημα 16.2.2 - 2 και τον τύπο $(16.2.2 - 2)$ είναι

$$\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{1}{\omega}\,\frac{\frac{s}{\omega}}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}\,, \qquad (16.1.3\text{ - }7)$$

$$\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{1}{\omega}\,\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \mu\varepsilon \quad \omega > 0. \qquad (16.1.3\text{ - }8)$$

Επομένως

$$\mathcal{L}(\cos 2t) = \frac{s}{s^2 + 4}\,, \quad \mathcal{L}(\sin 2t) = \frac{2}{s^2 + 4}\,, \quad \kappa.\lambda\pi.$$

Θεώρημα 16.1.3 - 3 (προπορείας). *Αν* $f \in D_{\mathcal{L}}$ *και* $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, *τότε*

$$\mathcal{L}\left[e^{-at} f(t)\right] = F(s + a), \quad \text{όταν} \quad s + a > 0 \ \text{και} \ a > 0. \qquad (16.1.3\text{ - }9)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 16.2.2 - 3 και τους τύπους $(16.1.3-7)$ - $(16.1.3-8)$ είναι:

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}\cos \omega t\right] = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}\,, \qquad (16.1.3\text{ - }10)$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}\sin \omega t\right] = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}\,. \qquad (16.1.3\text{ - }11)$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[e^{-t}\cos 2t\right] &= \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} = \frac{s+1}{s^2+2s+5}\,,\\
\mathcal{L}\left[e^{3t}\sin 2t\right] &= \mathcal{L}\left[e^{-(-3)\,t}\sin 2t\right] = \frac{2}{[s+(-3)]^2+2^2}\\
&= \frac{2}{s^2-6s+13}\,,\\
\mathcal{L}\left[e^{t}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right] &= \mathcal{L}\left[e^{t}\left(\sin 2t\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2t\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathcal{L}\left[e^{t}\sin 2t\right]+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathcal{L}\left[e^{t}\cos 2t\right]\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathcal{L}\left[e^{-(-t)}\sin 2t\right]+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathcal{L}\left[e^{-(-t)}\cos 2t\right]\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{2}{(s-1)^2+2^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{s+1}{s^2-2s+5}\,.
\end{aligned}$$

Θεώρημα 16.1.3 - 4 (υστέρησης). *Αν* $f\in D_{\mathcal{L}}$ *με* $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ *και*

$$g(t)=\begin{cases} f(t-a) & \text{αν} \quad t>a\\ 0 & \text{αν} \quad t<a,\end{cases}$$

τότε

$$\mathcal{L}[g(t)]=e^{-as}F(s),\quad \text{όταν}\quad t>a>0. \qquad (16.1.3\text{ - }12)$$

Με το θεώρημα αυτό δίνεται η δυνατότητα να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης, που ορίζεται για $t>a$ με $a>0$. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων έχουμε στη μελέτη συστημάτων που ενεργοποιούνται τη χρονική στιγμή $t=a$ αντί της $t=a$.

Παράδειγμα 16.1.3 - 3

Επειδή

$$\mathcal{L}\left[t^3\right] = \frac{3\,!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}\,,$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 16.2.2 - 4 ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = \begin{cases} (t-1)^3 & \text{αν} \quad t > 1 \\ 0 & \text{αν} \quad t < 1 \end{cases} \qquad \text{είναι} \quad \mathcal{L}[g(t)] = \frac{6\,e^{-s}}{s^4}\,.$$

Άλλες εφαρμογές του Θεωρήματος 16.2.2 - 3 θα δοθούν στην επόμενη παράγραφο.

Θεώρημα 16.1.3 - 5. *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ με $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε*

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d\,F(s)}{ds} = -F'(s).$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά n φορές το Θεώρημα 16.2.2 - 5, τελικά προκύπτει

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n\,\frac{d^{\,n}\,F(s)}{ds^n} = (-1)^n F^{(n)}(s), \qquad (16.1.3 - 13)$$

όταν $n = 1,\, 2,\, \ldots$.

Παράδειγμα 16.1.3 - 4

Σύμφωνα με τον τύπο $(16.1.3 - 8)$ είναι:

$$\mathcal{L}(\sin 3t) = \frac{3}{s^2+9}\,.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο $(16.2.2 - 5)$ για $n = 1,\, 2$, έχουμε

$$\mathcal{L}\left[t\,\sin 3t\right] = (-1)^1\,\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) = \frac{6s}{\left(s^2+9\right)^2}\,,$$

$$\mathcal{L}\left[t^2\,\sin 3t\right] = (-1)^2\,\frac{d^{\,2}}{ds^2}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{6s}{\left(s^2+9\right)^2}\right]$$

$$= \frac{18\left(s^2-3\right)}{\left(s^2+9\right)^3}\,.$$

Παράδειγμα 16.1.3 - 5

Όμοια σύμφωνα με τον τύπο $(16.1.3-8)$ είναι:

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}\right] = \frac{1}{s+a} \quad \text{με} \quad s+a>0.$$

Εφαρμόζοντας τώρα διαδοχικά τον τύπο $(16.2.2-5)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[t\,e^{-at}\right] &= (-1)^1\,\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{1}{(s+a)^2}\,,\\
\mathcal{L}\left[t^2\,e^{-at}\right] &= (-1)^2\,\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s+a)^2}\right] = \frac{\overbrace{2}^{2!}}{(s+a)^3}\,,\\
\mathcal{L}\left[t^3\,e^{-at}\right] &= (-1)^3\,\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{2!}{(s+a)^3}\right] = \frac{\overbrace{2\cdot 3}^{3!}}{(s+a)^4}\,,\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
\mathcal{L}\left[t^n\,e^{-at}\right] &= (-1)^n\,\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{(n-1)\,!}{(s+a)^n}\right] = \frac{n\,!}{(s+a)^{n+1}}\,.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\mathcal{L}\left[t^n\,e^{-at}\right] = \frac{n\,!}{(s+a)^{n+1}}\,, \qquad (16.1.3\text{ - }14)$$

όταν $n=0,\,1,\,\ldots$ και $s+a>0$.

Αν στην $(16.1.3-14)$ είναι $a=0$, τότε

$$\mathcal{L}\left[t^n\right] = \frac{n\,!}{s^{n+1}}\,, \quad \text{όταν} \quad n=0,\,1,\,\ldots\,. \qquad (16.1.3\text{ - }15)$$

Επομένως σύμφωνα με τους τύπους $(16.1.3-14)$ και $(16.1.3-15)$ έχουμε

$$\mathcal{L}\left[t^2\,e^{3t}\right] = \frac{2\,!}{(s-3)^{2+1}} = \frac{2}{(s-3)^3} \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\left[t^3\right] = \frac{3\,!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}\,.$$

Θεώρημα 16.1.3 - 6 (παραγώγου 1ης τάξης). *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ και υπάρχει η 1ης τάξης παράγωγος της f και είναι συνεχής συνάρτηση ή κατά τμήματα συνεχής για κάθε $t \geq 0$, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου f' και ισχύει*

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad \text{με} \quad s>a. \qquad (16.1.3\text{ - }16)$$

Εφαρμόζοντας τώρα την $(16.1.3-16)$ για τη 2ης τάξης παράγωγο της f, υποθέτοντας ότι η f'' είναι συνεχής ή κατά τμήματα συνεχής για κάθε $t \geq 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[f''(t)\right] &= s\,\mathcal{L}\left[f'(t)\right] - f'(0) \\ &= s\left\{s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0)\right\} - f'(0), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0). \qquad (16.1.3\text{ - }17)$$

Παράδειγμα 16.1.3 - 6

Έστω

$$f(t) = t\sin t.$$

Τότε

$$f(0) = 0, \quad \text{ενώ} \quad f'(t) = \sin t + t\cos t, \quad \text{οπότε} \quad f'(0) = 0.$$

Άρα σύμφωνα με την $(16.1.3-17)$ και με τύπο $(16.2.2-5)$ για $n=1$ έχουμε

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s^2\mathcal{L}[t\sin t] - sf(0) - f'(0) = s^2\mathcal{L}[t\sin t] = \frac{2s^3}{\left(s^2+1\right)^2}.$$

Θεώρημα 16.1.3 - 7 (ολοκλήρωση του μετασχηματισμού). *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ με $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ και υπάρχει το $\lim\limits_{t->0}\dfrac{f(t)}{t}$, τότε*

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} F(x)\,dx. \qquad (16.1.3\text{ - }18)$$

Επειδή $\lim_{s\to 0} e^{-st} = 1$, από την $(16.1.3-18)$ προκύπτει ότι:

Πόρισμα 16.1.3 - 1. *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ με $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ και υπάρχει το $\lim\limits_{t->0}\dfrac{f(t)}{t}$, τότε*

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} F(x)\,dx. \qquad (16.1.3\text{ - }19)$$

Παράδειγμα 16.1.3 - 7

Από τον τύπο $(16.1.3-2)$ και τη σχέση $(16.1.3-18)$ προκύπτει

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \int_s^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s,$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right).$$

Τότε από την $(16.1.3-19)$ έχουμε

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}. \qquad (16.1.3\text{ - }20)$$

Ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace μιας συνάρτησης $f(t)$ με το πρόγραμμα MATHEMATICA γίνεται με την εντολή:

Πρόγραμμα 16.1.3 - 1 (μετασχηματισμού Laplace)

```
LaplaceTransform[f(t),t,s]
```

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων $f(t)$:

i) $t^3 - t + 2$ *v)* $e^{-2t}\cos 3t$

ii) $\sin(2t)$ *vi)* $t\cos 2t$

iii) $t\sin 2t$ *vii)* $\sin^2 3t$ (Υπ: $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$)

iv) $t^2 \sin 3t$ *viii)* $\cos^2 2t$ (Υπ: $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$).

2. Όμοια των συναρτήσεων

i) $t\,e^{-t}\cos t$ *v)* $t\,e^{-t}\sin 2t$

ii) $t\,e^{-t}\cos \omega t$ *vi)* $t^2\,e^{-2t}$

iii) $t^3 e^{-2t}$ *vii)* $t\,e^{-t}\sin \omega t$.

Απαντήσεις

1. $(i)\ \frac{6}{s^4}-\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}$, $(ii)\ \frac{2}{4+s^2}$, $(iii)\ \frac{4s}{\left(4+s^2\right)^2}$, $(iv)\ \frac{18\left(-3+s^2\right)}{\left(9+s^2\right)^3}$,

$(v)\ \frac{2+s}{13+4s+s^2}$, $(vi)\ \frac{-4+s^2}{\left(4+s^2\right)^2}$, $(vii)\ \frac{18}{36s+s^3}$, $(viii)\ \frac{8+s^2}{16s+s^3}$.

2. $(i)\ \frac{2s+s^2}{\left(2+2s+s^2\right)^2}$, $(ii)\ \frac{1-\omega^2-2s+s^2}{\left(1+\omega^2-2s+s^2\right)^2}$, $(iii)\ \frac{6}{(2+s)^4}$,

$(iv)\ \frac{4(1+s)}{\left(5+2s+s^2\right)^2}$, $(v)\ \frac{2}{(2+s)^3}$, $(vi)\ \frac{2\omega(1+s)}{\left(1+\omega^2+2s+s^2\right)^2}$.

16.1.4 Μετασχηματισμός περιοδικών συναρτήσεων

Θεώρημα 16.1.4 - 1. *Έστω $f\in D_{\mathcal{L}}$ όπου f μία κατά τμήματα συνεχής περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο T και $f(t)=0$ για κάθε $t<0$. Τότε*

$$\mathcal{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt. \qquad (16.1.4\text{ - }1)$$

Παράδειγμα 16.1.4 - 1

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της περιοδικής συνάρτησης (Σχ. 16.1.4 - 1 - **ημιανόρθωση** - half rectified sine wave function)

$$f(t)=\begin{cases}\sin t & \text{αν} \quad 0\le t<\pi\\ 0 & \text{αν} \quad \pi\le t<2\pi\end{cases} \qquad \text{και } f(t+2\pi)=f(t) \text{ για κάθε } t\ge 0.$$

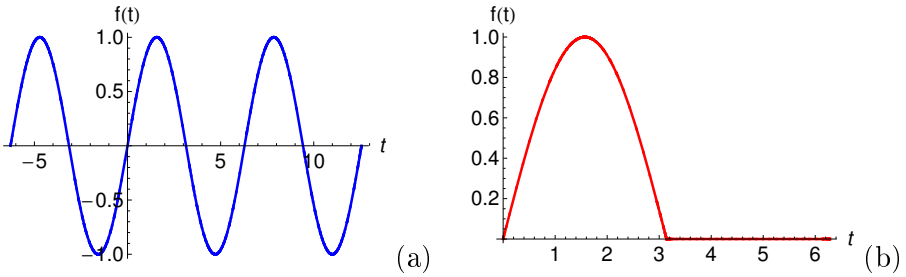
Λύση. Είναι $f(t)=0$ για κάθε $t<0$ και $T=2\pi$. Τότε

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-st}dt=\int_0^{\pi} e^{-st}\sin t dt=-\left.\frac{e^{-st}\left(s\sin t+\cos t\right)}{s^2+1}\right|_0^{\pi}=\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}.$$

Άρα

$$\mathcal{L}[f(t)]=\frac{1+e^{-\pi s}}{\left(s^2+1\right)\left(1-e^{-2\pi s}\right)}=\frac{e^{\pi s}}{\left(s^2+1\right)\left(e^{\pi s}-1\right)}, \quad \text{όταν } s>0.$$

■



Σχήμα 16.1.4 - 1: Παράδειγμα 16.1.4 - 1: (a) η συνάρτηση $\sin t$, όταν $t \in [-2\pi, 4\pi]$, (b) η συνάρτηση $\tilde{f}(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο, δηλαδή όταν $t \in [0, 2\pi]$.

Άσκηση

Να γίνει το διάγραμμα και να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων, που ο περιορισμός τους στη θεμελιώδη περίοδο είναι

$i)$ $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{αν} \quad 1 \le t < 2 \end{cases}$

$ii)$ $f(t) = t\,; \quad 0 \le t < 1$

$iii)$ $f(t) = e^t\,; \; 0 \le t < 2$

$iv)$ $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad 0 \le t < \pi \\ t - \pi & \text{αν} \quad \pi \le t < 2\pi \end{cases}$

$v)$ $f(t) = |\sin \omega t|\,; \;\; \omega > 0$

$vi)$ $f(t) = t^2\,; \quad 0 \le t < 1.$

16.1.5 Συνάρτηση γάμμα

Η **συνάρτηση γάμμα**[5] (gamma function) έχει πολλές εφαρμογές σε διάφορα προβλήματα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και ορίζεται από το γενικευμένο ολοκλήρωμα του μεικτού είδους

$$\Gamma(a) = \int_{0_+}^{+\infty} e^{-t}\, t^{a-1}\, dt. \qquad (16.1.5 - 1)$$

[5] Βλέπε Μάθημα *Ορισμένο Ολοκλήρωμα - Συνάρτηση γάμμα* και *http://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function*

Το ολοκλήρωμα (16.1.5−1) έχει έννοια, όταν $a > 0$ ή όταν ο a είναι μιγαδικός αριθμός με $\mathrm{Re}(a) > 0$.

Έστω η συνάρτηση $f(t) = t^a$ όπου $t > 0$ και $a \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \ldots\}$. Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 16.1.1 - 1 είναι

$$\mathcal{L}\,(t^a) = \int_{0+}^{+\infty} t^a e^{-st}\, dt. \qquad (16.1.5 - 2)$$

Αν $u = st$ με $u \in (0, +\infty)$ και $s > 0$, τότε $du = s\, dt$, οπότε η $(16.1.5 - 2)$ γράφεται

$$\mathcal{L}\,(t^a) = \frac{1}{s^{a+1}} \int_{0+}^{+\infty} u^a e^{-u}\, du. \qquad (16.1.5 - 3)$$

Από την $(16.1.5 - 3)$ και την (1.3-1) προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\,(t^a) = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}\,;\ \ a \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \ldots\}. \qquad (16.1.5 - 4)$$

Παράδειγμα 16.1.5 - 1

Σύμφωνα με την $(16.1.5 - 4)$ είναι

$$\mathcal{L}\left(t^{1/3}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3}+1)}{s^{\frac{1}{3}+1}} = \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{s^{4/3}} \approx 0.89298\, s^{-4/3}.$$

Η τιμή $\Gamma(\alpha)$ δίνεται από πίνακες, ενώ με το MATHEMATICA από την εντολή:

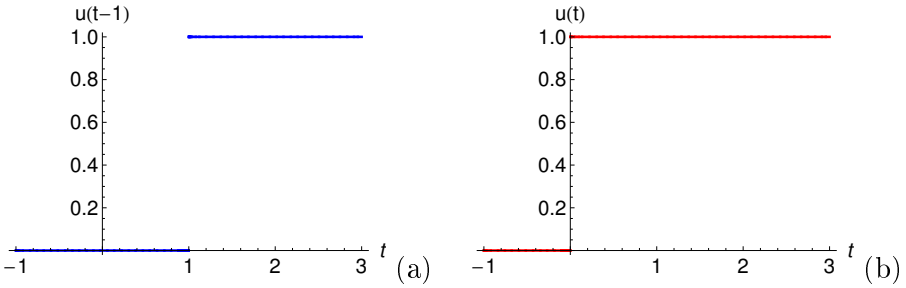
```
Gamma[a]
```

16.1.6 Μοναδιαία συνάρτηση του Heaviside

Ορισμός 16.1.6 - 1. *Η* **μοναδιαία βηματική συνάρτηση** *(unit step function) ή* **συνάρτηση Heaviside**[6] *(Heaviside step function) ορίζεται από τη σχέση*

$$u(t-a) = u_a(t) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \quad t < a \\ 1 & \alpha\nu \quad t > a, \end{cases} \qquad \mu\varepsilon\ \alpha \geq 0 \qquad (16.1.6 - 1)$$

[6] Βλέπε *http://en.wikipedia.org/wiki/Unit_step_function*



Σχήμα 16.1.6 - 1: (a) η συνάρτηση $u(t-1) = u_1(t)$, όταν $t \in [-1,3]$, (b) η $u(t) = u_0(t)$, όταν $t \in [-1,3]$.

όπου το a δείχνει την τιμή του t στην οποία η συνάρτηση αλλάζει από την τιμή 0 στην τιμή 1 (Σχ. 16.1.6 - 1 (a) όπου $a = 1$). Ειδικά, όταν $a = 0$, δηλαδή η αλλαγή γίνεται όταν $t = 0$, έχουμε τη συνάρτηση (Σχ. 16.1.6 - 1 (b))

$$u(t) = u_0(t) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \quad t < 0 \\ 1 & \alpha\nu \quad t > 0. \end{cases} \qquad (16.1.6 - 2)$$

Ορισμός 16.1.6 - 2 (ορθογώνιος παλμός ή συνάρτηση-φίλτρο). *Η συνάρτηση (Σχ. 16.1.6 - 2)*

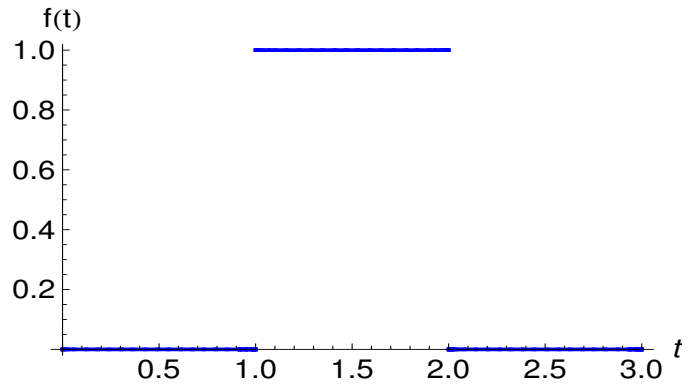
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \quad 0 < t < a \\ 1 & \alpha\nu \quad a < t < b \quad \text{όπου} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad b > a > 0 \\ 0 & \alpha\nu \quad t > b \end{cases} \qquad (16.1.6 - 3)$$

λέγεται ορθογώνιος παλμός ή συνάρτηση-φίλτρο.

Έχοντας υπόψη τον Ορισμό 16.1.6 - 1 και την $(16.1.6-1)$ ο ορθογώνιος παλμός εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός δύο συναρτήσεων Heaviside ως εξής:

$$f(t) = u(t-a) - u(t-b). \qquad (16.1.6 - 4)$$

Όπως άμεσα προκύπτει από τον Ορισμό 16.1.6 - 1 η συνάρτηση $u_a(t) = u(t-a)$ είναι συνεχής για κάθε $t \in \mathbb{R} - \{a\}$, ενώ για $a = 1$ παρουσιάζει ασυνέχεια ύψους 1. Άρα είναι τμηματικά συνεχής, ενώ προφανώς είναι εκθετικής



Σχήμα 16.1.6 - 2: ορθογώνιος παλμός ή συνάρτηση-φίλτρο, όταν $a = 1$, $b = 2$ και $t \in [0,3]$ (square wave). Σύμφωνα με την $(16.1.6-3)$ είναι $f(t) = u(t-1) - u(t-2)$.

τάξης, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 16.1.2 - 1 θα υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης u_a για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Τότε από την $(16.1.6-1)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u(t-a)] = \mathcal{L}\left[u_a(t)\right] &= \int_0^{+\infty} u(t-a)e^{-st}\,dt \\ &= \int_0^{a} u(t-a)e^{-st}\,dt + \int_a^{+\infty} u(t-a)e^{-st}\,dt \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-st}dt = \frac{e^{-as}}{s},\end{aligned}$$

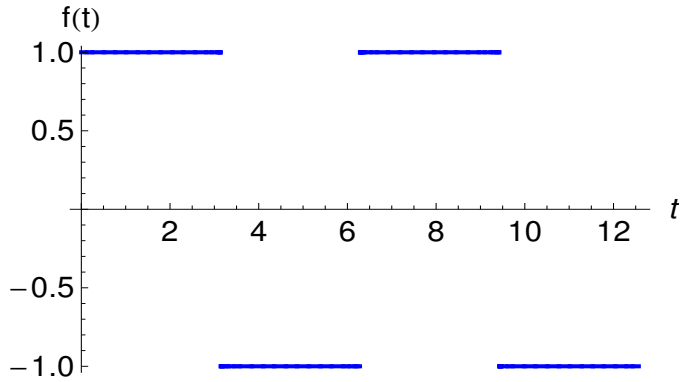
δηλαδή

$$\mathcal{L}[u(t-a)] = \mathcal{L}\left[u_a(t)\right] = \frac{e^{-as}}{s}, \quad \text{όταν } s>0 \text{ και } a \geq 0, \qquad (16.1.6\text{ - }5)$$

ενώ

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}\left[u_0(t)\right] = \frac{1}{s}, \quad \text{όταν } s>0. \qquad (16.1.6\text{ - }6)$$

Η χρησιμότητα της μοναδιαίας συνάρτησης στον μετασχηματισμό Laplace είναι σημαντική, επειδή με αυτήν είναι δυνατό να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός πολλών σύνθετων συναρτήσεων.



Σχήμα 16.1.6 - 3: Παράδειγμα 16.1.6 - 1: διάγραμμα της $f(t)$ όταν $t \in [0, 4\pi]$.

Παράδειγμα 16.1.6 - 1 (περιοδικός τετραγωνικός παλμός)

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της περιοδικής συνάρτησης (Σχ. 16.1.6 - 3)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad 0 < t < \pi \\ -1 & \text{αν} \quad \pi < t < 2\pi \end{cases} \qquad \text{και } f(t + 2\pi) = f(t) \text{ για κάθε } t \geq 0$$

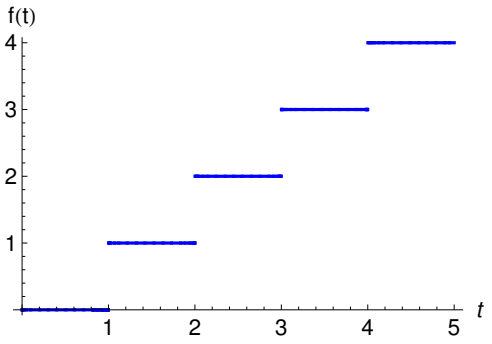
(periodic square wave).

Λύση. Σύμφωνα με τον Ορισμό 16.1.6 - 1, τη σχέση $(16.1.6 - 3)$ και το Σχ. 16.1.6 - 3 η $f(t)$ αναλυτικά στα επιμέρους διαστήματα περιγράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} (0, \pi) &: u(t) - u(t - \pi), \\ (\pi, 2\pi) &: -[u(t - \pi) - u(t - 2\pi)] = -u(t - \pi) + u(t - 2\pi), \\ (2\pi, 3\pi) &: u(t - 2\pi) - u(t - 3\pi), \\ (3\pi, 4\pi) &: -[u(t - 3\pi) - u(t - 4\pi)] = -u(t - 3\pi) + u(t - 4\pi), \ldots , \end{aligned}$$

οπότε

$$f(t) = u(t) - 2u(t - \pi) + 2u(t - 2\pi) - 2u(t - 3\pi) + 2u(t - 4\pi) \ldots .$$



Σχήμα 16.1.6 - 4: Παράδειγμα 16.1.6 - 2: το διάγραμμα της $f(t)$, όταν $t \in [0,5]$.

Άρα σύμφωνα με τους τύπους $(16.1.6-5)$ - $(16.1.6-6)$ έχουμε

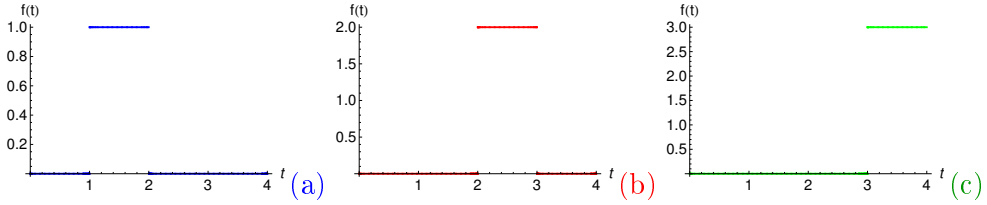
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{s} - 2\,\frac{e^{-\pi s}}{s} + 2\,\frac{e^{-2\pi s}}{s} - 2\,\frac{e^{-3\pi s}}{s} + \ldots \\
&= \frac{1}{s}\left[1 - 2e^{-\pi s}\left(\underbrace{1 - e^{-\pi s} + e^{-2\pi s} - \ldots}_{\text{γεωμετρική φθίνουσα πρόοδος με λόγο } e^{-\pi s}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{s}\left(1 - 2e^{-\pi s}\,\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\right) = \frac{1}{s}\,\frac{1-e^{-\pi s}}{1+e^{-\pi s}} \\
&= \frac{1}{s}\,\frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}\left(e^{-\frac{\pi s}{2}} - e^{-\frac{\pi s}{2}}\right)}{e^{-\frac{\pi s}{2}}\left(e^{-\frac{\pi s}{2}} + e^{-\frac{\pi s}{2}}\right)} = \frac{1}{s}\,\frac{e^{-\frac{\pi s}{2}} - e^{-\frac{\pi s}{2}}}{e^{-\frac{\pi s}{2}} + e^{-\frac{\pi s}{2}}} \\
&= \frac{1}{s}\,\tanh\left(\frac{\pi s}{2}\right), \quad \text{όταν} \quad s > 0.
\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 16.1.6 - 2 (κλιμακωτή συνάρτηση)

Όμοια της συνάρτησης $g(t)$ με διάγραμμα στο Σχ. 16.1.6 - 4 (staircase function).

Λύση. Η $g(t)$ αναλυτικά περιγράφεται στο Σχ. 16.1.6 - 5. Τότε όμοια



Σχήμα 16.1.6 - 5: (a) η συνάρτηση $u_1(t) - u_2(t)$ δημιουργεί το διάγραμμα της $f(t) = 1;\ 1 < t < 2$ με $f(t) = 0;\ t \leq 1$ ή $t \geq 2$, (b) $2[u_2(t) - u_3(t)]$ της $f(t) = 2;\ 2 < t < 3$ με $f(t) = 0;\ t \leq 2$ ή $t \geq 3$ και (c) $3[u_3(t) - u_4(t)]$ της $f(t) = 3;\ 3 < t < 4$ με $f(t) = 0;\ t \leq 3$ ή $t \geq 4$ όταν $t \in [0, 4]$.

σύμφωνα με τον Ορισμό 16.1.6 - 1 και τη σχέση $(16.1.6 - 3)$ έχουμε

$$\begin{aligned} g(t) &= u(t) - u(t-1) + 2[u(t-1) - u(t-2)] + 3[u(t-2) - u(t-3) + \dots \\ &= u(t) + u(t-1) + u(t-2) + \dots , \end{aligned}$$

οπότε

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + \dots = \frac{1}{s\,(1 - e^{-s})}, \quad \text{όταν } s > 0.$$

■

Το Θεώρημα 16.2.2 - 4 με χρήση της μοναδιαίας συνάρτησης γράφεται:

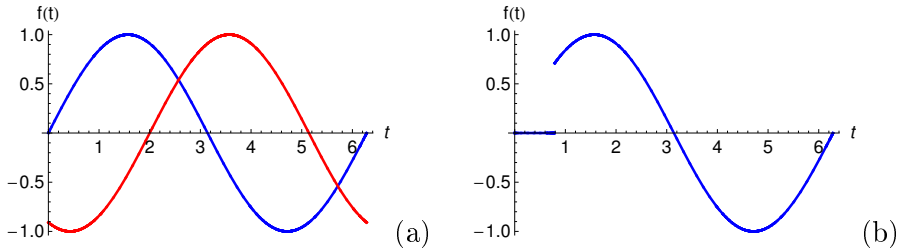
Θεώρημα 16.1.6 - 1 *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ και $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε*

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as}F(s) \quad \mu\varepsilon\ t > a > 0. \qquad (16.1.6 - 7)$$

Παρατηρήσεις 16.1.6 - 1

a. Το διάγραμμα της $f(t-a)$ με $a > 0$, προκύπτει από το διάγραμμα της $f(t)$ με μετατόπιση παράλληλη προς τη θετική φορά του t-άξονα κατά a μονάδες μήκους (Σχ. 16.1.6 - 6a).

b. Η μοναδιαία συνάρτηση $u(t-a)$, όταν πολλαπλασιαστεί με τη συνάρτηση $f(t)$, μηδενίζει το διάγραμμα της $f(t)$, στο τμήμα της που ορίζεται για $t \leq a$ (Σχ. 16.1.6 - 6b).



Σχήμα 16.1.6 - 6: (a): η συνάρτηση $\sin t$ μπλε και η $\sin(t-2)$ κόκκινη καμπύλη ($a=2$). (b): η συνάρτηση $u(t-\pi/4)\sin t$, όπου το διάγραμμα της $f(t)$ μηδενίζεται, όταν $t \le \pi/4$.

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 16.1.6 - 1b και το Θεώρημα 16.2.2 - 4 προκύπτει:

Πόρισμα 16.1.6 - 1 *Αν* $f \in D_{\mathcal{L}}$, *τότε*

$$\mathcal{L}[f(t)u(t-a)] = e^{-as}\,\mathcal{L}[g(t)] \quad \textit{όπου} \quad g(t) = f(t+a), \qquad (16.1.6\text{ - }8)$$

όταν $t > a > 0$.

Παράδειγμα 16.1.6 - 3

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης (Σχ. 16.1.6 - 7)

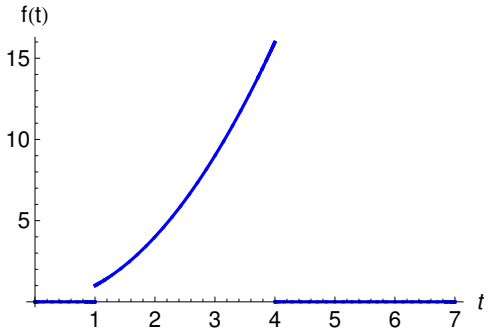
$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{αν} \quad 1 < t < 4 \\ \\ 0 & \text{αν} \quad t < 1 \ \text{ή} \ t > 4. \end{cases}$$

Λύση. Σύμφωνα με τη σχέση $(16.1.6-3)$ έχουμε

$$f(t) = t^2\,u(t-1) - t^2\,u(t-4),$$

οπότε από την $(16.1.6-8)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}\left[t^2\,u(t-1)\right] - \mathcal{L}\left[t^2\,u(t-4)\right] \\ &= e^{-s}\,\mathcal{L}\left[(t+1)^2\right] - e^{-4s}\,\mathcal{L}\left[(t+4)^2\right] \\ &= e^{-s}\,\mathcal{L}\left[t^2+2t+1\right] - e^{-4s}\,\mathcal{L}\left[t^2+8t+16\right] \\ &= e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right) - e^{-4s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{8}{s^2}+\frac{16}{s}\right). \end{aligned}$$



Σχήμα 16.1.6 - 7: Παράδειγμα 16.1.6 - 3: το διάγραμμα της $f(t)$, όταν $t \in [0,5]$.

■

Ασκήσεις

1. Να παρασταθούν με τη συνάρτηση Heaviside και στη συνέχεια να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων, που ο περιορισμός στη θεμελιώδη περίοδο είναι (k, $a > 0$):

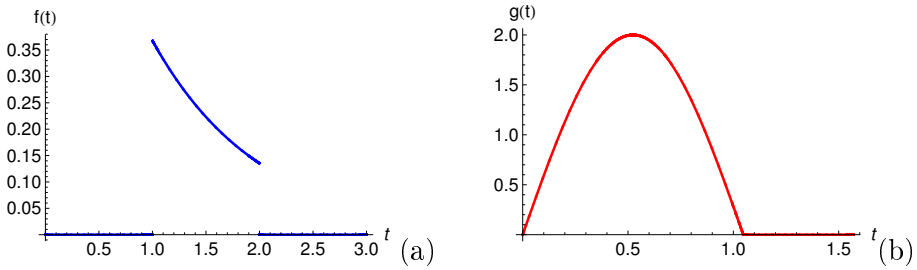
$$i)\quad f(t) = \begin{cases} k & \text{αν} \quad 0 < t < a \\ 0 & \text{αν} \quad a < t < 2a \end{cases} \qquad iii)\quad f(t) = \begin{cases} -1 & \text{αν} \quad 0 < t < 2 \\ -3 & \text{αν} \quad 2 < t < 4 \\ 1 & \text{αν} \quad 4 < t < 6 \end{cases}$$

$$ii)\quad f(t) = \begin{cases} 2 & \text{αν} \quad 0 < t < 1 \\ 1 & \text{αν} \quad 1 < t < 2 \\ 0 & \text{αν} \quad 2 < t < 3 \end{cases} \qquad iv)\quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad a < t < 2a \\ 2 & \text{αν} \quad 2a < t < 3a \\ 3 & \text{αν} \quad 3a < t < 4a. \end{cases}$$

2. Όμοια των συναρτήσεων (Σχ. 16.1.6 - 8):

$$a)\quad f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{αν} \quad 0 < t < 2 \\ 0 & \text{αν} \quad t < 1 \quad \text{ή} \quad t > 2 \end{cases}$$

$$b)\quad f(t) = \begin{cases} 2\sin 3t & \text{αν} \quad 0 < t < \dfrac{\pi}{3} \\ 0 & \text{αν} \quad t < 0 \quad \text{ή} \quad t > \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$



Σχήμα 16.1.6 - 8: (a) η συνάρτηση $f(t)$ και (b) η $g(t)$.

16.1.7 Συνάρτηση δέλτα του Dirac

Έστω ένας απλός ορθογώνιος παλμός πλάτους

$$d = \epsilon \quad \text{και ύψους} \quad h = f(a) = \frac{1}{\epsilon}$$

τη χρονική στιγμή $t = a$ (Σχ. 16.1.7 - 1 a), που περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\epsilon} & \text{αν} \quad a \le t \le a+\epsilon \\ 0 & \text{αν} \quad t < a \quad \text{ή} \quad t > a+\epsilon, \end{cases} \qquad \text{όταν} \quad a,\, \epsilon > 0. \qquad (16.1.7\text{ - }1)$$

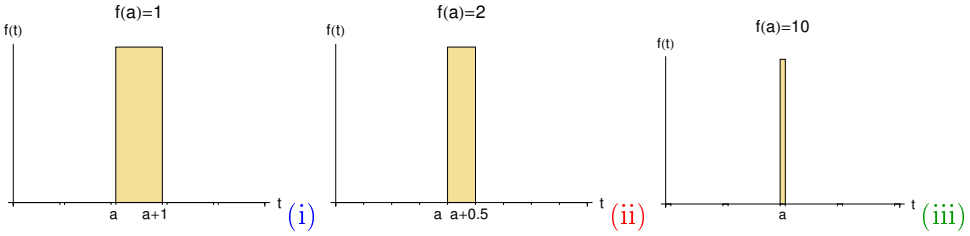
Τότε προφανώς το εμβαδόν E του παλμού θα είναι ίσο με

$$E = d\,h = 1.$$

Περιορίζοντας τώρα το πλάτος του παλμού σε $\tilde{d} = \epsilon/2$ (Σχ. 16.1.7 - 1 b), διατηρώντας το εμβαδόν ίσο με τη μονάδα, θα πρέπει το ύψος του παλμού να διπλασιαστεί, δηλαδή να γίνει $\tilde{h} = 2/\epsilon$. Συνεχίζοντας τη διαδικασία ελάττωσης του πλάτους (Σχ. 16.1.7 - 1 c), δηλαδή θεωρώντας ότι το πλάτος ϵ τείνει σταδιακά στο μηδέν και διατηρώντας πάντοτε το εμβαδόν του παλμού ίσο με 1, είναι προφανές ότι το ύψος του παλμού τείνει στο άπειρο.

Ορισμός 16.1.7 - 1. *Το όριο* $\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(t)$, *όταν η* $f_\epsilon(t)$ *δίνεται από την* $(16.1.7-1)$, *ορίζει τη συνάρτηση* **συνάρτηση δέλτα** *του Dirac (Dirac delta function)*[7] *ή της* **μοναδιαίας ώθησης** *(unit impulse function), που συμβολίζεται με* $\delta(t-a)$.

[7] Βλέπε *http://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function*



Σχήμα 16.1.7 - 1: Συνάρτηση δέλτα του Dirac: ο ορθογώνιος παλμός πλάτους $d = \epsilon$ και ύψους $h = f(a) = 1/\epsilon$ τη χρονική στιγμή $t = a$, όταν (i) $d = \epsilon = 1$, (ii) $\tilde{d} = 0.5$ και (iii) $\hat{d} = 0.1$.

Παρατηρήσεις 16.1.7 - 1

Η συνάρτηση δέλτα του Dirac

i) δεν είναι συνάρτηση, επειδή καμία συνάρτηση δεν είναι δυνατόν να ικανοποιεί τον Ορισμό 16.1.7 - 1. Μόνο για ιστορικούς λόγους αναφέρεται ως συνάρτηση, ενώ πρόκειται για **γενικευμένη συνάρτηση**.

ii) Στη θεωρία των παλμών και σε άλλες γενικότερα εφαρμογές, παρά τη φύση της, λόγω των ιδιοτήτων της αντιμετωπίζεται με λογισμό ανάλογο των συνηθισμένων συναρτήσεων.

Σύμφωνα με τον Ορισμό 16.1.7 - 1 η συνάρτηση δέλτα περιγράφεται ως εξής:

$$\delta(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad t \neq a \\ +\infty & \text{αν} \quad t = a, \end{cases} \qquad (16.1.7 - 2)$$

ενώ, όταν πρόκειται για τη χρονική στιγμή $t = 0$, οπότε $a = 0$, ως

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad t \neq 0 \\ +\infty & \text{αν} \quad t = 0. \end{cases} \qquad (16.1.7 - 3)$$

Από τις $(16.1.7 - 2)$ - $(16.1.7 - 3)$ προκύπτει ότι η συνάρτηση δέλτα του Dirac επαληθεύει την ταυτότητα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)\, dt = 1. \qquad (16.1.7 - 4)$$

Ιδιότητες 16.1 - 1

Δίνονται στη συνέχεια οι σημαντικότερες ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα $\delta(t)$:

I. Για κάθε k με $k \neq 0$ ισχύει (scaling property)

$$\delta(k\,t) = \frac{\delta(t)}{|k|}\,. \tag{16.1.7 - 5}$$

Επομένως

$$\delta(-t) = \delta(t), \tag{16.1.7 - 6}$$

δηλαδή η συνάρτηση $\delta(t)$ είναι **άρτια** συνάρτηση.

II. Αν $f(t)$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, τότε

$$\int_{\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-a)\,dt = f(a) \tag{16.1.7 - 7}$$

(sifting or sampling property).

Μετασχηματισμός Laplace

Η συνάρτηση $(16.1.7-1)$ σύμφωνα με τη $(16.1.6-4)$ γράφεται

$$f_\epsilon(t) = u(t-a) - u(t-a-\epsilon), \tag{16.1.7 - 8}$$

οπότε έχοντας υπόψη και την $(16.1.6-5)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f_\epsilon(t)\right] &= \frac{1}{\epsilon}\,\mathcal{L}\left[u(t-a) - u(t-a-\epsilon)\right] \\
&= \frac{1}{\epsilon}\left[\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-(a+\epsilon)s}}{s}\right] = e^{-as}\,\left(\frac{1-e^{\epsilon\,s}}{\epsilon\,s}\right).
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\delta(t-a)] &= \lim_{\epsilon\,\to\,0}\mathcal{L}\left[f_\epsilon(t)\right] = e^{-as}\,\lim_{\epsilon\,\to\,0}\frac{1-e^{\epsilon\,s}}{\epsilon\,s} \\
&= \text{(κανόνας de L'Hôpital)} \quad e^{-as}\,\cdot\,1 = e^{-as},
\end{aligned}$$

δηλαδή ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης δέλτα του Dirac είναι

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-as}, \qquad (16.1.7 - 9)$$

όταν $a,\, s > 0$, ενώ, όταν $a = 0$, είναι

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1. \qquad (16.1.7 - 10)$$

Παρατήρηση 16.1.7 - 1

Στην $(16.1.7-9)$, όταν $a < 0$, τότε

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = 0.$$

Παράδειγμα 16.1.7 - 1

Από την $(16.1.7-9)$ προκύπτει

$$\mathcal{L}[\delta(t-1)] = e^{-s}, \qquad \mathcal{L}[\delta(t-3)] = e^{-3s},$$

ενώ

$$\mathcal{L}[\delta(t+2)] = \mathcal{L}[\delta(t-(\overbrace{-2}^{a}))] = 0$$

σύμφωνα με την Παρατήρηση 16.1.7 - 1, κ.λπ.

Από την $(16.1.7-9)$ σε συνδυασμό με την $(16.1.7-7)$ προκύπτει

$$\mathcal{L}[f(t)\delta(t-a)] = f(a)e^{-as}. \qquad (16.1.7 - 11)$$

Από τον τύπο $(16.2.2-5)$[8] και τον $(16.1.7-9)$ έχουμε

$$\mathcal{L}\left[t^n\delta(t-a)\right] = (-1)^n\left[e^{-as}\right]^{(n)} = (-1)^n\left[(-1)^n\, a^n e^{-as}\right] = a^n\, e^{-as},$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}\left[t^n\delta(t-a)\right] = a^n\, e^{-as}, \qquad (16.1.7 - 12)$$

όταν $a > 0$ και $n = 1,\, 2,\, \ldots$. Ειδικά όταν $a \leq 0$, τότε

$$\mathcal{L}\left[t^n\delta(t-a)\right] = 0. \qquad (16.1.7 - 13)$$

[8] Αν $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε $\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n F^{(n)}(s)$, όταν $n = 1,\, 2,\, \ldots$.

Παράδειγμα 16.1.7 - 2

Σύμφωνα με τον τύπο $(16.1.7-12)$ είναι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[t\delta(t-1)\right] &= e^{-s} \qquad (a=1,\, n=1),\\ \mathcal{L}\left[t^2\delta(t-3)\right] &= 3^2e^{-3s}=9\,e^{-3s} \qquad (a=3,\, n=2),\end{aligned}$$

ενώ σύμφωνα με τον $(16.1.7-13)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[t^4\delta(t)\right] &= 0 \qquad (a=0,\, n=4),\\ \mathcal{L}\left[t^3\delta(t+2)\right] &= 0 \qquad (a=-2,\, n=3).\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά τον τύπο $(16.2.2-5)$ αποδεικνύεται ότι

$$\mathcal{L}\left[\delta^{\,(n)}(t-a)\right]=s^n\,e^{-as}, \qquad (16.1.7\text{ - }14)$$

όταν $a\geq 0$ και $n=1,\,2,\,\ldots$.

Ειδικά, όταν $a<0$, είναι

$$\mathcal{L}\left[\delta^{\,(n)}(t-a)\right]=0. \qquad (16.1.7\text{ - }15)$$

Παράδειγμα 16.1.7 - 3

Σύμφωνα με την $(16.1.7-14)$ είναι

$$\mathcal{L}\left[\delta^{\,(7)}(t-1)\right]=s^7\,e^{-s}, \qquad \mathcal{L}\left[\delta^{\,(5)}(t)\right]=s^5,$$

ενώ σύμφωνα με την $(16.1.7-15)$

$$\mathcal{L}\left[t^2\,\delta(t+3)\right]=\mathcal{L}\left[t^2\,\delta(t-(\overbrace{-3}^{a}))\right]=0.$$

16.2 Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

16.2.1 Ορισμός και βασικό θεώρημα

Από το Θεώρημα 16.1.2 - 1 προκύπτουν τα εξής:

Παρατηρήσεις 16.2.1 - 1

i) Αν η συνάρτηση $f(t)$ είναι συνεχής ή τμηματικά συνεχής στο $[0,+\infty)$ και εκθετικής τάξης, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{L}[f(t)]$.

ii) Έστω ότι $f(t), g(t)$ δύο συναρτήσεις ορισμένες στο $[0,+\infty)$. Τότε, αν υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ και αν η συνάρτηση $g(t)$ διαφέρει από τη $f(t)$ σε πεπερασμένο μόνο πλήθος σημείων του $[0,+\infty)$, τότε υπάρχει και ο μετασχηματισμός Laplace της $g(t)$ και ισχύει $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$, όπως αυτό προκύπτει από το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 16.2.1 - 1

Έστω ότι

$$f(t) = e^{-2t} \quad \text{με} \quad \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s+3}$$

και

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad t = 1 \\ e^{-2t} & \text{αν} \quad t \in [0,+\infty) - \{1\}, \end{cases} \qquad \text{με} \quad \mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s+3}\,,$$

δηλαδή $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$, ενώ προφανώς $f(t) \neq g(t)$.

Από την Παρατήρηση 16.2.1 - 1 (ii) προκύπτει ότι, αν $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ και υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f(t)$ της $\mathcal{L}^{-1}F(s)$, τότε η $f(t)$ δεν είναι πάντοτε μονοσήμαντα ορισμένη.

Το μονοσήμαντο του αντίστροφου μετασχηματισμού $\mathcal{L}^{-1}$ εξασφαλίζεται με το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 16.2.1 - 1. *Έστω ότι η $f(t)$ είναι μια πραγματική, συνεχής ή τμηματικά συνεχής, εκθετικής τάξης συνάρτηση για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Αν για τον μετασχηματισμό Laplace ισχύει ότι $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ ορίζει μονοσήμαντα την $f(t)$.*

Στο εξής θα θεωρείται ότι οι συναρτήσεις πληρούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 16.2.1 - 1, οπότε η αντίστροφη συνάρτηση του μετασχηματισμού Laplace θα είναι μονοσήμαντα ορισμένη.

16.2.2 Ιδιότητες αντίστροφου μετασχηματισμού

Οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace ισχύουν ανάλογα και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Οι σημαντικότερες από αυτές δίνονται στη συνέχεια.

Θεώρημα 16.2.2 - 1 (γραμμική ιδιότητα). *Αν $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ και $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$, τότε αν $k, \lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[kF(s) + \lambda G(s)] &= k\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + \lambda\mathcal{L}^{-1}[G(s)] \\ &= kf(t) + \lambda g(t). \end{aligned} \qquad (16.2.2 - 1)$$

Παράδειγμα 16.2.2 - 1

Έστω $f(t) = e^{-3t}$ και $g(t) = e^{t}$. Τότε

$$\mathcal{L}\left[e^{-3t}\right] = \frac{1}{s+3} = F(s) \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\left[e^{t}\right] = \frac{1}{s-1} = G(s),$$

οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 16.2.2 - 1 έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[2\,F(s) + 5\,G(s)] &= 2\,\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + 5\,\mathcal{L}^{-1}[G(s)] \\ &= 2\,e^{-3t} + 5\,e^{t}. \end{aligned}$$

Θεώρημα 16.2.2 - 2. *Αν $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, τότε*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(ks)] = \frac{1}{k}\,f\left(\frac{t}{k}\right) \quad \mu\varepsilon \quad k > 0. \qquad (16.2.2 - 2)$$

Παράδειγμα 16.2.2 - 2

Έστω

$$f(t) = \cos 4t, \quad \text{οπότε} \quad \mathcal{L}[f(t)] = \frac{s}{s^2+16} = F(s).$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 16.2.2 - 2, όταν $k = 2$, έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}[F(\mathbf{2}s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbf{2}s}{(\mathbf{2}s)^2+16}\right] = \frac{1}{\mathbf{2}}\cos\left(4\frac{t}{\mathbf{2}}\right) = \frac{1}{2}\cos 2t.$$

Θεώρημα 16.2.2 - 3 (προπορείας). *Αν* $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, *τότε*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s+a)] = e^{-at}f(t), \quad \textit{όταν} \quad s+a>0 \ \textit{και} \ a>0. \qquad (16.2.2 - 3)$$

Παράδειγμα 16.2.2 - 3

Έστω

$$f(t) = \sin 2t, \quad \text{οπότε} \quad F(s) = \frac{2}{s^2+4}.$$

Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 16.2.2 - 3 έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^2+4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+\underbrace{(-1)}_{a=-1})^2+4}\right] = e^{-(-1)t}\sin 2t = e^t \sin 2t.$$

Θεώρημα 16.2.2 - 4 (υστέρησης). *Αν* $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, *τότε*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as}F(s)\right] = \begin{cases} f(t-a) & \textit{αν} \quad t>a \\ 0 & \textit{αν} \quad t<a, \end{cases} \quad \textit{όταν} \quad a>0. \qquad (16.2.2 - 4)$$

Παράδειγμα 16.2.2 - 4

Έστω

$$f(t) = \cos t, \quad \text{οπότε} \quad F(s) = \frac{s}{s^2+1}.$$

Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 16.2.2 - 4 έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s\overbrace{\pi/3}^{a=\pi/3}}F(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s\,e^{-\pi s/3}}{s^2+1}\right]$$

$$= \begin{cases} \cos(t-\pi/3) & \text{αν} \quad t > \pi/3 \\ 0 & \text{αν} \quad t < \pi/3. \end{cases}$$

Θεώρημα 16.2.2 - 5. *Αν* $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, *τότε*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F^{(n)}(s)\right] = (-1)^n t^n f(t). \qquad (16.2.2\text{ - }5)$$

Παράδειγμα 16.2.2 - 5

Όμοια, έστω

$$f(t) = \cos t, \quad \text{οπότε} \quad F(s) = \frac{s}{s^2+1}\,.$$

Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 16.2.2 - 5 έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F^{(2)}(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)^{(2)}$$

$$= (-1)^2 t^2 \cos t = t^2 \cos t.$$

Σημείωση 16.2.2 - 1

Για τον αντίστροφο μετασχηματισμό των Θεωρημάτων $1.2-6$ και $1.2-7$ ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

16.2.3 Μέθοδοι υπολογισμού

Δίνονται τώρα οι σημαντικότερες μέθοδοι προσδιορισμού της αντίστροφης συνάρτησης για μορφές της $F(s)$, που κύρια εμφανίζονται στις εφαρμογές.

Πίνακας 16.2.3 - 1: των κυριότερων μετασχηματισμών Laplace.

α/α	$f(t)$	$F(s)$	α/α	$f(t)$	$F(s)$
1	A	$\frac{A}{s}$	11	$e^{bt}\sinh at$	$\frac{a}{(s-b)^2-a^2}$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	12	$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
3	$t^n;\ n=1,\,2,\,\ldots$	$\frac{n\,!}{s^{n+1}}$	13	$t^2\sin\omega t$	$\frac{2\omega\left(3s^2-\omega^2\right)}{\left(s^2+\omega^2\right)^3}$
4	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	14	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
5	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	15	$t^2\cos\omega t$	$\frac{2s\left(s^2-3\omega^2\right)}{\left(s^2+\omega^2\right)^3}$
6	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	16	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
7	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	17	$\delta(t-a)$	e^{-as}
8	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18	$\delta'(t)$	s
9	$e^{bt}\cosh at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	19	$\delta''(t)$	s^2
10	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	20	$\frac{\sin at}{t}$	$\tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)$

Με αναφορά στον Πίνακα 16.2.3 - 1

Παράδειγμα 16.2.3 - 1

Έστω

$$F(s) = \frac{1}{s^3}$$

που για ευκολία γράφεται και

$$F(s) = \frac{1}{s^{2+1}} = \frac{1}{2!}\,\frac{2!}{s^{2+1}}\,.$$

Τότε η $F(s)$ σύμφωνα με τον τύπο 3 του Πίνακα 16.2.3 - 1 και τη γραμμική ιδιότητα 16.2.2 - 1 δίνει ως αντίστροφη συνάρτηση την

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{t^2}{2}\,.$$

Παράδειγμα 16.2.3 - 2

Έστω

$$F(s) = \frac{2}{s^2+4} = \frac{2}{s^2+2^2}\,.$$

Όμοια με τον τύπο 4 του Πίνακα 16.2.3 - 1 είναι

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sin 2t.$$

Παράδειγμα 16.2.3 - 3

Έστω

$$F(s) = \frac{5}{s^2+2s+37}$$

που γράφεται και

$$F(s) = \frac{5}{6}\,\frac{6}{(s+\underbrace{1}_{a=1})^2+(\underbrace{6}_{\omega=6})^2}\,.$$

Τότε ο τύπος 5 του Πίνακα 16.2.3 - 1 δίνει ως αντίστροφη συνάρτηση την

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{5}{6}\,e^{-t}\sin 6t.$$

Σημειώσεις 16.2.3 - 1

i) Όταν στον παρονομαστή υπάρχει ως παράγοντας τριώνυμο με ρίζες μιγαδικές ($\Delta < 0$) ή ειδική περίπτωση φανταστικές, τότε ο παρονομαστής μετασχηματίζεται σε άθροισμα τετραγώνων σύμφωνα με τον τύπο

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}\,. \qquad (16.2.3\text{ - }1)$$

ii) Η περίπτωση (i) εφαρμόζεται μόνον, όταν ο αριθμητής είναι βαθμού μικρότερου του παρονομαστή.

Παράδειγμα 16.2.3 - 4

Έστω

$$F(s) = \frac{2s+1}{s^2+4s+5}\,.$$

Επειδή η διακρίνουσα του παρονομαστή είναι $\Delta = 4^2 - 20 = -4 < 0$ σύμφωνα με τη Σημείωση 16.2.3 - 1 (i) ο παρονομαστής γράφεται:

$$s^2 + 4s + 5 = (s+2)^2 + 1^2.$$

Στη συνέχεια δημιουργείται στον αριθμητή το $s+2$ ως εξής:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2s+1}{s^2+4s+5} = \frac{2s+1}{(s+2)^2+1^2} = \frac{2s+4-4+1}{(s+2)^2+1^2} \\ &= \frac{2s+4\overbrace{-4+1}^{-3}}{(s+2)^2+1^2} = 2\,\frac{s+2}{(s+2)^2+1^2} - 3\,\frac{1}{(s+2)^2+1^2}\,. \end{aligned}$$

Άρα ο αντίστροφος μετασχηματισμός θα είναι συνδυασμός των τύπων 5 και 7 του Πίνακα 16.2.3 - 1, δηλαδή

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2\,e^{-2t}\cos 2t - 3\,e^{-2t}\sin t = e^{-2t}\,(2\cos 2t - 3\sin t)\,.$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν οι αντίστροφες των παρακάτω συναρτήσεων $F(s)$:

$i)$ $\dfrac{2}{s^4}$ $\qquad$ $vii)$ $\dfrac{6}{(s+1)^4}$

$ii)$ $\dfrac{1}{(s+3)^2}$ $\qquad$ $viii)$ $\dfrac{1}{9s^2+4}$

$iii)$ $\dfrac{2(s+2)}{s^2+4}$ $\qquad$ $ix)$ $\dfrac{s-1}{4s^2+9}$

$iv)$ $\dfrac{s-1}{s^2-9}$ $\qquad$ $x)$ $\dfrac{1}{s^2+4s+4}$

$v)$ $\dfrac{1}{s^2+8s+17}$ $\qquad$ $xi)$ $\dfrac{4s+1}{s^2+2s+1}$

$vi)$ $\dfrac{s}{s^2-2s+1}$ $\qquad$ $xii)$ $\dfrac{s}{s^2+s+1}$.

Απαντήσεις

$(i)\ \frac{t^3}{3}$, $(ii)\, t\, e^{-3t}$, $(iii)\, 2(\cos 2t + \sin 2t)$, $(iv)\ \frac{2e^{-3t}}{3} + \frac{e^{3t}}{3}$, $(v)\, e^{-4t}\sin t$, $(vi)\, e^t(1+t)$, $(vii)\, t^3 e^{-t}$, $(viii)\ \frac{1}{6}\sin\left(\frac{2t}{3}\right)$, $(ix)\ \frac{1}{4}\cos\left(\frac{3t}{2}\right) - \frac{1}{6}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)$, $(x)\, t\, e^{-2t}$, $(xi)\ (4-3\,t)\, e^{-t}$, $(xii)\ -\frac{1}{3}e^{-t/2}\left[-3\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \sqrt{3}\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right]$.

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα

Έστω ότι η συνάρτηση $F(s)$ είναι ρητή, δηλαδή είναι της μορφής

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}\,,$$

όταν $P(s)$ και $Q(s)$ είναι ακέραια πολυώνυμα του s.

Για τον βαθμό του πολυωνύμου $P(s)$ διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

I. Ο βαθμός του $P(s)$ μικρότερος από τον βαθμό του $Q(s)$

Τότε η συνάρτηση $F(s)$ αναλύεται κατά τα γνωστά σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Παράδειγμα 16.2.3 - 5

Έστω

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}$$

με ρίζες του παρονομαστή τις -1 και -2. Τότε

$$\frac{s-1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1}\,.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με το $(s+1)(s+2)$, έχουμε

$$s-1 = (A+B)s + (A+2B).$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίσων δυνάμεων του s, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcr} A & + & B & = & 1 \\ A & + & 2B & = & -1, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad A = 3 \text{ και } B = -2.$$

Τότε

$$F(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1}\,.$$

Άρα

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 3e^{-2t} - 2e^{-t}.$$

Παράδειγμα 16.2.3 - 6

Όμοια, έστω

$$F(s) = \frac{1}{s\,(s^2+9)}\,.$$

Θέτοντας

$$\frac{1}{s\,(s^2+9)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+9}$$

και σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία, τελικά προκύπτει

$$F(s) = \frac{1}{9}\frac{1}{s} - \frac{1}{9}\frac{s}{s^2+9}\,,$$

οπότε

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos 3t.$$

Παράδειγμα 16.2.3 - 7

Έστω

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)^2}\,.$$

Ο παρονομαστής έχει πρωτοβάθμιο όρο υψωμένο σε δύναμη, οπότε στην περίπτωση αυτή η ανάλυση σε απλά κλάσματα έχει την παρακάτω μορφή:[9]

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{\overbrace{B}^{\text{αντί } Bs+C}}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+2}\,,$$

οπότε τελικά προκύπτει

$$F(s) = \frac{1}{9}\,\frac{1}{s-1} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{(s+2)^2} - \frac{1}{9}\,\frac{1}{s+2}\,.$$

Άρα

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{9}\,e^{-2t}\left(-1 - 3t + e^{3t}\right).$$

Παράδειγμα 16.2.3 - 8

Έστω

$$F(s) = \frac{1}{s^3\,(s^2+4)}\,.$$

Έχουμε σύμφωνα με την ανάλυση του Παραδείγματος 16.2.3 - 7 ότι

$$\frac{1}{s^3\,(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+4}\,,$$

οπότε

$$F(s) = -\frac{1}{16}\,\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{s^3} + \frac{1}{16}\,\frac{s}{s^2+4}\,.$$

Άρα

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{16}\left(-1 + 2t^2 + \cos 2t\right).$$

[9] Βλέπε Μάθημα *Αόριστο Ολοκλήρωμα*.

II. Ο βαθμός του $P(s)$ μεγαλύτερος ή ίσος από τον βαθμό του $Q(s)$

Τότε γίνεται πρώτα η διαίρεση των πολυωνύμων, οπότε η περίπτωση αυτή ανάγεται τελικά στην προηγούμενη.

Ο υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace στην περίπτωση αυτή θα γίνει μόνο σε ειδικές περιπτώσεις με χρήση της συνάρτησης του Dirac. Για μια γενικότερη μελέτη ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

Παράδειγμα 16.2.3 - 9

Έστω

$$F(s) = \frac{s^4}{(s-1)(s+2)}\,.$$

Μετά τη διαίρεση και την ανάλυση σε απλά κλάσματα προκύπτει

$$F(s) = s^2 - s + 3 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{s-1} - \frac{16}{3}\,\frac{1}{s+2}\,.$$

Τότε σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία και τους τύπους 17, 18 και 19 του Πίνακα 16.2.3 - 1 προκύπτει

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \delta''(t) - \delta'(t) + 3\,\delta(t) + \frac{1}{3}\,e^t - \frac{16}{3}\,e^{-2t}.$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί η συνάρτηση $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, όταν η $F(s)$ είναι ίση με

i) $\dfrac{1}{s\,(s^2-4)}$

ii) $\dfrac{1}{s^3-s}$

iii) $\dfrac{1}{s\,(s^2-4s+4)}$

iv) $\dfrac{1}{s\,(s^2+\pi^2)}$

v) $\dfrac{1}{s^3+8}$

vi) $\dfrac{s}{s^4-1}$

vii) $\dfrac{s+1}{s^3-1}$

viii) $\dfrac{s}{(s+2)\,(s^2+1)}\,.$

Απαντήσεις

$(i)\ -\frac{1}{4}+\frac{e^{-2t}}{8}+\frac{e^{2t}}{8}\,,\quad (ii)\ -1+\frac{e^{-t}}{2}+\frac{e^{t}}{2}\,,\quad (iii)\ \frac{1}{4}-\frac{e^{2t}}{4}+\frac{1}{2}\,t\,e^{2t}\,,\quad (iv)\ \frac{1}{\pi^2}-\frac{\cos\pi t}{\pi^2}\,,$

$(v)\ \frac{e^{-2t}}{12}-\frac{1}{12}\,e^{t}\,\cos\left(\sqrt{3}t\right)+\frac{e^{t}\,\sin\left(\sqrt{3}t\right)}{4\sqrt{3}}\quad (vi)\ \frac{e^{-t}}{4}+\frac{e^{t}}{4}-\frac{\cos t}{2}\,,$

$(vii)\ \frac{2\,e^{t}}{3}-\frac{2}{3}\,e^{-t/2}\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right),\quad (viii)\ -\frac{2}{5}\,e^{-2t}+\frac{2\cos t}{5}+\frac{\sin t}{5}.$

16.3 Εφαρμογές στη λύση Διαφορικών Εξισώσεων

16.3.1 Γραμμική 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές έχει τη μορφή

$$\mathbf{y'+a\,y=r(x)},\tag{16.3.1 - 1}$$

όταν α σταθερά, $y=y(x)$ με $x\in(\alpha,\beta)\subseteq\mathbb{R}$. Η αντίστοιχη **ομογενής** είναι

$$\mathbf{y'+a\,y=0}.\tag{16.3.1 - 2}$$

Έστω ότι οι συναρτήσεις $y, r \in D_{\mathcal{L}}$ και ορίζονται για κάθε $x \geq 0$. Θεωρώντας τον μετασχηματισμό Laplace της μη ομογενούς εξίσωσης (16.3.1−1) έχουμε

$$\mathcal{L}\left(y'+ay\right)=\mathcal{L}[r(x)],$$

που σύμφωνα με γνωστές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace[10] γράφεται

$$s\mathcal{L}(y)-y(0)+\alpha\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}[r(x)].$$

[10] Βλέπε Παράγραφος 16.1.3 **Θεώρημα 16.2.2 - 1 (γραμμική ιδιότητα):** *Έστω* $f, g \in D_{\mathcal{L}}$. *Τότε αν* $k, \lambda \in \mathbb{R}$ *ισχύει*

$$\mathcal{L}[kf(t)+\lambda g(t)]=k\mathcal{L}[f(t)]+\lambda\mathcal{L}[g(t)]$$

και **Θεώρημα 16.1.3 - 6 (παραγώγου 1ης τάξης):** *Αν* $f \in D_{\mathcal{L}}$ *και υπάρχει η πρώτης τάξης παράγωγος της* f *και είναι συνεχής συνάρτηση ή κατά τμήματα συνεχής για κάθε* $t \geq 0$, *τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου* f' *και ισχύει*

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right]=s\,\mathcal{L}[f(t)]-f(0)\quad \text{με}\quad s>a>0.$$

Θέτοντας

$$Y(s) = \mathcal{L}(y) \quad \text{με} \quad y(0) = y_0 \quad \textbf{αρχική συνθήκη}$$

και λύνοντας αλγεβρικά ως προς $Y(s)$, τελικά έχουμε τον παρακάτω τύπο υπολογισμού της μετασχηματισμένης συνάρτησης $Y(s)$ της μερικής λύσης της $(16.3.1-1)$

$$\mathbf{Y(s)} = \frac{\mathcal{L}[\mathbf{r(x)}]}{\mathbf{s+a}} + \frac{\mathbf{y_0}}{\mathbf{s+a}} \quad \text{με} \quad s+a>0. \qquad (16.3.1\text{ - }3)$$

Τότε από την $(16.3.1-3)$ προκύπτει η μερική λύση της $(16.3.1-1)$ ως εξής:

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)].$$

Παρατηρήσεις 16.3.1 - 1

Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace:

i) εφαρμόζεται κυρίως, όταν ζητείται η μερική λύση της $(16.3.1-1)$, δηλαδή έχουν δοθεί και οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος ή όταν η είσοδος $r(x)$ είναι περιοδική, μοναδιαία κρούση, κ.λπ.,[11]

ii) δεν εφαρμόζεται, όταν η $f(x)$ δεν είναι σταθερά και γενικότερα δεν εφαρμόζεται σε μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου σε σχέση με την αντίστοιχη κλασική μέθοδο είναι ότι η διαφορική εξίσωση λύνεται με αλγεβρικό τρόπο και εισάγονται στη λύση άμεσα, χωρίς να χρειάζεται επιπλέον υπολογισμός, οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Παράδειγμα 16.3.1 - 1

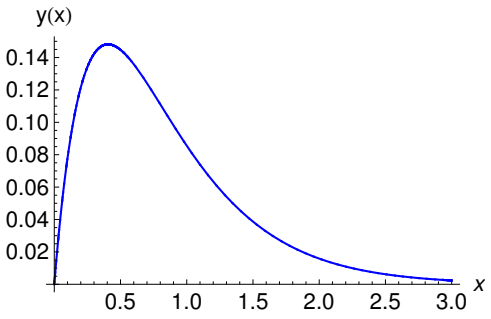
Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + 2y = e^{-3x}, \quad \text{όταν} \quad y(0) = 0. \qquad (1)$$

Λύση. Έστω ότι η (1) ορίζεται για κάθε $x \geq 0$. Είναι $r(x) = e^{-3x}$, οπότε σύμφωνα με τον τύπο 2 του Πίνακα 16.2.3 - 1 έχουμε

$$\mathcal{L}\left[e^{-3x}\right] = \frac{1}{s+3}, \quad \text{όταν} \quad s+3>0.$$

[11] Βλέπε Μάθημα *Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών*.



Σχήμα 16.3.1 - 1: Παράδειγμα 16.3.1 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-3x}\left(-1+e^{x}\right)$, όταν $x \in [0,3]$.

Έστω $y(x)$ η μερική λύση της (1). Επειδή σύμφωνα με την (1) είναι $a = 2$, θέτοντας στην $(16.3.1-3)$

$$Y(s) = \mathcal{L}(y) \quad \text{με} \quad y(0) = y_0 = 0$$

μετά την ανάλυση σε απλά κλάσματα του δεξιού μέλους, προκύπτει

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\frac{1}{s+3}}{s+2} + \frac{0}{s+2} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}, \quad \text{όταν} \quad s+2>0. \end{aligned}$$

Άρα η μερική λύση είναι (Σχ. 16.3.1 - 1)

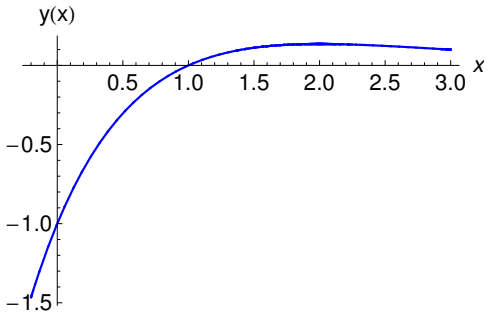
$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-2x} - e^{-3x} = e^{-3x}\left(-1+e^{x}\right).$$

■

Παράδειγμα 16.3.1 - 2

Όμοια η διαφορική εξίσωση

$$y' + y = e^{-x} \quad \text{όταν} \quad y(0) = -1. \tag{2}$$



Σχήμα 16.3.1 - 2: Παράδειγμα 16.3.1 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-x}\,(-1+x)$, όταν $x \in [-0.2, 3]$.

Λύση.

Αν όμοια υποτεθεί ότι η (2) ορίζεται για κάθε $x \geq 0$ και $r(x) = e^{-x}$, τότε σύμφωνα με τον τύπο 2 του Πίνακα 16.2.3 - 1 θα είναι

$$\mathcal{L}\left[e^{-x}\right] = \frac{1}{s+1}\,, \quad \text{όταν} \quad s+1 > 0.$$

Έστω $y(x)$ η μερική λύση της (2). Επειδή σύμφωνα με την (2) είναι $a = 1$, όμοια θέτοντας

$$Y(s) = \mathcal{L}(y) \quad \text{με} \quad y(0) = y_0 = -1$$

στην $(16.3.1 - 3)$ προκύπτει ότι

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{s+1} + \frac{-1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}, \quad \text{όταν} \quad s+1 > 0.$$

Άρα η μερική λύση είναι (Σχ. 16.3.1 - 2)

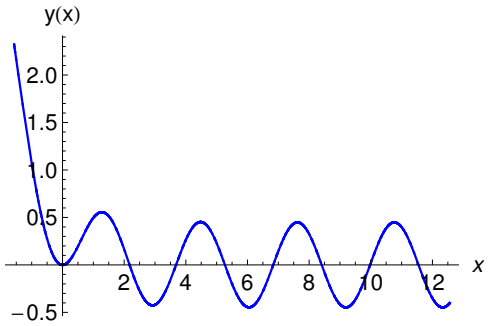
$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = x\,e^{-x} - e^{-x} = e^{-x}\,(-1+x)\,.$$

■

Παράδειγμα 16.3.1 - 3

Όμοια η διαφορική εξίσωση

$$y' + y = \sin 2x, \quad \text{όταν} \quad y(0) = 0. \tag{3}$$



Σχήμα 16.3.1 - 3: Παράδειγμα 16.3.1 - 3: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = \frac{2}{5}\, e^{-x} + \frac{1}{5}\, (-2\cos 2x + \sin 2x)$, όταν $x \in [-\pi/3, 10\pi]$.

Λύση. Όμοια έστω ότι η (3) ορίζεται για κάθε $x \geq 0$. Είναι $r(x) = \sin 2x$, οπότε σύμφωνα με τον τύπο 4 του Πίνακα 16.2.3 - 1 θα είναι

$$\mathcal{L}\left[\sin 2x\right] = \frac{2}{s^2+4}\,.$$

Αν $y(x)$ η μερική λύση της (3), τότε $a = 1$, οπότε θέτοντας

$$Y(s) = \mathcal{L}(y) \quad \text{με} \quad y(0) = y_0 = 0$$

στην $(16.3.1 - 3)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{2}{s^2+4}} = \frac{2}{(s+1)\,(s^2+4)} = \frac{2}{5}\,\frac{1}{s+1} - \frac{2}{5}\,\frac{s-1}{s^2+4} \\ &= \frac{2}{5}\,\frac{1}{s+1} - \frac{2}{5}\,\frac{s}{s^2+2^2} + \frac{1}{5}\,\frac{2}{s^2+2^2}\,, \quad \text{όταν} \quad s+1 > 0. \end{aligned}$$

Άρα όμοια (Σχ. 16.3.1 - 3)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{2}{5}\, e^{-x} + \frac{1}{5}\, (-2\cos 2x + \sin 2x)\,,$$

Από τη λύση προκύπτουν τα εξής:

i) $\lim_{x \to -\infty} y(x) = +\infty$,

ii) όταν $x \geq \pi$, ο όρος e^{-x} πρακτικά μηδενίζεται, οπότε η λύση γράφεται:[12]

$$\begin{aligned} y(x) &\approx \frac{1}{5}\,(-2\cos 2x - \sin 2x) = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{5}\sin(2x+\phi) \\ &\approx 0.45\sin(2x+\phi), \quad \text{όταν} \quad \phi = \arctan(-2) \approx -\frac{9\pi}{25}\,, \end{aligned}$$

δηλαδή περιγράφει μια **αμείωτη περιοδική ταλάντωση** πλάτους 0.45.

■

Άσκηση

Να λυθούν οι παρακάτω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις:

i) $y' + y = x;\ y(0) = -1$ *v)* $y' + 3y = e^{-x}\,\sin 2x;\ y(0) = 0$

ii) $y' + 4y = e^{-3x};\ y(0) = 0$ *vi)* $y' + y = \sin^2 x;\ y(0) = -1$

iii) $y' + y = x\,e^{-x};\ y(0) = 0$ *vii)* $y' + 4y = 1 - \sinh x;\ y(0) = 0$

iv) $y' + y = \sin 2x;\ y(0) = 0$ *viii)* $y' + y = \sin x\,\cos 2x;\ y(0) = 0.$

Απαντήσεις

i) $y(x) = -1 + x + c\,e^{-x}$, μερική: $c = 0$,

ii) $y(x) = e^{-3x} + c\,e^{-4x}$, μερική: $c = -1$,

iii) $y(x) = \frac{1}{2}\,x^2 e^{-x} + c\,e^{-x}$, μερική: $c = 0$,

iv) $y(x) = c\,e^{-x} + \frac{1}{2}\,(-2\cos 2x + \sin 2x)$, μερική: $c = \frac{2}{5}$,

v) $y(x) = c\,e^{-3x} + \frac{e^{-x}}{13}\,(-3\cos 3x + 2\sin 3x)$, μερική: $c = -\frac{1}{13}$,

vi) $y(x) = c\,e^{-x} + \frac{1}{10}\,(5 - \cos 2x - \sin 2x)$, μερική: $c = -\frac{14}{10}$,

vii) $y(x) = c\,e^{-4x} - \frac{1}{60}\,\left(10 - 15e^{x} + 6e^{2x}\right)$, μερική: $c = -\frac{19}{60}$,

viii) $y(x) = c\,e^{-x} + \frac{1}{20}\,(5\cos x - 3\cos 3x - 5\sin x + \sin 3x)$, μερική: $c = -\frac{1}{10}$.

[12] Βλέπε Μάθημα *Σειρά Fourier - Γραμμικά φάσματα.*

16.3.2 Γραμμική 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Ομογενής γραμμική

Η γενική μορφή της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$\mathbf{y'' + ay' + by = 0}, \qquad (16.3.2\text{ - }1)$$

όταν a, b σταθερές, $y = y(x)$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Αν $y \in D_{\mathcal{L}}$, τότε από την $(16.3.2 - 1)$ έχουμε

$$\mathcal{L}\left[y'' + ay' + b\right] = 0,$$

που σύμφωνα με γνωστές ιδιότητες[13] του μετασχηματισμού Laplace γράφεται

$$s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - {y_0}'(0) + a[s\mathcal{L}(y) - y(0)] + b\mathcal{L}(y) = 0$$

Θέτοντας

$$\mathcal{L}(y) = Y(s) \quad \text{και} \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0' \quad \text{αρχικές συνθήκες}$$

η παραπάνω σχέση, αν λυθεί ως προς $Y(s)$, τελικά δίνει

$$\mathbf{Y(s) = \frac{(s + a)y_0 + {y_0}'}{s^2 + as + b}} \qquad (16.3.2\text{ - }2)$$

[13] Όμοια βλέπε Παράγραφος 16.1.3 **Θεώρημα 16.2.2 - 1 (γραμμική ιδιότητα):** *Έστω $f, g \in D_{\mathcal{L}}$. Τότε αν $k, \lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\mathcal{L}[kf(t) + \lambda g(t)] = k\mathcal{L}[f(t)] + \lambda\mathcal{L}[g(t)]$$

και **Θεώρημα 16.1.3 - 6 (παραγώγου 1ης τάξης):** *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ και υπάρχει η πρώτης τάξης παράγωγος της f και είναι συνεχής συνάρτηση ή κατά τμήματα συνεχής για κάθε $t \geq 0$, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου f' και ισχύει*

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad \text{με} \quad s > a > 0,$$

ενώ με τον τύπο $(1.1.3 - 17)$

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0), \quad \text{όταν} \quad s > a > 0.$$

Τότε η γενική λύση της $(16.3.2-1)$ θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]}. \qquad (16.3.2\text{ - }3)$$

Είναι φανερό ότι η γενική λύση $(16.3.2-3)$ εξαρτάται από το είδος των ριζών του παρονομαστή $s^2+\alpha s+\beta$ στην $(16.3.2-2)$. Οι Παρατηρήσεις 16.3.1 - 1 ισχύουν ανάλογα και στην περίπτωση αυτή.

Παράδειγμα 16.3.2 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y''+5y'+6y=0, \quad \text{όταν} \quad y_0=0 \quad \text{και} \quad y_0'=1.$$

Λύση. Σύμφωνα με την $(16.3.2-2)$ είναι

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s+5)\cdot 0+1}{s^2+5s+6}=\frac{1}{s^2+5s+6}=\frac{1}{(s+3)(s+2)} \\ &= \frac{A}{s+3}+\frac{B}{s+2}=-\frac{1}{s+3}+\frac{1}{s+2}\,. \end{aligned}$$

Άρα (Σχ. 16.3.2 - 1)

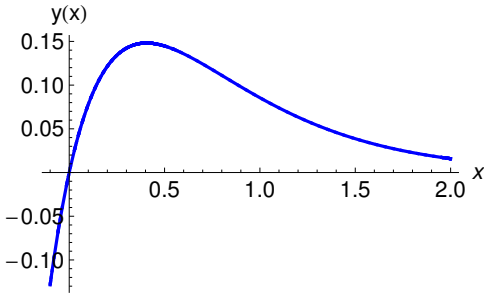
$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=-e^{-3x}+e^{-2x}.$$

Η λύση στην περίπτωση αυτή είναι γνωστή ως **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ισχυρή απόσβεση**. ∎

Παράδειγμα 16.3.2 - 2

Όμοια η εξίσωση

$$y''-4y'+4y=0, \quad \text{όταν} \quad y_0=1 \quad \text{και} \quad y_0'=1.$$



Σχήμα 16.3.2 - 1: Παράδειγμα 16.3.2 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = -e^{-3x} + e^{-2x}$, όταν $x \in [-0.1, 2]$.

Λύση. Σύμφωνα με την $(16.3.2-2)$ είναι

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s-4)\cdot 1 + 1}{s^2 - 4s + 4} \\ &= \frac{s-3}{(s-2)^2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} \\ &= \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} = \frac{1}{s-2} + \left(\frac{1}{s-2}\right)' \\ &= \frac{1}{s-2} - (-1)^1 \left(\frac{1}{s-2}\right)' . \end{aligned}$$

Επειδή σύμφωνα με τη γνωστή ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace ισχύει ότι, αν $F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$, τότε $\mathcal{L}[x\, f(x)] = (-1)^1\, F'(s)$, από την παραπάνω σχέση προκύπτει τελικά ότι (Σχ. 16.3.2 - 2)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{2x}(1-x).$$

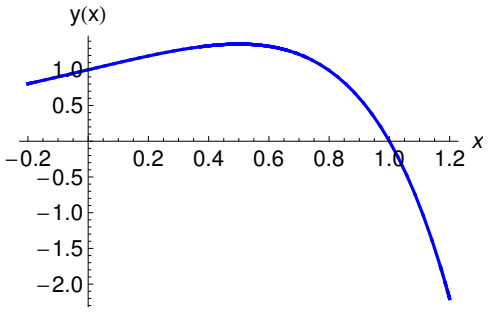
Η λύση περιγράφει την **κρίσιμη απόσβεση**. Επειδή $e^{-2x} \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η $y_h(x) = 0$, όταν $x_0 = 1$. Τότε το x_0 είναι το σημείο στατικής ισορροπίας.

■

Παράδειγμα 16.3.2 - 3

Όμοια η εξίσωση

$$16y'' + 8y' + 17y = 0, \quad \text{όταν} \quad y_0 = 1 \quad \text{και} \quad y_0' = 0.$$



Σχήμα 16.3.2 - 2: Παράδειγμα 16.3.2 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-2x}(1-x)$, όταν $x \in [-0.2, 1.2]$.

Λύση. Η εξίσωση γράφεται

$$y'' + \frac{1}{2}y' + \frac{17}{16}y = 0,$$

οπότε σύμφωνα με την $(16.3.2-2)$ είναι

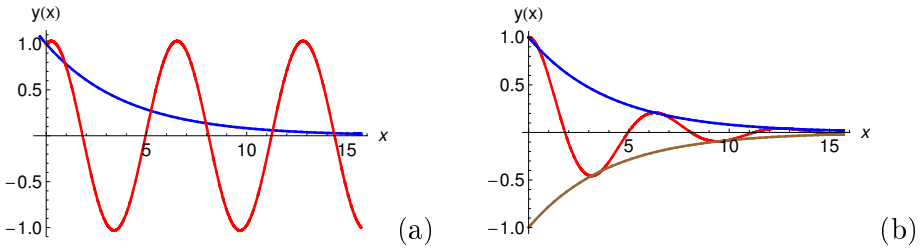
$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s+\frac{1}{2})\cdot 1 + 0}{s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{17}{16}} = \frac{s+\frac{1}{2}}{s^2 + 2\,\frac{1}{4}s + \frac{16+1}{16}} \\ &= \frac{s+\frac{1}{2}}{s^2 + 2\,\frac{1}{4}s + \frac{1}{16} + 1} \\ &= \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + 1} = \frac{s+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{s+\frac{1}{4}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2}\,. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με τους τύπους 5 και 7 του Πίνακα 2.2-1 είναι (Σχ. 16.3.2 - 3)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-x/4}\cos x + \frac{1}{4}\,e^{-x/4}\sin x,$$

Η λύση περιγράφει μια ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ασθενή απόσβεση.

■



Σχήμα 16.3.2 - 3: Παράδειγμα 16.3.2 - 2, όταν $x \in [-\pi/10, 4\pi]$:(a) το διάγραμμα της $\frac{1}{4}\, e^{-x/4}$ μπλε (απόσβεση) και της $4\cos x + \sin x$ κόκκινη καμπύλη (αμείωτη ταλάντωση), ενώ στο διάγραμμα (b) της μερικής λύσης $y(x) = \frac{1}{4}\, e^{-x/4}(4\cos x + \sin x)$. Η απόσβεση προκαλεί τελικά τον μηδενισμό της μερικής λύσης.

Άσκηση

Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

i) $y'' + 4y' + 5y = 0; \quad y_0' = y_0 = 1,$

ii) $y'' - y' - 12y = 0; \quad y_0' = 1, \quad y_0 = 0,$

iii) $y'' + 2y' + 10y = 0; \quad y_0' = 1, \quad y_0 = 0,$

iv) $y'' + 25y = 0; \quad y_0' = y_0 = 1,$

v) $y'' + 2y' + 4y = 0; \quad y_0' = 1, \quad y_0 = 0,$

i) $y'' - 2y' + y = 0; \quad y_0' = -1, \quad y_0 = 1.$

Απαντήσεις

$(i)\, e^{-2x}\,(\cos x + 3\,\sin x), \quad (ii)\, \frac{1}{7}\,\left(-e^{-3x} + e^{4x}\right), \quad (iii)\, \frac{1}{3}\, e^{-x}\sin 3x,$

$(iv)\, \frac{1}{5}\,(5\cos 5x + \sin 5x), \quad (v)\, \frac{1}{\sqrt{3}}\, e^{-x}\,\sin\left(\sqrt{3}\,x\right), \quad (vi)\, -e^{x}\,(-1 + 2x).$

Μη ομογενής γραμμική

Η γενική μορφή της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$\mathbf{y'' + ay' + by = r(x)}, \qquad (16.3.2 - 4)$$

όταν $a, b \in \mathbb{R}$, $y = y(x)$, $r(x) \neq 0$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$.

Έστω $y, r \in D_{\mathcal{L}}$. Τότε, ανάλογα με την αντίστοιχη λύση της ομογενούς, θεωρώντας τον μετασχηματισμό Laplace της $(16.3.2-4)$, τελικά προκύπτει

$$\mathbf{Y(s) = \frac{\mathcal{L}[r(x)]}{s^2 + as + b} + \frac{(s + a)y_0 + y_0'}{s^2 + as + b}}, \qquad (16.3.2 - 5)$$

οπότε η γενική λύση της μη ομογενούς θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]}. \qquad (16.3.2 - 6)$$

Παράδειγμα 16.3.2 - 4

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - 3y' + 2y = x, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y_0' = 0.$$

Λύση. Είναι $a = -3, \quad b = 2$ και

$$\mathcal{L}[r(x)] = \mathcal{L}(x) = \frac{1}{s^2}\,.$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο $(16.3.2-5)$ μετά και την ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2\,(s^2 - 3s + 2)} = \frac{1}{s^2(s-1)(s-2)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{\Gamma}{s-1} + \frac{\Delta}{s-2} \\ &= \frac{3}{4s} + \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{4(s-2)}\,. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την $(16.3.2-6)$ η μερική λύση είναι

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{3}{4} + \frac{x}{2} - e^{x} + \frac{e^{2x}}{4}\,.$$

■

Παράδειγμα 16.3.2 - 5

Όμοια της

$$y'' + 2y' + y = e^{-2x}, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y_0' = 0.$$

Λύση. Όμοια είναι $a = 2, \quad b = 1$ και

$$\mathcal{L}[r(x)] = \mathcal{L}(e^{-2x}) = \frac{1}{s+2}\,.$$

Τότε από τον τύπο $(16.3.2-5)$ έχουμε

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s+2)\,(s^2+2s+1)} = \frac{1}{(s+2)(s+1)^2} \\ &= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{\Gamma}{s+1} \\ &= \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}\,. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα και την $(16.3.2-6)$ η μερική λύση είναι

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-2x} + x\,e^{-x} - e^{-x} = e^{-2x}\,(1 + x\,e^{x} - e^{x})\,.$$

■

Παράδειγμα 16.3.2 - 6

Όμοια η

$$y'' + 4y = x, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y_0' = 0.$$

Λύση. Όμοια είναι $a = 0, \quad b = 4$ και

$$\mathcal{L}[r(x)] = \mathcal{L}(x) = \frac{1}{s^2}\,.$$

Τότε από τον τύπο $(16.3.2-5)$ έχουμε

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2\,(s^2+4)} \\ &= \frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{\Gamma s+\Delta}{s^2+4} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{s^2}-\frac{1}{4}\,\frac{1}{s^2+4} \\ &= \frac{1}{4}\,\frac{1}{s^2}-\frac{1}{4\cdot 2}\,\frac{2}{s^2+2^2} \end{aligned}$$

μετά την κατάλληλη τροποποίηση του τελευταίου όρου στο δεξιό μέλος στην παραπάνω ισότητα.

Άρα σύμφωνα με την $(16.3.2-6)$ η μερική λύση είναι

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{4}\,x-\frac{1}{8}\,\sin 2x.$$

■

Παράδειγμα 16.3.2 - 7

Όμοια η

$$y''+2y'+10y=1, \quad \text{όταν} \quad y_0=y_0'=0.$$

Λύση. Είναι $a=2, \quad b=10$ και

$$\mathcal{L}[r(x)]=\mathcal{L}(1)=\frac{1}{s}\,.$$

Τότε από τον τύπο $(16.3.2-5)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s\,(s^2+2s+10)} \\ &\quad (\text{επειδή το } s^2+2s+2 \text{ έχει ρίζες μιγαδικές δεν αναλύεται}) \\ &= \frac{A}{s}+\frac{Bs+\Gamma}{s^2+2s+10} = \frac{1}{10}\,\frac{1}{s}-\frac{1}{10}\,\frac{s+2}{s^2+2s+10} \\ &= \frac{1}{10}\,\frac{1}{s}-\frac{1}{10}\,\frac{s+2}{(s+1)^2+3^2} \\ &= \frac{1}{10}\,\frac{1}{s}-\frac{1}{10}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}+\frac{1}{3}\,\frac{3}{(s+1)^2+3^2}\right] \end{aligned}$$

μετά την τροποποίηση του παρονομαστή $s^2+2s+10$ σε άθροισμα τετραγώνων.

Άρα η μερική λύση είναι

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\left(e^{-x}\cos 3x + \frac{1}{3}\,e^{-x}\sin 3x\right).$$

■

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις, όταν $y = y(x)$ και $y_0 = y_0' = 0$:

i)	$y'' + 4y' + 13y = e^{-x}$	*iv)*	$y'' + 2y' + y = \sin x$
ii)	$y'' + y = \sin x$	*v)*	$y'' + y' = e^{-x}\sin x$
iii)	$y'' + 3y' + 2y = x$	*vi)*	$y'' + 4y' + 3y = 4\,e^{-x}$.

2. Δείξτε ότι η διαφορική εξίσωση $y'' + 4y' + 13y = 2\delta(t)$, όπου $y = y(x)$ και $y_0 = y_0' = 0$, έχει λύση την

$$y(x) = 2e^{-2x}\left(\cos 3x + \sin 3x\right).$$

Απαντήσεις

(i) $\frac{1}{30}\,e^{-2x}\,(3e^{x} - 3\cos 3x - \sin 3x)$, *(ii)* $\frac{1}{2}\,(-x\cos x + \sin x)$,
(iii) $-\frac{3}{4} - \frac{e^{-2x}}{4} + e^{-x} + \frac{x}{2}$, *(iv)* $-\frac{1}{2}\,e^{-x}\,(1 + x - e^{x}\cos c)$,
(v) $\frac{1}{2}\,e^{-x}\,(-2 + e^{x} + \cos x - \sin x)$, *(vi)* $e^{-3x}\left(1 - e^{2x} + 2x\,e^{2x}\right)$.

16.4 Βιβλιογραφία

[1] Αθανασιάδη, Α. (1993). *Μετασχηματισμός Laplace και Σειρές Fourier*. Εκδόσεις Ζήτη. ISBN 960–431–219–7.

[2] Αλικάκος, Ν. & Καλογερόπουλος, Γ. (2003). *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*. Σύγχρονη Εκδοτική. ISBN 978–960–816–563–2.

[3] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[4] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[5] Spiegel, M. (1965). *Schaum's Outlines – Laplace Transforms*. McGraw-Hill Education – Europe. ISBN 978–007–060–231–1.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 17

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

17.1 Εισαγωγικές έννοιες

17.1.1 Ορισμός διανυσματικής συνάρτησης

[1]Υπενθυμίζεται ο ορισμός της πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής, που για ευκολία στη συνέχεια θα λέγεται επίσης και βαθμωτή συνάρτηση.

Ορισμός **17.1.1 - 1 (συνάρτησης).** *Έστω D και T δύο τυχόντα μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Τότε λέγεται συνάρτηση με πεδίο ορισμού το D και πεδίο τιμών το T, μία μονοσήμαντη απεικόνιση, έστω f, του συνόλου D στο T, δηλαδή*

$$D \ni x \longrightarrow y = f(x) \in T \qquad (17.1.1 - 1)$$

ή συντομότερα συνάρτηση $f|D$ με πεδίο τιμών T ή και συνάρτηση $f(x)$, $x \in D$ με τιμές στο T.

[1]Για την καλύτερη κατανόηση των εννοιών του μαθήματος ο αναγνώστης πρέπει να γνωρίζει το Μάθημα *Διανύσματα*.

Η σχέση $y = f(x)$, που ισχύει για κάθε $x \in D$, ορίζει τον τύπο της συνάρτησης, το γράμμα x την ανεξάρτητη μεταβλητή στο D, ενώ το y την εξαρτημένη μεταβλητή στο T. Τότε ο τύπος της συνάρτησης εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι μεταβλητές y και x.

Επομένως η συνάρτηση $f(x) = x^2$ με πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R}$, θα απεικονίζει τα στοιχεία

$$1,\, 3,\, 5,\, \ldots \quad \text{στα} \quad 1^2,\, 3^2,\, 5^2,\, \ldots .$$

Γενικεύοντας το παραπάνω παράδειγμα θεωρούμε ότι είναι δυνατόν να οριστεί επίσης μια μονοσήμαντη απεικόνιση (συνάρτηση) των στοιχείων

$$1,\, 3,\, 5,\, \ldots$$

στα

$$\left(1^2, 1^3\right), \ldots, \left(3^2, 3^3\right), \ldots, \left(5^2, 5^3\right), \ldots \qquad (17.1.1 \text{ - } 2)$$

του χώρου $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα στα

$$\left(1^2, 1^3, 1\right), \ldots, \left(3^2, 3^3, 3\right), \ldots, \left(5^2, 5^3, 5\right), \ldots \qquad (17.1.1 \text{ - } 3)$$

του $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. Τότε ο τύπος της συνάρτησης για τα στοιχεία $(17.1.1 - 2)$ πρέπει να είναι της μορφής $\left(x^2, x^3\right)$, ενώ για τα $(17.1.1 - 2)$ της μορφής $\left(x^2, x^3, x\right)$, όταν $x \in \mathbb{R}$.

Έχοντας τώρα υπόψη τις σχέσεις $(1.4.1 - 5)$ και $(1.4.1 - 3)$ τα παραπάνω στοιχεία είναι δυνατόν να θεωρηθούν ως οι **συνιστώσες** αντίστοιχων διανυσμάτων, δηλαδή των

$$1^2\,\mathbf{i} + 1^3\,\mathbf{j},\, \ldots, \quad \text{αντίστοιχα} \quad 1^2\,\mathbf{i} + 1^3\,\mathbf{j} + \mathbf{k},\, \ldots,$$

οπότε ο αντίστοιχος τύπος της συνάρτησης, που λέγεται στην περίπτωση αυτή διανυσματική συνάρτηση μιας μεταβλητής, θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x) &= \mathbf{F}\left(x^2, x^3\right) = x^2\,\mathbf{i} + x^3\,\mathbf{j}, \quad \text{αντίστοιχα} \\ \mathbf{F}(x) &= \mathbf{F}\left(x^2, x^3, x\right) = x^2\,\mathbf{i} + x^3\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}, \end{aligned} \qquad (17.1.1 \text{ - } 4)$$

όταν $x \in \mathbb{R}$.

Στις συναρτήσεις του είδους αυτού χρησιμοποιείται συνήθως στον συμβολισμό της μεταβλητής το γράμμα t - που συνήθως παριστάνει τον χρόνο - αντί του x.

[2]Δίνεται στη συνέχεια ο ορισμός της διανυσματικής συνάρτησης.

Ορισμός 17.1.1 - 2 (διανυσματική συνάρτηση). *Έστω $D \subseteq \mathbb{R}$ και $T \subseteq \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα $T \subseteq \mathbb{R}^3$ δύο τυχαία μη κενά σύνολα. Τότε ορίζεται ως διανυσματική συνάρτηση (vector function ή vector-valued function) μιας μεταβλητής με πεδίο ορισμού το D και πεδίο τιμών το T, μία* **μονοσήμαντη απεικόνιση**, *έστω $\mathbf{F}$, του συνόλου D στο T, δηλαδή*

$$D \ni t \longrightarrow \underset{\text{αντίστοιχα}}{\mathbf{F}(t) = \mathbf{y}} = \begin{array}{l} \langle f_1(t), f_2(t) \rangle \in T \subseteq \mathbb{R}^2, \\ \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t) \rangle \in T \subseteq \mathbb{R}^3, \end{array} \tag{17.1.1 - 5}$$

όπου κάθε $f_i(t)$ με $i = 1, 2$, αντίστοιχα $i = 1, 2, 3$ είναι μία συνάρτηση με μεταβλητή t, που λέγεται συνιστώσα (argument) της $\mathbf{F}$.

Σημείωση 17.1.1 - 1

Πολλές φορές, όταν απαιτείται, χρησιμοποιείται και η παράσταση των συνιστωσών με πίνακα διάνυσμα, δηλαδή[3]

$$D \ni t \longrightarrow \underset{\text{αντίστοιχα}}{\mathbf{F}(t) = \mathbf{y}} = \begin{array}{l} [f_1(t), f_2(t)]^\top \in T \subseteq \mathbb{R}^2, \\ [f_1(t), f_2(t), f_3(t)]^\top \in T \subseteq \mathbb{R}^3. \end{array}$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 17.1.1 - 2, αν Oxy είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων του χώρου των 2-διαστάσεων, αντίστοιχα $Oxyz$ του χώρου των 3-διαστάσεων, τότε η $\mathbf{F}$ εκφράζεται στις περιπτώσεις αυτές συναρτήσει των

[2]Ο αναγνώστης, για μια πληρέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 3, 4, 5].
[3]Βλέπε Μάθημα *Γραμμική Άλγεβρα* και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 3.

συνιστωσών ως εξής:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t) &= f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} = \langle f_1(t), f_2(t)\rangle\,,\\ &\text{αντίστοιχα}\\ \mathbf{F}(t) &= f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}\\ &= \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t)\rangle\,, \qquad (17.1.1\text{ - }6)\end{aligned}$$

όταν $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων $0x$, $0y$ και $0z$ αντίστοιχα.

Ο προσδιορισμός του πεδίου ορισμού D της $\mathbf{F}$ δεν διαφέρει από εκείνον της συνάρτησης $f(x)$, εφόσον τελικά συνεπάγεται τον υπολογισμό των πεδίων ορισμού καθεμιάς συνιστώσας και στη συνέχεια των κοινών τους σημείων.

Παράδειγμα 17.1.1 - 1

Έστω η διανυσματική συνάρτηση (Σχ. 17.1.1 - 1)

$$\mathbf{F}(t) = \overbrace{\sqrt{t}\,\cos t}^{f_1(t)}\,\mathbf{i} + \overbrace{\sin t}^{f_2(t)}\,\mathbf{j} = f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j}.$$

Τότε το πεδίο ορισμού της συνιστώσας

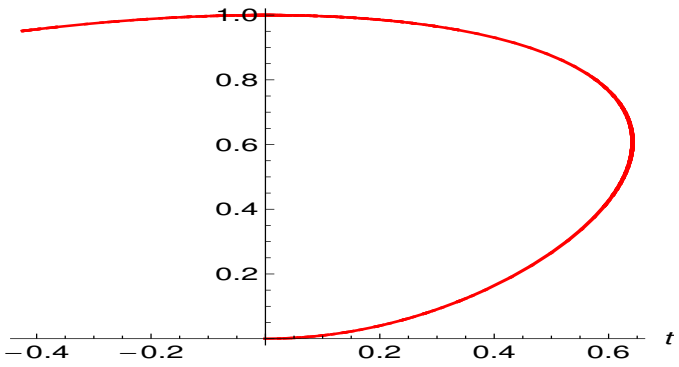
$$f_1(t) = \sqrt{t}\,\cos t \quad \text{είναι το} \quad D_1 = [0, +\infty),$$

ενώ της

$$f_2(t) = \sin t \quad \text{το} \quad D_2 = \mathbb{R}.$$

Άρα το πεδίο ορισμού D της $\mathbf{F}$ είναι

$$D = D_1 \cap D_2 = [0, +\infty).$$



Σχήμα 17.1.1 - 1: Παράδειγμα 17.1.1 - 1: η καμπύλη με παραμετρική εξίσωση $\mathbf{F}(t) = \sqrt{t}\,\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$ με πεδίο ορισμού $D = [0, +\infty)$, όταν $t \in [0, 2\pi]$.

Παράδειγμα 17.1.1 - 2

Όμοια έστω η διανυσματική συνάρτηση (Σχ. 17.1.1 - 2)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= \overbrace{\sin t}^{f_1(t)}\,\mathbf{i} + \overbrace{\cos t}^{f_2(t)}\,\mathbf{j} + \overbrace{\frac{1}{t}}^{f_3(t)}\,\mathbf{k} \\ &= f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j} + f_3(t)\,\mathbf{k}. \end{aligned}$$

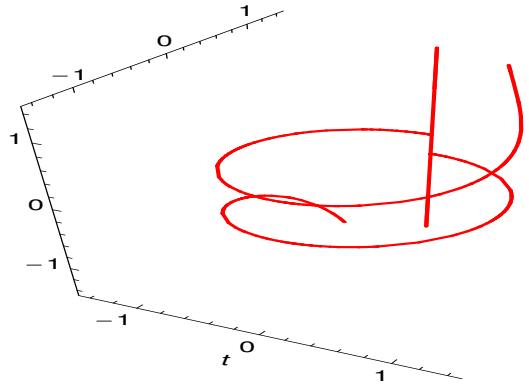
Τότε το πεδίο ορισμού των συνιστωσών

$$f_1(t) = \sin t, \quad f_2(t) = \cos t \quad \text{είναι το} \quad D_1 = \mathbb{R},$$

ενώ της συνιστώσας

$$f_3(t) = \frac{1}{t} \quad \text{το} \quad D_2 = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Άρα το πεδίο ορισμού D της $\mathbf{F}$ είναι $D = D_1 \cap D_2 = \mathbb{R} - \{0\}$.



Σχήμα 17.1.1 - 2: Παράδειγμα 17.1.2 - 1: η καμπύλη με παραμετρική εξίσωση $\mathbf{F}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \frac{1}{t}\,\mathbf{k}$ με πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R} - \{0\}$, όταν $t \in [-2\pi, 2\pi]$. Η ευθεία αντιστοιχεί στην τιμή $t = 0$.

17.1.2 Οριακή τιμή

Η οριακή τιμή μιας διανυσματικής συνάρτησης υπολογίζεται από την οριακή τιμή των συνιστωσών συναρτήσεων ως εξής:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to t_0} \mathbf{F}(t) &= \lim_{t\to t_0} f_1(t)\,\mathbf{i} + \lim_{t\to t_0} f_2(t)\,\mathbf{j} \quad \text{αντίστοιχα} \\ \lim_{t\to t_0} \mathbf{F}(t) &= \lim_{t\to t_0} f_1(t)\,\mathbf{i} + \lim_{t\to t_0} f_2(t)\,\mathbf{j} + \lim_{t\to t_0} f_3(t)\,\mathbf{k}, \end{aligned} \tag{17.1.2 - 1}$$

όταν $t_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$.

Επομένως ο υπολογισμός της οριακής τιμής ανάγεται στον υπολογισμό των οριακών τιμών καθεμιάς συνιστώσας χωριστά, οπότε εφαρμόζονται στην περίπτωση αυτή οι ήδη γνωστές στον αναγνώστη από το Μάθημα *Οριακή τιμή συνάρτησης - Μέθοδοι υπολογισμού*.

Παράδειγμα 17.1.2 - 1

Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(t) = \left(3 - 2t^2\right)\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + \frac{\cos t - 1}{t}\,\mathbf{k}.$$

Τότε, αν $t_0 = 0$, σύμφωνα με την $(17.1.2-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\mathbf{F}(t) &= \lim_{t\to 0}\left(3-2t^2\right)\mathbf{i}+\lim_{t\to 0}e^t\,\mathbf{j}+\lim_{t\to 0}\frac{\overbrace{\cos t-1}^{\text{de L'Hôpital}}}{t}\,\mathbf{k}\\ &= 3\,\mathbf{i}+\mathbf{j}+\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{1}\,\mathbf{k}=3\,\mathbf{i}+\mathbf{j}+0\,\mathbf{k}=3\,\mathbf{i}+\mathbf{j}.\end{aligned}$$

17.1.3 Συνέχεια

Η συνέχεια μιας διανυσματικής συνάρτησης σε ένα σημείο $t_0 \in D$ ορίζεται από τη συνθήκη

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t)=\mathbf{F}\left(t_0\right), \qquad (17.1.3\text{ - }1)$$

όταν ο υπολογισμός του $\lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t)$ γίνεται από την $(17.1.2-1)$.

Όπως και στην παραπάνω περίπτωση υπολογισμού της οριακής τιμής, η συνέχεια ανάγεται στην εξέταση της συνέχειας καθεμιάς συνιστώσας χωριστά. Οι ήδη γνωστές στον αναγνώστη από το Μάθημα *Συνέχεια συνάρτησης - Ιδιότητες και Θεωρήματα* εφαρμόζονται ανάλογα και στην περίπτωση.

Παράδειγμα 17.1.3 - 1

Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(t)=\ln\left(9-t^2\right)\,\mathbf{i}+\frac{\mathbf{j}}{2-t}+\sqrt{1+t}\,\mathbf{k}.$$

Προφανώς κάθε συνιστώσα είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, οπότε η $\mathbf{F}(t)$ θα είναι συνεχής στο κοινό πεδίο ορισμού των, έστω D, όπου προφανώς θα ισχύει η $(17.1.3-1)$. Τότε, επειδή η συνιστώσα

$$f_1(t)=\ln\left(9-t^2\right)$$

έχει πεδίο ορισμού το $D_1=(-3,3)$, η

$$f_2(t)=\frac{1}{2-t} \quad \text{το} \quad D_2=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$$

και η

$$f_3(t)=\sqrt{1+t} \quad \text{το} \quad D_3=[-1,+\infty),$$

πρέπει το πεδίο στο οποίο η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}$ είναι συνεχής να είναι το

$$D=D_1\cap D_2\cap D_3=[-1,2)\cup(2,3).$$

17.2 Παραμετρική παράσταση καμπυλών

17.2.1 Ορισμοί

Ο γνωστός μέχρι τώρα προσδιορισμός της αναλυτικής εξίσωσης μιας καμπύλης, έστω C, στον χώρο $\mathbb{R}^2$, αντίστοιχα $\mathbb{R}^3$ με καρτεσιανές συντεταγμένες, δηλαδή σε σύστημα συντεταγμένων Oxy του χώρου των 2-διαστάσεων, αντίστοιχα $Oxyz$ του χώρου των 3-διαστάσεων, πολλές φορές δημιουργεί δυσκολίες στον υπολογισμό διαφόρων φυσικών μεγεθών. Για να αντιμετωπιστούν οι δυσκολίες αυτές αναζητείται ένας άλλος τρόπος περιγραφής της εξίσωσης της παραπάνω καμπύλης C.

Υπενθυμίζεται στο σημείο ότι:

Ορισμός 17.2.1 - 1. *Ένα υλικό σημείο κινούμενο στον χώρο και έχοντας έναν βαθμό ελευθερίας διαγράφει γενικά μία καμπύλη γραμμή, ενώ όταν έχει δύο βαθμούς ελευθερίας μια επιφάνεια.*

Έστω τώρα ότι ζητείται ο προσδιορισμός της εξίσωσης μιας καμπύλης C του $\mathbb{R}^3$. Αν $Oxyz$ είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων και $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ τυχόν σημείο της καμπύλης C, τότε στο σημείο αυτό αντιστοιχεί ακριβώς ένα **διάνυσμα θέσης**, έστω $\mathbf{r}_0$, όπου

$$\mathbf{r}_0 = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k} \qquad (17.2.1 - 1)$$

και αντίστροφα στο $\mathbf{r}_0$ αντιστοιχεί το σημείο $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$. Όμοια σε ένα άλλο σημείο $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$ της C θα αντιστοιχεί το διάνυσμα θέσης

$$\mathbf{r}_1 = x_1\,\mathbf{i} + y_1\,\mathbf{j} + z_1\,\mathbf{k} \qquad (17.2.1 - 2)$$

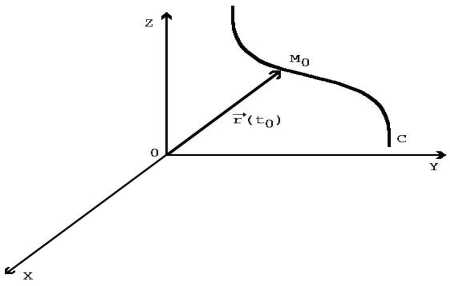
και γενικά στο τυχόν σημείο $M\,(x, y, z)$, το

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}. \qquad (17.2.1 - 3)$$

Έχοντας υπόψη και τον Ορισμό 17.1.1 - 2 τα διανύσματα $\mathbf{r}_0$ στην $(17.2.1-1)$, $\mathbf{r}_1$ στην $(17.2.1-2)$ και γενικά $\mathbf{r}$ στην $(17.2.1-3)$ είναι δυνατόν να θεωρηθούν ως οι τιμές μιας κατάλληλης **διανυσματικής συνάρτησης**, έστω (Σχ. 17.2.1 - 1)

$$\mathbf{r}(t), \quad \text{όταν} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

με την έννοια ότι: αν



Σχήμα 17.2.1 - 1: παραμετρική παράσταση καμπυλών.

- $t = t_0$, τότε η $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$ θα ισούται με την $(17.2.1-1)$,
- $t = t_1$, η $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_1)$ με την $(17.2.1-2)$, και γενικά
- $t = t$, η $\mathbf{r}(t)$ με την $(17.2.1-3)$.

Η $\mathbf{r}(t)$ θα λέγεται στο εξής διανυσματική συνάρτηση θέσης.

Η αναλυτική έκφραση της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}(t)$ είναι

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}, \qquad \text{όταν} \quad t \in [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}. \qquad (17.2.1\text{ - }4)$$

Η $(17.2.1-4)$ θα λέγεται τότε ότι ορίζει την παραμετρική εξίσωση της καμπύλης C με παράμετρο t.

Με όμοιον τρόπο ορίζεται η παραμετρική εξίσωση μιας επίπεδης καμπύλης C ως εξής:

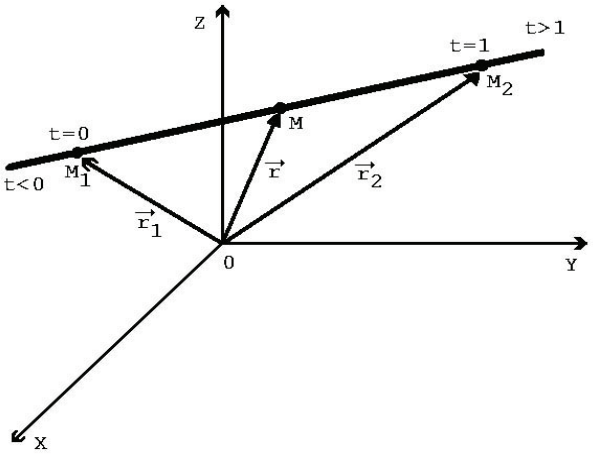
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}\,, \qquad \text{όταν } t \in [\alpha,\beta]. \qquad (17.2.1\text{ - }5)$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις των καμπυλών έχουν μεγάλη εφαρμογή στη Φυσική, κυρίως όταν η παράμετρος t συμβολίζει τον χρόνο.

Δίνονται στη συνέχεια ορισμένες παραμετρικές παραστάσεις χρήσιμων καμπυλών.

17.2.2 Ευθεία

Αν M είναι ένα τυχόν σημείο της ευθείας (Σχ. 17.2.2 - 1) που διέρχεται από τα σημεία $M_1(x_1,y_1,z_1)$ και $M_2(x_2,y_2,z_2)$, τότε, επειδή $\mathbf{M_1M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$,



Σχήμα 17.2.2 - 1: Παραμετρική εξίσωση ευθείας.

αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτή είναι[4]

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{r}_2 + (1-t)\,\mathbf{r}_1, \quad \text{όταν} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{17.2.2 - 1}$$

Η $(17.2.2-1)$ ορίζει την παραμετρική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία M_1 και M_2.

Χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές εκφράσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, \quad \text{και} \\ \mathbf{r}_2 &= x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k} \end{aligned}$$

η $(17.2.2-1)$ τελικά γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= [tx_2 + (1-t)x_1]\,\mathbf{i} + [ty_2 + (1-t)y_1]\,\mathbf{j} \\ &\quad + [tz_2 + (1-t)z_1]\,\mathbf{k}, \quad \text{όταν} \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{17.2.2 - 2}$$

[4] Βλέπε Μάθημα *Αναλυτική Γεωμετρία* και βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 1.

Αν $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ από την $(17.2.2-2$ εξισώνοντας τις αντίστοιχες συντεταγμένες των $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} x(t) &= tx_2 + (1-t)x_1 \\ y(t) &= ty_2 + (1-t)y_1 \\ z(t) &= tz_2 + (1-t)z_1. \end{aligned} \qquad (17.2.2\text{ - }3)$$

Σημείωση 17.2.2 - 1

Η $(17.2.2-2)$, ειδικά όταν $\mathbf{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, ορίζει την παραμετρική εξίσωση των σημείων του **ευθύγραμμου τμήματος** M_1M_2.

Παράδειγμα 17.2.2 - 1

Να υπολογιστεί η παραμετρική εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2, όταν $M_1(1,2,0)$ και $M_2(2,4,3)$ $(\Sigma\chi.17.2.2\text{ - }1)$.

Λύση. Έστω $M_1(x_1,y_1,z_1) = M_1(1,2,0)$ και $M_2(x_2,y_2,z_2) = M_2(2,4,3)$. Τότε προφανώς είναι:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \quad y_1 = 2, \quad z_1 = 0. \\ x_2 &= 2, \quad y_2 = 4, \quad z_2 = 3, \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην $(17.2.2-2)$ τελικά σύμφωνα και με τη Σημείωση 17.2.2 - 1 προκύπτει ότι η παραμετρική εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2 είναι

$$\mathbf{r}(t) = (1+t)\,\mathbf{i} + 2(1+t)\,\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}, \quad \text{όταν} \quad t \in [0,1].$$

Για να γίνει κατανοητή η δυσκολία υπολογισμού της αντίστοιχης εξίσωσης του M_1M_2 σε καρτεσιανές συντεταγμένες, ενδεικτικά γράφεται ότι αρχικά πρέπει να υπολογιστεί η εξίσωση της ευθείας στον χώρο, που δίνεται από τις εξισώσεις:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

και στη συνέχεια να περιοριστούν τα x, y, z, έτσι ώστε οι εξισώσεις να περιγράφουν το M_1M_2. ∎

17.2.3 Περιφέρεια κύκλου

Έστω αρχικά ότι το κέντρο του κύκλου συμπίπτει με την αρχή των αξόνων. Τότε η εξίσωση των σημείων της περιφέρειας είναι

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Θέτοντας

$$\begin{aligned} x &= R\cos t, \quad \text{και} \\ y &= R\sin t, \end{aligned}$$

έχουμε την παρακάτω παραμετρική εξίσωση:

$$\mathbf{r}(t) = R\cos t\,\mathbf{i} + R\sin t\,\mathbf{j} \quad \text{με} \quad t \in [0, 2\pi). \qquad (17.2.3\text{ - }1)$$

Αν το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο (α,β), τότε η εξίσωση των σημείων της περιφέρειας είναι

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2,$$

οπότε στην περίπτωση αυτή έχουμε ως παραμετρική εξίσωση την

$$\mathbf{r}(t) = (\alpha + R\cos t)\,\mathbf{i} + (\beta + R\sin t)\,\mathbf{j} \quad \text{με} \quad t \in [0, 2\pi). \qquad (17.2.3\text{ - }2)$$

Παράδειγμα 17.2.3 - 1

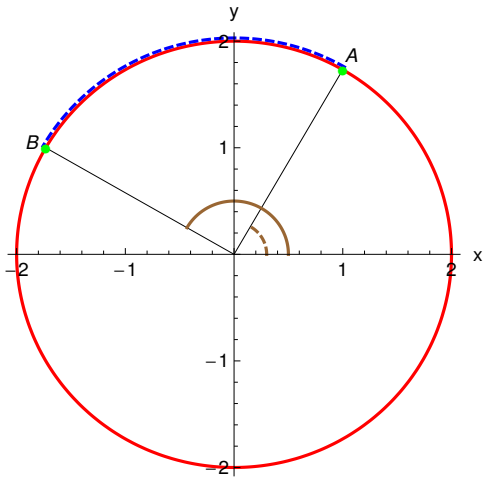
Έστω ότι ζητείται η περιγραφή του τόξου $\widehat{AB}$ της περιφέρειας $x^2 + y^2 = 4$, όταν $A\left(1, \sqrt{3}\right)$ και $B\left(-\sqrt{3}, 1\right)$ (Σχ. 17.2.3 - 1).

Προφανώς $R = 2$, οπότε σύμφωνα με την $(17.2.3 - 1)$ η παραμετρική εξίσωση της περιφέρειας θα είναι

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j} \quad \text{με} \quad t \in [0, 2\pi).$$

Ο προσδιορισμός των γωνιών t_A, που ορίζει το σημείο A, γίνεται ως εξής: επειδή το A είναι σημείο της περιφέρειας, πρέπει οι συντεταγμένες του $\left(1, \sqrt{3}\right)$ να επαληθεύουν την παραπάνω παραμετρική εξίσωση, δηλαδή

$$\begin{aligned} \mathbf{r}\left(t_A\right) &= 2\cos t_A\,\mathbf{i} + 2\sin t_A\,\mathbf{j} = i + \sqrt{3}\,j, \quad \text{οπότε} \\ \cos t_A &= \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \sin t_A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{οπότε} \quad t_A = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$



Σχήμα 17.2.3 - 1: Παράδειγμα 17.2.3 - 1: η παραμετρική εξίσωση του τόξου $\widehat{AB}$ της περιφέρειας $x^2+y^2=4$, όταν $t_1=\pi/3$ (διακεκομμένη καφέ καμπύλη) και $t_2=5\pi/6$ (καφέ καμπύλη).

Όμοια υπολογίζεται ότι $t_B=5\pi/6$.

Επομένως η παραμετρική εξίσωση του κυκλικού τόξου $\widehat{AB}$ είναι

$$\mathbf{r}(t)=2\cos t\,\mathbf{i}+2\sin t\,\mathbf{j}\quad \text{με}\quad t\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right].$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι προφανώς απλούστερη εκείνης που χρησιμοποιεί την αναλυτική εξίσωση $x^2+y^2=4$, επειδή στην περίπτωση αυτή η έκφραση του y συναρτήσει του x είναι $y=\pm\sqrt{4-x^2}$ με ότι στη συνέχεια δυσκολία ήθελε προκύψει από τη ρίζα στους περαιτέρω υπολογισμούς.

17.2.4 Έλλειψη

Όμοια για την έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

έχουμε ως **παραμετρική εξίσωση** την

$$\mathbf{r}(t)=\alpha\,\cos t\mathbf{i}+\beta\,\sin t\,\mathbf{j}\quad \text{με}\quad t\in[0,2\pi). \qquad (17.2.4\text{ - }1)$$

17.2.5 Παραβολή

Αν η εξίσωση της παραβολής είναι

$$y = \alpha x^2,$$

τότε μία παραμετρική εξίσωσή της προκύπτει θέτοντας $x = t$, οπότε $y = \alpha t^2$ και κατά συνέπεια

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \alpha t^2\,\mathbf{j} \quad \text{με} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{17.2.5 - 1}$$

Σημειώσεις 17.2.5 - 1

i) Αν είναι γνωστή η εξίσωση της καμπύλης σε καρτεσιανές συντεταγμένες, τότε οι συντεταγμένες της παραμετρικής εξίσωσης που θα προσδιοριστεί, πρέπει να επαληθεύουν την αρχική εξίσωση της καμπύλης.

ii) Από την παραμετρική εξίσωση της καμπύλης είναι δυνατόν να προσδιοριστεί η αντίστοιχη εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες, θέτοντας

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{και} \quad z = z(t)$$

και απαλείφοντας την παράμετρο t, εφόσον αυτό είναι δυνατόν.

Παράδειγμα 17.2.5 - 1

Έστω η καμπύλη που δίνεται με παραμετρική εξίσωση ως εξής:

$$\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\mathbf{i} + (2 + \sin t)\mathbf{j} \quad \text{με} \quad t \in [0, \pi].$$

Θέτοντας

$$x = 1 + \cos t, \quad y = 2 + \sin t,$$

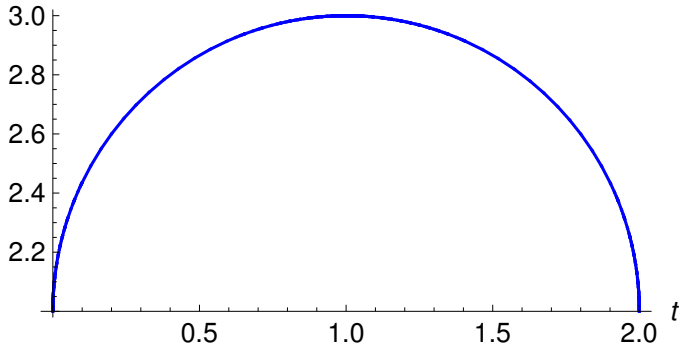
οπότε

$$x - 1 = \cos t, \quad y - 2 = \sin t$$

και απαλείφοντας την παράμετρο t, προκύπτει ότι η εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1.$$

Επειδή $t \in [0, \pi]$ πρόκειται για το άνω μέρος της περιφέρειας, που έχει κέντρο το σημείο $(1, 2)$ και ακτίνα 1 (Σχ. 17.2.5 - 1).



Σχήμα 17.2.5 - 1: Παράδειγμα 17.2.3 - 1: η καμπύλη με παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(t) = (1+\cos t)\mathbf{i} + (2+\sin t)\,|\,\mathbb{R}$, όταν $t \in [0,\pi]$.

17.3 Παράγωγος και ολοκλήρωση

17.3.1 Ορισμός παραγώγου

Ο ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης του Μαθήματος *Παράγωγος Συνάρτησης* επεκτείνεται και στην περίπτωση των διανυσματικών συναρτήσεων ως εξής:

Ορισμός 17.3.1 - 1 (κλίσης). *Έστω η διανυσματική συνάρτηση* $\mathbf{F}\,|\,(a,b)$ *και σημείο* $t_0 \in (a,b)$. *Τότε για κάθε* $t \in (a,b) - \{t_0\}$ *με τον τύπο*

$$\mathbf{K}_{t_0}(x) = \frac{\mathbf{F}(t) - \mathbf{F}\,(t_0)}{t - t_0} \qquad (17.3.1 - 1)$$

ορίζεται μία διανυσματική συνάρτηση, που λέγεται πηλίκο διαφορών ή κλίση της $\mathbf{F}$ *στο σημείο* t_0.

Αν $t = t_0 + \Delta t$, οπότε

$$\Delta t = t - t_0 \quad \text{για κάθε} \quad t \in (a,b) - \{t_0\}\,, \qquad (17.3.1 - 2)$$

τότε ο τύπος $(17.3.1 - 1)$ γράφεται

$$\mathbf{K}_{t_0} = \frac{f\,(t_0 + \Delta t) - f\,(t_0)}{\Delta t}\,. \qquad (17.3.1 - 3)$$

Ορισμός 17.3.1 - 2 (παραγώγου). *Έστω η διανυσματική συνάρτηση* $\mathbf{F} \mid (a,b)$ *και σημείο* $t_0 \in (a,b)$. *Τότε θα λέγεται ότι η* $\mathbf{F}$ *παραγωγίζεται στο σημείο* $t_0 \in (a,b)$ *τότε και μόνον, όταν η οριακή τιμή*

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{K}_{t_0}(x) = \lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{F}(t) - \mathbf{F}(t_0)}{t - t_0}. \qquad (17.3.1 - 4)$$

υπάρχει.

Η $(17.3.1 - 4)$ θα λέγεται τότε η 1ης τάξης διανυσματική παράγωγος της $\mathbf{F}$ στο t_0 και θα συμβολίζεται με $\mathbf{F}'(t_0)$.

Έχοντας υπόψη την $(17.3.1 - 2)$, η $(17.3.1 - 4)$ ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'(t_0) &= \lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{F}(t) - \mathbf{F}(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{F}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{F}(t_0)}{\Delta t}. \end{aligned} \qquad (17.3.1 - 5)$$

Ορισμός 17.3.1 - 3. *Έστω η συνάρτηση* $\mathbf{F} \mid (a,b)$ *Τότε θα λέγεται ότι η* $\mathbf{F}$ *παραγωγίζεται στο* (a,b) *τότε και μόνον, όταν υπάρχει η παράγωγος* $\mathbf{F}'(t_0)$ *για κάθε* $t_0 \in (a,b)$.

Στην περίπτωση αυτή συμβολικά γράφεται

$$\mathbf{F}'(t) = \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{F}) = \frac{d\,\mathbf{F}(t)}{d\,t} D^1 \mathbf{F}(t) = D\,\mathbf{F}(t), \qquad (17.3.1 - 6)$$

όπου όμοια το σύμβολο (τελεστής) $D = D^1 = \frac{d}{dt}$ συμβολίζει την 1ης τάξης παράγωγο της $\mathbf{F}$ με μεταβλητή t.

Παρατηρήσεις 17.3.1 - 1

Από τους Ορισμούς 17.3.1 - 2 και 17.3.1 - 3 προκύπτουν τα εξής:

i) η $\mathbf{F}'(t_0)$, εφόσον υπάρχει, είναι διάνυσμα, ενώ

ii) η $\mathbf{F}'(t)$ είναι διανυσματική συνάρτηση.

Ορισμός 17.3.1 - 4. *Έστω ότι της συνάρτησης* $\mathbf{F} \mid (a,b)$ *υπάρχει η* $\mathbf{F}'(t)$ *για κάθε* $t \in (a,b)$. *Τότε θα λέγεται ότι υπάρχει η 2ης τάξης παράγωγος της* $\mathbf{F}$ *στο* (a,b) *τότε και μόνον, όταν υπάρχει η παράγωγος της* $\mathbf{F}'(t)$ *για κάθε* $t \in (a,b)$.

Στην περίπτωση αυτή συμβολικά γράφεται

$$\mathbf{F}''(t) = \mathbf{F}^{(2)}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\mathbf{F}(t)}{dt}\right) = \frac{d^2\mathbf{F}(t)}{dt^2} = D^2\mathbf{F}(t), \qquad (17.3.1\text{ - }7)$$

όπου όμοια το $D^2 = \dfrac{d^2}{dt^2}$ συμβολίζει τον τελεστή της 2ης τάξης παραγώγου της $\mathbf{F}$ με μεταβλητή t.

Ανάλογα ορίζονται οι παράγωγοι:

3ης τάξης:

$$\mathbf{F}'''(t) = \mathbf{F}^{(3)}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2\mathbf{F}(t)}{dt^2}\right) = \frac{d^3\mathbf{F}(t)}{dt^3} = D^3\mathbf{F}(t), \qquad (17.3.1\text{ - }8)$$

όπου το $D^3 = \dfrac{d^3}{dt^3}$ συμβολίζει τον τελεστή της 3ης τάξης παραγώγου, και γενικά η

ν - τάξης:

$$\mathbf{F}^{(\nu)}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{\nu-1}\mathbf{F}(t)}{dt^{\nu-1}}\right) = \frac{d^{\nu}\mathbf{F}(t)}{dt^{\nu}} = D^{\nu}\mathbf{F}(t), \qquad (17.3.1\text{ - }9)$$

όπου όμοια ο τελεστής $D^{\nu} = \dfrac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}$ συμβολίζει την ν-τάξης παράγωγο μιας συνάρτησης με μεταβλητή t.

Ειδικά ορίζεται ότι

$$\mathbf{F}^{(0)}(t) = \mathbf{F}(t). \qquad (17.3.1\text{ - }10)$$

Αν τώρα Oxy, αντίστοιχα $Oxyz$ είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων, τότε για κάθε $t \in (a,b)$ σύμφωνα με την $(17.1.1-6)$ είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j}, \quad \text{αντίστοιχα} \\ \mathbf{F}(t) &= f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j} + f_3(t)\,\mathbf{k}. \qquad (17.3.1\text{ - }11) \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 17.3.1 - 1. *Η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}$ θα έχει 1ης τάξης παράγωγο στο (a,b) τότε και μόνο, όταν υπάρχουν στο (a,b) οι 1ης τάξης παράγωγοι των συνιστωσών συναρτήσεων $f_1(t)$, $f_2(t)$ και $f_3(t)$.*

Στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'(t) &= f_1'(t)\,\mathbf{i} + f_2'(t)\,\mathbf{j} = \langle f_1(t), f_2(t)\rangle\,,\\ &\quad \text{αντίστοιχα}\\ \mathbf{F}'(t) &= f_1'(t)\,\mathbf{i} + f_2'(t)\,\mathbf{j} + f_3'(t)\,\mathbf{k}\\ &= \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t)\rangle \qquad (17.3.1 - 12)\end{aligned}$$

για κάθε $t \in (a,b)$.

17.3.2 Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου

Είναι ήδη γνωστό από το Μάθημα *Παράγωγος Συνάρτησης* ότι για τη γεωμετρική σημασία της παραγώγου μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής σε ένα σημείο, έστω x_0, του πεδίου ορισμού της ότι ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 17.3.2 - 1. *Η παράγωγος μιας συνάρτησης $y = f(x)\,|\,(a,b)$ στο σημείο $x_0 \in (a,b)$ ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ή διαφορετικά με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης του διαγράμματος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.*

Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση της **εφαπτόμενης ευθείας** δίνεται από τον τύπο

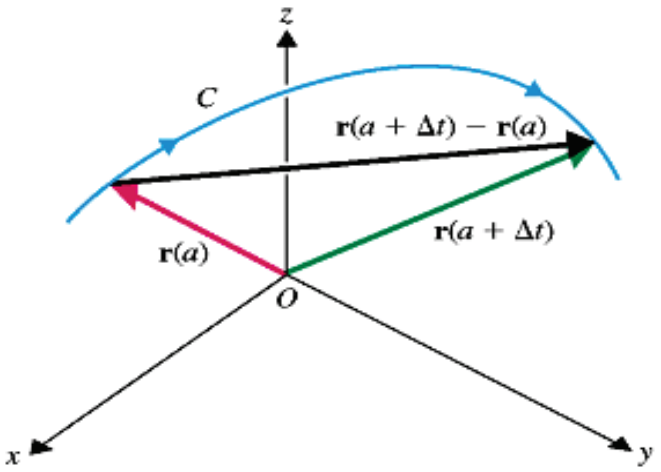
$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)\,, \qquad (17.3.2 - 1)$$

ενώ της **κάθετης ευθείας** του διαγράμματος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, εφόσον $(x_0, f(x_0)) \neq 0$, από τον

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0)\,. \qquad (17.3.2 - 2)$$

Για την αντίστοιχη γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου μιας διανυσματικής συνάρτησης θεωρούμε μια καμπύλη, έστω C, που ορίζεται παραμετρικά από τη διανυσματική συνάρτηση θέσης $\mathbf{r}(t)$. Τότε σύμφωνα με την $(17.2.1-4)$, αντίστοιχα $(17.2.1-5)$ της Παραγράφου 17.2.1 η συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ ισούται με

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}, \quad \text{αντίστοιχα}\\ \mathbf{r}(t) &= x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j},\end{aligned}$$



Σχήμα 17.3.2 - 1: Γεωμετρική ερμηνεία των διανυσμάτων της σχέσης $(17.3.2-3)$.

όταν $t \in [t_1, t_2]$.

Αν $t = a$, σύμφωνα με τον Ορισμό 17.3.1 - 2 και τον τύπο $(17.3.1-5)$ είναι (Σχ. 17.3.2 - 1)

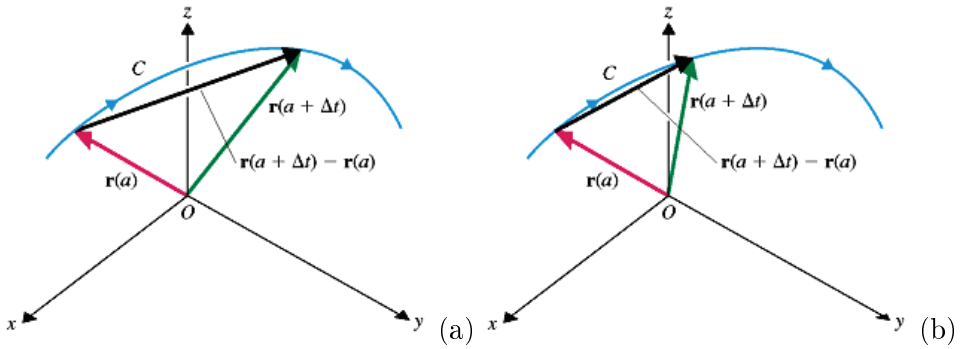
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(a+\Delta t) - \mathbf{r}(a)}{\Delta t}. \qquad (17.3.2 - 3)$$

[5] Έστω $\Delta t > 0$. Τότε, όταν το $\Delta t \to 0$, το διάνυσμα $\mathbf{r}(a+\Delta t) - \mathbf{r}(a)$ στον αριθμητή του κλάσματος $(17.3.2-3)$, που αρχικά ενώνει δύο διαφορετικά σημεία της C (Σχ. 17.3.2 - 2a-b), τελικά στην οριακή τιμή τείνει να έχει ένα κοινό σημείο με την C στο σημείο $\mathbf{r}(a)$, διαφορετικά να γίνει το **εφαπτόμενο διάνυσμα** της C στο σημείο αυτό (Σχ. 17.3.2 - 3).

Επομένως έχει αποδειχθεί ότι:

Πρόταση 17.3.2 - 2. *Έστω μια καμπύλη C που ορίζεται παραμετρικά από τη διανυσματική συνάρτηση θέσης $\mathbf{r}(t)$, όταν $t \in D$ με $D = [t_1, t_2]$. Αν $a \in D$, η $\mathbf{r}'(a)$ ορίζει τη* **διεύθυνση της εφαπτόμενης** *της C στο σημείο $\mathbf{r}(a)$.*

[5] Ανάλογα συμπεράσματα εξάγονται, όταν $\Delta t < 0$.



Σχήμα 17.3.2 - 2: Διαδοχικές θέσεις του διανύσματος $\mathbf{r}\,(a+\Delta t)-\mathbf{r}\,(a)$, όταν το $\Delta t \to 0$.

Τότε η παραμετρική **εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας** *δίνεται από τον τύπο*

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a) + t\,\mathbf{r}'(a), \quad \textit{όταν} \quad t \in D. \tag{17.3.2 - 4}$$

Άμεση συνέπεια της παραπάνω πρότασης είναι τότε ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 17.3.2 - 1. *Έστω μια καμπύλη C που περιγράφεται παραμετρικά από τη διανυσματική συνάρτηση θέσης $\mathbf{r}(t)$, όταν $t \in D$ με $D = [t_1, t_2]$. Τότε το* **μοναδιαίο εφαπτόμενο** *διάνυσμα συμβολίζεται με $\mathbf{T}(t)$ και ορίζεται από τη σχέση*

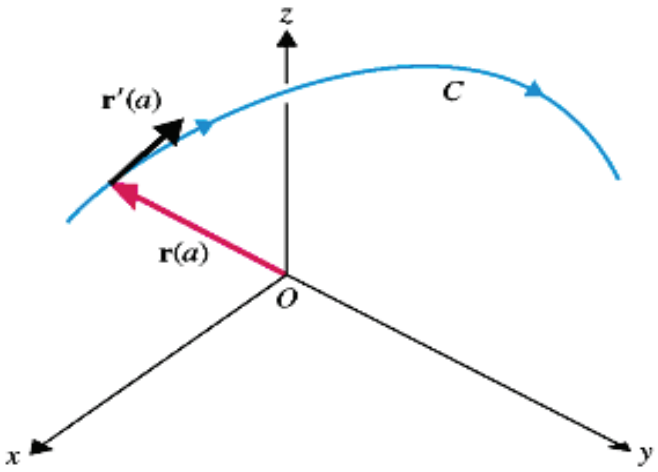
$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \quad \textit{για κάθε} \quad t \in D \quad \textit{με} \quad \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}. \tag{17.3.2 - 5}$$

Παράδειγμα 17.3.2 - 1

Έστω η καμπύλη C με παραμετρική εξίσωση

$$\mathbf{r}(t) = -\cos 2t\,\mathbf{i} + \sin 2t\,\mathbf{j}.$$

Να γίνει γραφική παράσταση της C και στη συνέχεια να υπολογιστεί το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο της $\mathbf{r}(\pi/4)$ και η παραμετρική



Σχήμα 17.3.2 - 3: Γεωμετρική ερμηνεία του διανύσματος $\mathbf{r}'(a)$.

εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας.

Λύση. Σύμφωνα και με την εξίσωση $(17.2.3-1)$ της Παραγράφου 17.2.3 η παραπάνω εξίσωση παριστάνει περιφέρεια κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $R=1$ (Σχ. 17.3.2 - 4).

Επειδή ζητείται το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο της περιφέρειας που έχει διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(\pi/4)$, οπότε $t=\pi/4$, διαδοχικά έχουμε

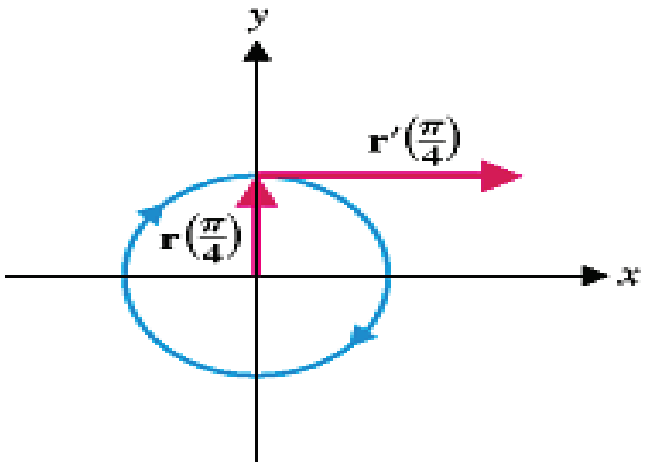
$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= -\cos 2t\,\mathbf{i}+\sin 2t\,\mathbf{j}, \quad \text{οπότε}\\ \mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\cos\frac{\pi}{2}\,\mathbf{i}+\sin\frac{\pi}{2}\,\mathbf{j}=\langle 0,1\rangle,\end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= 2\sin 2t\,\mathbf{i}+2\cos 2t\,\mathbf{j}, \quad \text{οπότε}\\ \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 2\sin\frac{\pi}{2}\,\mathbf{i}+\cos\frac{\pi}{2}\,\mathbf{j}=\langle 2,0\rangle.\end{aligned}$$

Τότε σύμφωνα με την $(17.3.2-5)$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $\mathbf{r}(\pi/4)$ είναι

$$\mathbf{T}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\left|\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|}=\frac{2\,\mathbf{i}+0\,\mathbf{j}}{\sqrt{2^2+0}}=\mathbf{i}.$$



Σχήμα 17.3.2 - 4: Παράδειγμα 17.3.2 - 1.

Σύμφωνα με την $(17.3.2-4)$ η παραμετρική εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) + t\,\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \langle 0,1\rangle + t\langle 2,0\rangle \\ &= \langle 2t,1\rangle = 2t\,\mathbf{i}+\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για το εσωτερικό γινόμενο των $\mathbf{r}(\pi/4)$ και $\mathbf{r}'(\pi/4)$ ισχύει:

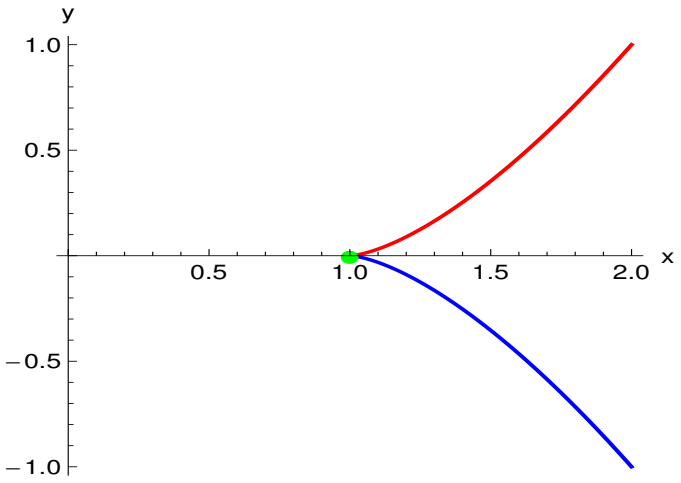
$$\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \langle 0,1\rangle\cdot\langle 2,0\rangle = 0\cdot 2+1\cdot 0 = 0,$$

δηλαδή τα διανύσματα $\mathbf{r}(\pi/4)$ και $\mathbf{r}'(\pi/4)$ είναι **κάθετα** μεταξύ τους. ∎

Δίνεται στη συνέχεια ο παρακάτω ορισμός, που ορίζει το είδος μιας καμπύλης:

Ορισμός 17.3.2 - 2. *Έστω μια καμπύλη C που περιγράφεται παραμετρικά από τη διανυσματική συνάρτηση θέσης $\mathbf{r}(t)$, όταν $t\in D$ με $D=[t_1,t_2]$. Τότε η C θα είναι* **λεία** *(smooth), όταν*

- *η $\mathbf{r}'(t)$ είναι συνεχής,*
- *$\mathbf{r}'(t)\neq\mathbf{0}$, εκτός ίσως από τα άκρα σημεία του D.*



Σχήμα 17.3.2 - 5: Παράδειγμα 17.3.2 - 2: η C, όταν $[-1,0)$ μπλε και $(0,1]$ κόκκινη καμπύλη. Στο σημείο $t=0$, δηλαδή όταν $(x,y)=(1,0)$, δημιουργείται μια γωνία.

Οι καμπύλες της Παραγράφου 17.2 είναι λείες. Στο σημείο που μια καμπύλη δεν είναι λεία, σχηματίζεται μια γωνία ή διαφορετικά μια **αιχμή** (λέγεται επίσης και οξύ άκρο) (cusp).

Παράδειγμα 17.3.2 - 2

Έστω η καμπύλη C με διανυσματική συνάρτηση θέσης (Σχ. 17.3.2 - 5)

$$\mathbf{r}(t)=\langle 1+t^2,t^3\rangle=\left(1+t^2\right)\mathbf{i}+t^3\mathbf{j}.$$

Τότε $\mathbf{r}'(t)=\langle 1+t^2,t^3\rangle$, που προφανώς είναι συνεχής για κάθε $t\in\mathbb{R}$, επειδή οι συνιστώσες συναρτήσεις $2t$ και $3t^2$ είναι συνεχείς. Επειδή όμως $\mathbf{r}'(t)=\mathbf{0}$, όταν $t=0$, η $\mathbf{r}(t)$ είναι λεία για κάθε $t\in\mathbb{R}-\{0\}$.

17.3.3 Κανόνες παραγώγισης

Έστω οι διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ και $\mathbf{W}$ με κοινό πεδίο ορισμού $D=(a,b)$ και παραγωγίσιμες στο D. Τότε, αν φ είναι μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού όμοια το D, αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης:

i) Αν $\mathbf{F} = \mathbf{c}$ σταθερά, τότε $\mathbf{F}' = \mathbf{0}$

ii) $(\mathbf{F} + \mathbf{G})' = \mathbf{F}' + \mathbf{G}'$

iii) $(k\,\mathbf{F})' = k\mathbf{F}'$ όταν k σταθερά

iv) $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})' = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{G} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}'$

v) $(\mathbf{F} \times \mathbf{G})' = \mathbf{F}' \times \mathbf{G} + \mathbf{F} \times \mathbf{G}'$

vi) $(\varphi\mathbf{F})' = \varphi'\mathbf{F} + \varphi\mathbf{F}'$ όταν φ βαθμωτή συνάρτηση

vii) $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \times \mathbf{W})' = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \times \mathbf{W}' + \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}' \times \mathbf{W} + \mathbf{F}' \cdot \mathbf{G} \times \mathbf{W}$

viii) $[\mathbf{F} \times (\mathbf{G} \times \mathbf{W})]' = \mathbf{F} \times (\mathbf{G} \times \mathbf{W}') + \mathbf{F} \times (\mathbf{G}' \times \mathbf{W}) + \mathbf{F}' \times (\mathbf{G} \times \mathbf{W})$.

Οι ιδιότητες (ii)-(iv) γενικεύονται για ν-το πλήθος συναρτήσεις.

Παράδειγμα 17.3.3 - 1

Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin^2 t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}.$$

Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 17.3.1 - 1 και τους γνωστούς τύπους παραγώγισης σύνθετων συναρτήσεων είναι

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}'(t) &= (\cos t)'\,\mathbf{i} + \left(\sin^2 t\right)'\,\mathbf{j} + t'\,\mathbf{k} = -\sin t\,\mathbf{i} + \overbrace{2\,\sin t\cos t}^{\sin 2t}\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \\
&= -\sin t\,\mathbf{i} + \sin 2t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}, \\
\mathbf{F}''(t) &= -(\sin t)'\,\mathbf{i} + (\sin 2t)'\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = -\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\cos 2t\,\mathbf{j}, \quad \text{κ.λπ.}
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 17.3.3 - 2

Όμοια, έστω οι διανυσματικές συναρτήσεις

$$\mathbf{F}(t) = t\,\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad \text{και} \quad \mathbf{G}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}.$$

Τότε σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης (iv) είναι

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})' &= \mathbf{F}' \cdot \mathbf{G} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}' \\
&= (\mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}) \cdot \left(t^3\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}\right) + (t\,\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot \left(3t^2\,\mathbf{i} + \mathbf{j}\right) \\
&= \left(1 \cdot t^3 + 0 \cdot t\right) + \left(t \cdot 3t^2 + 2 \cdot 1\right) = 4t^3 + 2.
\end{aligned}$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι 1ης και οι 2ης τάξης παράγωγοι των παρακάτω διανυσματικών συναρτήσεων $\mathbf{F}(t)$:

i)	$\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j}$	*iv)*	$e^{-t}\left(\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}\right)$
ii)	$t\,\mathbf{i} - t^2\,\mathbf{j}$	*v)*	$\ln(1+t)\,\mathbf{i} + \sin^2 t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$
iii)	$e^{-3t}\mathbf{i} - \cos 2t\mathbf{j}$	*vi)*	$\tan^{-1} t\,\mathbf{i} + e^{-t^2}\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$.

2. Δείξτε ότι η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{b}e^{\lambda t} + \mathbf{a}e^{-\lambda t},$$

όταν $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ σταθερά διανύσματα, επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$\mathbf{F}''(t) - \lambda^2\,\mathbf{F}(t) = \mathbf{0}.$$

3. Αν

$$\mathbf{F}(t) = t\,\mathbf{i} + \cos 2t\,\mathbf{j} + \sin 2t\,\mathbf{k} \quad \text{και} \quad \mathbf{G}(t) = t\,\mathbf{i} - \sin 2t\,\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k},$$

να υπολογιστούν οι παράγωγοι

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})', \quad (\mathbf{F}\times\mathbf{G})'' \quad \text{και} \quad (\mathbf{F}\cdot\mathbf{F})'.$$

4. Έστω η καμπύλη C με διανυσματική συνάρτηση θέσης $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, e^{t^2}, \sin 2t \right\rangle$. Να υπολογιστεί η παράγωγος $\mathbf{r}'(t)$, το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα και η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο της $r(0)$.

Απαντήσεις

(i) $\mathbf{F}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$, $\mathbf{F}''(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - 2\sin t\,\mathbf{j}$,

(ii) $\mathbf{F}'(t) = \mathbf{i} - 2t\,\mathbf{j}$, $\mathbf{F}''(t) = -2\,\mathbf{j}$,

(iii) $\mathbf{F}'(t) = -3e^{-3t}\,\mathbf{i} + 2\sin 2t\,\mathbf{j}$, $\mathbf{F}''(t) = 9e^{-3t}\,\mathbf{i} + 4\cos 2t\,\mathbf{j}$

(iv) $\mathbf{F}'(t) = -e^{-t}\left(\cos t + \sin t\right)\mathbf{i} + e^{-t}\left(\cos t - \sin t\right)\mathbf{j}$, $\mathbf{F}''(t) = 2e^{-t}\sin t\,\mathbf{i} - 2e^{-t}\cos t\,\mathbf{j}$

(v) $\mathbf{F}'(t) = \frac{1}{1+t}\,\mathbf{i} + \sin 2t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{F}''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}\,\mathbf{i} + 2\cos 2t\,\mathbf{j}$

(vi) $\mathbf{F}'(t) = \frac{1}{1+t^2}\,\mathbf{i} - 2te^{-t^2}\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$, $\mathbf{F}''(t) = -\frac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}\,\mathbf{i} + 2\left(2t^2-1\right)e^{-t^2}\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$.

2. $\mathbf{F}'(t) = \lambda b\,e^{\lambda t}\,\mathbf{i} - \lambda a\,e^{-\lambda t}\,\mathbf{j}$, $\mathbf{F}''(t) = \lambda^2 b\,e^{\lambda t}\,\mathbf{i} + \lambda^2 a\,e^{-\lambda t}\,\mathbf{j}$,

3. $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})' = 2t$,

$\mathbf{F}\times\mathbf{G}=\mathbf{i}+t\left(\sin 2t-\cos 2t\right)\,\mathbf{j}-t\left(\sin 2t+\cos 2t\right)\,\mathbf{k}$,
$(\mathbf{F}\times\mathbf{G})''=4\left[(t+1)\cos 2t-(t-1)\sin 2t\right]\,\mathbf{j}+4\left[(t-1)\cos 2t+(t+1)\sin 2t\right]\,\mathbf{k}$,
$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{F})'=2t$.
4. $\mathbf{r}'(t)=\left\langle 1,2te^{t^2},2\cos 2t\right\rangle$, $\mathbf{T}(0)=\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right\rangle$, εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας $\mathbf{r}(t)=\langle t,1,2t\rangle$.

17.3.4 Ολοκλήρωση

Ανάλογα με τους ορισμούς των παραπάνω παραγράφων η ολοκλήρωση των διανυσματικών συναρτήσεων ανάγεται τελικά στην ολοκλήρωση των επιμέρους συνιστωσών σύμφωνα με τους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός 17.3.4 - 1. *Έστω η διανυσματική συνάρτηση*

$$\mathbf{F}(t)=\langle f_1(t),f_2(t),f_3(t)\rangle\,.$$

Τότε η $\mathbf{G}(t)$ *θα είναι μια* **παράγουσα** *(antiderivative) της* $\mathbf{F}(t)$*, τότε και μόνον όταν* $\mathbf{G}'(t)=\mathbf{F}(t)$.

Ορισμός 17.3.4 - 2. *Έστω η διανυσματική συνάρτηση*

$$\mathbf{F}(t)=\langle f_1(t),f_2(t),f_3(t)\rangle$$

με πεδίο ορισμού D*. Τότε, αν οι συναρτήσεις* $f_1(t)$, $f_2(t)$ *και* $f_3(t)$ *είναι ολοκληρώσιμες στο* D*, το* **αόριστο ολοκλήρωμα** $\int\mathbf{F}(t)\,dt$ *υπάρχει και ισούται με*

$$\int\mathbf{F}(t)\,dt=\left\langle\int f_1(t)\,dt,\int f_2(t)\,dt,\int f_3(t)\,dt+\mathbf{C}\right\rangle,\qquad(17.3.4\text{ - }1)$$

όταν $\mathbf{C}=\langle c_1,c_2,c_3\rangle$ *η διανυσματική σταθερά ολοκλήρωσης.*

Οι ήδη γνωστοί κανόνες ολοκλήρωσης του Μαθήματος *Αόριστο Ολοκλήρωμα* εφαρμόζονται και στην περίπτωση αυτή για καθεμιά συνιστώσα χωριστά.

Παράδειγμα 17.3.4 - 1

Αν

$$\mathbf{F}(t) = \left\langle \cos 2t, -2\sin t, \frac{1}{1+t^2} \right\rangle$$

να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\mathbf{G}(t) = \int \mathbf{F}(t)\, dt, \quad \text{όταν} \quad \mathbf{G}(0) = \langle 3, -2, 1\rangle.$$

Λύση. Σύμφωνα με την $(17.3.4-1)$ διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(t) &= \int \mathbf{F}(t)\, dt \\
&= \left\langle \int \cos 2t\, dt, -2\int \sin t\, dt, \int \frac{1}{1+t^2}\, dt \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2}\sin 2t + c_1, 2\cos t + c_2, \tan^{-1} t + c_3 \right\rangle.
\end{aligned}$$

Επειδή $\mathbf{G}(0) = \langle 3, -2, 1\rangle$ από το παραπάνω ολοκλήρωμα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(0) &= \langle 3, -2, 1\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2}\overbrace{\sin 0}^{0} + c_1, 2\overbrace{\cos 0}^{1} + c_2, \overbrace{\tan^{-1} 0}^{0} + c_3 \right\rangle \\
&= \langle c_1, 2 + c_2, c_3\rangle.
\end{aligned}$$

Άρα $c_1 = 3$, $c_2 = -4$ και $c_3 = 1$, οπότε

$$\mathbf{G}(t) = \left\langle \frac{1}{2}\sin 2t + 3, 2\cos t - 4, \tan^{-1} t + 1 \right\rangle.$$

■

Ορισμός 17.3.4 - 3. *Έστω η διανυσματική συνάρτηση*

$$\mathbf{F}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t)\rangle$$

με πεδίο ορισμού $[a,b]$. *Τότε, αν οι συναρτήσεις* $f_1(t)$, $f_2(t)$ *και* $f_3(t)$ *είναι ολοκληρώσιμες στο* $[a,b]$, *το* **ορισμένο ολοκλήρωμα** $\int_a^b \mathbf{F}(t)\,dt$ *υπάρχει και ισούται με*

$$\mathbf{I} = \int_a^b \mathbf{F}(t)\,dt = \left\langle \int_a^b f_1(t)\,dt, \int_a^b f_2(t)\,dt, \int_a^b f_3(t)\,dt \right\rangle. \qquad (17.3.4\text{ - }2)$$

Ανάλογα, όπως και στην παραπάνω περίπτωση του αόριστου ολοκληρώματος, οι ήδη γνωστοί κανόνες ολοκλήρωσης του Μαθήματος *Ορισμένο Ολοκλήρωμα* εφαρμόζονται και στην περίπτωση αυτή για καθεμιά συνιστώσα χωριστά.

Παράδειγμα 17.3.4 - 2

Αν

$$\mathbf{F}(t) = \langle \sin t, 6, 4t \rangle$$

να υπολογιστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \mathbf{F}(t)\,dt.$$

Λύση. Σύμφωνα με την $(17.3.4-2)$ διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \int_0^1 \mathbf{F}(t)\,dt \\
&= \left\langle \int_0^1 \sin t\,dt, 6\int_0^1 dt, 4\int_0^1 t\,dt \right\rangle \\
&= \langle -\cos t, 6t, 2t^2 \rangle \Big|_0^1 \\
&= \langle -\cos 1, 6, 2\rangle - \langle -1, 0, 0\rangle \quad (\text{αφαίρεση διανυσμάτων}) \\
&= \langle 1-\cos 1, 6, 2\rangle = (1-\cos 1)\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

■

17.4 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[4] Marsden, J.E. & Tromba, A.J. (2011). *Διανυσματικός Λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–730–945–7.

[5] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 18

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

18.1 Εισαγωγή

[1]Στο μάθημα αυτό δίνονται οι βασικές έννοιες του Διανυσματικού Διαφορικού Λογισμού, που είναι σχετικές με τις βαθμωτές ή τις διανυσματικές συναρτήσεις μιας ή περισσότερων μεταβλητών και οι οποίες σε ορισμένες περιπτώσεις θεωρούνται ως μια γενίκευση των μέχρι τώρα ήδη γνωστών στον αναγνώστη αντίστοιχων κανόνων του Διαφορικού Λογισμού.

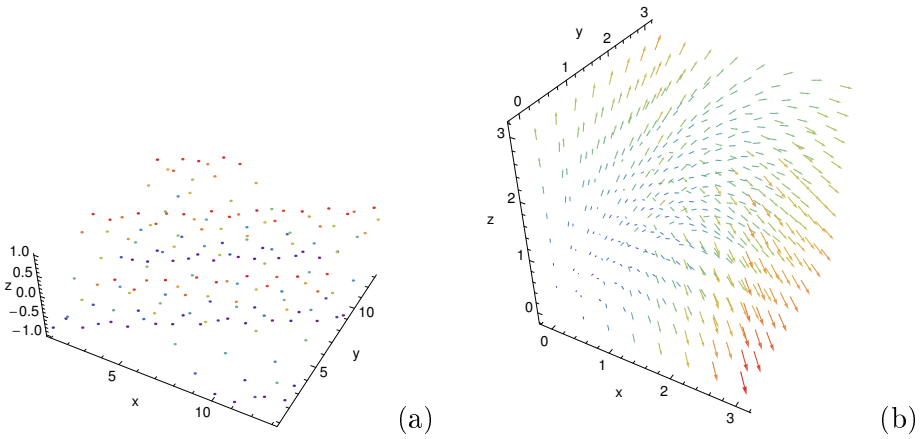
18.1.1 Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία

Έστω ότι σε τυχόν σημείο, έστω M, του χώρου που μας περιβάλλει αντιστοιχούν:

- ένας πραγματικός αριθμός, έστω T, που συμβολίζει την τιμή της θερμοκρασίας και (Σχ. 18.1.1 - 1a)

[1]Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4, 5].

- ένα διάνυσμα, έστω **v**, που συμβολίζει την ταχύτητα του ανέμου στο σημείο αυτό (Σχ. 18.1.1 - 1b).



Σχήμα 18.1.1 - 1: (α) Η θερμοκρασία T (βαθμωτό πεδίο) και (b) η ταχύτητα **v** στα διάφορα σημεία M του χώρου (διανυσματικό πεδίο).

Έστω Δ το σύνολο των μετρήσεων της θερμοκρασίας, αντίστοιχα της ταχύτητας στα παραπάνω σημεία M του χώρου. Τότε, όπως είναι γνωστό από τη Φυσική, επειδή οι τιμές της θερμοκρασίας και της ταχύτητας ή θα μεταβάλλονται ή θα είναι σταθερές σε ορισμένα από τα σημεία του M, το σύνολο Δ θα αποτελείται από διαφορετικά εν γένει στοιχεία, που είναι στην πρώτη περίπτωση αριθμοί και στη δεύτερη διανύσματα. Τότε οι τιμές στο Δ είναι δυνατόν να θεωρηθούν ως οι τιμές (πεδίο τιμών) μιας συνάρτησης ή ακριβέστερα **βαθμωτής** συνάρτησης $f(x, y, z)$ για την πρώτη, μιας **διανυσματικής** συνάρτησης $\mathbf{F}(x, y, z)$ για τη δεύτερη περίπτωση.[2]

Σύμφωνα με τα παραπάνω, όταν περιγράφεται ένα βαθμωτό μέγεθος, όπως είναι η θερμοκρασία, θα λέγεται ότι έχουμε ένα **βαθμωτό** πεδίο (scalar field)[3]

[2] Η διανυσματική συνάρτηση δύο μεταβλητών, αντίστοιχα τριών μεταβλητών, θεωρείται ως επέκταση της ήδη γνωστής συνάρτησης μιας μεταβλητής από το Μάθημα *Διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής*. Η παραγώγιση των διανυσματικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών γίνεται όμοια με εκείνων της μιας μεταβλητής, μόνον που η ολική παράγωγος $\mathbf{F}'(t)$ αντικαθίσταται στην περίπτωση αυτή από τη **μερική παράγωγο** για καθεμιά από τις μεταβλητές.

[3] Βλέπε βιβλιογραφία και *http://en.wikipedia.org/wiki/Scalar_field*

και η συνάρτηση που το περιγράφει βαθμωτή συνάρτηση ή απλά για ευκολία στο εξής συνάρτηση, που θα συμβολίζεται με f, g κ.λπ. ενώ, όταν περιγράφεται διανυσματικό μέγεθος, όπως είναι η ταχύτητα, θα λέγεται ότι έχουμε **διανυσματικό** πεδίο (vector field)[4] και η συνάρτηση που το περιγράφει διανυσματική συνάρτηση και θα συμβολίζεται με $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ κ.λπ.

Αν τώρα $Oxyz$ είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων του χώρου $\mathbb{R}^3$, τότε η συνάρτηση f γράφεται συναρτήσει των μεταβλητών x, y και z ως $f = f(x, y, z)$, ενώ η διανυσματική συνάρτηση ως $\mathbf{F}(x, y, z)$, που σε αντιστοιχία με την αναλυτική έκφραση του διανύσματος $\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}$ της Παραγράφου 18.1 θα γράφεται ως εξής:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}, \qquad (18.1.1\text{ - }1)$$

όταν P, Q και R είναι οι συνιστώσες ως προς τον x, y και z-άξονα. Θα πρέπει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι οι τιμές τόσο του βαθμωτού όσο και του διανυσματικού πεδίου είναι ανεξάρτητες από την εκλογή του συστήματος των αξόνων.

Η αντίστοιχη έκφραση της $(18.1.1-1)$ στο $\mathbb{R}^2$ είναι

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}. \qquad (18.1.1\text{ - }2)$$

Το **μέτρο** ή η **απόλυτη τιμή** της διανυσματικής συνάρτησης $(18.1.1-1)$ ορίζεται τότε από τη σχέση

$$|\mathbf{F}| = \left(P^2 + Q^2 + R^2\right)^{1/2},$$

ενώ της $(18.1.1-2)$ από την

$$|\mathbf{F}| = \left(P^2 + Q^2\right)^{1/2}.$$

Παράδειγμα 18.1.1 - 1

Το ήδη γνωστό διάνυσμα θέσης

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = \mathbf{F}(x, y, z),$$

[4] Βέπε βιβλιογραφία και *http://en.wikipedia.org/wiki/Vector_field*

είναι μια διανυσματική συνάρτηση τριών μεταβλητών, ενώ το μέτρο του

$$r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} = f(x, y, z)$$

μια βαθμωτή συνάρτηση. Άλλα παραδείγματα διανυσματικών συναρτήσεων θα δοθούν στη συνέχεια του μαθήματος.

18.2 Κατευθυνόμενη παράγωγος

18.2.1 Εισαγωγικές έννοιες

Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής ή και γενικότερα πολλών μεταβλητών, έστω $f(x, y)$, αντίστοιχα $f(x, y, z)$, ορίζει τον συντελεστή μεταβολής της f ως προς τον αντίστοιχο άξονα συντεταγμένων, δηλαδή η f_x ως προς τον x-άξονα, κ.λπ. Στην παράγραφο αυτή θα γίνει μια γενίκευση της μεταβολής αυτής, θεωρώντας ότι οι μεταβλητές x, y, αντίστοιχα x, y, z μεταβάλλονται ταυτόχρονα. Η έννοια της ταυτόχρονης μεταβολής δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η μεταβολή είναι η ίδια για κάθε μεταβλητή, δηλαδή είναι δυνατόν να έχουμε διαφορετικές μεταβολές ως προς x, y και z.

Παράδειγμα 18.2.1 - 1

Έστω ένα υλικό σημείο που κινείται στον χώρο από το σημείο

$$A\left(x_0, y_0, z_0\right) = A\left(1, -2, 0\right)$$

στο

$$B\left(x_1, y_1, z_1\right) = B\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z\right) = B\left(2, 0, 6\right).$$

Τότε

$$\begin{aligned}
\Delta x &= x_1 - x_0 = 2 - 1 = 1, \\
\Delta y &= y_1 - y_0 = 0 - (-2) = 2 \quad \text{και} \\
\Delta z &= z_1 - z_0 = 6 - 3 = 3, \quad \text{δηλαδή} \quad \Delta x \neq \Delta y \neq \Delta z.
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με την Παράγραφο 18.1, η μεταβολή της θέσης του σημείου από το A στο B θα ορίζεται από τη διεύθυνση του διανύσματος

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = \langle 1, 2, 3 \rangle.$$

Επειδή όμως υπάρχουν άπειρα διανύσματα που έχουν την ίδια διεύθυνση με το διάνυσμα $\mathbf{a}$, ο ακριβής καθορισμός της διεύθυνσης της παραπάνω μεταβολής γίνεται από το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα, έστω $\mathbf{n}$ του $\mathbf{a}$, δηλαδή στη συγκεκριμένη περίπτωση από το διάνυσμα

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}\,(\mathbf{i}+2\,\mathbf{j}+3\,\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{14}}\,(\mathbf{i}+2\,\mathbf{j}+3\,\mathbf{k}) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right\rangle \\
&= \langle n_1, n_2, n_3 \rangle\,.
\end{aligned}$$

Σημείωση 18.2.1 - 1

Σύμφωνα με το Παράδειγμα 18.2.1 - 1, αν $A\,(x_0, y_0)$, $B\,(x_1, y_1)$ αντίστοιχα $A\,(x_0, y_0, z_0)$, $B\,(x_1, y_1, z_1)$ είναι δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}^2$, αντίστοιχα του $\mathbb{R}^3$ που βρίσκονται σε απόσταση s, τότε, αν $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}$ κατά τη διεύθυνση $\overrightarrow{AB}$ θα ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{n} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{s}\,.$$

18.2.2 Ορισμός

Έχοντας τώρα υπόψη και τους αντίστοιχους ορισμούς των παραγώγων συνάρτησης μιας ή περισσότερων μεταβλητών, η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο A κατά τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{n}$ ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 18.2.2 - 1 (κατευθυνόμενη παράγωγος). *Έστω η συνάρτηση*

$$f(x, y)\,|\,S \subseteq \mathbb{R}^2, \quad \textit{αντίστοιχα} \quad f(x, y, z)\,|\,S \subseteq \mathbb{R}^3$$

με S ανοικτό σύνολο, που υποτίθεται ότι έχει 1ης τάξης μερικές παραγώγους στο S. Αν $A\left(x_0,y_0\right)$, $B\left(x_1,y_1\right)$ αντίστοιχα $A\left(x_0,y_0,z_0\right)$, $B\left(x_1,y_1,z_1\right)$ είναι δύο διαφορετικά σημεία του S, που βρίσκονται σε απόσταση $s=\left|\overrightarrow{AB}\right|=|\mathbf{a}|$ και $\mathbf{n}=\langle n_1,n_2\rangle$, αντίστοιχα $\mathbf{n}=\langle n_1,n_2,n_3\rangle$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, η κατευθυνόμενη παράγωγος (directional derivative)[5] *της f στο σημείο A συμβολίζεται με $\left(D_{\mathbf{n}}f\right)_A$ και ορίζεται από την παρακάτω οριακή τιμή*

$$\left(D_{\mathbf{n}}f\right)_A = \lim_{s\to 0}\frac{f\left(x_0+s\,n_1,y_0+s\,n_2\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{s}\,,$$

αντίστοιχα (18.2.2 - 1)

$$\left(D_{\mathbf{n}}f\right)_A = \lim_{s\to 0}\frac{f\left(x_0+s\,n_1,y_0+s\,n_2,z_0+s\,n_3\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{s}\,,$$

εφόσον υπάρχει.

Ισοδύναμα ο παραπάνω ορισμός γράφεται:

Ορισμός 18.2.2 - 2 (κατευθυνόμενη παράγωγος). *Έστω η συνάρτηση*

$$f(x,y)\,|\,S\subseteq\mathbb{R}^2,\quad \text{αντίστοιχα}\quad f(x,y,z)\,|\,S\subseteq\mathbb{R}^3$$

με S ανοικτό σύνολο, που υποτίθεται ότι έχει πρώτης τάξης μερικές παραγώγους στο S. Αν $A\left(x_0,y_0\right)$, $B\left(x_1,y_1\right)$ αντίστοιχα $A\left(x_0,y_0,z_0\right)$, $B\left(x_1,y_1,z_1\right)$ είναι δύο διαφορετικά σημεία του S, που βρίσκονται σε απόσταση $s=\left|\overrightarrow{AB}\right|=|\mathbf{a}|$ και $\mathbf{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο A συμβολίζεται με $\left(D_{\mathbf{n}}f\right)_A=\left.\frac{df}{ds}\right|_{\mathbf{n},\,A}$ και ορίζεται από την παρακάτω οριακή τιμή:

$$\left(D_{\mathbf{n}}f\right)_A=\left.\frac{df}{ds}\right|_{\mathbf{n},\,A} = \lim_{s\to 0}\frac{f\left(x_1,y_1\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{s}\,,$$

αντίστοιχα (18.2.2 - 2)

$$\left(D_{\mathbf{n}}f\right)_A=\left.\frac{df}{ds}\right|_{\mathbf{n},\,A} = \lim_{s\to 0}\frac{f\left(x_1,y_1,z_1\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{s}\,,$$

εφόσον υπάρχει.

[5] Βλέπε *http://en.wikipedia.org/wiki/Directional_derivative*

Ορισμός 18.2.2 - 3. *Έστω η συνάρτηση* $f(x,y)\,|S \subseteq \mathbb{R}^2$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z)\,|S \subseteq \mathbb{R}^3$ *με* S *ανοικτό σύνολο, που υποτίθεται ότι έχει πρώτης τάξης μερικές παραγώγους στο* S. *Αν η κατευθυνόμενη παράγωγος της* f *υπάρχει σε κάθε σημείο* $A\,(x_0,y_0)$, *αντίστοιχα* $A\,(x_0,y_0,z_0)$ *του* S, *τότε λέγεται ότι υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος (directional derivative) της* f *στο* S *και συμβολίζεται αυτό με*

$$D_{\mathbf{n}} f = \left(\frac{d\,f}{d\,s}\right)_{\mathbf{n}}. \qquad (18.2.2\text{ - }3)$$

Παρατηρήσεις 18.2.2 - 1

i) Η $(18.2.2-2)$ ορίζει τον συντελεστή μεταβολής της f στο σημείο A κατά τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{n}$.

ii) Ο τελεστής $\frac{d}{d\,s}$ στην περίπτωση αυτή έχει ερμηνεία ανάλογη των τελεστών $\frac{d}{d\,x}$ και $\frac{\partial}{\partial\,x}$, ενώ το απειροστό $d\,s$, όπως το αντίστοιχο $d\,x$, ορίζεται από το όριο $\lim_{s\to 0} s$ (βλέπε γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου συνάρτησης μιας μεταβλητής).

iii) Η $(18.2.2-1)$, αντίστοιχα η $(18.2.2-2)$ είναι πραγματικοί αριθμοί, ενώ η $(18.2.2-3)$ συνάρτηση (βλέπε Παράδειγμα 18.3.2 - 3).

Στην επόμενη παράγραφο θα γίνει ο υπολογισμός της κατευθυνόμενης παραγώγου.

18.3 Κλίση συνάρτησης

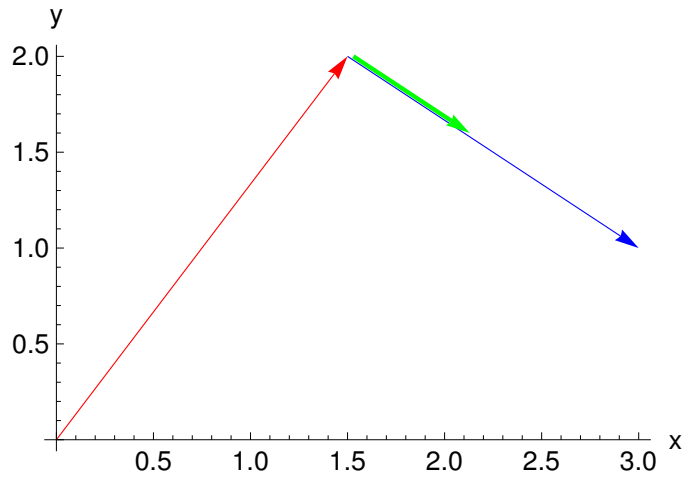
18.3.1 Σχετικοί ορισμοί

Αν

$$\mathbf{r}_A = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k} = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$$

το διάνυσμα θέσης του σημείου $A\,(x_0,y_0,z_0)$, τότε έχοντας υπόψη και τον κανόνα του παραλληλογράμμου για την πρόσθεση διανυσμάτων το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}_B$ του σημείου $B\,(x_1,y_1,z_1)$ θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + s\,\mathbf{n}$$



Σχήμα 18.3.1 - 1: Η Εξίσωση $(18.3.1-2)$ στο $\mathbb{R}^2$ όπου $\mathbf{r}_A$ το κόκκινο, $\mathbf{n}$ το πράσινο και $\mathbf{a}$ το μπλε διάνυσμα.

όταν $\mathbf{n} = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ και $s = \left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Άρα (βλέπε Σχ. 18.3.1 - 1 για την αντίστοιχη περίπτωση στο $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_A + s\,\mathbf{n} \qquad (18.3.1\text{ - }1)\\ &= (x_0 + s\,n_1)\,\mathbf{i} + (y_0 + s\,n_2)\,\mathbf{j} + (z_0 + s\,n_3)\,\mathbf{k}\\ &= x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k} = \mathbf{r}(s). \end{aligned}$$

Τότε από την $(18.3.1-1)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{d\,\mathbf{r}}{d\,s} &= \frac{d}{d\,s}\,(\mathbf{r}_A + s\,\mathbf{n})\\ &= \overbrace{\frac{d\,\mathbf{r}_A}{d\,s}}^{=0} + \frac{d\,(s\,\mathbf{n})}{d\,s} = \mathbf{n}\,\overbrace{\frac{d\,s}{d\,s}}^{=1} = \mathbf{n}. \qquad (18.3.1\text{ - }2) \end{aligned}$$

Υπενθυμίζεται για ευκολία στο σημείο αυτό το Θεώρημα $14.2.5-2$, που αφορούσε τον αλυσιδωτό κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης του Μαθήματος *Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών*:

Θεώρημα 18.3.1 - 1. *Έστω η συνάρτηση* $f(x,y) \mid S \subseteq \mathbb{R}^2$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z) \mid S \subseteq \mathbb{R}^3$ *και* $x = x(s)$, $y = y(s)$, *αντίστοιχα* $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ *για κάθε* $s \in A \subseteq \mathbb{R}$, *όπου* A *ανοικτό σύνολο με τις αντίστοιχες τιμές της* f *να ανήκουν στο* S *για κάθε* $s \in A$ *και επιπλέον ότι υπάρχει η παράγωγος της* f *στο* $(x(s), y(s))$, *αντίστοιχα* $(x(s), y(s), z(s))$ *για κάθε* $s \in A$. *Τότε η συνάρτηση* $f = f(s)$ *παραγωγίζεται στο* s *και ισχύει*

$$\begin{aligned} \frac{d\,f(t)}{d\,s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\,s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\,s} \\ &= f_x\,\frac{dx}{d\,s} + f_y\,\frac{dy}{d\,s}, \end{aligned} \tag{18.3.1 - 3}$$

αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \frac{d\,f(t)}{d\,s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\,s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\,s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{d\,s} \\ &= f_x\,\frac{dx}{d\,s} + f_y\,\frac{dy}{d\,s} + f_z\,\frac{dz}{d\,s}. \end{aligned} \tag{18.3.1 - 4}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 18.3.1 - 1, τον τύπο υπολογισμού του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων βάσει του οποίου αν

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \quad \text{και} \quad \mathbf{b} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, \quad \text{τότε} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{aligned}$$

και υποθέτοντας ότι η f έχει τουλάχιστον 1ης τάξης μερικές παραγώγους στο

S σύμφωνα και με τις $(18.3.1-1)$ και $(18.3.1-2)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\,f}{d\,s}\right)_{\mathbf{n}} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\,x(s)}{d\,s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\,y(s)}{d\,s}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{d\,z(s)}{d\,s}\\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{d\,x(s)}{d\,s}\mathbf{i}+\frac{d\,y(s)}{d\,s}\mathbf{j}+\frac{d\,z(s)}{d\,s}\mathbf{k}\right)\\ &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)f\right]\cdot\left[\frac{d}{d\,s}\overbrace{(x(s)\,\mathbf{i}+y(s)\,\mathbf{j}+z(s)\,\mathbf{k})}^{(18.3.1-1)}\right]\\ &= (\nabla f)\cdot\overbrace{\frac{d\,\mathbf{r}(\mathbf{s})}{d\,s}}^{(18.3.1-2)}=(\nabla f)\cdot\mathbf{n}, \qquad (18.3.1\text{ - }5)\end{aligned}$$

όπου το σύμβολο ∇ ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 18.3.1 - 1 (διαφορικός τελεστής). *Ορίζεται ως διαφορικός τελεστής*[6] *(del) στο* $\mathbb{R}^2$ *ο*

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle, \qquad (18.3.1\text{ - }6)$$

αντίστοιχα στο $\mathbb{R}^3$ *ο*

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle. \qquad (18.3.1\text{ - }7)$$

Από την $(18.3.1-5)$ και τις $(18.3.1-6)$, αντίστοιχα $(18.3.1-7)$ έχουμε τον παρακάτω τύπο υπολογισμού της κατευθυνόμενης παραγώγου:

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{n}}f &= \left(\frac{d\,f}{d\,s}\right)_{\mathbf{n}}=(\nabla f)\cdot\mathbf{n}=\langle f_x,f_y\rangle\cdot\langle n_1,n_2\rangle\\ &= f_x\,n_1+f_y\,n_2, \qquad (18.3.1\text{ - }8)\end{aligned}$$

αντίστοιχα

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{n}}f &= \left(\frac{d\,f}{d\,s}\right)_{\mathbf{n}}=(\nabla f)\cdot\mathbf{n}=\langle f_x,f_y,f_z\rangle\cdot\langle n_1,n_2,n_3\rangle\\ &= f_x\,n_1+f_y\,n_2+f_z\,n_3. \qquad (18.3.1\text{ - }9)\end{aligned}$$

[6] Βλέπε *http://en.wikipedia.org/wiki/Del*

Το ανάδελτα ∇ (nabla), είναι ένα συμβολικό διάνυσμα με πολλές εφαρμογές στην περιγραφή των εξισώσεων διαφόρων προβλημάτων όπως του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (εξισώσεις του Maxwell),[7] υδροδυναμικής, κυματικής, κ.λπ. και έχει ιδιότητες ανάλογες με εκείνες των γνωστών διανυσμάτων.

Σύμφωνα τώρα και με τους τύπους $(18.3.1-8)$, αντίστοιχα $(18.3.1-9)$ η κλίση ενός βαθμωτού πεδίου ορίζεται στη συνέχεια ως εξής:

Ορισμός 18.3.1 - 2 (κλίση). *Έστω η συνάρτηση* $f(x,y)|S \subseteq \mathbb{R}^2$, *αντίστοιχα* $f(x,y,z)|S \subseteq \mathbb{R}^3$ *με* S *ανοικτό σύνολο, που έχει τουλάχιστον* 1*ης τάξης μερικές παραγώγους στο* S. *Τότε ορίζεται ως κλίση (gradient)*[8] *της* f *η διανυσματική συνάρτηση*

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} = \langle f_x\,, f_y \rangle\,, \qquad (18.3.1\text{ - }10)$$

αντίστοιχα

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} + f_z\,\mathbf{k} = \langle f_x\,, f_y\,, f_z \rangle\,. \qquad (18.3.1\text{ - }11)$$

Παρατηρήσεις 18.3.1 - 1

i) Σύμφωνα με τον Ορισμό 18.3.1 - 2 η κλίση εφαρμόζεται σε βαθμωτή συνάρτηση, δηλαδή συνάρτηση που περιγράφει βαθμωτό πεδίο και δημιουργεί τη διανυσματική συνάρτηση ∇f, δηλαδή συνάρτηση που περιγράφει διανυσματικό πεδίο. Είναι προφανές ότι η κλίση σε σημείο $\nabla f|_A$ είναι διάνυσμα.

ii Με τη βοήθεια της κλίσης οι αναγκαίες συνθήκες

$$f_x = f_y = 0$$

για την ύπαρξη ακρότατων της συνάρτησης $f(x,y)$, αντίστοιχα οι

$$f_x = f_y = f_z = 0$$

[7] Βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 4.
[8] Βλέπε *http://en.wikipedia.org/wiki/Gradient*

για την $f(x,y,z)$, γράφονται

$$\begin{aligned}\nabla f &= \langle f_x\,, f_y\rangle = \mathbf{0}, \quad \text{αντίστοιχα}\\ \nabla f &= \langle f_x\,, f_y\,, f_z\rangle = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

18.3.2 Ιδιότητες και εφαρμογές

Έστω $f,\, g|S \subseteq \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα $f,\, g|S \subseteq \mathbb{R}^3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά. Τότε:

	Κατευθυνόμενης παραγώγου	Κλίσης
1.	$D_{\mathbf{n}} f = 0$	$\nabla f = \mathbf{0}$, όταν f σταθερά
2.	$D_{\mathbf{n}}\,(f+g) = D_{\mathbf{n}} f + D_{\mathbf{n}} g$	$\nabla\,(f+g) = \nabla f + \nabla g$
3.	$D_{\mathbf{n}}\,(f\,g) = f\,D_{\mathbf{n}}\,g + g\,D_{\mathbf{n}} f$	$\nabla\,(f\,g) = f\nabla g + g\nabla f$
4.	$D_{\mathbf{n}}\,(\lambda f) = \lambda D_{\mathbf{n}} f$	$\nabla\,(\lambda f) = \lambda \nabla f$
5.	$D_{\mathbf{n}}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g D_{\mathbf{n}}\,f - f D_{\mathbf{n}}\,g}{g^2}$	$\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$,

όταν $g\,(\mathbf{x}) \neq 0$.

Η απόδειξη των ιδιοτήτων αφήνεται ως άσκηση.

Παράδειγμα 18.3.2 - 1

Αν

$$f(x,y,z) = 3x^2y - y^3z^2,$$

να υπολογιστεί η κλίση στο σημείο $P(1,-2,-1)$.
Λύση. Είναι

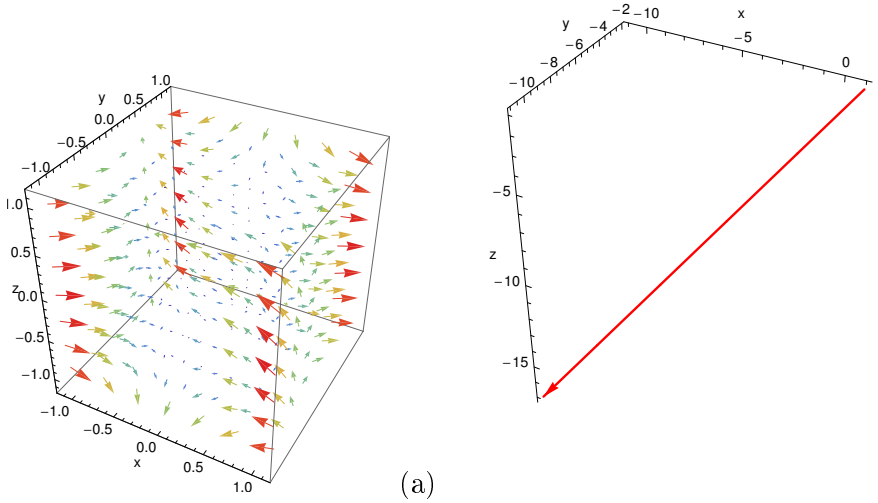
$$f_x = 6xy, \quad f_y = 3x^2 - 3y^2z^2 \quad \text{και} \quad f_z = -2y^3z.$$

Άρα (Σχ. 18.3.2 - 1a)

$$\nabla f = 6xy\,\mathbf{i} + 3\left(x^2 - y^2z^2\right)\,\mathbf{j} - 2y^3z\,\mathbf{k},$$

οπότε (Σχ. 18.3.2 - 1b)

$$\nabla f_{P(1,-2,-1)} = -12\,\mathbf{i} - 9\,\mathbf{j} - 16\,\mathbf{k} = \langle -12, -9, -16\rangle.$$



Σχήμα 18.3.2 - 1: (a) Η γραφική παράσταση της κλίσης $\nabla f = 6xy\,\mathbf{i} + 3\left(x^2 - y^2z^2\right)\,\mathbf{j} - 2y^3z\,\mathbf{k}$, όταν $x, y, z \in [-1, 1]$ και (b) το διάνυσμα $\nabla f_{P(1,-2,-1)} = -12\,\mathbf{i} - 9\,\mathbf{j} - 16\,\mathbf{k} = \langle -12, -9, -16\rangle$.

■

Παράδειγμα 18.3.2 - 2

Όμοια, αν

$$f(x, y, z) = \ln|\mathbf{r}|\,,$$

όπου $\mathbf{r}$ διάνυσμα θέσης, να υπολογιστεί η κλίση της f.

Λύση. Επειδή

$$|\mathbf{r}| = r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} \quad \text{είναι} \quad f(x, y, z) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

Τότε

$$f_x = \frac{1}{2}\frac{\overbrace{\left(x^2+y^2+z^2\right)_x}^{2x}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\,,$$

ενώ λόγω της συμμετρίας της f ανάλογοι τύποι υπολογίζονται για τις παραγώγους f_y και f_z.

Άρα

$$\nabla f = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} + f_z\,\mathbf{k} = \frac{x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\mathbf{r}}{r^2}\,.$$

■

Παράδειγμα 18.3.2 - 3

Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

στο σημείο $P(2,1,3)$ κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

Λύση. Αρχικά υπολογίζεται η κλίση της f ως εξής:

$$\nabla f = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} + f_z\,\mathbf{k} = 2x\,\mathbf{i} + 4y\,\mathbf{j} + 6z\,\mathbf{k}, \tag{1}$$

οπότε στο σημείο $P(2,1,3)$ θα έχουμε

$$\nabla f|_{P(2,1,3)} = 2\cdot 2\,\mathbf{i} + 4\cdot 1\,\mathbf{j} + 6\cdot 3\,\mathbf{k} = 4\,\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 18\,\mathbf{k} = \langle 4,4,18\rangle. \tag{2}$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}$ κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\boldsymbol{\alpha}$ είναι

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|} = \frac{\mathbf{i}-2\,\mathbf{j}}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{j} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}\,, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle. \tag{3}$$

Επομένως σύμφωνα και με τη γνωστή ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου από τις (2) και (3) προκύπτει

$$\begin{aligned}
(D_{\mathbf{n}}f)_{P(2,1,3)} &= (4\mathbf{i}+4\mathbf{j}+18\mathbf{k})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{j}\right)\\
&= \langle 4,4,18\rangle\cdot\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}\,, -\frac{2}{\sqrt{5}}\,, 0\right\rangle = \frac{4\cdot 1}{\sqrt{5}} + \frac{4\cdot(-2)}{\sqrt{5}} + 18\cdot 0\\
&= -\frac{4}{\sqrt{5}} \approx -1.78885,
\end{aligned}$$

δηλαδή σύμφωνα και με τις Παρατηρήσεις 18.2.2 - 1 (iii) πραγματικός αριθμός.

Έστω τώρα ότι ζητείται η κατευθυνόμενη παράγωγος κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}$ γενικά και όχι σε συγκεκριμένο σημείο. Τότε από την (1) και την (3) έχουμε

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{n}}f &= (2x\,\mathbf{i} + 4y\,\mathbf{j} + 6z\,\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{j}\right) \\ &= \langle 2x, 4y, 6z\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right\rangle = \frac{2x\cdot 1}{\sqrt{5}} + \frac{4y\cdot(-2)}{\sqrt{5}} + 6z\cdot 0 \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}\,(x - 4y)\,, \end{aligned}$$

δηλαδή όμοια σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 18.2.2 - 1 (iii) μια βαθμωτή συνάρτηση. ∎

Παράδειγμα 18.3.2 - 4

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x,y) = x\,e^{xy} + y$$

στο σημείο $P(2,0)$ κατά τη διεύθυνση της γωνίας $\theta = 2\pi/3$.

Λύση. Για τον υπολογισμό της κλίσης της f έχουμε

$$\begin{aligned} f_x &= \overbrace{(x)_x}^{1}\, e^{xy} + x\,\overbrace{(xy)_x}^{y}\, e^{xy} = (1+xy)\,e^{xy}, \\ f_y &= x\,\overbrace{(xy)_y}^{x} e^{xy} + 1 = x^2 e^{xy} + 1, \quad \text{οπότε} \\ \nabla f &= (1+xy)\,e^{xy}\,\mathbf{i} + \left(x^2 e^{xy} + 1\right)\,\mathbf{j}, \end{aligned}$$

οπότε στο σημείο $P(2,0)$ θα είναι

$$\nabla f|_{P(2,0)} = (1+0)e^0\,\mathbf{i} + \left(1 + 2^2 e^0\right)\,\mathbf{j} = \mathbf{i} + 5\,\mathbf{j} = \langle 1, 5\rangle.$$

Το διάνυσμα κατά τη διεύθυνση της γωνίας $\theta = 2\pi/3$ είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} = \cos\frac{2\pi}{3}\,\mathbf{i} + \sin\frac{2\pi}{3}\,\mathbf{j} \\ &= -\frac{1}{2}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{j} = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

όπου προφανώς

$$|\mathbf{a}| = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1.$$

Τότε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}$ κατά τη διεύθυνση του $\mathbf{a}$ είναι

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|} = -\frac{1}{2}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{j} = \left\langle -\frac{1}{2}\,, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}(D_{\mathbf{n}} f)_{P(2,0)} &= (\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}) \cdot \left(-\frac{1}{2}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{j}\right) = \langle 1, 5\rangle \cdot \left\langle -\frac{1}{2}\,, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle \\ &= 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3} - 1}{2} \approx 3.830\,127.\end{aligned}$$

■

Σημείωση 18.3.2 - 1

Γενικότερα το διάνυσμα $\mathbf{a}$ κατά τη διεύθυνση της γωνίας θ είναι

$$\mathbf{a} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} = \langle \cos\theta\,, \sin\theta \rangle\,,$$

όπου προφανώς $|\mathbf{a}| = 1$, οπότε το μοναδιαίο διάνυσμα στην περίπτωση αυτή θα είναι $\mathbf{n} = \mathbf{a}$.

Πρόταση 18.3.2 - 1. *Η μέγιστη τιμή της κατευθυνόμενης παραγώγου $D_{\mathbf{n}} f$ μιας συνάρτησης f κατά τη διεύθυνση $\mathbf{n}$ ισούται με $|\nabla f\,|$ και συμβαίνει, όταν τα ∇f και $\mathbf{n}$ έχουν την ίδια διεύθυνση.*

Απόδειξη. Έστω θ η γωνία των ∇f και $\mathbf{n}$. Τότε από την $(18.3.1 - 5)$, σύμφωνα και με τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$D_{\mathbf{n}} f = \nabla f \cdot \mathbf{n} = |\nabla f\,|\;|\mathbf{n}| \cos\theta = |\nabla f\,| \cos\theta. \qquad (18.3.2 - 1)$$

Άρα το μέγιστο συμβαίνει, όταν $\cos\theta = 1$, δηλαδή $\theta = 0$, που σημαίνει ότι τα ∇f και $\mathbf{n}$ έχουν την ίδια διεύθυνση, ενώ η μέγιστη τιμή στην περίπτωση αυτή ισούται με $|\nabla f\,|$. ■

Παράδειγμα 18.3.2 - 5

Αν το ύψος h ενός λόφου δίνεται από τον τύπο

$$h = 1000 - 0.01x^2 - 0.02y^2,$$

να υπολογιστεί η διεύθυνση της μέγιστης μεταβολής στο σημείο $(60, 100)$ και η τιμή του.

Λύση. Έστω

$$f(x, y) = 1000 - 0.01x^2 - 0.02y^2.$$

Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 18.3.2 - 1 η μέγιστη μεταβολή γίνεται στη διεύθυνση

$$\nabla f = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} = \langle f_x, f_y\rangle = \langle -0.02\,x, -0.04\,y\rangle\,,$$

οπότε στο σημείο $(60, 100)$ η διεύθυνση είναι

$$\nabla f|_{(60,100)} = \nabla f(60, 100) = -1.2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} = \langle -1.2, -4\rangle$$

με τιμή $|\nabla f(60, 100)| = \sqrt{(-1.2)^2 + (-4)^2} \approx 4.176.$ ∎

Παράδειγμα 18.3.2 - 6

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$$

στο σημείο $(2, -1, 2)$.

Λύση. Έχουμε

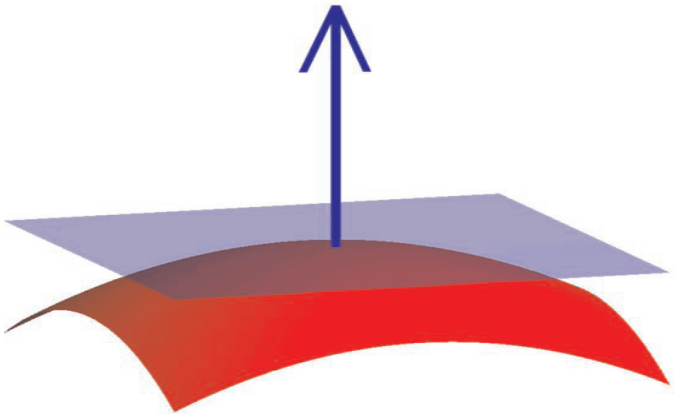
$$f_x = 4x + 2y + 2z$$

και λόγω της συμμετρίας της f όμοια

$$f_y = 4y + 2z + 2x \quad \text{και} \quad f_z = 4z + 2x + 2y.$$

Άρα

$$\nabla f = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} + f_z\,\mathbf{k} = \langle 4x + 2y + 2z, 4y + 2z + 2x, 4z + 2x + 2y\rangle\,,$$



Σχήμα 18.3.2 - 2: Το διάνυσμα της κλίσης είναι κάθετο στην επιφάνεια και στο εφαπτόμενο επίπεδο.

οπότε στο σημείο $(2,-1,2)$ η διεύθυνση είναι

$$\nabla f(2,-1,2) = 10\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 10\,\mathbf{k} = \langle 10,4,10\rangle$$

με τιμή

$$|\nabla f(2,-1,2)| = \sqrt{10^2+4^2+10^2} \approx 14.696\,940.$$

■

Από την Πρόταση 18.3.2 - 1 προκύπτει ότι:

Πρόταση 18.3.2 - 2. *Το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f\,(x_0,y_0)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια $f\,(x,y)-k=0$ στο σημείο (x_0,y_0), αντίστοιχα το $\nabla f\,(x_0,y_0,z_0)$ στην $f\,(x,y,z)-k=0$ στο (x_0,y_0,z_0). (Σχ. 18.3.2 - 2)*

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 18.3.2 - 2 είναι το παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα 18.3.2 - 1. *Το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια $f\,(x,y)-k=0$ στο σημείο (x_0,y_0), αντίστοιχα στην $f\,(x,y,z)-k=0$ στο (x_0,y_0,z_0) είναι κάθετο στο διάνυσμα της κλίσης $\nabla f\,(x_0,y_0)$, αντίστοιχα $\nabla f\,(x_0,y_0)$.*

Σύμφωνα με το παραπάνω πόρισμα αποδεικνύεται ότι:

Πόρισμα 18.3.2 - 2. *Έστω το επίπεδο π με εξίσωση*

$$f(x,y,z) = Ax + By + Cy + D = 0.$$

Τότε το διάνυσμα $\nabla f = \langle A, B, C\rangle$ *είναι κάθετο στο* π.

Παράδειγμα 18.3.2 - 7

Να δειχθεί ότι η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης

$$g(x,y) = \frac{y^2}{x} \quad \text{όταν} \quad x \neq 0$$

κατά τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος, που είναι κάθετο στην έλλειψη $2x^2 + y^2 = 1$, είναι ίση με μηδέν.

Λύση. Έστω $P = P(x_0, y_0)$ τυχόν σημείο της έλλειψης με εξίσωση

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 1.$$

Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 18.3.2 - 2 το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f(x_0, y_0)$ είναι κάθετο στην έλλειψη στο σημείο (x_0, y_0).

Επειδή

$$\nabla f(x_0, y_0) = \langle f_x, f_y\rangle = \langle 4\,x_0, 2\,y_0\rangle,$$

το αντίστοιχο μοναδιαίο $\mathbf{n} = \langle n_1, n_2\rangle$ θα ισούται με

$$\mathbf{n} = \frac{4\,x_0\,\mathbf{i} + 2\,y_0\mathbf{j}}{\sqrt{16\,x_0^2 + 4\,y_0^2}} = \frac{4\,x_0\,\mathbf{i} + 2\,y_0\mathbf{j}}{2\sqrt{4\,x_0^2 + y_0^2}}$$

$$= \left\langle \frac{2\,x_0}{\sqrt{4\,x_0^2 + y_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{4\,x_0^2 + y_0^2}} \right\rangle = \langle n_1, n_2\rangle \tag{1}$$

Η κλίση της συνάρτησης $g(x,y)$ στο σημείο (x_0, y_0) είναι

$$\nabla g(x_0, y_0) = \langle g_x, g_y\rangle = \left\langle -\frac{y_0^2}{x_0^2}, \frac{2\,y_0}{x_0} \right\rangle. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) σύμφωνα και με την $(18.3.1 - 8)$ - τύπος υπολογισμού - προκύπτει ότι

$$(D_{\mathbf{n}}g)_{P(x_0,y_0)} = g_x\,n_1 + g_y\,n_2$$

$$= \frac{2\,x_0}{\sqrt{4\,x_0^2 + y_0^2}}\left(-\frac{y_0^2}{x_0^2}\right) + \frac{y_0}{\sqrt{4\,x_0^2 + y_0^2}}\,\frac{2\,y_0}{x_0} = 0,$$

δηλαδή η αποδεικτέα. ∎

18.3.3 Συντηρούμενα διανυσματικά πεδία

Τα πεδία αυτά συναντώνται στη Φυσική και εφαρμογές των θα δοθούν στο Μάθημα *Επικαμπύλια και Επιφανειακά Ολοκληρώματα*.

Ορισμός 18.3.3 - 1 (συντηρητικό πεδίο). *Το διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση* $\mathbf{F}$ *θα λέγεται* **συντηρητικό** *(conservative field),*[9] *όταν*

$$\mathbf{F} = \nabla\varphi. \tag{18.3.3 - 1}$$

Στις περιπτώσεις αυτές η βαθμωτή συνάρτηση φ ορίζεται ως το **δυναμικό** (potential) του διανυσματικού πεδίου.

Παράδειγμα 18.3.3 - 1

Έστω το διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Ζητείται να υπολογιστεί το δυναμικό του, εφόσον υπάρχει.
Λύση. Έστω ότι το δυναμικό του πεδίου υπάρχει και είναι το $\varphi(x, y, z)$. Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 18.3.3 - 1 θα πρέπει

$$\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = \nabla\varphi = \varphi_x\,\mathbf{i} + \varphi_y\,\mathbf{j} + \varphi_z\,\mathbf{k},$$

οπότε

$$\varphi_x = x, \quad \varphi_y = y \quad \text{και} \quad \varphi_z = z.$$

Τότε, επειδή είναι γνωστό ότι, αν $f = f(x, y, z)$, τότε[10]

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz,$$

[9] Βλέπε *http://en.wikipedia.org/wiki/Conservative_field*
[10] Βλέπε Μάθημα *Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών - Η έννοια του διαφορικού*.

θα πρέπει και για το διαφορικό της συνάρτησης φ να ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi_x\,dx + \varphi_y\,dy + \varphi_z\,dz = x\,dx + y\,dy + z\,dz \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)_x dx + \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)_y dy \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)_z dz = \frac{1}{2}d\left(x^2+y^2+z^2\right). \end{aligned}$$

Άρα

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right) + c,$$

όταν c σταθερά. ∎

Παράδειγμα 18.3.3 - 2

Έστω το πεδίο Coulomb (Σχ. 18.3.3 - 1), που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Τότε η $\mathbf{F}$ είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως η κλίση της βαθμωτής συνάρτησης

$$\varphi = \varphi(x,y,z) = -\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = -\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2},$$

οπότε η φ ορίζει στην περίπτωση αυτή το δυναμικό του πεδίου Coulomb.[11]

Είναι προφανές ότι υπάρχουν και διανυσματικά πεδία που δεν είναι οι κλίσεις βαθμωτών πεδίων. Του είδους αυτού τα πεδία λέγονται **μη συντηρούμενα**.

Ασκήσεις

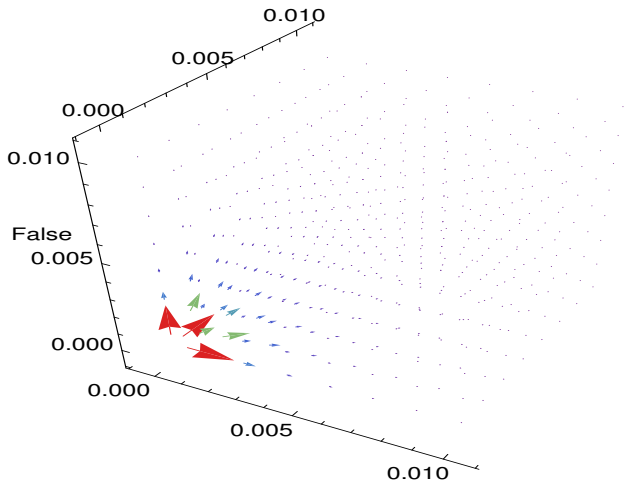
1. Να υπολογιστεί η κλίση των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $e^x \sin y$ *iii)* $\ln\left(x^2+y^2-z^2\right)$

ii) $e^{-x^2} - y^{1/2}$ *iv)* $\sin\left(x^2+y^2\right) - z^2$

2. Να υπολογιστεί η διευθυνόμενη παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων f στο σημείο P κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{a}$, όταν

[11] Βλέπε *http://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb%27s_law#Electric_field*



Σχήμα 18.3.3 - 1: Παράδειγμα 18.3.3 - 2: η μορφή του πεδίου Coulomb.

i) $f = x^2 + y^2 + z^2, \quad P(1,2,3), \quad \mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

ii) $f = e^{x-y}, \quad P(0,-1), \quad \mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$

iii) $f = e^x \cos 2y, \quad P(1,\pi), \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{i} + \mathbf{j}.$

3. Να βρεθεί η σταθερά γ, έτσι ώστε σε κάθε σημείο τομής των δύο σφαιρών

$$(x-\gamma)^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$$

τα αντίστοιχα εφαπτόμενα επίπεδα να είναι κάθετα μεταξύ τους.

4. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων της επιφάνειας $(y+z)^2 + (z-x)^2 = 16$, στα οποία η ευθεία που είναι κάθετη στην επιφάνεια να είναι παράλληλη στο yz-επίπεδο.

5. Να βρεθούν τα a, b, c, έτσι ώστε οι σφαίρες

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 1 \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

να τέμνονται κάθετα.

6. Να υπολογιστεί το δυναμικό των διανυσματικών πεδίων που περιγράφονται από τις παρακάτω διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{F}$:

i)	$x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$	*iv)*	$(y+z)\mathbf{i}+(z+x)\mathbf{j}+(x+y)\mathbf{k}$
ii)	$6x\mathbf{i}+4y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$	*v)*	$\dfrac{(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})}{(x^2+y^2)^{1/2}}$
iii)	$e^{xyz}\left(yz\mathbf{i}+zx\mathbf{j}+xy\mathbf{k}\right)$	*vi)*	$-\dfrac{(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,.$

Απαντήσεις

1. (i) $\nabla f=\langle e^x\sin y, e^x\cos y\rangle$, (ii) $\nabla f=\left\langle -2xe^{-x^2}, -\frac{1}{2\sqrt{y}}\right\rangle$,

(iii) $\nabla f=\left\langle \frac{2x}{x^2+y^2-z^2}\,,\frac{2y}{x^2+y^2-z^2}\,,\frac{2z}{x^2+y^2-z^2}\right\rangle$,

(iv) $\nabla f=\left\langle 2x\cos\left(x^2+y^2\right),2y\cos\left(x^2+y^2\right),-2z\right\rangle$.

2. (i) $\nabla f\,|_P=\langle 2,4,6\rangle$, $\mathbf{n}=\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}\,,\frac{1}{\sqrt{3}}\,,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle$, $D_{\mathbf{n}}f=0$,

(ii) $\nabla f\,|_P=\langle e,-e\rangle$, $\mathbf{n}=\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}\,,\frac{2}{\sqrt{5}}\right\rangle$, $D_{\mathbf{n}}f=-\frac{e}{\sqrt{5}}$,

(iii) $\nabla f\,|_P=\langle e,0\rangle$, $\mathbf{n}=\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\frac{1}{\sqrt{0}}\right\rangle$, $D_{\mathbf{n}}f=\frac{e}{\sqrt{2}}$.

6. $\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$, (ii) $3x^2+2y^2+z^2$, (iii) e^{xyz}, (iv) $xy+yz+zx$, (v) $\left(x^2+y^2\right)^{1/2}$, (vi) $\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$.

18.4 Απόκλιση

18.4.1 Ορισμός και ιδιότητες

Ορισμός 18.4.1 - 1 (απόκλιση). *Έστω ένα διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση* $\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$, *όταν* P, Q *και* R *οι συνιστώσες της* $\mathbf{F}$ *ως προς το ορθογώνιο σύστημα αξόνων* $Oxyz$ *και ότι η* $\mathbf{F}$ *έχει τουλάχιστον* 1*ης τάξης μερικές παραγώγους σε κάθε σημείο* (x,y,z) *του πεδίου ορισμού της. Τότε ορίζεται ως απόκλιση (divergence)*[12] *της* $\mathbf{F}$ *και συμβολίζεται με* $\operatorname{div}\mathbf{F}$ *ή* $\nabla\cdot\mathbf{F}$, *η βαθμωτή συνάρτηση*

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\,. \tag{18.4.1 - 1}$$

Αντίστοιχος ορισμός δίνεται, όταν $\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}$.

[12] Βλέπε *http://en.wikipedia.org/wiki/Divergence*

Σημείωση 18.4.1 - 1

Είναι $\nabla \cdot \mathbf{F} \neq \mathbf{F} \cdot \nabla$, διαφορετικά το $\nabla \cdot \mathbf{F}$ είναι συμβολισμός και δεν έχει την έννοια του εσωτερικού γινομένου.

Ορισμός 18.4.1 - 2. *Αν $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, τότε το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ λέγεται* **σωληνοειδές**.

Ιδιότητες της απόκλισης

i) $\nabla \cdot (\lambda \mathbf{F} + \mu \mathbf{G}) = \lambda \nabla \cdot \mathbf{F} + \mu \nabla \cdot \mathbf{G}$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

ii) $\nabla \cdot (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{G} + f\,(\nabla \cdot \mathbf{G})$, όταν η f είναι βαθμωτή συνάρτηση.

Παράδειγμα 18.4.1 - 1

Αν

$$\mathbf{F} = x^2 z\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - z^3\mathbf{k},$$

να υπολογισθεί η απόκλιση στο σημείο $(1, -1, 2)$.

Λύση. Είναι

$$P(x,y,z) = x^2 z, \quad Q(x,y,z) = y^2 \quad \text{και} \quad R(x,y,z) = -z^3,$$

οπότε

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 2xz + 2y - 3z^2.$$

Τότε $\nabla \cdot \mathbf{F}_{(1,-1,2)} = -10$. ∎

18.4.2 Τελεστής Laplace

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x,y,z)$ έχει μερικές παραγώγους τουλάχιστον 2ης τάξης σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Τότε η κλίση της είναι

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k},$$

οπότε για την απόκλιση της διανυσματικής συνάρτησης ∇f έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla f) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,. \end{aligned} \tag{18.4.2 - 1}$$

Δίνονται στη συνέχεια οι παρακάτω ορισμοί:

Ορισμός 18.4.2 - 1 (τελεστής Laplace). *Ο τελεστής Laplace (Laplacian operator)* [13] *είναι ένας διαφορικός τελεστής* 2*ης τάξης και ορίζεται στο* $\mathbb{R}^2$ *ως*

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,, \tag{18.4.2 - 2}$$

αντίστοιχα στο $\mathbb{R}^3$ *ως*

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{18.4.2 - 3}$$

Σύμφωνα και με την $(18.4.2-1)$ έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 18.4.2 - 2 (Laplacian συνάρτησης). *Έστω η συνάρτηση* $f(x,y)|S \subseteq \mathbb{R}^2$*, αντίστοιχα* $f(x,y,z)|S \subseteq \mathbb{R}^3$ *με* S *ανοικτό σύνολο, που έχει τουλάχιστον* 2*ης τάξης μερικές παραγώγους στο* S*. Τότε η Laplacian της* f *ορίζεται ως*

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,, \tag{18.4.2 - 4}$$

αντίστοιχα

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,. \tag{18.4.2 - 5}$$

Ειδικά, όταν

$$\nabla^2 f = 0 \tag{18.4.2 - 6}$$

η f λέγεται **αρμονική** και η $(18.4.2-6)$ ορίζει την **εξίσωση του Laplace** (Laplace's equation).[14]

[13] Βλέπε *http://en.wikipedia.org/wiki/Laplacian_operator*
[14] Βλέπε *http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace%27s_equation*

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η απόκλιση των διανυσματικών πεδίων που περιγράφονται από τις παρακάτω διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{F}$:

i) $\left(x^2+yz\right)\mathbf{i}+\left(y^2+zx\right)\mathbf{j}+\left(z^2+xy\right)\mathbf{k}$,

ii) $(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\,/\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}$,

iii) $e^{xy}\,\mathbf{i}+\cos xy\,\mathbf{j}+\cos xz\,\mathbf{k}$,

iv) $x^2\sin y\,\mathbf{i}+y^2\sin xz\,\mathbf{j}+xy\sin(\cos z)\,\mathbf{k}$.

2. Αν

$$\mathbf{F}=yz^2\,\mathbf{i}-3xz^2\,\mathbf{j}+2xyz\,\mathbf{k},\quad \mathbf{G}=3x\,\mathbf{i}+4z\,\mathbf{j}-xy\,\mathbf{k}$$

και $f=xyz$, να υπολογισθούν τα

$$\nabla\cdot(\mathbf{F}+\mathbf{G}),\quad \nabla\cdot(f\mathbf{G})\quad \text{και}\quad \mathbf{G}\cdot(\nabla f).$$

3. Δείξτε ότι οι παρακάτω διανυσματικές συναρτήσεις περιγράφουν σωληνοειδή πεδία:

i) $\mathbf{F}=3y^4z^2\mathbf{i}+4x^3z^2\mathbf{j}-3x^2y^2\mathbf{k}$,

ii) $\mathbf{G}=(x+3y)\mathbf{i}+(y-2z)\mathbf{j}+(x-2z)\mathbf{k}$.

4. Των παρακάτω συναρτήσεων $f=f(x,y,z)$ να υπολογιστεί το $\nabla^2 f$, όταν

i) $f=3x^2z-y^2z^3+4x^3y+2x-3y-5$ στο σημείο $P(1,-1,2)$,

ii) $f=\ln r$ όταν $r=|\mathbf{r}|$ διάνυσμα θέσης,

iii) $f=r^n;\ n=1,2,\dots$,

iv) $f=\nabla\cdot\left(\dfrac{\mathbf{r}}{r^2}\right)$.

5. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f=r^{-1}$, όταν $r=|\mathbf{r}|$ διάνυσμα θέσης είναι αρμονική.

Απαντήσεις

1. (i) $2(x+y+z)$, (ii) 0, (iii) $ye^{xy} - x(\sin xy + \sin xz)$, (iv) $2(x\sin y + y\sin xz) - xy\cos(\cos z)\sin z$.

2. $\nabla\cdot(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = 3+2xy$, $\nabla\cdot(f\,\mathbf{G}) = y^2z^3 + x^2z\left(4y^2-3z^2\right)$,
$\mathbf{G}\cdot(\nabla f) = x\left[-xy^2 + z\,(3y+4z)\right]$.

3. Προφανής. **4.** (i) $\nabla^2 f\,|_P = \left[24xy+6z-6y^2z-2z^3\right]_P = -40$, (ii) $\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}$, (iii) $n(1+n)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-1}$, (iv) $f = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}$, $\nabla^2 f = 2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-2}$.

6. Συμμετρική ως προς x, y, z προφανής.

18.5 Στροβιλισμός

18.5.1 Ορισμός και ιδιότητες

Ορισμός 18.5.1 - 1 (στροβιλισμός). *Έστω ένα διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση* $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, *όπου* P, Q *και* R *οι συνιστώσες της* $\mathbf{F}$ *ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων* $Oxyz$ *και για την οποία υποτίθεται ότι υπάρχουν τουλάχιστον οι* 1*ης τάξης μερικές παράγωγοι σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Τότε ορίζεται ως στροβιλισμός (curl)*[15] *της* $\mathbf{F}$ *και συμβολίζεται με* $\operatorname{curl}\mathbf{F}$ *ή* $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ *ή και* $\nabla\times\mathbf{F}$, *η διανυσματική συνάρτηση*

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (18.5.1\text{ - }1)$$

Από την $(18.5.1-1)$ προκύπτει ότι

$$\nabla\times\mathbf{F} = (R_y - Q_z)\,\mathbf{i} + (P_z - R_x)\,\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\,\mathbf{k}. \qquad (18.5.1\text{ - }2)$$

Ιδιότητες του στροβιλισμού

Οι περισσότερο χρησιμοποιούμενες είναι:

i) $\nabla\times(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \nabla\times\mathbf{F} + \nabla\times\mathbf{G}$,

[15] Βλέπε *http://en.wikipedia.org/wiki/Curl_(mathematics)*

ii) $\nabla \times (\lambda \mathbf{F}) = \lambda \nabla \times \mathbf{F}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,

iii) $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$, δηλαδή
ο στροβιλισμός της κλίσης είναι μηδέν,

iv) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
η απόκλιση του στροβιλισμού είναι μηδέν.

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

Παράδειγμα 18.5.1 - 1

Έστω $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + 2xy\mathbf{k}$. Τότε

$$P(x,y,z) = yz, \quad Q(x,y,z) = zx \quad \text{και} \quad R(x,y,z) = 2xy,$$

οπότε

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & 2xy \end{vmatrix} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j},$$

δηλαδή το διάνυσμα $\nabla \times \mathbf{F}$ ανήκει στο xy-επίπεδο.

18.5.2 Αστρόβιλα διανυσματικά πεδία

Ορισμός 18.5.2 - 1 (αστρόβιλο πεδίο). *Έστω ένα διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση* $\mathbf{F}$. *Τότε το πεδίο θα λέγεται αστρόβιλο (irrotational vector field),*[16] *όταν ισχύει*

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}. \tag{18.5.2 - 1}$$

Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση το πεδίο θα λέγεται στροβιλό (vortex field).

[16] Βλέπε *http://en.wikipedia.org/wiki/Irrotational_field♯Irrotational_vector_fields*

Παράδειγμα 18.5.2 - 1

Το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = 4x^3y^3z^2\,\mathbf{i} + 3x^4y^2z^2\,\mathbf{j} + 2x^4y^3z\,\mathbf{k}$$

είναι αστρόβιλο, επειδή

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 4x^3y^3z^2 & 3x^4y^2z^2 & 2x^4y^3z \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 18.5.2 - 1. *Ένα διανυσματικό πεδίο είναι αστρόβιλο, όταν είναι συντηρητικό και αντίστροφα.*

Εφαρμογές του θεωρήματος θα δοθούν στο Μάθημα των *Επικαμπύλιων και Επιφανειακών Ολοκληρωμάτων*.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί ο στροβιλισμός των διανυσματικών πεδίων που περιγράφονται από τις παρακάτω διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{F}$:

i) $x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$,

ii) $x\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} - \left(x^2 + z^2\right)\mathbf{k}$.

2. Δείξτε ότι το παρακάτω πεδίο είναι αστρόβιλο

$$\mathbf{F} = 6xy\,\mathbf{i} + \left(3x^2 - 3y^2z^2\right)\mathbf{j} - 2y^3z\,\mathbf{k}.$$

Απαντήσεις

1. (i) $\mathbf{0}$, (ii) $-y\,\mathbf{i} + 2x\,\mathbf{j}$. **2.** Προφανής.

18.6 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[4] Marsden, J.E. & Tromba, A.J. (2011). *Διανυσματικός Λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–730–945–7.

[5] Spiegel, M. (2009). *Vector Anaysis*. McGraw–Hill Education (2nd Ed.). ISBN 978–007–161–545–7.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 19

ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

19.1 Διπλά ολοκληρώματα

19.1.1 Εισαγωγή

Για την καλύτερη κατανόηση του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών, δηλαδή του **διπλού ολοκληρώματος**, κρίνεται απαραίτητο αρχικά να γίνει περιληπτικά μια υπενθύμιση του αντίστοιχου ορισμού του ορισμένου ολοκληρώματος από το Μάθημα *Ορισμένο Ολοκλήρωμα* για τη συνάρτηση, έστω $f(x)\,|\,[a,\,b]$, δηλαδή του

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (19.1.1\text{ - }1)$$

Τότε υποθέτοντας ότι η $f(x)$ είναι συνεχής και για ευκολία ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, γεωμετρικά ο αριθμός $I(f)$ ισούται με το **εμβαδόν** E του καμπυλόγραμμου τραπεζίου, που ορίζεται από τον x-άξονα, το διάγραμμα της συνάρτησης $y = f(x)$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$ (Σχ. 19.1.1 - 1).

Για την προσέγγιση του E το $[a,b]$ υποδιαιρείται σε διαστήματα πλάτους Δx ως εξής:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

και στη συνέχεια θεωρείται το παρακάτω άθροισμα των εμβαδών των σχηματιζόμενων ορθογωνίων:

$$f\left(x_1^*\right)\Delta x + f\left(x_2^*\right)\Delta x + \ldots + f\left(x_n^*\right)\Delta x,$$

όταν x_i^* μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων και $f\left(x_i^*\right)$; $i = 1, 2, \ldots, n$ τα ύψη. Τότε το εμβαδόν E, δηλαδή η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος $(19.1.1-1)$, ισούται με την οριακή

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x)\,dx \qquad (19.1.1\text{ - }2) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \left[f\left(x_1^*\right)\Delta x + f\left(x_2^*\right)\Delta x + \ldots + f\left(x_n^*\right)\Delta x\right], \end{aligned}$$

εφόσον αυτή υπάρχει.

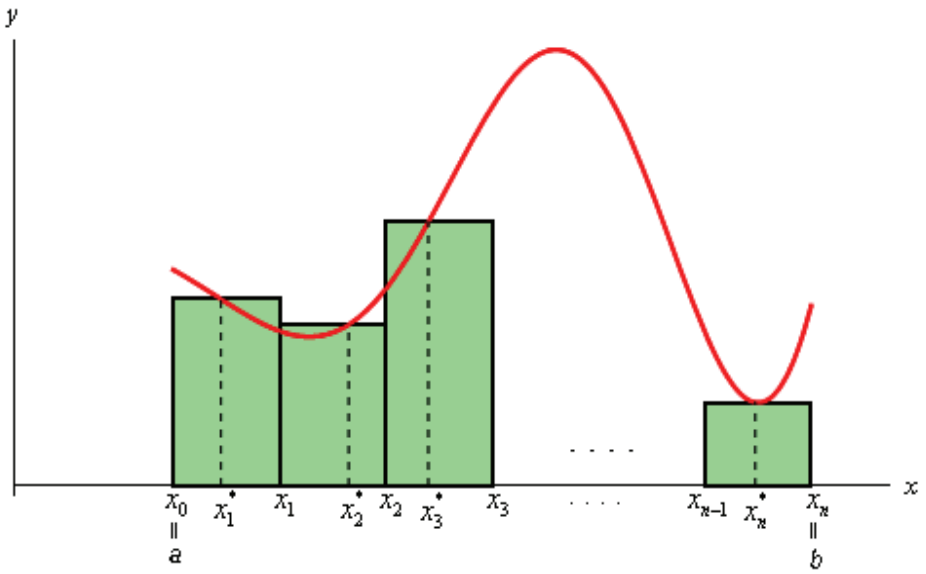
19.1.2 Ορισμός

Γενικεύοντας την παραπάνω εισαγωγή, έστω η συνάρτηση $f(x,y)$ με πεδίο ορισμού το $D = [a,\, b] \times [c,\, d\,] \subseteq \mathbb{R}^2$, που είναι συνεχής και για ευκολία μη αρνητική για κάθε $(x,y) \in [a,b] \times [c,d\,]$ (Σχ. 19.1.2 - 1). Όπως και στην περίπτωση του ορισμένου ολοκληρώματος $(19.1.1-1)$, το διάστημα $[a,b]$ υποδιαιρείται σε n-υποδιαστήματα πλάτους Δx από τα σημεία x_i; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$ και το διάστημα $[c,d\,]$ σε m-υποδιαστήματα πλάτους Δy από τα σημεία y_j; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, m$ (Σχ. 19.1.2 - 2 α).

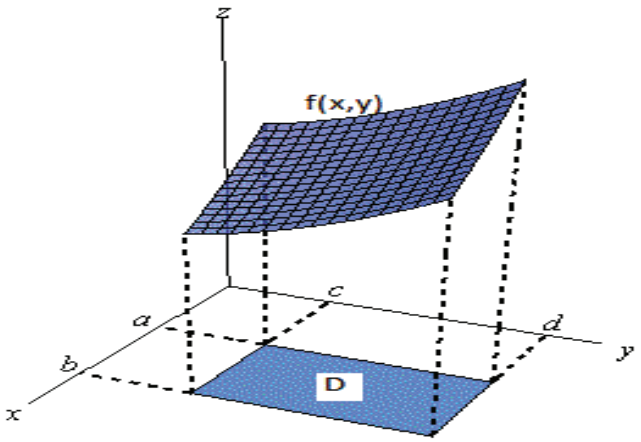
Τότε χρησιμοποιώντας αντίστοιχη γεωμετρική ερμηνεία με εκείνη του ολοκληρώματος $(19.1.1-1)$, το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \qquad (19.1.2\text{ - }1)$$

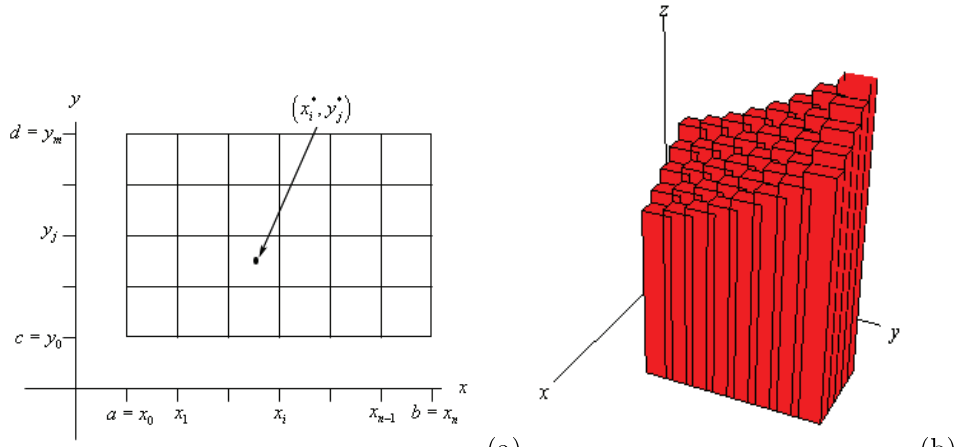
θα ισούται με τον όγκο V του στερεού, που έχει βάσεις το $[a,b] \times [c,d\,]$ και την επιφάνεια S, ενώ οι ακμές του είναι παράλληλες προς τον z-άξονα. Έστω



Σχήμα 19.1.1 - 1: γεωμετρικός υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος $(19.1.1-1)$.



Σχήμα 19.1.2 - 1: το πεδίο ορισμού $D=[a,b]\times[c,d]$ και η επιφάνεια $f(x,y)$.



Σχήμα 19.1.2 - 2: (a) Η διαμέριση του $[a,b]\times[c,d\,]$ και τα ενδιάμεσα σημεία (x_i^*, y_i^*). (b) Τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα που προσεγγίζουν τον όγκο V στην $(19.1.2-2)$.

$\Delta A = \Delta x\,\Delta y$ το εμβαδόν του στοιχειώδους ορθογωνίου παραλληλογράμμου της παραπάνω διαμέρισης του $[a,b]\times[c,d\,]$ και $f\left(x_i^*, y_j^*\right)$ το ύψος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που προκύπτει από τα ενδιάμεσα σημεία (x_i^*, y_i^*) και αντιστοιχεί στα επιμέρους ορθογώνια (Σχ. 19.1.2 - 2 b).

Τότε ο όγκος V (Σχ. 19.1.2 - 2 b) προσεγγίζεται ως εξής:

$$V \approx f\left(x_1^*, y_1^*\right)\Delta A + f\left(x_2^*, y_1^*\right)\Delta A + \ldots + f\left(x_n^*, y_m^*\right)\Delta A. \qquad (19.1.2\text{ - }2)$$

Αποδεικνύεται στην Ανάλυση ότι, όταν η διαγώνιος των παραπάνω ορθογωνίων τείνει στο μηδέν καθώς τα $n, m \to +\infty$, το άθροισμα $(19.1.2-2)$ συγκλίνει προς έναν αριθμό, έστω I, που είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των σημείων (x_i, y_j).

[1]Σύμφωνα και με τα παραπάνω έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 19.1.2 - 1 (διπλού ολοκληρώματος). *Ορίζεται ως διπλό ολοκλή-*

[1]Ο αναγνώστης, για μια πληρέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4] και: *http://en.wikipedia.org/wiki/Double_integral*

ρωμα (double integral) της $f(x,y)$ στο $D=[a,b]\times[c,d]$, η οριακή τιμή

$$I=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{n,\,m\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(x_i^*,y_j^*\right)\Delta A, \qquad (19.1.2\text{ - }3)$$

εφόσον αυτή υπάρχει.

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται για κάθε φραγμένο πεδίο ορισμού D της f.

19.1.3 Ιδιότητες

Οι κυριότερες ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος που δίνονται στη συνέχεια με τη μορφή θεωρημάτων είναι γενικεύσεις των αντίστοιχων ιδιοτήτων του ορισμένου ολοκληρώματος των συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Το πεδίο ορισμού, έστω D, των συναρτήσεων υποτίθεται ότι είναι κλειστό και φραγμένο, ενώ για την αποφυγή τετριμμένων περιπτώσεων το D υποτίθεται ότι δεν είναι σημείο ή ευθύγραμμο τμήμα.

Θεώρημα 19.1.3 - 1 (γραμμική). *Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες επί του D και k, $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε*

$$\begin{aligned}\iint\limits_D [k\,f(x,y)+\lambda\,g(x,y)]\,dx\,dy &= k\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy\\ &\quad +\lambda\iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Η ιδιότητα γενικεύεται.

Θεώρημα 19.1.3 - 2 (αθροιστική). *Αν η περιοχή D αποτελείται από τις χωριστές περιοχές D_1 και D_2, δηλαδή $D=D_1\cup D_2$ και $D_1\cap D_2=\emptyset$, τότε*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy,$$

ενώ, αν $D_1 \cap D_2 = \tilde{D}$*, δηλαδή υπάρχει επικάλυψη των περιοχών* D_1 *και* D_2 *στην περιοχή* $\tilde{D}$*, τότε*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy - \iint\limits_{\tilde{D}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Εφαρμογή της ιδιότητας θα γίνει στο Παράδειγμα 19.1.4 - 13.

Θεώρημα 19.1.3 - 3 (σύγκρισης). *Αν* $f(x,y) \geq g(x,y)$ *για κάθε* $(x,y) \in D$ *και οι συναρτήσεις* f*,* g *είναι ολοκληρώσιμες επί του* D*, τότε*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy \geq \iint\limits_{D} g(x,y)\,dx\,dy.$$

Ειδικά, αν $g(x,y) > 0$ *για κάθε* $(x,y) \in D$*, τότε*

$$\iint\limits_{D} g(x,y)\,dx\,dy > 0.$$

Θεώρημα 19.1.3 - 4. *Αν η συνάρτηση* f *είναι ολοκληρώσιμη επί του* D*, τότε*

$$\left| \iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy \right| \leq \iint\limits_{D} |f(x,y)|\,dx\,dy.$$

Θεώρημα 19.1.3 - 5. *Αν η συνάρτηση* f *είναι ολοκληρώσιμη επί του* D *και το* D *είναι αμελητέου εμβαδού, τότε*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

Θεώρημα 19.1.3 - 6 (μέσης τιμής). *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη επί του D , τότε*

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(x_0,y_0)\ A,$$

όπου A το εμβαδόν του τόπου D και $(x_0,y_0)\in D$.

19.1.4 Υπολογισμός σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $(19.1.2-1)$ εξαρτάται από τη μορφή του πεδίου ορισμού D. Συγκεκριμένα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

I. $\quad D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\quad a\le x\le b,\quad c\le y\le d\,\big\},$

δηλαδή και οι δύο μεταβλητές μεταβάλλονται σε διαστήματα με σταθερά άκρα ή διαφορετικά το πεδίο ορισμού D είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Ο υπολογισμός στην περίπτωση αυτή γίνεται σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 19.1.4 - 1 (Fubini). *Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού*

$$\begin{aligned} D &= [a,b]\times[c,d] \\ &= \{(x,y):\quad a\le x\le b,\quad c\le y\le d\} \end{aligned}$$

είναι ολοκληρώσιμη επί του D, τότε

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx \\ &= \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy. \end{aligned} \qquad (19.1.4-1)$$

Παρατηρήσεις 19.1.4 - 1

i) Σύμφωνα με το Θεώρημα (19.1.4 – 1) η τιμή του διπλού ολοκληρώματος (19.1.2 – 1) είναι ανεξάρτητη από τη σειρά ολοκλήρωσης στην (19.1.4 – 1).

ii) Στον τύπο (19.1.4–1), όταν γίνεται ολοκλήρωση ως προς μια μεταβλητή, έστω την y, τότε η x θεωρείται **σταθερά**.

Παράδειγμα 19.1.4 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint\limits_D \left(x^2 y + y^3\right)\, dx\, dy, \quad \text{όταν} \quad D = [0,1] \times [0,2].$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(19.1.4 - 1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[\int_0^2 \overbrace{\left(x^2 y + y^3\right)}^{x \text{ σταθερά}} dy \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\, x^2\, y^2 + \frac{1}{4}\, y^4 \right]_{y=0}^{y=2} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\, x^2\, 2^2 + \frac{1}{4}\, 2^4 - 0 \right) dx = \int_0^1 \left(2\, x^2 + 4\right)\, dx \\ &= \left[2\, \frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^1 = \frac{14}{3}\,. \end{aligned}$$

Εναλλακτικά ο παραπάνω υπολογισμός είναι δυνατόν να γίνει αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης ως εξής:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left[\int_0^1 \overbrace{\left(x^2 y + y^3\right)}^{y \text{ σταθερά}} dx \right] dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{3}\, x^3\, y + \frac{1}{2}\, x\, y^3 \right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{3}\, y + y^3 - 0 \right) dy = \left[\frac{y^2}{6} + \frac{y^4}{4} \right]_0^2 = \frac{14}{3}\,. \end{aligned}$$

■

Στο εξής θα εφαρμόζεται ο ευκολότερος κατά περίπτωση τύπος στην (19.1.4–1).

Παράδειγμα 19.1.4 - 2

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \iint\limits_D x\, e^{xy}\, dx\, dy, \quad \text{όταν} \quad D = [-1,2] \times [0,1].$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{-1}^{2} \left[\int\limits_0^1 x\, e^{xy}\, dy \right] dx = \int\limits_{-1}^{2} \left[\int\limits_0^1 \overbrace{(x\, y)_y}^{x=(x\, y)_y}\ e^{xy}\, dy \right] dx \\ &\quad \text{επειδή η ολοκλήρωση γίνεται ως προς } y \text{ πρέπει να} \\ &\quad \text{δημιουργηθεί η παράγωγος } (xy)_y \text{ της } e^{xy}, \\ &\quad \Big(\text{μορφή } f'(x)e^{f(x)}\Big) \\ &= \int\limits_{-1}^{2} \left[\int\limits_0^1 (x\, y)_y\, e^{xy}\, dy \right] dx = \int\limits_{-1}^{2} e^{xy} \Big|_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int\limits_{-1}^{2} (e^x - 1)\ dx = [e^x - x]_{-1}^{2} = e^2 - e^{-1} - 3. \end{aligned}$$

Αν η ολοκλήρωση γίνει πρώτα ως προς x, τότε απαιτείται η εφαρμογή της παραγοντικής ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. ∎

Παράδειγμα 19.1.4 - 3

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \iint\limits_D \frac{dx\, dy}{(2x+3y)^2}\,, \quad \text{όταν} \quad D = [0,1] \times [1,2].$$

Λύση. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \left[\int_0^1 (2x+3y)^{-2} dx \right] dy \\
&= \int_1^2 \left[\int_0^1 \frac{1}{2} (2x+3y)_x (2x+3y)^{-2} \, dx \right] dy
\end{aligned}
$$

όμοια επειδή η ολοκλήρωση γίνεται ως προς x πρέπει να δημιουργηθεί η παράγωγος $(2x+3y)_x$ της $(2x+3y)^{-2}$, $\left(\text{μορφή } f'(x)\, f^a(x)\right)$

$$
\begin{aligned}
&= \int_1^2 \left[\frac{1}{2} \frac{(2x+3y)^{-2+1}}{-2+1} \, dx \right] dy = \int_1^2 \left[-\frac{1}{2} (2x+3y)^{-1} \right]_{x=0}^{x=1} dy \\
&= -\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dy}{2+3y} - \left(-\frac{1}{2} \right) \int_1^2 \frac{dy}{3y} \\
&= -\frac{1}{2} \int_1^2 \overbrace{\frac{dy}{2+3y}}^{\frac{1}{3}\ln|2+3y|} + \frac{1}{6} \int_1^2 \overbrace{\frac{dy}{y}}^{\ln|y|} \\
&= -\frac{1}{6} \left(\ln 8 - \ln 2 - \ln 5 \right).
\end{aligned}
$$

■

Άσκηση

Να υπολογιστούν τα παρακάτω διπλά ολοκληρώματα:

i)
$$\iint_D xy(x^2+y^2)\,dx\,dy, \quad \text{όταν} \quad (x,y)\in D,$$
$$\text{και} \quad D=[0,1]\times[0,1],$$

ii)
$$\iint_D \cos(x+y)\,dx\,dy, \quad \text{όταν} \quad D=[0,\pi]\times[0,\pi],$$

iii)
$$\iint_D \sin^2 x\cos y\,dx\,dy, \quad \text{όταν} \quad D=[0,\pi/2\,]\times[0,\pi],$$

iv)
$$\iint_D \frac{x\,dx\,dy}{x+y}, \quad \text{όταν} \quad D=[-1,1]\times[-1,1],$$

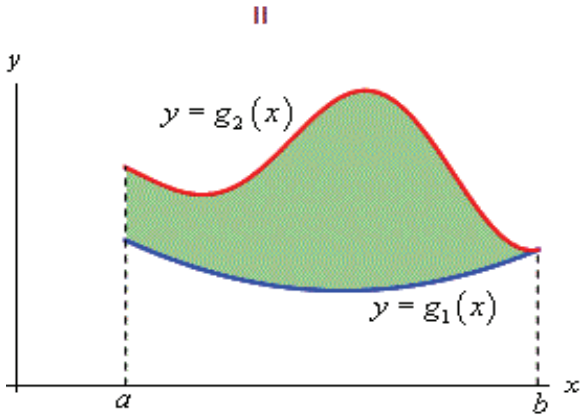
v)
$$\iint_D \frac{dx\,dy}{4+y^2}, \quad \text{όταν} \quad D=[-1,1]\times[0,\pi],$$

vi)
$$\iint_D y^{-3}\,e^{x/y}\,dx\,dy, \quad \text{όταν} \quad D=[0,1]\times[1,2],$$

vii)
$$\iint_D xy\,e^{x^2+y^2}\,dx\,dy, \quad \text{όταν} \quad D=[0,1]\times[0,1].$$

Απαντήσεις

i) $\frac{1}{4}$, *ii)* -4, *iii)* 0, *iv)* 1, *v)* $\tan^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, *vi)* $-\frac{1}{2}-\sqrt{e}+e$, *vii)* $\frac{1}{4}\,(-1+e)^2$.



Σχήμα 19.1.4 - 1: Περίπτωση II: το πεδίο ορισμού $D = \{a \le x \le b, \quad g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$ της συνάρτησης $f(x,y)$.

II. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \quad a \le x \le b, \quad g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$

Τότε (Σχ. 19.1.4 - 1)

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} \overbrace{f(x,y)}^{x \text{ σταθερά}} \, dy \right] dx, \qquad (19.1.4 - 1)$$

δηλαδή γίνεται **πρώτα** η ολοκλήρωση ως προς τη μεταβλητή y, που μεταβάλλεται συναρτήσει της x.

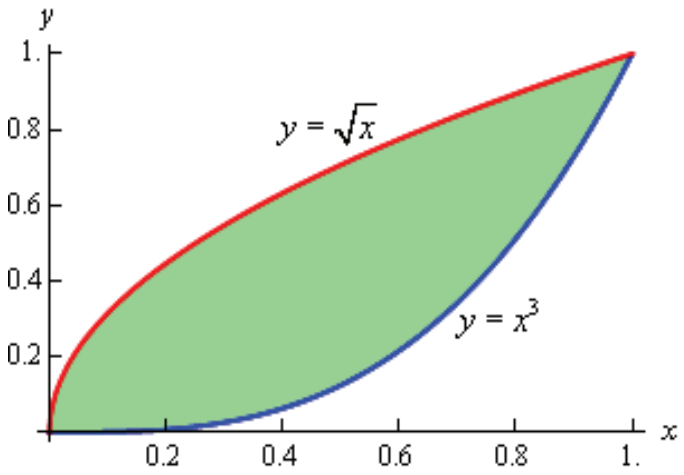
Παράδειγμα 19.1.4 - 4

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint\limits_D \left(4xy - y^3\right) dx\,dy, \quad \text{όταν}$$

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1, \quad x^3 \le y \le \sqrt{x}\right\} \quad (\Sigma\chi.\ 19.1.4 - 2).$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(19.1.4 - 1)$ έχουμε



Σχήμα 19.1.4 - 2: Παράδειγμα 19.1.4 - 6 με πεδίο ορισμού $D = \{\, 0 \le x \le 1, \quad x^3 \le y \le \sqrt{x}\,\}$.

$$I = \int_0^1 \left[\int_{x^3}^{\sqrt{x}} \overbrace{(4xy - y^3)}^{x \text{ σταθερά}}\, dy \right] dx = \int_0^1 \left[2xy^2 - \frac{y^4}{4} \right]_{y=x^3}^{y=\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{7}{4}\, x^2 - 2\, x^7 + \frac{1}{4}\, x^{12} \right) dx$$

$$= \left[\frac{7}{12}\, x^3 - \frac{1}{4}\, x^8 + \frac{1}{52}\, x^{13} \right]_0^1 = \frac{55}{156}\,.$$

■

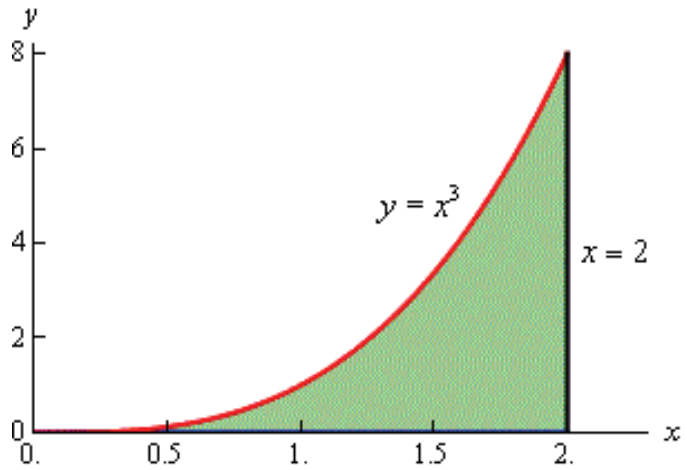
Παράδειγμα 19.1.4 - 5

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D \sqrt{1 + x^4}\, dx\, dy, \quad \text{όταν}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le x^3\,\} \quad (\Sigma\chi.\ 19.1.4 - 3).$$

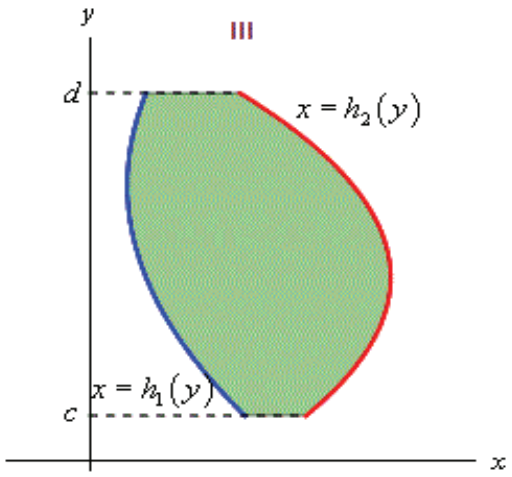
Λύση. Έχουμε



Σχήμα 19.1.4 - 3: Παράδειγμα 19.1.4 - 5 με πεδίο ορισμού $D = \left\{ 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le x^3 \right\}$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \left[\int_0^{x^3} \sqrt{1+x^4}\, dy \right] dx = \int_0^2 \sqrt{1+x^4} \left[\int_0^{x^3} dy \right] dx \\
&= \int_0^2 \sqrt{1+x^4}\ y \Big|_{y=0}^{y=x^3} dx = \int_0^2 x^3 \sqrt{1+x^4}\, dx \\
&= \int_0^2 \overbrace{\frac{1}{4}\left(1+x^4\right)_x}^{x^3} \left(1+x^4\right)^{1/2} dx = \\
&= \frac{1}{4} \frac{\left(1+x^4\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{6}\left(1+x^4\right)^{3/2} \Big|_0^2 \\
&= \frac{1}{6}\left(17^{3/2}-1\right) \approx 11.51547.
\end{aligned}
$$

■



Σχήμα 19.1.4 - 4: το πεδίο ορισμού $D = \{c \le x \le d, \quad h_1(x) \le y \le h_2(x)\}$ της συνάρτησης $f(x, y)$.

III. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad c \le y \le d, \quad h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$

Τότε (Σχ. 19.1.4 - 4)

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \overbrace{f(x,y)}^{y \text{ σταθερά}}\, dx \right] dy, \qquad (19.1.4 - 2)$$

δηλαδή γίνεται **πρώτα** η ολοκλήρωση ως προς τη μεταβλητή x, που μεταβάλλεται συναρτήσει της y.

Παράδειγμα 19.1.4 - 6

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy, \quad \text{όταν} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le y \le 2, \quad y \le x \le y^3\}.$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(19.1.4-2)$ έχουμε

$$I = \int_1^2 \left[\int_y^{y^3} e^{\frac{x}{y}}\, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\int_y^{y^3} y \left(\frac{x}{y}\right)_x e^{\frac{x}{y}}\, dx \right] dy$$

πρέπει να δημιουργηθεί η παράγωγος $\left(\frac{x}{y}\right)_x$ της $e^{\frac{x}{y}}$

$$= \int_1^2 \left[y\, e^{\frac{x}{y}} \right]_{x=y}^{x=y^3} dy = \int_1^2 \left(y\, e^{y^2} - y\, e^1 \right)$$

$$= \left[\frac{1}{2}\, e^{y^2} - \frac{e}{2}\, y^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2}\, e^4 - 2\, e.$$

■

IV. Γενική περίπτωση: φραγμένη περιοχή του $\mathbb{R}^2$

Έστω D το πεδίο ορισμού. Τότε γίνεται κατάλληλη διαμέριση του D, έτσι ώστε να προκύψει τελικά μια από τις Περιπτώσεις II ή III. Η μεθοδολογία που εφαρμόζεται στις περιπτώσεις δίνεται στη συνέχεια.

Παράδειγμα 19.1.4 - 7

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D (16xy + 200)\, dx\, dy,$$

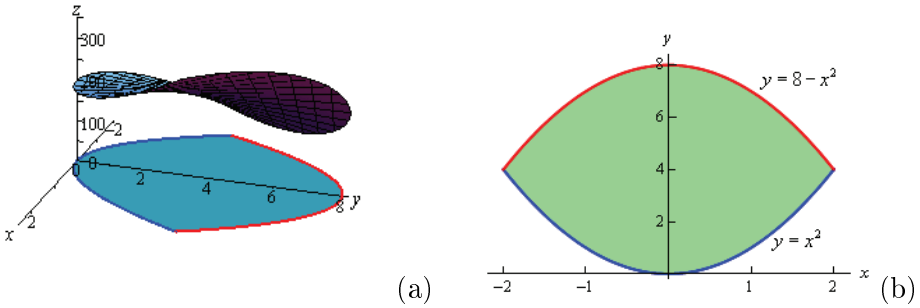
όταν D η περιοχή που περιορίζεται από τις καμπύλες

$$y = x^2 \quad \text{και} \quad y = 8 - x^2 \quad (\Sigma\chi.\ 19.1.4-5).$$

Λύση. Αρχικά υπολογίζονται τα κοινά σημεία των δύο καμπυλών από τις εξισώσεις τους ως εξής:

$$y = x^2 \quad \text{και} \quad y = 8 - x^2 \quad \text{οπότε} \quad x^2 = 8 - x^2,$$

$$\text{δηλαδή} \quad x = \pm 2.$$



Σχήμα 19.1.4 - 5: Παράδειγμα 19.1.4 - 7. Όταν $-2 \leq x \leq 2$, τότε το y μεταβάλλεται από την $y = x^2$ μπλε έως την $y = 8 - x^2$ κόκκινη καμπύλη, δηλαδή $x^2 \leq y \leq 8 - x^2$.

Επειδή το x πρέπει να ανήκει σε φραγμένο διάστημα, προκύπτει ότι

$$-2 \leq x \leq 2.$$

Εφόσον έχει προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού της μεταβλητής x (Περίπτωση II), θα πρέπει το πεδίο ορισμού της y να είναι της μορφής $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Επομένως σύμφωνα και με το Σχ. 19.1.4 - 5 b το πεδίο ορισμού D γράφεται ως εξής:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -2 \leq x \leq 2, \quad x^2 \leq y \leq 8 - x^2 \right\}.$$

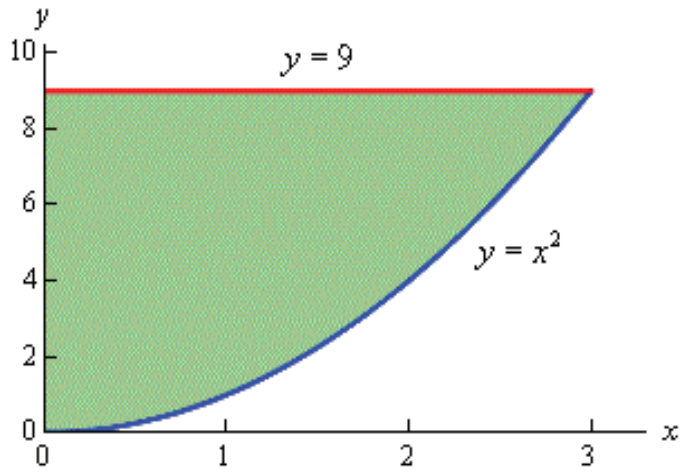
Άρα

$$I = \int_{-2}^{2} \left[\int_{x^2}^{8-x^2} (16xy + 200)\, dy \right] dx = \int_{-2}^{2} \left(8\, x\, y^2 + 200\, y \right) \Big|_{y=x^2}^{y=8-x^2} dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(-128\, x^3 - 400\, x^2 + 512\, x + 1600 \right) dx$$

$$= \left[-32\, x^4 - \frac{400}{3}\, x^3 + 256\, x^2 + 1600\, x \right]_{-2}^{2} = \frac{12800}{3}.$$

■



Σχήμα 19.1.4 - 6: Παράδειγμα 19.1.4 - 12.

Παράδειγμα 19.1.4 - 8

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D x^2\, y\, dx\, dy,$$

όταν D η περιοχή που περιορίζεται από τις καμπύλες

$$y = 9 \quad \text{και} \quad y = x^2 \quad \text{με} \quad x \geq 0.$$

Λύση. Από τις εξισώσεις των καμπυλών προκύπτει $x^2 = 9$, οπότε, επειδή $x \geq 0$, είναι $x = 3$. Άρα πρέπει

$$0 \leq x \leq 3.$$

Όμοια εφόσον έχει προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού της μεταβλητής x (Περίπτωση II), θα πρέπει το πεδίο ορισμού της y να είναι της μορφής $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Άρα το πεδίο ορισμού D σύμφωνα και με το Σχ. 19.1.4 - 7) γράφεται:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 3, \quad x^2 \leq y \leq 9\right\}.$$

Τότε έχουμε

$$I = \int_0^3 \left[\int_{x^2}^9 x^2 y \, dy \right] dx = \int_0^3 \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_{y=x^2}^{y=9} dx$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{81\, x^2}{2} - \frac{x^6}{2} \right) dx = \frac{27\, x^3}{2} - \frac{x^7}{14} \Big|_0^3 = \frac{1458}{7} .$$

■

Παράδειγμα 19.1.4 - 9

Όμοια το

$$I = \iint_D \left(x^2 + y^3 \right) dx\, dy, \quad \text{όταν } D = \left\{ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 \leq 9x,\, x \leq 3 \right\} .$$

Λύση. Επειδή $y^2 \leq 9x$, πρέπει $x \geq 0$. Άρα πρέπει

$$0 \leq x \leq 3.$$

Είναι όμως γνωστό ότι, αν

$$x^2 \leq a \quad \text{με} \quad a > 0, \quad \text{τότε} \quad -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}.$$

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω στην ανισότητα $y^2 \leq 9x$ προκύπτει ότι

$$-3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}.$$

Άρα ο τόπος D γράφεται (Περίπτωση II)

$$D = \left\{ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\quad 0 \leq x \leq 3, \quad -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x} \right\} .$$

Τότε

$$I = \int_0^3 \left[\int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \left(x^2 + y^3 \right) dy \right] dx = \int_0^3 \left[x^2 y + \frac{y^4}{4} \right]_{y=-3\sqrt{x}}^{y=3\sqrt{x}} dx$$

$$= 6 \int_0^3 x^{5/2}\, dx = \frac{324\sqrt{3}}{7} .$$

■

Παράδειγμα 19.1.4 - 10

Όμοια το

$$I = \iint\limits_D \left(x^4 + y^2\right)\, dx\, dy, \quad \text{όταν } D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq x^2,\, x \geq y^2\right\}.$$

Λύση. Αρχικά, επειδή

- $x \geq y^2$, πρέπει $x \geq 0$, ενώ όμοια από την
- $y \geq x^2$, προκύπτει ότι και $y \geq 0$.

Στη συνέχεια εκφράζονται τα όρια του x συναρτήσει του y ως εξής: από την $x^2 \leq y$ προκύπτει ότι $x \leq \sqrt{y}$, ενώ είναι $x \geq y^2$.

Άρα (Περίπτωση III)

$$y^2 \,\leq\, x \,\leq\, \sqrt{y}.$$

Για το διάστημα μεταβολών του y, που πρέπει να είναι της μορφής $c \leq y \leq d$, από την παραπάνω ανισότητα έχουμε

$$y^2 \leq \sqrt{y}, \quad \text{οπότε} \quad y^4 - y \leq 0, \quad \text{δηλαδή } y\left(y^3 - 1\right) \leq 0.$$

Επειδή $y \geq 0$, πρέπει $y \leq 1$, . Επομένως ο τόπος D γράφεται

$$D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\quad 0 \leq y \leq 1, \quad y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\right\}.$$

Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(19.1.4 - 2)$ έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} \left(x^4 + y^2\right)\, dx\right] dy \\ &= \int\limits_0^1 \left(\frac{6}{5}\, y^{5/2} - y^4 - \frac{1}{5}\, y^{10}\right) dy \\ &= \frac{48}{385}\,. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 19.1.4 - 11

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint\limits_D x\,dx\,dy,$$

όταν D είναι ο κυκλικός δίσκος $x^2 + y^2 \leq 1$.

Λύση. Προφανώς ο τόπος D είναι ο μοναδιαίος κύκλος με κέντρο το σημείο $(0,0)$ και ακτίνα $R = 1$, που είναι δυνατόν να περιγραφεί ως εξής (Περίπτωση II):

$$D = \left\{(x,y) \,:\quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2},\quad -1 \leq x \leq 1\right\}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_{-1}^{1} \left[\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy \right] dx \\
&\qquad \text{το } x \text{ στο μέσα ολοκλήρωμα θεωρείται σταθερά} \\
&= \int\limits_{-1}^{1} x \left[\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1\,dy \right] dx = \int\limits_{-1}^{1} x\,y \Big|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \int\limits_{-1}^{1} x \left[\sqrt{1-x^2} - \left(-\sqrt{1-x^2}\right) \right] dx \\
&= \int\limits_{-1}^{1} 2\,x\,\sqrt{1-x^2}\,dx = \int\limits_{-1}^{1} \overbrace{\left[-\left(1-x^2\right)'\right]}^{2x} \sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= -\int\limits_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)' \left(1-x^2\right)^{1/2} dx \\
&= -\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2}\Big|_{-1}^{1} = 0.
\end{aligned}$$

Μια ανάλογη περιγραφή του τόπου είναι επίσης η εξής (Περίπτωση III):

$$D = \left\{ (x,y) \, : \quad -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}, \quad -1 \le y \le 1 \right\},$$

οπότε το ολοκλήρωμα στην περίπτωση αυτή θα γράφεται

$$\iint\limits_D x\,dx\,dy \;=\; \int\limits_{-1}^{1} \left[\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx \right] dy = \cdots = 0.$$

■

Παρατήρηση 19.1.4 - 1 (μεθοδολογία)

Πολλές φορές απαιτείται η διαμέριση του τόπου D σε δύο ή περισσότερους τόπους. Στις περιπτώσεις αυτές ακολουθείται η παρακάτω μεθοδολογία:

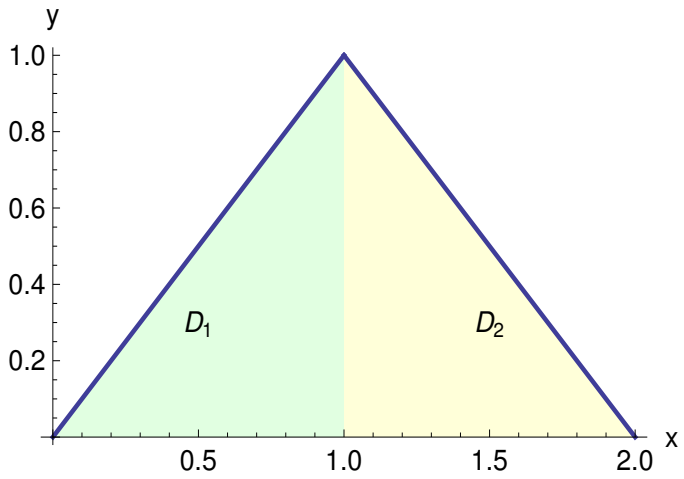
- έστω ότι από τον τόπο D προκύπτει ότι $a \le x \le b$ (Περίπτωση II), διαφορετικά προσδιορίζεται το διάστημα αυτό από τα δεδομένα με κατάλληλο συνδυασμό τους.
- Από ένα σημείο $x_0 \in [a,b]$, φέρνουμε κάθετη ευθεία, τέτοια ώστε να τέμνεται ο τόπος D σε δύο τουλάχιστον σημεία, έστω τα A και B.
- Τότε ο τόπος D υποδιαιρείται στους

$$D_1 \;=\; \{(x,y) \, : \quad a \le x \le x_0, \quad g_1(x) \le y \le g_2(x)\},$$

$$D_2 \;=\; \{(x,y) \, : \quad x_0 \le x \le b, \quad g_3(x) \le y \le g_4(x)\}$$

Ανάλογα, όταν ο τόπος D υποδιαιρείται από ένα σημείο $y_0 \in [c,d]$ (Περίπτωση III).

Εφαρμογές της παραπάνω μεθοδολογίας δίνονται στη συνέχεια.



Σχήμα 19.1.4 - 7: Παράδειγμα 19.1.4 - 12.

Παράδειγμα 19.1.4 - 12

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D y\,dx\,dy,$$

όταν D το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία

$$(0,0), \quad (1,1) \quad \text{και} \quad (2,0).$$

Λύση. Ο τόπος D υποδιαιρείται στους τόπους D_1 και D_2 όπου $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, που περιγράφονται ως εξής (Σχ. 19.1.4 - 7):

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y) : \quad 0 \le y \le x, \quad 0 \le x \le 1\}, \\ D_1 &= \{(x,y) : \quad 0 \le y \le 2-x, \quad 1 \le x \le 2\}, \end{aligned}$$

δηλαδή $x_0 = 1$ (Περίπτωση II).

Επομένως

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D y\,dx\,dy &= \iint\limits_{D_1} y\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} y\,dx\,dy \\
&= \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^x y\,dy\right] dx + \int\limits_1^2 \left[\int\limits_0^{2-x} y\,dy\right] dx \\
&= \int\limits_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx + \int\limits_1^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{2-x} dx \\
&= \int\limits_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx + \int\limits_1^2 \frac{(2-x)^2}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \overbrace{(2-x)^2}^{-(2-x)'(2-x)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\frac{(2-x)^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

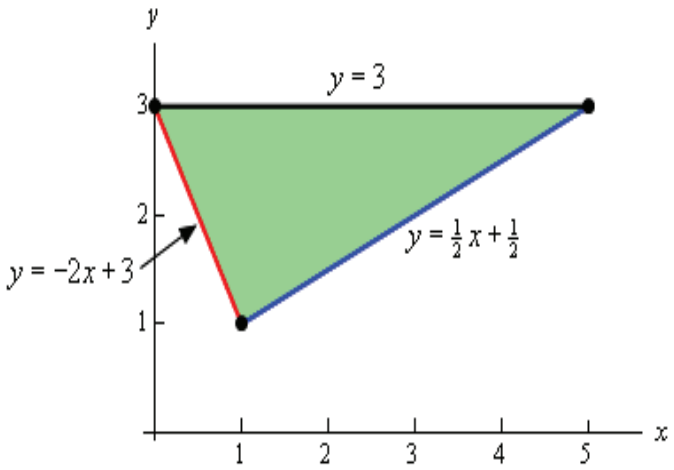
■

Παράδειγμα 19.1.4 - 13

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint\limits_D \left(6x^2 - 40y\right)\,dx\,dy,$$

όταν D το τρίγωνο με κορυφές $(0,3)$, $(1,1)$ και $(5,3)$ (Σχ. 19.1.4 - 8).



Σχήμα 19.1.4 - 8: Παράδειγμα 19.1.4 - 13.

Λύση. Η περιοχή ολοκλήρωσης D είναι δυνατόν να προκύψει στις εξής δύο περιοχές:[2]

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y): \quad 0 \le x \le 1, \quad -2x+3 \le y \le 3\}, \\ D_2 &= \left\{(x,y): \quad 1 \le x \le 5, \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \le y \le 3\right\}, \end{aligned}$$

δηλαδή στην περίπτωση αυτή είναι $x_0 = 1$.

[2] Υπενθυμίζεται ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) δίνεται από τον τύπο

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Τότε σύμφωνα με την αθροιστική ιδιότητα της Παραγράφου 19.1.3 έχουμε:

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{D_1} \left(6x^2-40y\right)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} \left(6x^2-40y\right)\,dx\,dy \\
&= \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{-2x+3}^{3} \left(6x^2-40y\right)\,dy\right] dx \\
&\quad + \int\limits_1^5 \left[\int\limits_{\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2}}^{3} \left(6x^2-40y\right)\,dy\right] dx \\
&= \int\limits_0^1 \left(6x^2y-20\,y^2\right)\Big|_{y=-2x+3}^{y=3} dx + \int\limits_0^1 \left(6x^2y-20\,y^2\right)\Big|_{y=\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2}}^{y=3} dx \\
&= \int\limits_0^1 \left[12x^3-180+20\,(3-2x)^2\right] dx \\
&\quad + \int\limits_1^5 \left[-3x^3+15x^2-180+5\,(x+1)^2\right] dx \\
&= \ldots = -\frac{935}{3}\,.
\end{aligned}$$

Ένας άλλος τρόπος, που δεν απαιτεί την υποδιαίρεση του τόπου D, αλλά προκύπτει από τις εξισώσεις των ευθειών του τριγώνου είναι ο εξής:

$$y = -2x+3, \quad \text{οπότε} \quad x = -\frac{1}{2}\,y+\frac{3}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2}, \qquad\qquad x = 2y-1.$$

Άρα (Περίπτωση III)

$$D = \left\{ (x,y) : \quad -\frac{1}{2}\,y+\frac{3}{2} \le x \le 2y-1, \quad 1 \le y \le 3 \right\},$$

οπότε

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^3 \left[\int_{-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}}^{2y-1} \left(6x^2 - 40y\right)\, dx \right] dy \\
&= \int_1^3 \left(2\,x^3 - 40\,x\,y\right)\Big|_{x=-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}}^{x=2y-1} dy \\
&= \int_1^3 \left[100y - 100y^2 + 2(2y-1)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\,y + \frac{3}{2}\right)^3\right] dy \\
&\quad \left[50y^2 - \frac{100}{3}\,y^3 + \frac{1}{4}(2y-1)^4 + \left(-\frac{1}{2}\,y + \frac{3}{2}\right)^4\right]_1^3 \\
&= -\frac{935}{3}\,.
\end{aligned}
$$

■

19.1.5 Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων

Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

Πολλές φορές για την ευκολία υπολογισμού του ολοκληρώματος

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

απαιτείται να γίνει μετασχηματισμός από καρτεσιανές σε άλλης μορφής συντεταγμένες. Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση των διπλών ολοκληρωμάτων, οι γενικότερες δυνατές είναι οι **καμπυλόγραμμες** (curvilinear coordinates),[3] που ορίζονται στη συνέχεια.

[3] Βλέπε: *http://en.wikipedia.org/wiki/Curvilinear_coordinates*

Ορισμός 19.1.5 - 1 (καμπυλόγραμμες συντεταγμένες). *Ο μετασχηματισμός σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες έχει τη μορφή*

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad \text{όταν} \quad (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2. \tag{19.1.5 - 1}$$

Αν οι συναρτήσεις $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ ορίζονται για κάθε $(u,v) \in \tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ και υπάρχουν οι 1ης τάξης μερικές παράγωγοι των x, y ως προς u και v και είναι συνεχείς συναρτήσεις, ενώ για την ορίζουσα του Jacobi του μετασχηματισμού $(19.1.5-1)$

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \tag{19.1.5 - 2}$$

είναι $J(u,v) > 0$ ή $J(u,v) < 0$, τότε ο μετασχηματισμός του τόπου D μέσω των σχέσεων $(19.1.5-1)$ στον τόπο $\tilde{D}$ είναι αμφιμονοσήμαντος και εφόσον το ολοκλήρωμα $\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ υπάρχει, θα ισχύει

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\tilde{D}} F(u,v)\;|J(u,v)|\;du\,dv. \tag{19.1.5 - 3}$$

Σημείωση 19.1.5 - 1

Είναι ήδη γνωστή στον αναγνώστη από το Μάθημα *Αόριστο Ολοκλήρωμα* η μέθοδος της αντικατάστασης για τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος

$$\int f(x)\,dx.$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, αν τεθεί $u = g(x)$, τότε πρέπει αφενός να γίνει αντικατάσταση της u στην f και αφετέρου αντικατάσταση του dx με το du. Η διαδικασία αυτή δίνεται στη συνέχεια.

Έστω ότι ζητείται ο υπολογισμός του ολοκληρώματος

$$\int e^{3x} dx.$$

Τότε, αν

$$\begin{aligned} 3x &= u \quad \text{ή} \quad x = \frac{u}{3}, \quad \text{οπότε} \\ dx &= \left(\frac{u}{3}\right)' du = \frac{1}{3}\, du = J(u)\, du. \end{aligned} \tag{1}$$

Άρα

$$\int f(x)\, dx = \int e^{3x} dx = \int e^{u}\, \frac{1}{3}\, du$$

$$\int F(u)\, J(u)\, du = \ldots = \frac{1}{3}\, e^{3x} + c. \tag{2}$$

Τότε η $(19.1.5-2)$ είναι η αντίστοιχη της $J(u)$ στην (1) και η $(19.1.5-3)$ της $\int F(u)\, J(u)\, du$ στην (2).

Οι κυριότεροι καμπυλόγραμμοι μετασχηματισμοί, που συνήθως χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές, δίνονται στη συνέχεια.

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Ορισμός 19.1.5 - 2 (γραμμικός μετασχηματισμός).
Ένας γραμμικός μετασχηματισμός (linear transformation) έχει γενικά τη μορφή

$$\mathrm{L_T}: \quad x = au + bv \quad \textit{και} \quad y = cu + dv, \tag{19.1.5 - 4}$$

όταν $a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R}$.

Σύμφωνα με την $(19.1.5-2)$ η ορίζουσα του Jacobi είναι

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc. \tag{19.1.5 - 5}$$

Αν $ad - bc \neq 0$, τότε η $(19.1.5-4)$ αντιστρέφεται, οπότε

$$\iint\limits_{D} f(x,\, y)\, dx\, dy = |ad - bc| \iint\limits_{\tilde{D}} F(u,v)\, du\, dv. \tag{19.1.5 - 6}$$

Παρατηρήσεις 19.1.5 - 1

Ο μετασχηματισμός $(19.1.5-4)$

i) ανήκει στην κατηγορία των λεγόμενων **ομογραφικών μετασχηματισμών** (endomorphism ή homomorphism), δηλαδή έχει την ιδιότητα να διατηρεί κατά τον μετασχηματισμό τα σχήματα, δηλαδή ευθείες σε ευθείες, τρίγωνα σε τρίγωνα, κ.λπ.,

ii) χρησιμοποιείται μόνον, όταν κάνει ευκολότερο τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος. Αυτό θα είναι και το χαρακτηριστικό γνώρισμα κάθε ανάλογου μετασχηματισμού, που χρησιμοποιείται στους υπολογισμούς της παραγράφου αυτής.

Παράδειγμα 19.1.5 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint\limits_{D} e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dx\, dy,$$

όταν D το τρίγωνο με πλευρές τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία $x+y-2=0$.

Λύση. Επειδή η ολοκλήρωση της συνάρτησης $e^{\frac{y-x}{y+x}}$ είναι πρακτικά αδύνατη, για απλοποίηση έστω

$$u = y - x \quad \text{και} \quad v = y + x.$$

Λύνοντας ως προς x και y, δηλαδή λύνοντας το σύστημα

$$\begin{aligned} x \;-\; y \;&=\; -u \\ x \;+\; y \;&=\; \;\; v, \end{aligned}$$

προκύπτει ότι ο γραμμικός μετασχηματισμός $(19.1.5-4)$ για την περίπτωση αυτή γράφεται ως εξής:

$$\mathrm{L_T}: \quad x = \frac{v-u}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{v+u}{2}\,.$$

Τότε σύμφωνα με την $(19.1.5-2)$ η ορίζουσα του Jacobi είναι

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\,.$$

Το τρίγωνο έχει για εξισώσεις των πλευρών του τους άξονες των συντεταγμένων, δηλαδή τις ευθείες (Σχ. 19.1.5 - 1a):

$$x=0,\quad y=0\quad \text{και την}\quad x+y-2=0.$$

Άρα οι εξισώσεις των πλευρών του σύμφωνα με τον γραμμικό μετασχηματισμό (Σχ. 19.1.5 - 1b) τροποποιούνται ως εξής:

- ευθεία $x=0$

$$\mathrm{L_T}:\quad \begin{aligned} u &= y-0 = y \\ v &= y+0 = y, \end{aligned}$$

  οπότε $u=v$, δηλαδή η ευθεία $v-u=0$,

- ευθεία $y=0$

$$\mathrm{L_T}:\quad \begin{aligned} u &= 0-x = -x \\ v &= 0+x = x, \end{aligned}$$

  οπότε $u=-v$, δηλαδή η ευθεία $v+u=0$,

- ευθεία $x+y+2=0$

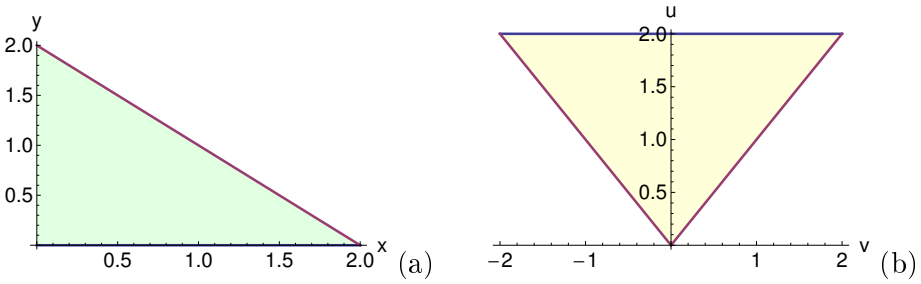
$$\mathrm{L_T}:\quad v=\overbrace{y+x}^{x+y=2}=2,$$

  οπότε $v=2$, δηλαδή η ευθεία $v-2=0$.

Άμεσο συμπέρασμα του παραπάνω μετασχηματισμού είναι η επαλήθευση των Παρατηρήσεων 19.1.5 - 1 (i).

Τότε από τις μετασχηματισμένες εξισώσεις των πλευρών προκύπτει ότι:

- $v=-u$ και $v=u$, οπότε $-u\le v\le u$, ενώ
- $u=2$.



Σχήμα 19.1.5 - 1: (a) Το τρίγωνο του τόπου D και (b) το αντίστοιχο τρίγωνο μετά τον γραμμικό μετασχηματισμό.

Κατά συνέπεια το πεδίο ορισμού D μετασχηματίζεται στο

$$\tilde{D} = \{\,(v,u): \quad -v \le u \le v, \quad 0 \le u \le 2\,\}.$$

Άρα από τον τύπο $(19.1.5-6)$ έχουμε

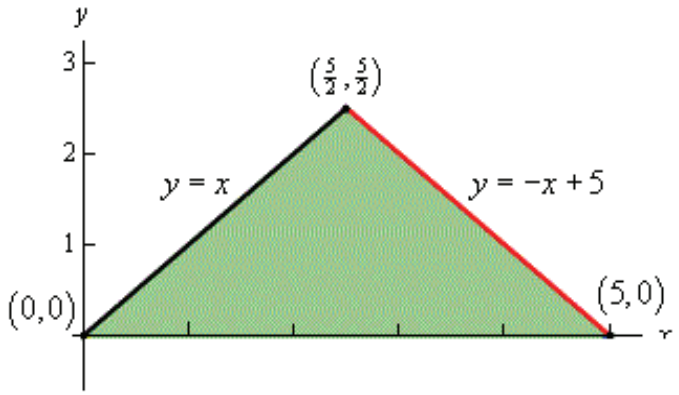
$$\begin{aligned} I &= \left|-\frac{1}{2}\right| \int_0^2 \left[\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\, du \right] dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left[\int_{-v}^{v} v \left(\frac{u}{v}\right)_u e^{\frac{u}{v}}\, du \right] dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 v \left[e^{\frac{u}{v}} \right]_{u=-v}^{u=v} dv = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) \int_0^2 v\, dv \\ &= e - \frac{1}{e}\,. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 19.1.5 - 2

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D (x+y)\, dx\, dy,$$



Σχήμα 19.1.5 - 2: Παράδειγμα 19.1.5 - 2.

όταν D το τρίγωνο του Σχ. 19.1.5 - 2. Να χρησιμοποιηθεί ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$\mathrm{L_T}: \quad x = 2u + 3v \quad \text{και} \quad y = 2u - 3v.$$

Λύση. Αρχικά σύμφωνα με την $(19.1.5 - 2)$ η ορίζουσα του Jacobi είναι

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -12.$$

Το τρίγωνο έχει για εξισώσεις των πλευρών του τις ευθείες (Σχ. 19.1.5 - 2):

$$x = 0, \quad y = x \quad \text{και την} \quad y = -x + 5.$$

Τότε οι εξισώσεις των πλευρών του σύμφωνα με τον γραμμικό μετασχηματισμό τροποποιούνται ως εξής:

- ευθεία $x = 0$

$$\mathrm{L_T}: \quad x = 2u + 3v \quad \text{ή} \quad 0 = 2u + 3v,$$

δηλαδή η ευθεία $2u + 3v = 0$,

- ευθεία $y = x$

$$\mathrm{L_T}: \quad 2u - 3v = 2u + 3v,$$

δηλαδή η ευθεία $u = 0$,

- ευθεία $y = -x + 5$

$$\mathrm{L_T}: \quad 2u - 3v = -(2u + 3v) + 5 \quad \text{ή} \quad 4u = 5,$$

δηλαδή η ευθεία $u = \dfrac{5}{4}$.

Όμοια από τον παραπάνω μετασχηματισμό υπάρχει επαλήθευση των Παρατηρήσεων 19.1.5 - 1 (i).

Τότε από τις μετασχηματισμένες εξισώσεις των πλευρών προκύπτει ότι:

- $u = 0$ και $u = \frac{5}{4}$, οπότε $0 \le u \le \frac{5}{4}$, ενώ
- $v = -\frac{2u}{3}$,

που επειδή είναι $u \ge 0$, τελικά έχουμε ότι το πεδίο ορισμού D μετασχηματίζεται στο

$$\tilde{D} = \{\, (v, u): \quad 0 \le u \le \frac{5}{4}, \quad -\frac{2u}{3} \le v \le 0 \,\},$$

ενώ η ολοκληρωτέα συνάρτηση στην:

$$x + y = (2u + 3v) + (2u - 3v) = 4u.$$

Άρα από τον τύπο $(19.1.5 - 6)$ έχουμε

$$\begin{aligned} I &= |-12| \int_0^{5/4} \left[\int_{-2u/3}^{0} 4 \, dv \right] u \, du = 48 \int_0^{5/4} \left(\frac{2u}{3} \right) u \, du \\ &= \frac{96}{3} \int_0^{5/4} u^2 \, du = \frac{125}{6}. \end{aligned}$$

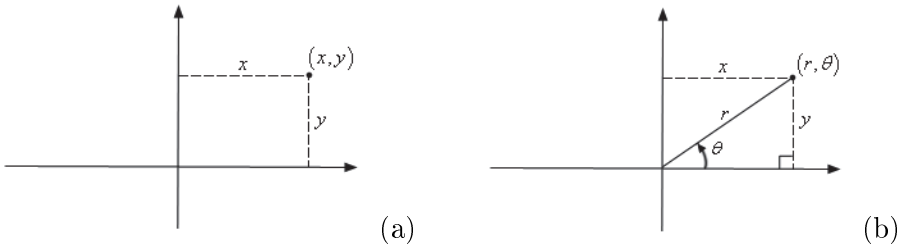
■

Πολικές συντεταγμένες

Όπως είναι ήδη γνωστό οι πολικές (Σχ. 19.1.5 - 3b) συντεταγμένες (r, θ) συνδέονται με τις καρτεσιανές (Σχ. 19.1.5 - 3a) συντεταγμένες (x, y) με τις σχέσεις

$$x = r\cos\theta \quad \text{και} \quad y = r\sin\theta, \qquad \text{όταν } r \geq 0 \text{ και } 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (19.1.5 - 7)$$

Ο μετασχηματισμός $(19.1.5 - 7)$ είναι αμφιμονοσήμαντος με την έννοια



Σχήμα 19.1.5 - 3: (a) Καρτεσιανές και (b) πολικές συντεταγμένες.

ότι σε κάθε σημείο $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ αντιστοιχεί ακριβώς ένα σημείο $(r, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ και αντίστροφα, ενώ για την ορίζουσα Jacobi του μετασχηματισμού είναι

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} x_r & y_r \\ x_\theta & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r > 0.$$

Σύμφωνα με τη σχέση $(19.1.5-3)$ το ολοκλήρωμα $\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy$ στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{\tilde{D}} F(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta. \qquad (19.1.5 - 8)$$

Παράδειγμα 19.1.5 - 3

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

όταν ο τόπος D είναι το άνω ημικύκλιο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $r = 1$.

Λύση. Μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες σύμφωνα με τις σχέσεις $(19.1.5-7)$ έχουμε

$$f(x,\, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - r^2} = F(r,\, \theta),$$

ενώ είναι $r \in [0, 1]$ και επειδή πρόκειται για το άνω ημικύκλιο $\theta \in [0, \pi]$.

Άρα σύμφωνα με την $(19.1.5-8)$ είναι

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \left[\int_0^1 r\,\sqrt{1 - r^2}\, dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left[\int_0^1 -\frac{1}{2}\left(1 - r^2\right)' \left(1 - r^2\right)^{1/2} dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left[-\frac{1}{2}\,\frac{\left(1 - r^2\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right] \Bigg|_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi} \left(1 - r^2\right)^{3/2} \Bigg|_{r=0}^{r=1} d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} d\theta = \frac{\pi}{3}\,. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 19.1.5 - 4

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D 2xy\, dx\, dy,$$

όταν ο τόπος D είναι ο κυκλικός τομέας του 1ου τεταρτημορίου μεταξύ των κύκλων κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνων 2 και 5 αντίστοιχα.

Λύση. Μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες η ολοκληρωτέα συνάρτηση γράφεται

$$f(x,\, y) = 2\,x\,y = 2\,r^2 \sin\theta\cos\theta = r^2 \sin 2\theta = F(r,\, \theta),$$

όπου $r \in [2,5]$ και επειδή πρόκειται για το 1ο τεταρτημόριο είναι $\theta \in [0, \pi/2]$.

Άρα σύμφωνα με την $(19.1.5-8)$ είναι

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_2^5 r \left(r^2 \sin 2\theta \right) \, dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_2^5 r^3 \, dr \right] \sin 2\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, \left[\frac{1}{4} \, r^4 \right]_{r=2}^{r=5} d\theta \\ &= \frac{609}{4} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, d\theta = -\frac{609}{4} \, \frac{1}{2} \cos 2\theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{609}{4} \, . \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 19.1.5 - 5

Όμοια το

$$I = \iint_D e^{x^2+y^2} \, dx \, dy,$$

όταν ο τόπος D είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου $(0,0)$.

Λύση. Όμοια μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες η ολοκληρωτέα συνάρτηση γράφεται

$$f(x,y) = e^{r^2} = F(r, \theta),$$

όπου $r \in [0,1]$ και $\theta \in [0, 2\,\pi]$.

Άρα σύμφωνα με την $(19.1.5-8)$ είναι

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\,\pi} \left[\int_0^1 r \, e^{r^2} \, dr \right] d\theta = \int_0^{2\,\pi} \left[\frac{1}{2} \left(r^2 \right)_r \, e^{r^2} \, dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\,\pi} \frac{1}{2} \left[e^{r^2} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \frac{1}{2} \left(e - 1 \right) \int_0^{2\,\pi} d\theta = \pi \left(e - 1 \right) . \end{aligned}$$

■

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_D xy\,dx\,dy,$$

όταν ο τόπος D είναι:

i) το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία

$$O(0,0), \quad A(1,0), \quad B(1,1) \quad \text{και} \quad C(0,1),$$

ii) το τρίγωνο με κορυφές

$$O(0,0), \quad A(2,0) \quad \text{και} \quad B(2,2),$$

iii) ο κυκλικός τομέας με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και άκρα τα σημεία $A(2,2)$ και $B(-2,2)$ του κύκλου

$$x^2+y^2=4.$$

2. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο μετασχηματισμό να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_D xy\,dx\,dy,$$

όταν D ο τόπος που ορίζεται από τον άξονα των x και το άνω μέρος του κύκλου

$$(x-1)^2+y^2=4.$$

19.1.6 Υπολογισμός εμβαδών επίπεδων σχημάτων

Ορισμός 19.1.6 - 1. *Το* εμβαδόν *E ενός επίπεδου σχήματος D δίνεται από τον τύπο*

$$E=\iint_D dx\,dy. \tag{19.1.6 - 1}$$

Τότε, αν το D ορίζεται σε

- καρτεσιανές συντεταγμένες από τις σχέσεις

$$a \leq x \leq b \quad \text{και} \quad \phi(x) \leq y \leq \psi(x),$$

είναι

$$E = \int_a^b \left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} dy \right] dx, \qquad (19.1.6 - 2)$$

ενώ, αν σε

- πολικές συντεταγμένες από τις σχέσεις

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad \text{και} \quad r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta),$$

είναι

$$E = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r \, dr \right] d\theta. \qquad (19.1.6 - 3)$$

Παράδειγμα 19.1.6 - 1

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής D που βρίσκεται στο εσωτερικό της περιοχής με εξίσωση $r = 3 + 2\sin\theta$ και στο εξωτερικό του κύκλου κέντρου $(0, 9)$ και ακτίνας $r = 2$ (Σχ. 19.1.6 - 1a).

Λύση. Αρχικά υπολογίζονται τα κοινά σημεία των δύο περιοχών (Σχ. 19.1.6 - 1b) θέτοντας:

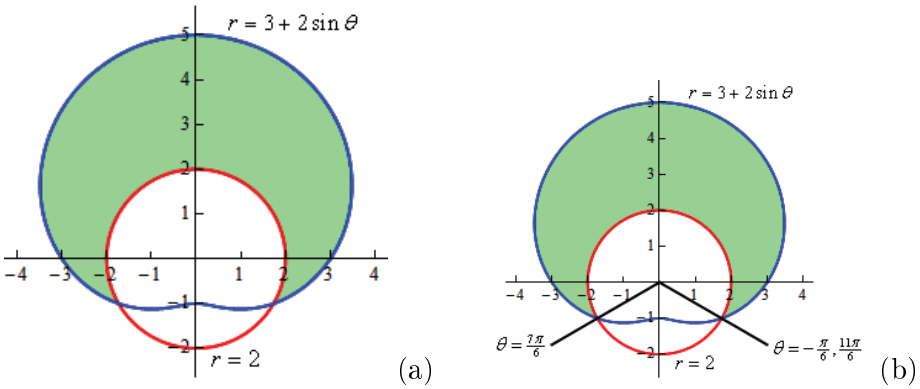
$$3 + 2\sin\theta = 2, \quad \text{οπότε} \quad \sin\theta = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

[4] Άρα

$$\theta = -\frac{\pi}{6}, \quad \frac{7\pi}{6},$$

[4] Υπενθυμίζεται ότι

$$\sin x = \sin a \quad \Leftrightarrow \quad x = 2k\pi + a \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \pi - a, \quad \text{όταν} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Σχήμα 19.1.6 - 1: Παράδειγμα 19.1.6 - 1: (a) η περιοχή D και (b) τα κοινά σημεία.

οπότε σύμφωνα με την $(19.1.6-3)$ είναι

$$
\begin{aligned}
E &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} dr \right] d\theta = \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \left[\int_{2}^{3+2\sin\theta} r\, dr \right] d\theta \\
&= \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{2}^{3+2\sin\theta} d\theta \\
&= \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \left(\frac{5}{2} + 6\cos\theta + \overbrace{2\sin^2\theta}^{1-\cos 2\theta} \right) d\theta \\
&= \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \left(\frac{7}{2} + 6\cos\theta - \cos 2\theta \right) d\theta \\
&= \left[\frac{7}{2}\theta - 6\cos\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta \right]_{-\pi/6}^{7\pi/6} \\
&= \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{14\pi}{3} \approx 24.187.
\end{aligned}
$$

■

19.1.7 Εμβαδόν επιφάνειας

Ορισμός 19.1.7 - 1. *Το* **εμβαδόν** A *της επιφάνειας* S*, που ορίζεται από τη συνάρτηση* $z = f(x, y)$ *της οποίας η προβολή στο επίπεδο* xy *είναι ο τόπος* D*, δίνεται από τον τύπο*

$$A = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy. \qquad (19.1.7 - 1)$$

Παράδειγμα 19.1.7 - 1

Αν

$$f(x, y) = 1 - y^2$$

και

$$D = \{-1 \le x \le 1, \quad -0.5 \le y \le 0.5\},$$

τότε

$$\begin{aligned} A &= \int\limits_{-1}^{1} \left[\int\limits_{-0.5}^{0.5} \sqrt{1 + 4y^2}\, dy \right] dx \\ &= \int\limits_{-1}^{1} \left[\frac{y}{2}\sqrt{1 + 4y^2} + \frac{\sinh^{-1} 2y}{4} \right]_{y=-0.5}^{y=0.5} dy \\ &= 1.147794 \int\limits_{-1}^{1} dx = 2.295\,587. \end{aligned}$$

Υπολογισμός του ολοκληρώματος $I = \int \sqrt{1+4y^2}\,dy$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{1+4y^2}\,dy = \int (y)'\sqrt{1+4y^2}\,dy \\
&= y\sqrt{1+4y^2} - \int y\left[\left(1+4y^2\right)^{1/2}\right]' dy \\
&= y\sqrt{1+4y^2} - \int y\left[\frac{1}{2}\,\frac{8y}{\sqrt{1+4y^2}}\right] dy \\
&= y\sqrt{1+4y^2} - \int \frac{4y^2}{\sqrt{1+4y^2}}\,dy \\
&= y\sqrt{1+4y^2} - \int \frac{4y^2+1-1}{\sqrt{1+4y^2}}\,dy \\
&= y\sqrt{1+4y^2} - \int \frac{4y^2+1}{\sqrt{1+4y^2}}\,dy - \int \frac{-1}{\sqrt{1+4y^2}}\,dy \\
&= y\sqrt{1+4y^2} - \int \sqrt{1+4y^2}\,dy + \overbrace{\int \frac{1}{\sqrt{1+4y^2}}\,dy}^{\frac{1}{2}\sinh^{-1}2y} \\
&= y\sqrt{1+4y^2} - I + \frac{1}{2}\sinh^{-1}2y
\end{aligned}$$

Άρα

$$\int \sqrt{1+4y^2}\,dy = \frac{1}{2}\,y\sqrt{1+4y^2} + \frac{1}{4}\sinh^{-1}2y. \qquad (19.1.7\text{ - }2)$$

19.1.8 Υπολογισμός μάζας

Ορισμός 19.1.8 - 1. *Αν $\rho(x,y)$ με $\rho(x,y)>0$ για κάθε $(x,y)\in D$ παριστάνει την* **πυκνότητα** *της μάζας, που κατανέμεται με συνεχή τρόπο στο D, τότε η* **συνολική μάζα** *M του D δίνεται από τον τύπο*

$$M = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy. \qquad (19.1.8\text{ - }1)$$

Επιπλέον οι συντεταγμένες $(\overline{x}, \overline{y})$ του **κέντρου μάζας** δίνονται από τις σχέσεις

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{και} \quad \overline{y} = \frac{M_x}{M}\,,$$

όπου οι

$$M_x = \iint\limits_D y\,\rho(x,y)\,dx\,dy \quad \text{και} \quad M_y = \iint\limits_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy$$

είναι οι **ροπές 1ης τάξης** του D ως προς x και y-άξονα αντίστοιχα.

Τότε η **ροπή αδράνειας** ως προς τον x-άξονα ορίζεται να είναι η

$$I_x = \iint\limits_D x\,y^2\rho(x,y)\,dx\,dy$$

και ως προς τον y-άξονα η

$$I_y = \iint\limits_D x\,y^2\rho(x,y)\,dx\,dy.$$

Παράδειγμα 19.1.8 - 1

Να υπολογιστεί το κέντρο μάζας και οι ροπές αδράνειας ως προς τους x και y-άξονες της περιοχής που ορίζεται από το τρίγωνο με κορυφές στα σημεία

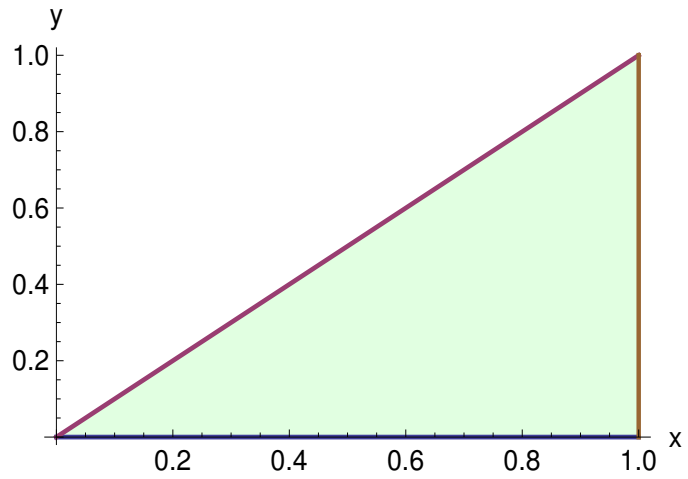
$$(0,0), \quad (1,0) \quad \text{και} \quad (1,1),$$

όταν η πυκνότητα είναι $\rho = x + y^2$.

Λύση. Το τρίγωνο (Σχ. 19.1.8 - 1) περιγράφεται ως εξής:

$$D = \{(x,y) \,:\quad 0 \le y \le x, \quad 0 \le x \le 1\}\,,$$

δηλαδή ανήκει στην Περίπτωση II.



Σχήμα 19.1.8 - 1: Παράδειγμα 19.1.8 - 1.

Τότε διαδοχικά έχουμε ότι

$$M = \int_0^1 \left[\int_0^x \overbrace{(x+y^2)}^{x \text{ σταθερά}}\, dy \right] dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12},$$

$$M_x = \int_0^1 \left[\int_0^x y\, (x+y^2)\, dy \right] dx = \int_0^1 \left[x\, \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^{y=x} dx$$

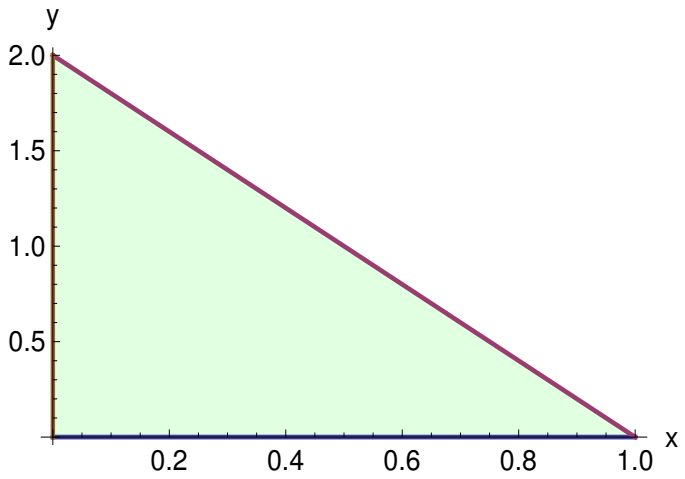
$$= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} \right) dx = \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{20} \Big|_0^1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{20} = \frac{7}{40},$$

$$M_y = \int_0^1 \left[\int_0^x x\, (x+y^2)\, dy \right] dx = \int_0^1 \left[x^2\, y + x\, \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^4}{3} \right) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{15} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{15} = \frac{19}{60},$$

$$I_x = \int_0^1 \left[\int_0^x y^2\, (x+y^2)\, dy \right] dx = \int_0^1 \left[x\, \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{5} \right) dx = \frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{30} \Big|_0^1 = \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{1}{10},$$



Σχήμα 19.1.8 - 2: Παράδειγμα 19.1.8 - 2.

$$I_y = \int_0^1 \left[\int_0^x x^2 \left(x + y^2\right) dy \right] dx = \int_0^1 \left[x^3\, y + x^2 \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^5}{3} \right) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{18} \Big|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{18} = \frac{23}{90}\,.$$

Άρα

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{19}{25}\,, \quad \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{21}{100}\,.$$

■

Παράδειγμα 19.1.8 - 2

Όμοια το κέντρο μάζας της τριγωνικής περιοχής με κορυφές τα σημεία

$$(0,0), \quad (1,0) \quad \text{και} \quad (0,2),$$

όταν η πυκνότητα είναι $\rho = 1 + x + 3y$.

Λύση. Έστω $A(1,0)$ και $B(0,2)$. Άρα πρόκειται για ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφή το $(0,0)$ και υποτείνουσα την AB. Για την εξίσωση της AB

χρησιμοποιείται ο τύπος

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\,,$$

όπου $A(1,0)=(x_1,y_1)$ και $B(0,2)=(x_2,y_2)$, οπότε

$$\frac{x-1}{0-1}=\frac{y-0}{2-0}\,,\quad \text{δηλαδή}\quad y=2-2x.$$

Άρα το τρίγωνο (Σχ. 19.1.8 - 2) περιγράφεται ως εξής:

$$D=\{(x,y)\,:\quad 0\le y\le 2-2x,\quad 0\le x\le 1\}\,,$$

δηλαδή ανήκει όμοια στην Περίπτωση II.

Τότε διαδοχικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^1 \left[\int_0^{2-2x} (1+x+3y)\,dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[y+x\,y+\frac{3\,y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2-2x} dx \\
&= \int_0^1 \left[2-2x+x(2-2x)+\frac{3(2-2x)^2}{2}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left(8-12\,x+4\,x^2\right)\,dx = \\
&= 8x-6x^2+\frac{4\,x^3}{3}\,\Big|_0^1=\frac{10}{3}\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_y &= \int_0^1 \left[\int_0^{2-2x} x\,(1+x+3y)\,dy \right] dx \\
&= \int_0^1 \left[x(1+x)\,y + 3\,\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx \\
&= \int_0^1 \left(8x - 12x^2 + 4x^3\right) dx = 4x^2 - 4x^3 + x^4 \,\Big|_0^1 = 1\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_x &= \int_0^1 \left[\int_0^{2-2x} y\,(1+x+3y)\,dy \right] dx \\
&= \int_0^1 \left[(1+x)\,\frac{y^2}{2} + 3\,\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx \\
&= \int_0^1 \left(10 - 26x + 22x^2 - 6x^3\right) dx = 10x - 13x^2 + \frac{22x^3}{3} - \frac{6x^4}{4} \,\Big|_0^1 \\
&= \frac{17}{6}\,.
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{3}{10}\,, \quad \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{17}{20}\,.
$$

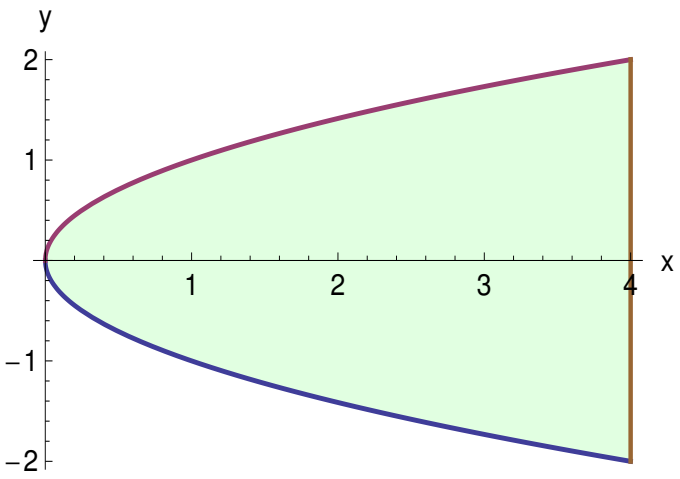
■

Παράδειγμα 19.1.8 - 3

Μια επίπεδη πλάκα στο xy-επίπεδο περικλείεται από την καμπύλη $x = y^2$ και την ευθεία $x = 4$. Αν η πυκνότητα σε κάθε σημείο της είναι ανάλογη από την απόστασή της από τον y-άξονα, να υπολογιστεί η μάζα της πλάκας και το κέντρο μάζας της.

Λύση. Τα κοινά σημεία της καμπύλης και της ευθείας υπολογίζονται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
x &= y^2 \\
x &= 4,
\end{aligned}
\qquad \text{οπότε} \quad y^2 = 4, \quad \text{δηλαδή} \quad y = \pm 2.
$$



Σχήμα 19.1.8 - 3: Παράδειγμα 19.1.8 - 3.

Άρα ο τόπος (Σχ. 19.1.8 - 3) περιγράφεται ως εξής:

$$D = \left\{(x,y) \,:\quad y^2 \le x \le 4, \quad -2 \le y \le 2\right\},$$

δηλαδή ανήκει στην Περίπτωση III.

Επομένως διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} M &= \int_{-2}^{2} \left[\int_{y^2}^{4} x\,dx \right] dy = \int_{-2}^{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y^2}^{x=4} dy \\ &= \int_{-2}^{2} \frac{1}{2} \left[4^2 - \left(y^2\right)^2 \right] dy = \int_{-2}^{2} \frac{1}{2} \left(16 - y^4\right) dy \\ &= \left(8\,y - \frac{y^5}{10} \right) \Big|_{-2}^{2} = \frac{128}{5}, \end{aligned}$$

$$M_y = \int_{-2}^{2} \left[\int_{y^2}^{4} \overbrace{x^2}^{f(x,y)=x} \, dx \right] dy = \int_{-2}^{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=y^2}^{x=4} dy$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-2}^{2} \left(64 - y^6\right) dy = \frac{1}{3} \left[64\, y - \frac{y^7}{7} \right]_{-2}^{2} = \frac{512}{7},$$

$$M_x = \int_{-2}^{2} \left[\int_{y^2}^{4} \overbrace{x\, y}^{f(x,y)=x} \, dx \right] dy = \int_{-2}^{2} \left[y\, \frac{x^2}{2} \right]_{x=y^2}^{x=4} dy$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(8y - \frac{y^5}{2} \right) dy = 0.$$

Άρα

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{20}{7}, \quad \overline{y} = \frac{M_x}{M} = 0.$$

■

Άσκηση

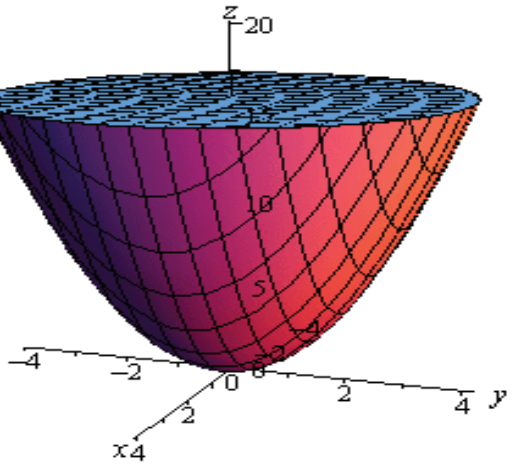
Μία λεπτή πλάκα ορίζεται από την παραβολή $y = 2x - x^2$ και τον άξονα των x. Να προσδιοριστεί η ολική μάζα της και οι συντεταγμένες $(\overline{x}, \overline{y})$ του κέντρου βάρους της μάζας, όταν η πυκνότητα σε κάθε σημείο της (x, y) είναι

$$\frac{1-y}{1+x}.$$

19.1.9 Υπολογισμός όγκων

Ορισμός 19.1.9 - 1. *Ο* **όγκος** V *του στερεού που ορίζεται από την επιφάνεια* S *με εξίσωση* $z = f(x,y)$*, όταν* $f(x,y) \geq 0$ *για κάθε* $(x,y) \in D$*, το επίπεδο* $0xy$ *και από την κυλινδρική επιφάνεια που έχει οδηγό το σύνορο* ∂D *του* D *και γενέτειρες παράλληλες προς τον* z*-άξονα δίνεται από τον τύπο*

$$V = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy. \qquad (19.1.9 - 1)$$



Σχήμα 19.1.9 - 1: Παράδειγμα 19.1.9 - 1.

Ορισμός 19.1.9 - 2. *Αν* $f(x,y) \geq g(x,y) \geq 0$ *για κάθε* $(x,y) \in D$, *τότε ο όγκος* V *του στερεού που φράσσεται από την επιφάνεια* $z = g(x,y)$ *και* $w = f(x,y)$, *από την κυλινδρική επιφάνεια που έχει οδηγό το σύνορο* ∂D *του* D *και γενέτειρες παράλληλες προς τον* z*-άξονα δίνεται από τον τύπο*

$$V = \iint_D f(x,y) - g(x,y)\, dx\, dy. \qquad (19.1.9 - 2)$$

Παράδειγμα 19.1.9 - 1

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από το στερεό με εξίσωση $z = x^2 + y^2$ και το επίπεδο $z = 16$ ($\Sigma\chi.$ 19.1.9 - 1).

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(19.1.9 - 2)$ ο ζητούμενος όγκος, έστω V, θα προκύψει από τη διαφορά του όγκου του επιπέδου και του στερεού, δηλαδή

$$\begin{aligned} V &= \iint_D 16\, dx\, dy - \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\, dx\, dy \\ &= \iint_D \left[16 - \left(x^2 + y^2\right)\right]\, dx\, dy = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Από τη μορφή της ολοκληρωτέας συνάρτησης $f(x,y)$ προκύπτει τότε ότι ο τόπος είναι ένας κύκλος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $r = 4$.

Τότε μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες ($x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$) έχουμε

$$f(x,y) = 16 - r^2\sin^2\theta - r^2\cos^2\theta = 16 - r^2 = F(r,\theta),$$

όπου $r \in [0,4]$ και $\theta \in [0,2\,\pi]$ οπότε από τις $(19.1.5-8)$ και $(19.1.9-1)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_D \left[16 - \left(x^2+y^2\right)\right]\,dx\,dy = \int_0^{2\,\pi}\ \left[\int_0^4 r\ \left(16-r^2\right)\ dr\right]\ d\theta \\ &= \int\limits_0^{2\,\pi}\left[\left[8r^2 - \frac{1}{4}\,r^4\right]_{r=0}^{r=4}\,d\theta = 64\int\limits_0^{2\,\pi} d\theta = 128\,\pi.\right. \end{aligned}$$

■

19.2 Τριπλά ολοκληρώματα

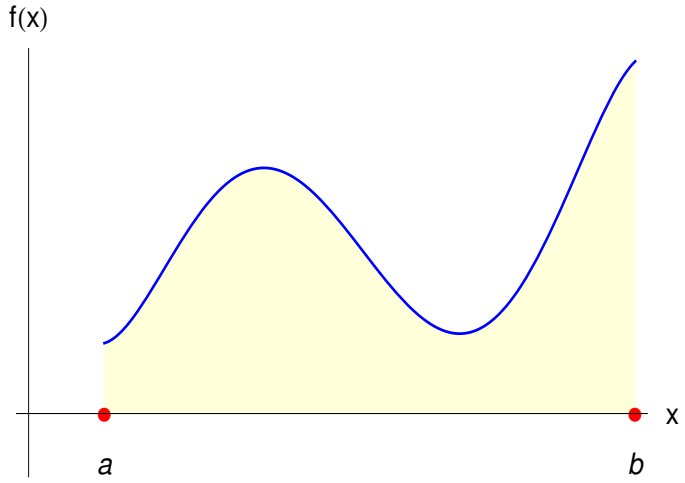
19.2.1 Ορισμός

Είναι ήδη γνωστό από την Εισαγωγή του Μαθήματος (Παράγραφος 19.1.1) ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ παριστάνει γεωμετρικά το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = f(x)$, τις ευθείες $x = a,\ b$ και τον x-άξονα (Σχ. 19.2.1 - 1), ενώ από τον ορισμό του διπλού ολοκληρώματος (Παράγραφος 19.1.3) ότι το $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ παριστάνει τον όγκο του στερεού που περικλείεται από την επιφάνεια $z = f(x,y)$, το πεδίο ορισμού D και του οποίου οι ακμές είναι παράλληλες προς τον z-άξονα (Σχ. 19.2.1 - 2).

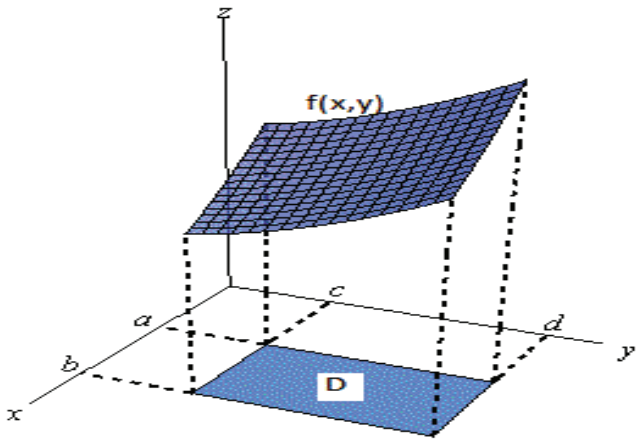
Επεκτείνοντας τις παραπάνω γεωμετρικές ερμηνείες έστω η συνάρτηση $f(x,y,z)$ με πεδίο ορισμού

$$D = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3] \subseteq \mathbb{R}^3,$$

που υποτίθεται ότι είναι φραγμένη για κάθε $(x,y,z) \in D$. Αν στην περίπτωση



Σχήμα 19.2.1 - 1: γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)\,dx$.



Σχήμα 19.2.1 - 2: γεωμετρική ερμηνεία του διπλού ολοκληρώματος $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

αυτή ο τόπος D υποδιαιρεθεί από τα σημεία

$$\begin{array}{llll} x_i \in [a_1, b_1]\,; & i = 1, 2, \ldots, n & \text{με πλάτος διαμέρισης} & \Delta x, \\ y_j \in [a_2, b_2]\,; & j = 1, 2, \ldots, m & \ldots & \Delta y, \\ z_k \in [a_3, b_3]\,; & k = 1, 2, \ldots, p & \ldots & \Delta z, \end{array}$$

τότε, έστω $\Delta A = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ ο **όγκος** του στοιχειώδους ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου της παραπάνω διαμέρισης. Η απεικόνιση σε άξονα συντεταγμένων της τιμής $f\left(x_i^*, y_j^*, z_k^*\right)$ γίνεται προσθέτοντας στις ήδη γνωστές τρεις διαστάσεις x, y, z μια επιπλέον 4η διάσταση. Τότε έχει έννοια το παρακάτω άθροισμα:

$$V \approx f\left(x_1^*, y_1^*, z_1^*\right) \Delta A + \ldots + f\left(x_n^*, y_m^*, z_p^*\right) \Delta A. \qquad (19.2.1\text{ - }1)$$

Αποδεικνύεται στην Ανάλυση ότι, όταν η διαγώνιος των παραπάνω παραλληλεπιπέδων τείνει στο μηδέν καθώς τα n, m $p \to +\infty$, το άθροισμα (19.2.1−1) συγκλίνει προς έναν αριθμό, έστω I, που είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των σημείων (x_i, y_j, z_k).

[5]Σύμφωνα με τα παραπάνω δίνεται στη συνέχεια ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 19.2.1 - 1 (τριπλού ολοκληρώματος).
Ορίζεται ως τριπλό ολοκλήρωμα (triple integral) της $f(x, y, z)$ στο $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ η οριακή τιμή

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \\ &= \lim_{n,\, m\, p \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} f\left(x_i^*, y_j^*, y_k^*\right) \Delta A, \qquad (19.2.1\text{ - }2) \end{aligned}$$

εφόσον η οριακή τιμή υπάρχει.

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται για κάθε φραγμένο πεδίο ορισμού D της f.

[5]Όμοια ο αναγνώστης, για μια πληρέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4] και: *http://en.wikipedia.org/wiki/Triple_integral*

Γεωμετρική ερμηνεία

Αν η 4η διάσταση συμβολίζει τον χρόνο t, τότε αλλάζοντας τη σειρά των μεταβλητών, έστω ότι η συνάρτηση που ολοκληρώνεται είναι με μεταβλητές x, y, t και η τέταρτη διάσταση είναι η z. Υποθέτοντας ότι οι μεταβλητές x, y είναι επίσης συναρτήσεις του t, τότε δίνοντας μια τιμή στο t, έστω t_0, το ολοκλήρωμα της $z = \tilde{f}(x, y, t_0)$ θα ορίζει σύμφωνα και με τη γεωμετρική ερμηνεία του διπλού ολοκληρώματος τον όγκο του αντίστοιχου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

Πρόταση 19.2.1 - 1. *Το τριπλό ολοκλήρωμα συμβολίζει γεωμετρικά την τιμή του όγκου, που δημιουργείται σε δεδομένη χρονική στιγμή t από τα αντίστοιχα $(x, y, z) \in D$.*

19.2.2 Ιδιότητες

Δίνονται στη συνέχεια με τη μορφή θεωρημάτων οι κυριότερες ιδιότητες του τριπλού ολοκληρώματος. Το πεδίο ορισμού, έστω D, των συναρτήσεων υποτίθεται ότι είναι κλειστό και φραγμένο.

Θεώρημα 19.2.2 - 1 (γραμμική). *Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες επί του D και k, $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε*

$$\iiint_D [k\, f(x,y,z) + \lambda\, g(x,y,z)]\, dx\, dy\, dz$$

$$= k \iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$+\lambda \iiint_D g(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

Η ιδιότητα γενικεύεται.

Θεώρημα 19.2.2 - 2 (αθροιστική). *Αν η περιοχή D αποτελείται από τις χωριστές περιοχές D_1 και D_2, δηλαδή $D = D_1 \cup D_2$ και $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, τότε*

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_{D_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \iiint_{D_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

ενώ, αν $D_1 \cap D_2 = \tilde{D}$, δηλαδή υπάρχει επικάλυψη των περιοχών D_1 και D_2 στην περιοχή $\tilde{D}$, τότε

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_{D_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \iiint_{D_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$- \iiint_{\tilde{D}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Θεώρημα 19.2.2 - 3 (σύγκρισης). *Αν $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$ για κάθε $(x,y,z) \in D$ και οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες επί του D, τότε*

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \geq \iiint_D g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Ειδικά, αν $g(x,y,z) > 0$ για κάθε $(x,y,z) \in D$, τότε

$$\iiint_D g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz > 0.$$

Θεώρημα 19.2.2 - 4. *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη επί του D, τότε*

$$\left| \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \right| \leq \iiint_D |f(x,y,z)|\;dx\,dy\,dz.$$

Θεώρημα 19.2.2 - 5. *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη επί του D και το D είναι αμελητέου εμβαδού, τότε*

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Θεώρημα 19.2.2 - 6 (μέσης τιμής). *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη επί του D , τότε*

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = f(x_0,y_0,z_0)\,V,$$

όπου V ο όγκος του τόπου D και $(x_0,y_0,z_0)\in D$.

19.2.3 Μέθοδοι υπολογισμού

Ο υπολογισμός του τριπλού ολοκληρώματος $(19.2.1-2)$ εξαρτάται από τη μορφή του πεδίου ορισμού. Από τις υπάρχουσες μεθόδους υπολογισμού θα εξεταστούν μόνον οι παρακάτω δύο.[6]

I. $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \quad a_1\le x\le b_1, \quad a_2\le y\le b_2, \quad a_3\le z\le b_3\}$,

δηλαδή και οι τρεις μεταβλητές μεταβάλλονται σε διαστήματα με σταθερά άκρα ή διαφορετικά το πεδίο ορισμού είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Τότε ο υπολογισμός γίνεται σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 19.2.3 - 1 (Fubini). *Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού*

$$\begin{aligned} D &= [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3] \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \quad a_1\le x\le b_1, \quad a_2\le y\le b_2, \quad a_3\le z\le b_3\} \end{aligned}$$

[6] Ο αναγνώστης για εκτενέστερη μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 4].

είναι ολοκληρώσιμη επί του D, τότε

$$\begin{aligned}\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \int\limits_{a_1}^{b_1}\left\{\int\limits_{a_2}^{b_2}\left[\int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right]dy\right\}dx \\ &= \int\limits_{a_2}^{b_2}\left\{\int\limits_{a_3}^{b_3}\left[\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx\right]dz\right\}dy \\ &= \int\limits_{a_3}^{b_3}\left\{\int\limits_{a_1}^{b_1}\left[\int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)\,dy\right]dx\right\}dz.\end{aligned}$$

Το θεώρημα αυτό είναι μια γενίκευση του αντίστοιχου θεωρήματος του Fubini για τα διπλά ολοκληρώματα. Σύμφωνα με το θεώρημα, η τιμή του τριπλού ολοκληρώματος είναι **ανεξάρτητη** από τη σειρά ολοκλήρωσης.

Παράδειγμα 19.2.3 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iiint\limits_D 8\,xyz\,dx\,dy\,dz,$$

όταν

$$D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad 2\le x\le 3, \quad 1\le y\le 2, \quad 0\le z\le 1\right\}.$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο (19.2.3 – 1) έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_D 8\,xyz\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_1^2 \left\{ \int_2^3 \left[\int_0^1 \overbrace{8\,xyz}^{xy\ \text{σταθερές}}\ dz \right] dx \right\} dy \\ &= \int_1^2 \left\{ \int_2^3 \left[4\,xyz^2\right]_{z=0}^{z=1} dx \right\} dy = \int_1^2 \left[\int_2^3 \overbrace{4\,xy}^{y\ \text{σταθερά}}\ dx \right] dy \\ &= \int_1^2 \left[2\,x^2 y\right]_{x=2}^{x=3} dx = \int_1^2 10\,y\,dy = 15. \end{aligned}$$

■

II.

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ a_1 \le x \le b_1\,, \qquad \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x) \qquad z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$$

Τότε ισχύει

$$I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad (19.2.3\text{ - }1)$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \left\{ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dy \right\} dx,$$

δηλαδή η ολοκλήρωση γίνεται πρώτα από τη μεταβλητή που εξαρτάται από τις άλλες δύο μεταβλητές.

Παράδειγμα 19.2.3 - 2

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iiint_D x^3 y^2 z \, dx \, dy \, dz,$$

όταν

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x, \quad 0 \le z \le xy \right\}.$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(19.2.3 - 3)$ έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D x^3 y^2 z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \left\{ \int_0^x \left[\int_0^{xy} x^3 y^2 z \, dz \right] dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^x \left[\frac{1}{2} x^3 y^2 z^2 \right]_{z=0}^{z=xy} dy \right\} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_0^x x^5 y^4 \, dy \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{5} x^5 y^5 \right]_{y=0}^{y=x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{10} \, dx = \frac{1}{110}. \end{aligned}$$

■

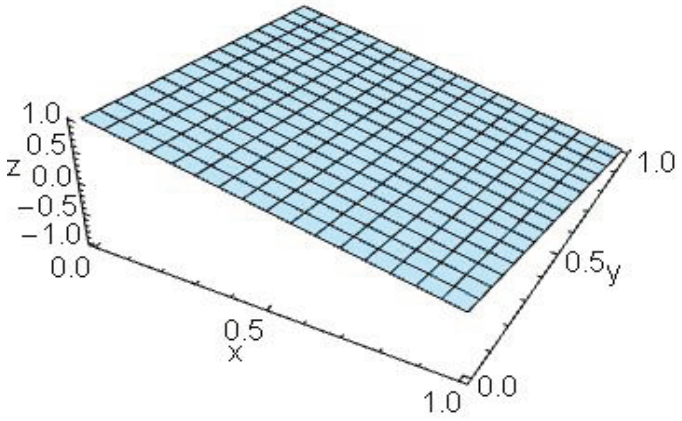
Παράδειγμα 19.2.3 - 3

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \iiint_D \left(x^2 + y^2 - z^2 \right) dx \, dy \, dz,$$

όταν

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x + y + z \le 1, \quad x, \, y, \, z \ge 0 \right\}.$$



Σχήμα 19.2.3 - 1: Ο τόπος D του Παραδείγματος 19.2.3 - 3.

Λύση. Ο τόπος D περιγράφεται ως εξής (Σχ. 19.2.3 - 1):

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le x \le 1\,, \qquad 0 \le y \le 1-x \qquad 0 \le z \le 1-x-y\}.$$

Τότε όμοια με τον τύπο $(19.2.3-3)$ έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D \left(x^2+y^2-z^2\right)\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} \left(x^2+y^2-z^2\right)\,dz \right] dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[x^2z + y^2z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{1}{60}\,. \end{aligned}$$

∎

Παρατήρηση 19.2.3 - 1

Στην κατηγορία αυτή υπάρχουν οι παρακάτω άλλοι δύο τύποι παράστασης του τόπου D:

- $$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a_1 \le y \le b_1\,, \qquad \phi_1(y) \le z \le \phi_2(y) \\ z_1(y,z) \le x \le z_2(y,z)\}$$

  Τότε ισχύει

  $$I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad (19.2.3 - 2)$$

  $$= \int\limits_{a_1}^{b_1} \left\{ \int\limits_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} \left[\int\limits_{z_1(y,z)}^{z_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right] dz \right\} dy.$$

- $$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a_1 \le z \le b_1\,, \qquad \phi_1(z) \le x \le \phi_2(z) \\ z_1(x,z) \le y \le z_2(x,z)\}$$

  Τότε ισχύει

  $$I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad (19.2.3 - 3)$$

  $$= \int\limits_{a_1}^{b_1} \left\{ \int\limits_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} \left[\int\limits_{z_1(x,z)}^{z_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right] dx \right\} dz.$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν τα τριπλά ολοκληρώματα

$$I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

όταν η συνάρτηση f ισούται με:

i) xy και

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad -1 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1, \quad -2 \le z \le 3 \right\},$$

ii) $(x+y+z+1)^{-1}$ και D το στερεό μεταξύ των επιπέδων

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad \text{και} \quad x+y+z = 1.$$

iii) $z\sqrt{x^2+y^2}$ και D το στερεό μεταξύ των επιφανειών

$$x = z, \quad z \ge 0, \quad \text{και} \quad x^2+y^2 = 1.$$

iv) $x^2+y^2+z^2$ και D το εσωτερικό της μοναδιαίας σφαίρας με κέντρο το σημείο $(0,0,0)$.

v) xyz και D το εσωτερικό του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{όταν} \quad x,\, y,\, z \ge 0.$$

Απαντήσεις

(i) $I = \int_0^1 \int_{-2}^3 \int_{-1}^1 xy\,dx\,dz\,dy = \frac{15}{4}$,, (ii) $\frac{8\ln 2 - 5}{16}$,, (iii) $\frac{\pi}{20}$, (iv) $\frac{4\pi}{5}$, (v) $\frac{a^2b^2c^2}{48}$.

19.2.4 Εφαρμογές των τριπλών ολοκληρωμάτων

Υπολογισμός όγκων

Ορισμός 19.2.4 - 1. *Αν ο τόπος D είναι κλειστό και φραγμένο στερεό, τότε ο* **όγκος** *V του D ισούται με την τιμή του τριπλού ολοκληρώματος*

$$V = \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz. \qquad (19.2.4\text{ - }1)$$

Υπολογισμός μάζας

Ορισμός 19.2.4 - 2. *Αν $\rho(x,y,z)$ με $\rho(x,y,z) > 0$ για κάθε $(x,y,z) \in D$ παριστάνει την* **πυκνότητα** *της μάζας, που κατανέμεται με συνεχή τρόπο στο D, τότε η* **συνολική μάζα** *M του D δίνεται από τον τύπο*

$$M = \iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz. \qquad (19.2.4 - 2)$$

Στην περίπτωση αυτή το **κέντρο βάρους** (x_0, y_0) δίνεται από τις σχέσεις

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{M} \quad \text{και} \quad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{M},$$

όπου οι

$$M_{yz} = \iiint_D x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$M_{xz} = \iiint_D y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \quad \text{και}$$

$$M_{xy} = \iiint_D z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

είναι οι **ροπές 1ης τάξης** του D.

19.3 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[2] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[3] Marsden, J.E. & Tromba, A.J. (2011). *Διανυσματικός Λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–730–945–7.

[4] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 20

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

20.1 Επικαμπύλια ολοκληρώματα

20.1.1 Ορισμός σε διανυσματικό πεδίο

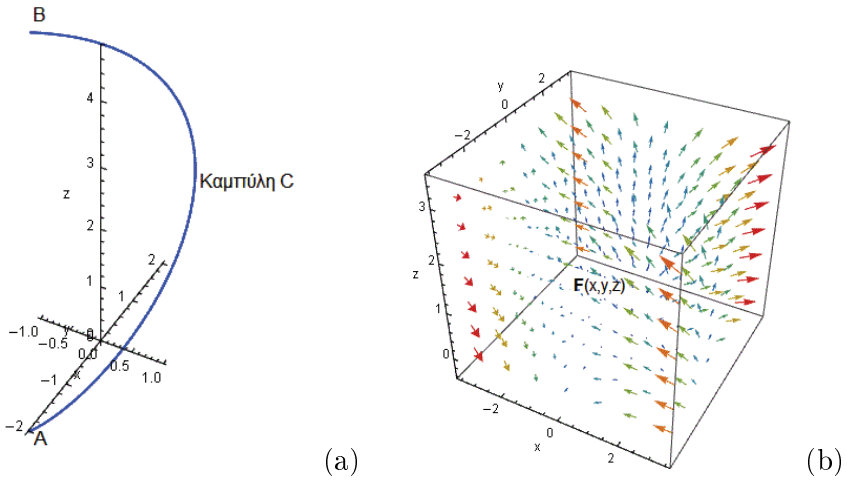
Στο μάθημα αυτό γίνεται μια γενίκευση της μέχρι τώρα γνωστής στον αναγνώστη έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx,$$

σύμφωνα με την οποία το διάστημα ολοκλήρωσης $[\alpha, \beta]$ αντικαθίσταται από μια καμπύλη, έστω C (Σχ. 20.1.1 - 1a), με πεπερασμένο μήκος, που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση[1] $\mathbf{r}(t)$, ενώ η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x)$

[1] Βλέπε Μάθημα *Διανυσματική συνάρτηση - Παραμετρική παράσταση καμπυλών.*

από ένα διανυσματικό πεδίο, που περιγράφεται επίσης από μία [2]διανυσματική συνάρτηση, έστω $\mathbf{F}$ (Σχ. 20.1.1 - 1b), που ορίζεται επί της C (Σχ. 20.1.1 - 2c), δηλαδή τα σημεία (x, y), αντίστοιχα (x, y, z) στα οποία ορίζεται η $\mathbf{F}$, είναι επίσης σημεία της C (Σχ. 20.1.1 - 2d). Τα ολοκληρώματα αυτά λέγονται τότε επικαμπύλια και η καμπύλη C δρόμος ολοκλήρωσης.



(a) (b)

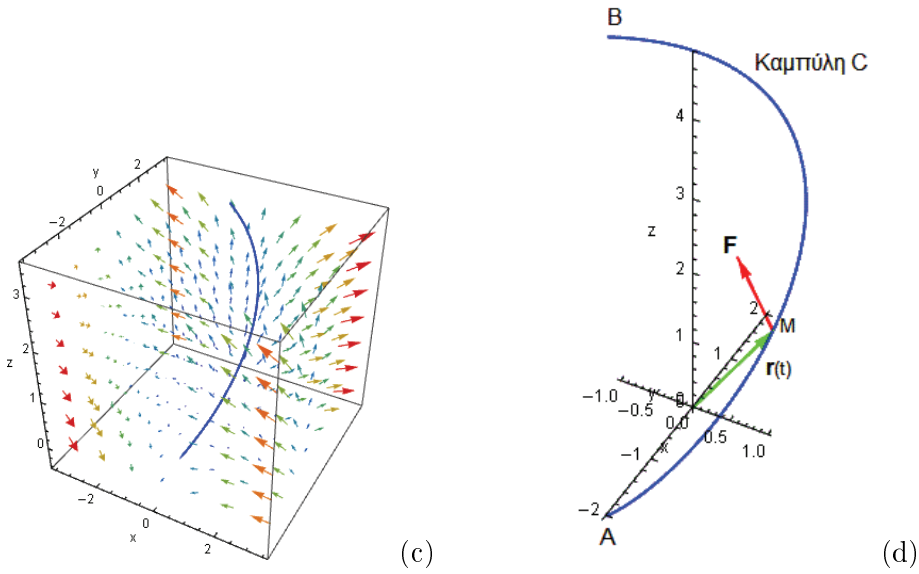
Σχήμα 20.1.1 - 1: (a) η καμπύλη C και (b) το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$.

Δίνεται στη συνέχεια ο παρακάτω ορισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος:

Ορισμός **20.1.1 - 1 (επικαμπύλιο ολοκλήρωμα).** *Έστω C μία καμπύλη με πεπερασμένο μήκος που περιγράφεται με παραμετρική μορφή από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ για κάθε $t \in [\alpha, \beta]$ και ένα διανυσματικό πεδίο, έστω $\mathbf{F}$, που είναι ορισμένο επί της C (Σχ. 20.1.1 - 2). Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\mathbf{F}$ επί της C, συμβολίζεται με*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r}$$

[2]Βλέπε Μάθημα *Διανυσματικός Διαφορικός Λογισμός - Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία.*



Σχήμα 20.1.1 - 2: (c) το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ με την καμπύλη C και (d) το πεδίο $\mathbf{F}$ επί της C, δηλαδή, όταν τα σημεία (x, y, z) στα οποία ορίζεται η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}$, είναι επίσης σημεία της C.

και ορίζεται από τον τύπο

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \mathbf{F}\left[\mathbf{r}(t)\right] \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt, \qquad (20.1.1 - 1)$$

όταν το τελευταίο ολοκλήρωμα υπάρχει.

Αν η καμπύλη C είναι **κλειστή**, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος της C συμβολίζεται με

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r},$$

όπου στο σύμβολο της ολοκλήρωσης τίθεται πολλές φορές και βέλος για να καθοριστεί η φορά διαγραφής της C.

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα έχουν πολλές εφαρμογές στις θετικές επιστήμες, όπως:

- στο έργο δυνάμεων,
- τη δυναμική ενέργεια,
- τη ροή θερμότητας,
- την εντροπία,
- τη ροή ρευστών κ.λπ.[3]

Σημείωση 20.1.1 - 1

Στη βιβλιογραφία τα επικαμπύλια ολοκληρώματα που ορίζονται από ένα διανυσματικό πεδίο επί μιας καμπύλης, είναι επίσης γνωστά και ως επικαμπύλια ολοκληρώματα του 2ου είδους.

20.1.2 Τύπος υπολογισμού

Έστω ότι η διανυσματική συνάρτηση που περιγράφει το πεδίο $\mathbf{F}$, εκφράζεται συναρτήσει των συντεταγμένων του στον χώρο των 3-διαστάσεων ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x,y,z) &= P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k} \\ &= \langle P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z), \rangle \qquad (20.1.2\text{ - }1) \end{aligned}$$

ενώ η [4]διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}$ ως

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}. \qquad (20.1.2\text{ - }2)$$

Υπενθυμίζεται στο σημείο αυτό ότι: αν $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ και $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα, τότε το **εσωτερικό γινόμενο** $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ υπολογίζεται από τον τύπο

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3. \qquad (20.1.2\text{ - }3)$$

[3] Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4, 5, 6] και στη μαθηματική βάση δεδομένων *http://en.wikipedia.org/wiki/Line_integral*

[4] Βλέπε Μάθημα *Διανυσματική συνάρτηση*.

Τότε σύμφωνα με τις $(20.1.2-1)$ και $(20.1.2-2)$ λαμβάνοντας υπόψη και τον τύπο $(20.1.2-3)$ το ολοκλήρωμα $(20.1.1-1)$ γράφεται

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}(t)\cdot d\,\mathbf{r} &= \int_C (P\,\mathbf{i}+Q\,\mathbf{j}+R\,\mathbf{k})\cdot(dx\,\mathbf{i}+dy\,\mathbf{j}+dz\,\mathbf{k})\\ &= \int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz, \qquad (20.1.2\text{ - }4)\end{aligned}$$

ενώ, αν

$$\mathbf{F}(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j},$$

η αντίστοιχη της $(20.1.2-4)$ έκφραση στον χώρο των 2-διαστάσεων είναι

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}(t)\cdot d\,\mathbf{r} &= \int_C (P\,\mathbf{i}+Q\,\mathbf{j})\cdot(dx\,\mathbf{i}+dy\,\mathbf{j})\\ &= \int_C P\,dx+Q\,dy. \qquad (20.1.2\text{ - }5)\end{aligned}$$

Σύμφωνα με την υποσημείωση 4 η παραμετρική παράσταση της καμπύλης C θα ορίζεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ και θα είναι της μορφής

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}\\ &= \langle x(t),y(t),z(t)\rangle\,, \quad \text{όταν} \quad t\in[\alpha,\beta]. \qquad (20.1.2\text{ - }6)\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην $(20.1.2-1)$ τα x, y, z με τις αντίστοιχες παραμετρικές εκφράσεις τους $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$, που δίνονται από την $(20.1.2-6)$, προκύπτει η παρακάτω παραμετρική έκφραση του διανυσματικού πεδίου:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t)=\mathbf{F}(x(t),y(t),z(t)) &= \langle P(x(t),y(t),z(t)),Q(x(t),y(t),z(t)),\\ &= R(x(t),y(t),z(t))\rangle\,. \qquad (20.1.2\text{ - }7)\end{aligned}$$

Υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ είναι παραγωγίσιμες για κάθε $t\in[\alpha,\beta]$, από την $(20.1.2-6)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= x'(t)\mathbf{i}+y'(t)\mathbf{j}+z'(t)\mathbf{k}\\ &= \left\langle x'(t),y'(t),z'(t)\right\rangle, \quad \text{όταν} \quad t\in[\alpha,\beta]. \qquad (20.1.2\text{ - }8)\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τις $(20.1.2-7)$ και $(20.1.2-8)$, λαμβάνοντας υπόψη και τον ήδη γνωστό τύπο $(20.1.2-3)$ υπολογισμού του εσωτερικού γινομένου

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1\,b_1+a_2\,b_2+a_3\,b_3,$$

η ολοκληρωτέα συνάρτηση στην $(20.1.1-1)$, δηλαδή στην

$$\int\limits_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r}=\int\limits_\alpha^\beta \mathbf{F}\left[\mathbf{r}(t)\right]\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt,$$

γράφεται

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{r}'(t) &= P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t)\\ &\quad +R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\\ &= P(t)\,x'(t)+Q(t)\,y'(t)+R(t)\,z'(t). \qquad (20.1.2\text{ - }9)\end{aligned}$$

Τότε από την $(20.1.2-9)$ προκύπτει ο παρακάτω τύπος υπολογισμού του επικαμπύλιου ολοκληρώματος $(20.1.1-1)$ για τον χώρο των 3-διαστάσεων

$$\int\limits_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r}=\int\limits_\alpha^\beta \left[P(t)x'(t)+Q(t)y'(t)+R(t)z'(t)\right]\,d\,t, \qquad (20.1.2\text{ - }10)$$

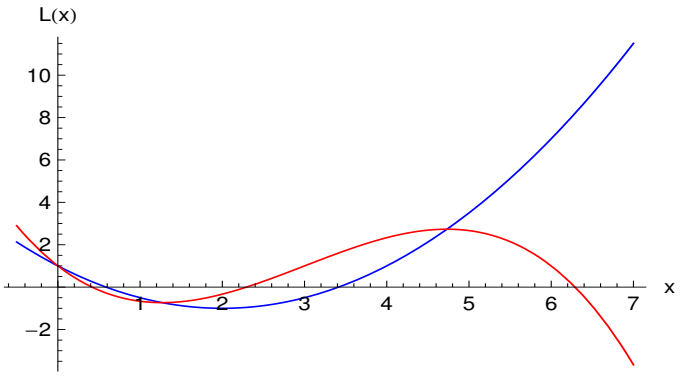
ενώ, αν

$$\mathbf{F}(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j},$$

ο αντίστοιχος τύπος για τον χώρο των 2-διαστάσεων είναι

$$\int\limits_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r}=\int\limits_\alpha^\beta \left[P(t)x'(t)+Q(t)y'(t)\right]\,d\,t. \qquad (20.1.2\text{ - }11)$$

Κρίνεται απαραίτητο στο σημείο αυτό να γίνει υπενθύμιση των παρακάτω χρήσιμων για τα επόμενα παραμετρικών παραστάσεων:



Σχήμα 20.1.2 - 1: παραμετρική παράσταση ευθείας.

Ευθεία

Οι παραμετρικές μορφές των $x(t)$, $y(t)$, αντίστοιχα $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ της παραμετρικής εξίσωσης του **ευθύγραμμου τμήματος** M_1M_2 για την περίπτωση του χώρου των

- 2-διαστάσεων, όταν $M_1\,(x_1, y_1)$ η αρχή και $M_2\,(x_2, y_2)$ το τέλος, είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= tx_2 + (1-t)x_1, \\ y(t) &= ty_2 + (1-t)y_1 \quad \text{με} \quad t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{20.1.2 - 12}$$

- 3-διαστάσεων, όταν $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$ - αρχή και $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$ - τέλος (Σχ. 20.1.2 - 1), είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= tx_2 + (1-t)x_1, \\ y(t) &= ty_2 + (1-t)y_1, \\ z(t) &= tz_2 + (1-t)z_1 \quad \text{με} \quad t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{20.1.2 - 13}$$

Περιφέρεια κύκλου

Έστω αρχικά ότι το κέντρο του κύκλου συμπίπτει με την αρχή των αξόνων. Τότε, αν R η ακτίνα, η εξίσωση των σημείων της περιφέρειας γράφεται

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

οπότε παραμετρικές μορφές των $x(t)$ και $y(t)$ είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos t \quad \text{και} \\ y(t) &= R\sin t \quad \text{με} \quad t \in [0, 2\pi). \end{aligned} \tag{20.1.2 - 14}$$

Αν το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο (α,β), τότε η εξίσωση των σημείων της περιφέρειας γράφεται

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2,$$

οπότε

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha + R\cos t \quad \text{και} \\ y(t) &= \beta + R\sin t \quad \text{με} \quad t \in [0, 2\pi). \end{aligned} \tag{20.1.2 - 15}$$

Σημείωση 20.1.2 - 1

Σε κάθε άλλη διαφορετική των παραπάνω περίπτωση η παραμετρική παράσταση της καμπύλης C θα δίνεται.

Παράδειγμα 20.1.2 - 1

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r}$, όταν

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + (xz + y)\mathbf{k}$$

και C το ευθύγραμμο τμήμα AB με αρχή το $A(1,-1,2)$ και τέλος το $B(3,1,-1)$.

Λύση. Έστω

$$\begin{aligned} A\,(x_1, y_1, z_1)\,, &\quad \text{όπου} \quad x_1 = 1, \quad y_1 = -1, \quad z_1 = 2, \quad \text{και} \\ B\,(x_2, y_2, z_2) &\qquad\quad\;\; x_2 = 3, \quad y_2 = 1, \quad z_2 = -1. \end{aligned}$$

Τότε το ευθύγραμμο τμήμα AB σύμφωνα με τον τύπο $(20.1.2-13)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= tx_2 + (1-t)x_1, \\ y(t) &= ty_2 + (1-t)y_1, \\ z(t) &= tz_2 + (1-t)z_1 \quad \text{με} \quad t \in [0,1] \end{aligned}$$

εκφράζεται παραμετρικά ως εξής:

$$\begin{aligned} x(t) &= t \cdot 3 + (1-t) \cdot 1 = 2t + 1 && (1) \\ y(t) &= t \cdot 1 + (1-t) \cdot (-1) = 2t - 1 && (2) \\ z(t) &= t \cdot (-1) + (1-t) \cdot 2 = -3t + 2, \quad \text{όταν} \quad t \in [0,1]. && (3) \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2 && (4) \\ y'(t) &= 2 && (5) \\ z'(t) &= -3. && (6) \end{aligned}$$

Από το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + (xz + y)\mathbf{k} = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}.$$

προκύπτει ότι: $P = x$, $Q = -y$ και $R = xz + y$.

Άρα σύμφωνα με τις (1)-(3) έχουμε

$$\begin{aligned} P(t) &= x = 2t + 1, \\ Q(t) &= -y = -2t + 1, \quad \text{και} \\ R(t) &= xz + y = (2t+1)(-3t+2) + 2t - 1 \\ &= -6t^2 + 3t + 1. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στον τύπο $(20.1.2-10)$ προκύπτει

ότι

$$\begin{aligned}\int_{AB} \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} &= \int_0^1 \left[P(t)x'(t)+Q(t)y'(t)+R(t)z'(t)\right]\,dt,\\ &= \int_0^1 \Bigg[(2t+1)\cdot \overbrace{2}^{\text{Εξ. (4)}} +(-2t+1)\cdot \overbrace{2}^{\text{Εξ. (5)}}\\ &\qquad +\left(-6t^2+3t+1\right)\cdot \overbrace{(-3)}^{\text{Εξ. (6)}}\Bigg]\,dt\\ &= t-\frac{9t^2}{2}+6t^3\Big|_0^1=\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA γίνεται με το παρακάτω πρόγραμμα:

Πρόγραμμα 20.1.2 - 1 (επικαμπύλιου ολοκληρώματος 2ου είδους)

```
x1 = 1; y1 = 1; x2 = 2; y2 = 3;z1=2;z2=-1;
x[t_] := t x2 + (1 - t) x1
y[t_] := t y2 + (1 - t) y1
y[t_] := t z2 + (1 - t) z1
Print["x(t) = ", x[t]," , y(t) = ", y[t]," , z(t) =",z[t]]
xd[t_] := D[x[t], t];yd[t_] := D[y[t], t];zd[t_] := D[z[t], t];
Print["x'(t) = ", xd[t]," , y'(t) = ", yd[t]," , z'(t) = ", zd[t]]
P[t_] := y[t];Q[t_] :=- y[t];R[t_]:=x[t] z[t]+y[t]
Print["P(t) = ", Simplify[P[t]]]
Print["Q(t) = ", Simplify[Q[t]]]
Print["R(t) = ", Simplify[R[t]]]
Print["P(t)x'(t)+Q(t)y'(t) =",
Simplify[P[t] xd[t] + Q[t] yd[t] + R[t] zd[t]]]
w = Integrate[P[t] xd[t] + Q[t] yd[t] + R[t] zd[t], {t, 0, 1}];
Print["Linear Integral: ", w]
```

■

Παράδειγμα 20.1.2 - 2

Όμοια το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r}$, όταν

$$\mathbf{F} = (x-y)\,\mathbf{i} + (x+y)\,\mathbf{j}$$

και C η περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο $(0,0)$, όταν η περιφέρεια διαγράφεται δεξιόστροφα, δηλαδή αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Λύση. Επειδή ο κύκλος είναι μοναδιαίος, πρέπει $R = 1$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο (20.1.2−14) η περιφέρεια έχει την παρακάτω παραμετρική παράσταση:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t, \quad \text{και} && (1)\\ y(t) &= \sin t \quad \text{με} \quad t \in [0, 2\pi), && (2) \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\sin t, \quad \text{και} && (3)\\ y'(t) &= \cos t. && (4) \end{aligned}$$

Το διανυσματικό πεδίο γράφεται

$$\mathbf{F} = (x-y)\,\mathbf{i} + (x+y)\,\mathbf{j} = P(x,y)\,\mathbf{i} + Q(x,y)\,\mathbf{j},$$

οπότε $\quad P = x - y \quad$ και $\quad Q = x + y.$

Άρα σύμφωνα με τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} P(t) &= x - y = \cos t - \sin t, \quad \text{και}\\ Q(t) &= x + y = \cos t + \sin t. \end{aligned}$$

Τότε από τον τύπο $(20.1.2-11)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi}\left[P(t)x'(t)+Q(t)y'(t)\right]\,d\,t\\ &= \int_0^{2\pi}\left[(\cos t-\sin t)\cdot\overbrace{(-\sin t)}^{\text{Εξ. (3)}}+(\cos t+\sin t)\cdot\overbrace{\cos t}^{\text{Εξ. (4)}}\right]\,d\,t\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)d\,t=\int_0^{2\pi}d\,t=2\pi.\end{aligned}$$

■

20.1.3 Ιδιότητες

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα έχουν ιδιότητες ανάλογες με εκείνες των ήδη γνωστών ολοκληρωμάτων. Οι βασικότερες από αυτές που δίνονται στη συνέχεια με τη μορφή θεωρημάτων είναι:

Θεώρημα 20.1.3 - 1 (γραμμική). *Έστω* $\mathbf{F}$ *και* $\mathbf{G}$ *διανυσματικά πεδία, που είναι ορισμένα επί μιας καμπύλης* C *με πεπερασμένο μήκος και παραμετρική παράσταση* $\mathbf{r}(t)$ *για κάθε* $t\in[\alpha,\beta]$. *Τότε, αν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα των* $\mathbf{F}$ *και* $\mathbf{G}$ *επί της* C *υπάρχουν, για κάθε* $k,\,\lambda\in\mathbb{R}$ *ισχύει ότι*

$$\int_C (k\,\mathbf{F}+\lambda\,\mathbf{G})\cdot d\,\mathbf{r}=k\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r}+\lambda\int_C \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r}$$

Η ιδιότητα γενικεύεται.

Θεώρημα 20.1.3 - 2 (προσθετική). *Έστω* $\mathbf{F}$ *διανυσματικό πεδίο, που είναι ορισμένο επί μιας καμπύλης* C *με πεπερασμένο μήκος και παραμετρική παράσταση* $\mathbf{r}(t)$ *για κάθε* $t\in[\alpha,\beta]$. *Τότε, αν* C_1 *και* C_2 *είναι δύο διαφορετικά τόξα της* C, *τέτοια ώστε το άθροισμά τους να είναι η* C *και να διαγράφονται από το ίδιο διάνυσμα* $\mathbf{r}(t)$ *που διαγράφεται και η* C, *ισχύει ότι*

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r}=\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r}+\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r}.$$

Η ιδιότητα γενικεύεται για ν το πλήθος επιμέρους τόξα της C.

Θεώρημα 20.1.3 - 3. *Έστω* $\mathbf{F}$ *διανυσματικά πεδίο, που είναι ορισμένο επί μιας καμπύλης* C *με πεπερασμένο μήκος και παραμετρική παράσταση* $\mathbf{r}(t)$ *για κάθε* $t \in [\alpha, \beta]$. *Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα παραμένει αμετάβλητο σε μία αλλαγή της παραμέτρου* t, *που διατηρεί τον προσανατολισμό της* C *και αλλάζει πρόσημο, όταν η αλλαγή αυτή αντιστρέψει τον προσανατολισμό, δηλαδή*

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r} = -\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r}.$$

Η ιδιότητα αυτή εκφράζει την ανεξαρτησία του επικαμπύλιου ολοκληρώματος από την εκλογή της παραμέτρου.

20.1.4 Σχέση επικαμπύλιου ολοκληρώματος και κλίσης

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r}$$

δεν είναι γενικά ανεξάρτητο από τον δρόμο της ολοκλήρωσης C, δηλαδή, αν υποτεθεί ότι η C έχει αρχή το σημείο A και τέλος το B, τότε η τιμή του, όταν ο δρόμος είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB, είναι διαφορετική εκείνης, όταν ο δρόμος είναι μια οποιαδήποτε άλλη καμπύλη με αρχή το A και τέλος το B.

Τα παραπάνω δεν ισχύουν και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα έχει την ίδια τιμή ανεξάρτητα του τρόπου διαγραφής της C από το A στο B, μόνον όταν το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό.[5]

Σχετικά αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

[5] **Ορισμός (συντηρητικό πεδίο).** *Το διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση* $\mathbf{F}$ *θα λέγεται* **συντηρητικό**, *όταν*

$$\mathbf{F} = \nabla\varphi.$$

Βλέπε Μάθημα *Διανυσματικός Διαφορικός Λογισμός - Συντηρούμενα πεδία.*

Θεώρημα 20.1.4 - 1 (ανεξαρτησίας επικαμπύλιου ολοκληρώματος). *Έστω*

$$\mathbf{F} = \nabla\varphi,$$

όπου φ βαθμωτή συνάρτηση της οποίας υπάρχουν τουλάχιστον οι 1ης τάξης μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r}, \tag{20.1.4 - 1}$$

όταν C η καμπύλη από το σημείο $A\left(x_1,y_1,z_1\right)$ στο $B\left(x_2,y_2,z_2\right)$ του πεδίου, είναι ανεξάρτητο από τον δρόμο της ολοκλήρωσης και ισχύει

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} = \int_{A(x_1,y_1,z_1)}^{B(x_2,y_2,z_2)} d\phi = \phi\left(x_2,y_2,z_2\right) - \phi\left(x_1,y_1,z_1\right). \tag{20.1.4 - 2}$$

Αντίστροφα: *αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα* $(20.1.4{-}1)$ *είναι ανεξάρτητο από τον δρόμο της ολοκλήρωσης, τότε υπάρχει μία βαθμωτή συνάρτηση, έστω φ, έτσι ώστε $\mathbf{F} = \nabla\varphi$.*

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι το:

Πόρισμα 20.1.4 - 1. *Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός συντηρητικού διανυσματικού πεδίου κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης είναι μηδέν.*

Κρίνεται απαραίτητο στο σημείο αυτό για ευκολία των παρακάτω ασκήσεων, να γίνει υπενθύμιση των παρακάτω εννοιών:[6]

Ορισμός 20.1.4 - 2. *Έστω ένα διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}$. Τότε το πεδίο θα λέγεται* αστρόβιλο *(irrotational field), όταν ισχύει*

$$\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}. \tag{20.1.4 - 3}$$

Θεώρημα 20.1.4 - 2. *Ένα διανυσματικό πεδίο είναι αστρόβιλο, όταν είναι συντηρητικό και αντίστροφα.*

[6] Βλέπε επίσης Μάθημα *Διανυσματικός Διαφορικός Λογισμός - Αστρόβιλα πεδία.*

Παρατήρηση 20.1.4 - 1

Αν στην αναλυτική περιγραφή του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$ λείπει κάποια συνιστώσα, τότε στον υπολογισμό του στροβιλισμού $\nabla \times \mathbf{F}$ η συνιστώσα αυτή υπολογίζεται με την τιμή της ίση με το 0.

Παράδειγμα 20.1.4 - 1

Έστω το διανυσματικό πεδίο (Σχ. 20.1.4 - 1a)

$$\mathbf{F} = 2\,x\,y\,\mathbf{i} + \left(x^2 + 2\,y^2\right)\,\mathbf{j}.$$

Δείξτε ότι

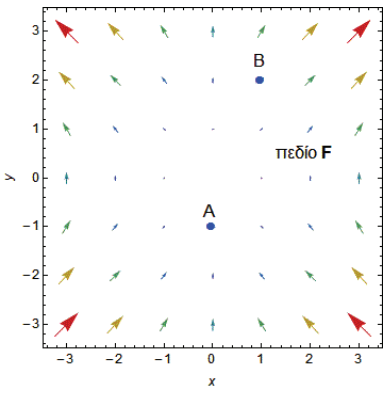
i) το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό.

ii) Στη συνέχεια να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

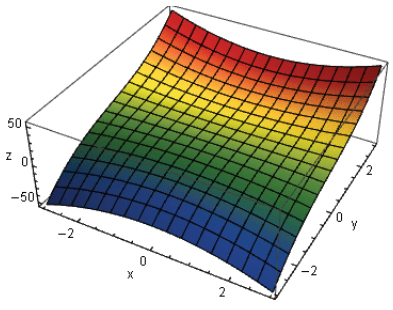
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r},$$

όταν C ο δρόμος ολοκλήρωσης από το σημείο $A(0,-1)$ στο $B(1,2)$.

Λύση.



(a)



(b)

Σχήμα 20.1.4 - 1: (a) το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = 2\,x\,y\,\mathbf{i} + \left(x^2 + 2\,y^2\right)\,\mathbf{j}$ και τα σημεία $A(0,-1)$, $B(1,2)$ και (b) το δυναμικό $\phi(x,y) = x^2y + y^3$.

i) Σύμφωνα με τα Θεωρήματα 20.1.4 - 1 - 20.1.4 - 2 και τον Ορισμό 20.1.4 - 2 αρκεί να δειχθεί ότι

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Αν

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= 2\,x\,y\,\mathbf{i} + \left(x^2 + 2\,y^2\right)\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} \\ &\quad \text{(υποχρεωτικά η συνιστώσα που λείπει πρέπει να είναι} \\ &\quad \text{ίση με μηδέν - Παρατήρηση } 20.1.4 - 1) \\ &= P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}, \end{aligned}$$

τότε

$$P = 2\,x\,y, \quad Q = x^2 + 2\,y^2 \quad \text{και} \quad R = 0. \tag{1}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2\,x\,y & x^2 + 2\,y^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (0 - Q_z)\,\mathbf{i} + (P_z - 0)\,\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\,\mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Τότε από το Θεώρημα 20.1.4 - 2 προκύπτει ότι το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό, δηλαδή

$$\mathbf{F} = \nabla\varphi,$$

όπου φ το δυναμικό.

ii) Εφόσον το πεδίο είναι συντηρητικό, για τον υπολογισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος πρέπει να υπολογιστεί το δυναμικό του.

Υπολογισμός του δυναμικού

Σύμφωνα με την (i), αν

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k} \\ &= \nabla\varphi = \varphi_x\,\mathbf{i} + \varphi_y\,\mathbf{j} + \varphi_z\,\mathbf{k},\end{aligned}$$

τότε από την (1) προκύπτει ότι

$$\varphi_x = P = 2\,x\,y \quad \varphi_y = Q = x^2 + 3\,y^2 \quad \text{και} \quad \varphi_z = R = 0.$$

Για να προσδιοριστεί το δυναμικό φ, πρέπει να ολοκληρωθούν οι παραπάνω σχέσεις ως προς x, y και z αντίστοιχα. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια του ολικού διαφορικού της φ ως εξής:

$$\begin{aligned}d\varphi &= \varphi_x\,dx + \varphi_y\,dy + 0\,dz \\ &= 2\,x\,y\,dx + \left(x^2 + 3\,y^2\right)\,dy \\ &= d_x\left(x^2y\right) + d_y\left(x^2y + y^3\right) \\ &= d_x(x^2y + \overbrace{y^3}^{d_x(y^3)=0}) + d_y\left(x^2y + y^3\right) \\ &= d\left(x^2y + y^3\right).\end{aligned}$$

Επομένως το δυναμικό του πεδίου $\mathbf{F}$ είναι

$$\phi(x, y) = x^2y + y^3 + c,$$

όταν c σταθερά (Σχ. 20.1.4 - 1b).

Άρα από το Θεώρημα 20.1.4 - 1 και τον τύπο $(20.1.4 - 2)$ έχουμε

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} = \int_{A(0,-1)}^{B(1,2)} d\,\varphi = \varphi\,(1,2) - \varphi\,(0,-1) = 11.$$

■

Παράδειγμα 20.1.4 - 2

Όμοια το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r}$, όταν

$$\mathbf{F} = 3\,x^2 z\,\mathbf{i} + z^2\,\mathbf{j} + \left(x^3 + 2\,y\,z\right)\,\mathbf{k}.$$

και C ο δρόμος ολοκλήρωσης από το σημείο $A(-1,1,2)$ στο $B(1,2,4)$.

Λύση. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 20.1.4 - 1, αν

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= 3\,x^2 z\,\mathbf{i} + z^2\,\mathbf{j} + \left(x^3 + 2\,y\,z\right)\,\mathbf{k}\\ &= P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k},\end{aligned}$$

τότε

$$P = 3\,x^2 z, \quad Q = z^2 \quad \text{και} \quad R = x^3 + 2\,y\,z. \tag{2}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3\,x^2 z & z^2 & x^3 + 2\,y\,z \end{vmatrix}\\ &= (R_y - Q_z)\,\mathbf{i} + (P_z - R_x)\,\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\,\mathbf{k} = \mathbf{0},\end{aligned}$$

οπότε όμοια σύμφωνα με το γνωστό Θεώρημα 20.1.4 - 2 το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό.

Υπολογισμός του δυναμικού

Έστω

$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k} = \nabla\varphi = \varphi_x\,\mathbf{i} + \varphi_y\,\mathbf{j} + \varphi_z\,\mathbf{k},$$

τότε σύμφωνα με τη (2) είναι

$$\varphi_x = 3\,x^2 z, \quad \varphi_y = z^2 \quad \text{και} \quad \varphi_z = x^3 + 2\,y\,z.$$

Ολοκληρώνοντας τις παραπάνω σχέσεις ως προς x, y και z προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi_x\,dx + \varphi_y\,dy + \varphi_z\,dz \\ &= 3\,x^2 z\,dx + z^2\,dy + \left(x^3 + 2\,y\,z\right)\,dz \\ &= d_x\left(x^3 z\right) + d_y\left(y\,z^2\right) + d_z\left(x^3 z + y^2 z\right) \\ &= d_x(x^3 z + \overbrace{y^2 z}^{d_x(y^2 z)=0}) + d_y(y\,z^2 + \overbrace{x^3 z}^{d_y(x^3 z)=0}) + d_z\left(x^3 z + y^2 z\right) \\ &= d\left(x^3 z + y^2 z\right). \end{aligned}$$

Άρα το δυναμικό του πεδίου $\mathbf{F}$ είναι

$$\phi(x, y, z) = x^3 z + y^2 z + c,$$

όταν c σταθερά

Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 20.1.4 - 1 και τον τύπο $(20.1.4-2)$ έχουμε

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} = \int_{A(-1,1,2)}^{B(1,2,4)} d\,\varphi = \varphi\,(1,2,4) - \varphi\,(-1,1,2) = 6.$$

■

Ασκήσεις

1. Αφού πρώτα δειχθεί ότι τα παρακάτω πεδία είναι συντηρούμενα, στη συνέχεια να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r},$$

όταν το C είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB και $\mathbf{F}$:

i) $y^4 z^2\,\mathbf{i} + 4xy^3 z^2\,\mathbf{j} + 2xy^4 z\,\mathbf{k}$ από το σημείο $A(-1,2,4)$ στο $B(3,2,2)$,

ii) $(y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})\,e^{xy}$ από το $A(1,0)$ στο $B(2,2)$,

iii) $\left(4xy - 3x^2z^2\right)\,\mathbf{i} + 2x^2\,\mathbf{j} - 2x^3z\,\mathbf{k}$ από το $A(0,1,1)$ στο $B(2,2,4)$,

iv) $(2x\cos y + z\sin y)\,\mathbf{i} + \left(xz\cos y - x^2\sin y\right)\,\mathbf{j} + x\sin y\,\mathbf{k}$ από το $(1,\pi,3)$ στο $(-1,0,1)$,

v) $\left(y^2z^3\cos x - 4x^3z\right)\,\mathbf{i} + 2yz^3\sin x\,\mathbf{j} + \left(3y^2z^2\sin x - x^4\right)\,\mathbf{k}$ από το $(\pi/2,1,1)$ στο $(\pi,3,3)$.

2. Να προσδιοριστεί το δυναμικό των πεδίων:

i) $\mathbf{E} = r\,\mathbf{r}$ *ii)* $\mathbf{E} = r^2\,\mathbf{r}$,

όταν $\mathbf{r}$ διάνυσμα θέσης. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_C \mathbf{E}\cdot d\,\mathbf{r},$$

όταν C το άνω τμήμα της περιφέρειας $x^2+y^2=4$.

Απαντήσεις

1. Το αντίστοιχο δυναμικό ϕ είναι:
(i) xy^4z^2, (ii) e^{xy} (αρχικά $P = ye^{xy}$, $Q = xe^{xy}$, $R = 0$), (iii) $2x^2y - x^3z^2$,
(iv) $x^2\cos y + xz\sin y$, (v) $y^2z^3\sin x - x^4z$.
2. Είναι $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, οπότε $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Τότε:
(i) $\phi_x = x\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\phi_y = y\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ και $\phi_z = z\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, οπότε τελικά $\phi(x,y,z) = \frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος έχουμε ως δρόμο ολοκλήρωσης το άνω μέρος της περιφέρειας ακτίνας $R=2$ από το σημείο $A(2,0)$ στο $B(-2,0)$. Επειδή $z=0$, πρέπει $\phi(x,y) = \frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2}$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 20.1.4 - 1 και τον τύπο $(20.1.4-2)$ έχουμε

$$I = \int_C \mathbf{E}\cdot d\,\mathbf{r} = \int_{A(2,0)}^{B(-2,0)} d\,\varphi = \varphi\,(2,0) - \varphi\,(-2,0) = 0.$$

(ii) $\phi_x = x\left(x^2+y^2+z^2\right)$ κ.λπ., οπότε τελικά

$$\phi = \frac{1}{4}\left(x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2\right).$$

Για το ολοκλήρωμα είναι όμοια $z=0$, οπότε $\phi = \frac{1}{4}\left(x^4+y^4+2x^2y^2\right) = \frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)^2$ με $I=0$.

20.1.5 Ορισμός σε βαθμωτό πεδίο

Έστω C μία καμπύλη με παραμετρική εξίσωση

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}, \quad \text{όταν} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

όπου οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ είναι παραγωγίσιμες για κάθε $t \in (\alpha, \beta)$.

Είναι ήδη γνωστό από το Μάθημα *Διανυσματικές Συναρτήσεις - Γεωμετρική σημασία παραγώγου* ότι:

- η παράγωγος $\mathbf{r}'(t)$ ορίζει τη διεύθυνση της εφαπτομένης της C, και
- το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{T}(t)$ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}, \quad \text{όταν} \quad \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}. \qquad (20.1.5\text{ - }1)$$

Επομένως, αν η παράμετρος t παριστάνει τον χρόνο, είναι προφανές ότι η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}'(t)$ θα παριστάνει το διάνυσμα της ταχύτητας, έστω $\mathbf{v}(t)$, οπότε

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$$

σε κάθε σημείο της C και θα έχει μέτρο

$$v(t) = \left|\mathbf{r}'(t)\right| = |\mathbf{v}(t)|\,.$$

Έστω $s = s(t)$ το μήκος του τόξου επί της C που διαγράφεται σε χρόνο t. Τότε σύμφωνα και με τους παραπάνω τύπους είναι:

$$\frac{ds(t)}{dt} = v(t) = \left|\mathbf{r}'(t)\right|, \quad \text{οπότε} \quad ds(t) = v(t)\,dt = \left|\mathbf{r}'(t)\right|\,dt. \qquad (20.1.5\text{ - }2)$$

Η $(20.1.5-1)$ σύμφωνα με την $(20.1.5-2)$ διαδοχικά γράφεται

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|}\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \\ &= \frac{1}{v(t)}\frac{d\,\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{1}{\dfrac{ds(t)}{dt}}\frac{d\,\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d\,\mathbf{r}(t)}{ds(t)}\,,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\mathbf{T} = \frac{d\,\mathbf{r}(t)}{ds(t)}\,.$$

Άρα

$$d\,\mathbf{r} = \mathbf{T}\,ds. \qquad (20.1.5\text{ - }3)$$

Επομένως σύμφωνα με την $(20.1.5-3)$ το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r}$ τελικά γράφεται

$$\int\limits_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} = \int\limits_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int\limits_C f\,ds, \qquad (20.1.5\text{ - }4)$$

όπου η $f = \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$ λόγω του εσωτερικού γινομένου είναι **βαθμωτή συνάρτηση**.

Η $(20.1.5-4)$ δίνει μία άλλη έκφραση του επικαμπύλιου ολοκληρώματος, που αναλυτικά ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 20.1.5 - 1 (επικαμπύλιου ολοκληρώματος). *Αν η f περιγράφει ένα βαθμωτό πεδίο, που είναι ορισμένο επί μιας καμπύλης C με πεπερασμένο μήκος, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f ως προς ένα τόξο s της C, συμβολίζεται με $\int_C f ds$ και ισούται με*

$$\int\limits_C f\,ds = \int\limits_\alpha^\beta f\,[\mathbf{r}(t)]\;ds(t) = \int\limits_\alpha^\beta f\,[\mathbf{r}(t)]\,s'(t)\,dt, \qquad (20.1.5\text{ - }5)$$

όταν το τελευταίο ολοκλήρωμα υπάρχει.

Σημείωση 20.1.5 - 1

Στη βιβλιογραφία τα επικαμπύλια ολοκληρώματα που ορίζονται από ένα βαθμωτό πεδίο επί μιας καμπύλης, είναι επίσης γνωστά και ως επικαμπύλια ολοκληρώματα του 1ου είδους.

20.1.6 Εφαρμογές

Οι σημαντικότερες εφαρμογές ανάλογα με τη φυσική σημασία της βαθμωτής συνάρτησης f δίνονται στη συνέχεια.

- $f = 1$

  Τότε το ολοκλήρωμα $\int_C ds$ παριστάνει το μήκος της καμπύλης C.

  Επειδή σύμφωνα με τον τύπο $(20.1.5-5)$ είναι

  $$\frac{ds}{dt} = v(t) = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$$

  το **μήκος** L της C θα δίνεται από τον τύπο

  $$\begin{aligned} L &= \int_C ds = \int_\alpha^\beta s'(t)\, dt \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt. \end{aligned} \qquad (20.1.6\text{ - }1)$$

- Αν η f παριστάνει την **πυκνότητα** ρ σε κάθε σημείο της C, τότε η **ολική μάζα** M δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

  $$M = \int_C \rho\, ds = \int_\alpha^\beta \rho(t) s'(t)\, dt. \qquad (20.1.6\text{ - }2)$$

  Στην περίπτωση αυτή οι συντεταγμένες $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ του **κέντρου μάζας** είναι

  $$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{M}\int_C x\, \rho\, ds = \frac{1}{M}\int_\alpha^\beta x(t)\, \rho(t)\, s'(t)\, dt, \\ \overline{y} &= \frac{1}{M}\int_C y\, \rho\, ds = \frac{1}{M}\int_\alpha^\beta y(t)\, \rho(t)\, s'(t)\, dt, \quad \text{και} \\ \overline{z} &= \frac{1}{M}\int_C z\, \rho\, ds = \frac{1}{M}\int_\alpha^\beta z(t)\, \rho(t)\, s'(t)\, dt, \end{aligned} \qquad (20.1.6\text{ - }3)$$

  ενώ η **ροπή αδράνειας** I_l ως προς άξονα l ισούται με

  $$\mathrm{I}_l = \int_C \delta^2 \rho\, ds = \int_\alpha^\beta \delta^2(t)\, \rho(t) s'(t)\, dt, \qquad (20.1.6\text{ - }4)$$

όπου με $\delta = \delta(x, y, z)$ συμβολίζεται η απόσταση του τυχόντος σημείου της C από τον l.

Παράδειγμα 20.1.6 - 1

Έστω C η σπείρα ενός ελατηρίου με σχήμα ένα τόξο της κυκλικής έλικας με παραμετρική εξίσωση (Σχ. 20.1.6 - 1a)

$$\mathbf{r}(t) = \alpha\cos t\,\mathbf{i} + \alpha\sin t\,\mathbf{j} + \beta t\,\mathbf{k}, \quad \text{όταν } \alpha > 0 \text{ και } t \in [0, 2\pi].$$

Αν η πυκνότητα του ελατηρίου είναι

$$\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

ζητείται να υπολογιστεί το μήκος, η μάζα και οι συντεταγμένες $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ του κέντρου μάζας του ελατηρίου.

Λύση. Έχουμε

$$x(t) = \alpha\cos t, \quad y(t) = \alpha\sin t \quad \text{και} \quad z(t) = \beta t,$$

οπότε

$$x'(t) = -\alpha\sin t, \quad y'(t) = \alpha\cos t \quad \text{και} \quad z'(t) = \beta.$$

Τότε

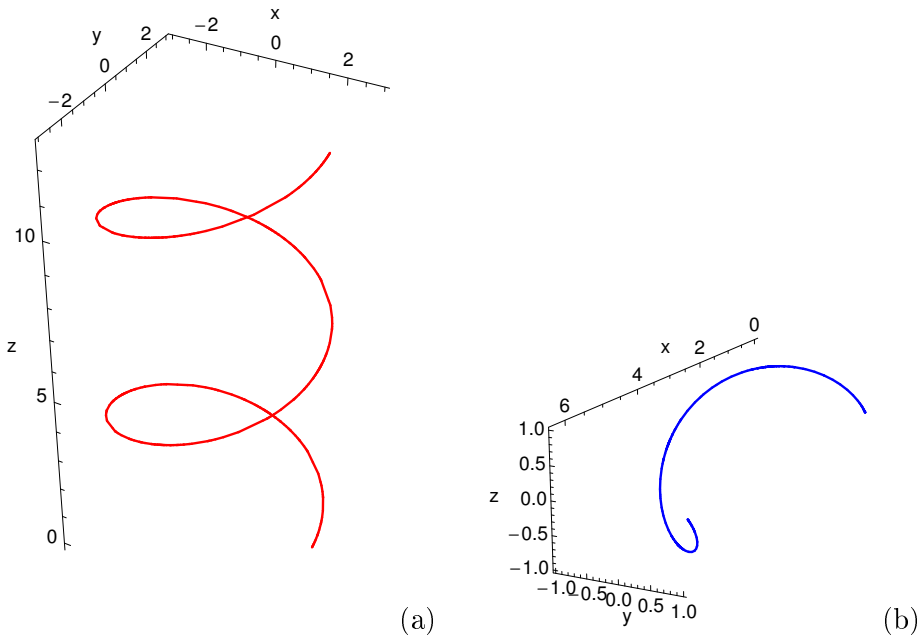
$$s'(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

Σύμφωνα με τον τύπο $(20.1.6 - 1)$ το μήκος L του ελατηρίου είναι

$$\begin{aligned} L &= \int_C ds = \int_\alpha^\beta s'(t)\,d\,t = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,d\,t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \int_0^{2\pi} d\,t = 2\pi\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \end{aligned}$$

Επειδή $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ είναι

$$\begin{aligned} \rho\left[\mathbf{r}(t)\right] &= \rho(x(t), y(t), z(t)) = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) \\ &= \alpha^2\cos^2 t + \alpha^2\sin^2 t + \beta^2 t^2 \\ &= \alpha^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) + \beta^2 t^2 = \alpha^2 + \beta^2 t^2. \end{aligned}$$



Σχήμα 20.1.6 - 1: Η καμπύλη C σε: (a) Παράδειγμα 20.1.6 - 1, όταν $\alpha = 3$, $\beta = 1$ και $t \in [0, 4\pi]$, (b) Άσκηση 1 (i), όταν $\alpha = 3$, $\beta = 1$ και $t \in [0, 2\pi]$.

Επομένως η ολική μάζα M σύμφωνα με την $(20.1.6-2)$ είναι

$$\begin{aligned} M &= \int_C \rho\, ds = \int_0^{2\pi} \rho\left[\mathbf{r}(t)\right] s'(t)\, d\, t = \int_0^{2\pi} \rho(t)\, s'(t)\, d\, t \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\alpha^2+\beta^2 t^2\right)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, d\, t \\ &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\int_0^{2\pi} \left(\alpha^2+\beta^2 t^2\right)\, d\, t \\ &= \frac{2\pi}{3}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(3\alpha^2+4\pi^2\beta^2\right). \end{aligned}$$

Επίσης από τους τύπους $(20.1.6-3)$ διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} \int_C x\,\rho\, ds &= a\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\left(a^2+b^2t^2\right)\cos t\, d\, t \\ &= a\sqrt{a^2+b^2}\left\{2b^2 t\cos t + \left[a^2+b^2\left(t^2-2\right)\right]\sin t\right\}\Big|_0^{2\pi} \\ &= 4ab^2\,\pi\sqrt{a^2+b^2}, \\ \int_C y\,\rho\, ds &= a\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\left(a^2+b^2t^2\right)\sin t\, d\, t \\ &= a\sqrt{a^2+b^2}\left\{2b^2 t\sin t - \left[a^2+b^2\left(t^2-2\right)\right]\cos t\right\}\Big|_0^{2\pi} \\ &= -4ab^2\,\pi^2\sqrt{a^2+b^2}, \quad \text{και} \\ \int_C z\,\rho\, ds &= a\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi} t\left(a^2+b^2t^2\right)\, d\, t \\ &= b\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a^2t^2}{2}+\frac{b^2t^4}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} \\ &= 2b\left(a^2+2b^2\pi^2\right)\,\pi^2\sqrt{a^2+b^2}, \end{aligned}$$

οπότε το κέντρο μάζας θα είναι

$$(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \left(\frac{6ab^2}{3a^2+4b^2\pi^2}, -\frac{6ab^2\pi}{3a^2+4b^2\pi^2}, \frac{3b\pi\left(a^2+2b^2\pi^2\right)}{3a^2+4b^2\pi^2} \right).$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA έγινε με το παρακάτω πρόγραμμα:

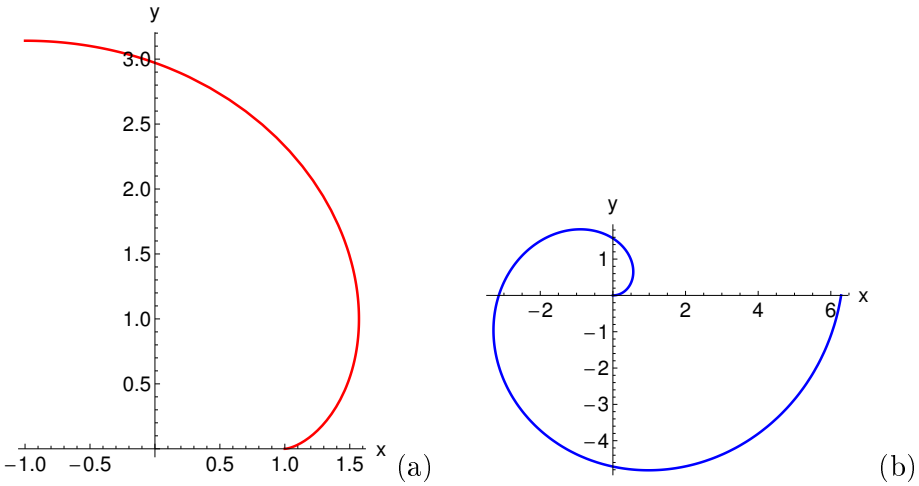
Πρόγραμμα 20.1.6 - 2 (επικαμπύλιου ολοκληρώματος 1ου είδους)

```
x[t_] := a Cos[t]
y[t_] := a Sin[t]
z[t_] := b t
f[t_] := (x[t])^2 + (y[t])^2 + (z[t])^2
Print["x'(t) = ", D[x[t], t], "  ,  ", "y'(t) = ",
 D[y[t], t], "  ,  ", "z'(t) = ", D[z[t], t]]
Print["s'(t) = ",
 Simplify[Sqrt[(D[x[t], t])^2 + (D[y[t], t])^2 + (D[z[t], t])^2]]]
Print["Length L = ",Integrate[Sqrt[(D[x[t], t])^2 + (D[y[t], t])^2
+ (D[z[t], t])^2], {t, 0,2 Pi}]]
Print["f(t) = ", Simplify[f[t]]]
M = Simplify[Integrate[f[t] Sqrt[(D[x[t], t])^2 + (D[y[t], t])^2
+ (D[z[t], t])^2], {t, 0,2 Pi}]];
Print["Mass M = ", M]
x1 = Simplify[Integrate[x[t] f[t] Sqrt[(D[x[t], t])^2 + (D[y[t], t])^2
+ (D[z[t],t])^2], {t, 0, 2 Pi}]];
y1 = Simplify[Integrate[y[t] f[t] Sqrt[(D[x[t], t])^2 + (D[y[t], t])^2
+ (D[z[t],t])^2], {t, 0, 2 Pi}]];
z1 = Simplify[Integrate[z[t] f[t] Sqrt[(D[x[t], t])^2
+ (D[y[t], t])^2 + (D[z[t],t])^2], {t, 0, 2 Pi}]];
Print["Center of mass  x = ", Simplify[x1/M], "  ,  y = ",
 Simplify[y1/M], "  ,  z = ", Simplify[z1/M]]
ParametricPlot3D[{x[t], y[t], z[t]}, {t, 0, 4 Pi},
 PlotStyle -> {Red, Thick}, Boxed -> False,
 AxesLabel -> {"x", "y  ", "z"},
 BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 16}]
```

■

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το μήκος L, η ολική μάζα M και οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας του σύρματος στις παρακάτω περιπτώσεις:



Σχήμα 20.1.6 - 2: Η καμπύλη C στην: (a) Άσκηση 1 (ii), όταν $t \in [0, \pi]$ και (b) Άσκηση 1 (iii), όταν $t \in [0, 2\pi]$.

i) $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \sin t\,\mathbf{k}$ και $t \in [0, 2\pi]$, όταν η πυκνότητα του σύρματος είναι $\rho(x, y, z) = x^2$ (Σχ. 20.1.6 - 1b).

ii) $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}$ με $t \in [0, \pi]$ και η πυκνότητα του σύρματος είναι $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ (Σχ. 20.1.6 - 2a).

iii) $\mathbf{r}(t) = t \cos t\mathbf{i} + t \sin t\mathbf{j}$ με $t \in [0, 2\pi]$ και $\rho(x, y) = x^2$ (Σχ. 20.1.6 - 2b).

2. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα των z της σπείρας του Παραδείγματος 20.1.6 - 1.

3. Να δειχθεί ότι η ροπή αδράνειας ενός ομογενούς κυκλικού σύρματος με ακτίνα R ως προς έναν άξονα που περνά από το κέντρο του είναι $MR^2/2$, όταν M η μάζα του σύρματος. Κατόπιν να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας ως προς άξονα, που απέχει από το κέντρο του απόσταση ίση με d.

Απαντήσεις

1. (i) $s'(t) = \sqrt{2}$, $L = 2\sqrt{2}\,\pi$, $\rho(t) = t^2$, $M = \frac{8\sqrt{2}\,\pi^3}{3}$, $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3}{2\pi^2}, -\frac{3}{2\pi}\right)$.
(ii) $s'(t) = t$, $L = \frac{\pi^2}{2}$, $\rho(t) = 1 + t^2$, $M = \frac{1}{4}\pi^2\left(1 + 2\pi^2\right)$,

$(\overline{x},\overline{y}) = \left(\frac{4\left(54-14\pi^2+\pi^4\right)}{\pi^2\left(\pi^2+2\right)}, \frac{4\left(5\pi^2-27\right)}{\pi\left(\pi^2+2\right)}\right)$.
(iii) $s'(t) = \sqrt{1+t^2}$, $L = \pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\sinh^{-1}2\pi$, $\rho(t) = t^2\cos^2 t$. Οι υπόλοιποι υπολογισμοί των ολοκληρωμάτων γίνονται μόνον προσεγγιστικά, όπως με ανάπτυγμα κατά Maclaurin ή με προσεγγιστικές μεθόδους (βλέπε βιβλιογραφία). $M = 214.42$ κ.λπ.
Ανάλογα οι Ασκήσεις **2** και **3**.

20.1.7 Σχέση επικαμπύλιου και διπλού ολοκληρώματος

Στην παράγραφο αυτή θα εξεταστεί η σχέση που υπάρχει μεταξύ του επικαμπύλιου και του διπλού ολοκληρώματος.

Σχετικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:[7]

Θεώρημα 20.1.7 - 1 (Green στο επίπεδο). *Έστω D ένας κλειστός τόπος του επιπέδου που περικλείεται από μία κλειστή και απλή καμπύλη C του xy-επιπέδου (Σχ. 20.1.7 - 1). Τότε, αν P και Q είναι συνεχείς συναρτήσεις στο D, ισχύει*

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \qquad (20.1.7 - 1)$$

όταν η καμπύλη C διαγράφεται κατά τη θετική φορά.

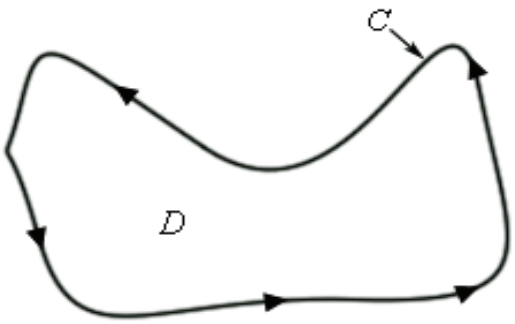
Σημειώσεις 20.1.7 - 1

i) Υπενθυμίζεται ότι ως θετική φορά διαγραφής ή διαφορετικά δεξιόστροφη φορά θεωρείται αυτή που είναι αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

ii) Μία καμπύλη C είναι κλειστή, όταν η αρχή και το τέλος της συμπίπτουν.

iii) Με τον όρο απλή καμπύλη εννοείται ότι η διαγραφή της γίνεται με συνεχή τρόπο και ότι η C καλύπτει πλήρως τον τόπο D. Το θεώρημα γενικεύεται και αποδεικνύεται στη βιβλιογραφία ότι ισχύει και για άλλες μορφές της καμπύλης C και του τόπου D.

[7] Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, και απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 4.



Σχήμα 20.1.7 - 1: Θεώρημα του Green.

Έστω τώρα ότι στο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$, οι συνιστώσες του P και Q επαληθεύουν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 20.1.7 - 1. Τότε έχοντας υπόψη τον τύπο $(20.1.2-10)$, οπότε ο τύπος $(20.1.7-1)$ γράφεται

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} &= \oint_C P\,dx + Q\,dy \\ &= \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy. \qquad (20.1.7\text{ - }2) \end{aligned}$$

Ο τύπος $(20.1.7-2)$ θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια για τους υπολογισμούς.

Παράδειγμα 20.1.7 - 1

Με το Θεώρημα του Green να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\oint_C F\cdot d\,r$, όταν

$$\mathbf{F} = \left(5 - xy - y^2\right)\,\mathbf{i} + \left(x^2 - 2xy\right)\,\mathbf{j}$$

και C το τετράγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,0)$ και $(1,1)$, που διαγράφεται δεξιόστροφα.

Λύση. Από την έκφραση του διανυσματικού πεδίου έχουμε ότι, αν

$$F = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} = \left(5 - xy - y^2\right)\,i + \left(x^2 - 2xy\right)\,j,$$

τότε

$$P = 5 - xy - y^2 \quad \text{και} \quad Q = x^2 - 2xy. \tag{1}$$

Η καμπύλη C προφανώς πληροί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 20.1.7 - 1, ενώ το τετράγωνο D που ορίζει, περιγράφεται ως εξής:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \right\}.$$

Επομένως στο διπλό ολοκλήρωμα έχουμε την ολοκληρωτέα συνάρτηση $Q_x - P_y$ να ορίζεται σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο[8] από τους τύπους (20.1.7−2) και (1) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\oint_C F \cdot d\,r &= \iint_D (Q_x - P_y)\, dx\, dy \\
&= \iint_D [(2x - 2y) - (-x - 2y)]\, dx\, dy \\
&= 3 \int_0^1 \left[\int_0^1 x\, dx \right] dy = 3 \int_0^1 \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \frac{3}{2} \int_0^1 dy = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 20.1.7 - 2

Όμοια με το Θεώρημα του Green να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\oint_C xy\, dx + x^2 y^3\, dy,$$

όταν C το τρίγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(1, 2)$, που διαγράφεται δεξιόστροφα (Σχ. 20.1.7 - 2).

Λύση. Προφανώς είναι

$$P = xy \quad \text{και} \quad Q = x^2 y^3. \tag{2}$$

[8] Βλέπε Μάθημα *Πολλαπλά ολοκληρώματα* Κεφ. *Διπλά ολοκληρώματα - Μέθοδοι υπολογισμού Περίπτωση Ι.*

Όμοια η καμπύλη C πληροί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 20.1.7 - 1, ενώ το τρίγωνο D που ορίζει, σύμφωνα και με το (Σχ. 20.1.7 - 2) περιγράφεται ως εξής:

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2x \right\}.$$

Επομένως από τους τύπους $(20.1.7-1)$ και (2) προκύπτει ότι[9]

$$\begin{aligned}
\oint_C xy\,dx + x^2y^3\,dy &= \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy \\
&= \iint_D \left(2xy^3 - x\right)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^{2x} \left(2xy^3 - x\right)\,dy \right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\,xy^4 - xy \right]_{y=0}^{y=2x} dx \\
&= \int_0^1 \left(8\,x^5 - 2\,x^2\right)\,dx = \left[\frac{4}{3}\,x^6 - \frac{2}{3}\,x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

■

20.2 Επιφανειακά ολοκληρώματα

20.2.1 Παραμετρικός ορισμός επιφάνειας

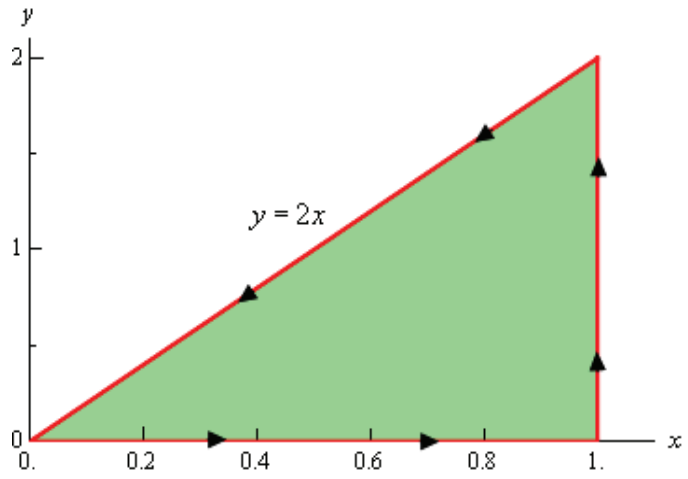
[10]Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη ότι η έννοια της καμπύλης ορίστηκε με τη βοήθεια της κίνησης ενός υλικού σημείου που έχει έναν βαθμό ελευθερίας. Με τη βοήθεια τώρα μιας ανάλογης κίνησης δίνεται ο παρακάτω ορισμός της επιφάνειας:

---

[9] Όμοια βλέπε Μάθημα *Πολλαπλά ολοκληρώματα* Κεφ. *Διπλά ολοκληρώματα - Μέθοδοι υπολογισμού Περίπτωση ΙΙ.*

[10] Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 3, 4, 5, 6] και στη μαθηματική βάση δεδομένων

http://en.wikipedia.org/wiki/Surface_integral



Σχήμα 20.1.7 - 2: Παράδειγμα 20.1.7 - 2.

Ορισμός 20.2.1 - 1 (επιφάνειας). *Ορίζεται ως επιφάνεια ο γεωμετρικός τόπος των θέσεων ενός υλικού σημείου, που κινείται στον χώρο και έχει* **δύο** *βαθμούς ελευθερίας.*

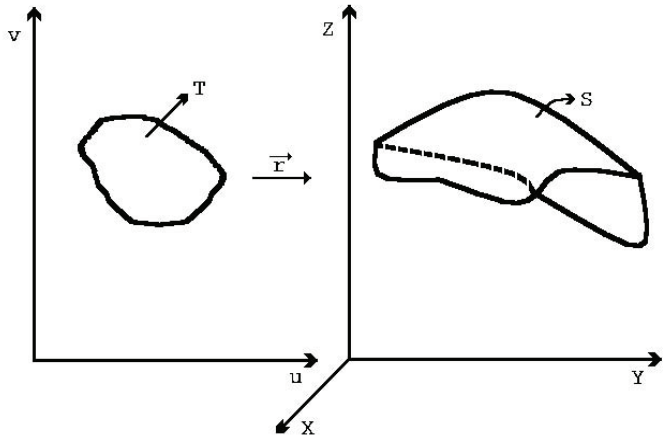
Αν λοιπόν για την παραμετρική παράσταση μιας καμπύλης απαιτείται η χρήση μιας παραμέτρου, τώρα για την παραμετρική παράσταση μιας επιφάνειας (Σχ. 20.2.1 - 1) απαιτούνται δύο παράμετροι, που συνήθως συμβολίζονται με u και v. Επομένως, αν $M(x, y, z)$ είναι ένα τυχόν σημείο μιας επιφάνειας S, οι καρτεσιανές συντεταγμένες x, y και z θα εκφράζονται συναρτήσει των παραμέτρων u και v ως εξής:

$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v) \quad \text{και} \quad z = Z(u, v), \tag{20.2.1 - 1}$$

οπότε για το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ του σημείου M πρέπει

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = X(u, v)\,\mathbf{i} + Y(u, v)\,\mathbf{j} + Z(u, v)\,\mathbf{k}, \tag{20.2.1 - 2}$$

όταν $(u, v) \in T$ με T έναν τόπο του χώρου των δύο διαστάσεων στον οποίο μεταβάλλονται οι παράμετροι u και v, αντίστοιχα. Η $(20.2.1 - 2)$ ορίζει τότε την **παραμετρική εξίσωση** των σημείων της επιφάνειας S.



Σχήμα 20.2.1 - 1: παραμετρική παράσταση επιφάνειας.

Παράδειγμα 20.2.1 - 1

Ζητείται η παραμετρική εξίσωση των σημείων της επιφάνειας της σφαίρας με εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Λύση. Είναι γνωστό ότι οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) ορίζονται από τις σχέσεις (Σχ. 20.2.1 - 2)

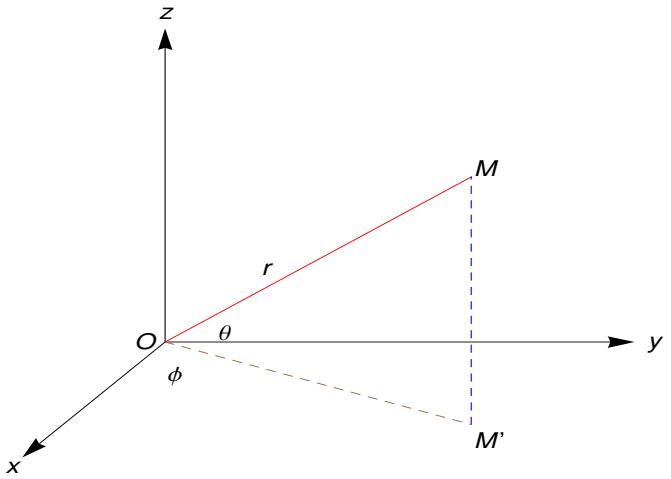
$$x = r\cos\theta\cos\phi, \quad y = r\cos\theta\sin\phi, \quad z = r\sin\theta$$
$$\text{με } r \geq 0 \quad \text{και} \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{20.2.1 - 3}$$

Επομένως αντιστοιχώντας τους τύπους (20.2.1−3) με τους τύπους (20.2.1−1), δηλαδή

$$\phi \to u \quad \text{και} \quad \theta \to v$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} x &= R\cos u\cos v = X(u,v), \\ y &= R\sin u\cos v = Y(u,v), \qquad \text{όταν} \quad (u,v) \in [0,2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \\ z &= R\sin v = Z(u,v), \end{aligned}$$



Σχήμα 20.2.1 - 2: οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ).

Ο τόπος που μεταβάλλονται οι παράμετροι u και v είναι στην περίπτωση αυτή το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ (Σχ. 20.2.1 - 3).

Τότε η παραμετρική εξίσωση της επιφάνειας της σφαίρας θα είναι

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = R\cos u \cos v\,\mathbf{i} + R\sin u \cos v\,\mathbf{j} + R\sin v\,\mathbf{k}. \qquad (20.2.1 - 4)$$

■

Σημείωση **20.2.1 - 1**

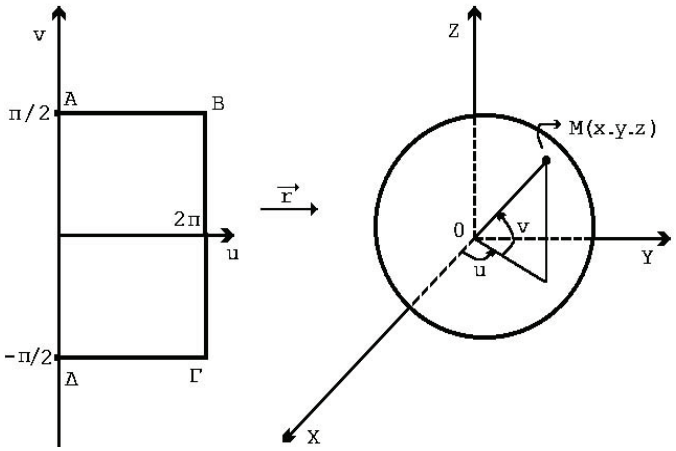
Στην περίπτωση που ζητείται η παραμετρική εξίσωση των σημείων του άνω ημισφαιρίου, χρησιμοποιείται όμοια ο τύπος $(20.2.1 - 4)$ με

$$(u, v) \in [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

20.2.2 Θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο

Έστω μία επιφάνεια S με παραμετρική εξίσωση της μορφής $(20.2.1 - 2)$, δηλαδή

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = X(u, v)\,\mathbf{i} + Y(u, v)\,\mathbf{j} + Z(u, v)\,\mathbf{k}.$$



Σχήμα 20.2.1 - 3: παραμετρική παράσταση σφαίρας.

Υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις X, Y και Z έχουν τουλάχιστον 1ης τάξης μερικές παραγώγους ως προς u και v, από την παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial Z}{\partial u}\,\mathbf{k},$$

ή

$$\mathbf{r}_u = X_u\,\mathbf{i} + Y_u\,\mathbf{j} + Z_u\,\mathbf{k}.$$

Τότε σύμφωνα με τη γεωμετρική σημασία της παραγώγου το διάνυσμα $\mathbf{r}_u$ είναι **κάθετο** στο $\mathbf{r}$ στο σημείο M και ορίζει το διάνυσμα της **ταχύτητας** κατά την u-καμπύλη.

Όμοια υπολογίζεται το

$$\mathbf{r}_v = X_v\,\mathbf{i} + Y_v\,\mathbf{j} + Z_v\,\mathbf{k},$$

που είναι επίσης **κάθετο** στο $\mathbf{r}$ στο σημείο M και ορίζει το διάνυσμα ταχύτητας κατά την v-καμπύλη.

Έστω τώρα το **εξωτερικό γινόμενο**

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \qquad (20.2.2 - 1)$$

που κατά τα γνωστά,[11] όταν

$$\mathbf{w} \neq \mathbf{0},$$

δηλαδή τα διανύσματα

$$\mathbf{r}_u \quad \text{και} \quad \mathbf{r}_v$$

δεν είναι συγγραμμικά, οπότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε το εξωτερικό γινόμενο

- ορίζει ένα διάνυσμα $\mathbf{w}$ κάθετο στα διανύσματα $\mathbf{r}_u$ και $\mathbf{r}_v$, τέτοιο ώστε μαζί με αυτά να αποτελεί δεξιόστροφο σύστημα, και
- το μέτρο του $|\mathbf{w}|$ ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζεται με πλευρές τα μέτρα των διανυσμάτων $\mathbf{r}_u$ και $\mathbf{r}_v$.

Στην $(20.2.2-1)$ το $\mathbf{w}$ λέγεται θεμελιώδες διάνυσμα (fundamental vector), ενώ το εξωτερικό γινόμενο του 2ου μέλους θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο (fundamental vector product).

Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 20.2.2 - 1. *Αν $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ είναι το διάνυσμα θέσης τυχόντος σημείου M της επιφάνειας S, τότε το θεμελιώδες διάνυσμα είναι κάθετο σε κάθε συνεχή καμπύλη, που διέρχεται από το M.*

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 20.2.2 - 1 (εφαπτόμενο επίπεδο). *Έστω ότι $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ είναι το διάνυσμα θέσης τυχόντος σημείου M της επιφάνειας S. Τότε ορίζεται ως εφαπτόμενο επίπεδο (tangent plane) της επιφάνειας S στο σημείο της $M(u,v)$ και συμβολίζεται με $T(M)$, το επίπεδο που ορίζεται από τις διευθύνσεις των $\mathbf{r}_u$ και $\mathbf{r}_v$ στο M.*

Τότε το διάνυσμα που ορίζει το εξωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{w} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$$

[11] Βλέπε Μάθημα *Ανώτερα Μαθηματικά - Διανύσματα.*

θα είναι **κάθετο** στο επίπεδο $T(M)$ και θα έχει αντίστοιχο **μοναδιαίο διάνυσμα** (unit normal vector) το

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\,. \qquad (20.2.2\text{ - }2)$$

Έστω τώρα ότι η παράμετρος u είναι σταθερή και η παράμετρος v παριστάνει τον χρόνο. Τότε

- το
$$|\mathbf{r}_v|$$
παριστάνει την **επιτρόχια ταχύτητα**, ενώ
- το γινόμενο
$$|\mathbf{r}_v|\,\Delta v$$
το **διανυθέν διάστημα** κατά τη v-καμπύλη.
- Όμοια το
$$|\mathbf{r}_u|\,\Delta u$$
θα παριστάνει το διανυθέν διάστημα κατά την u-καμπύλη.

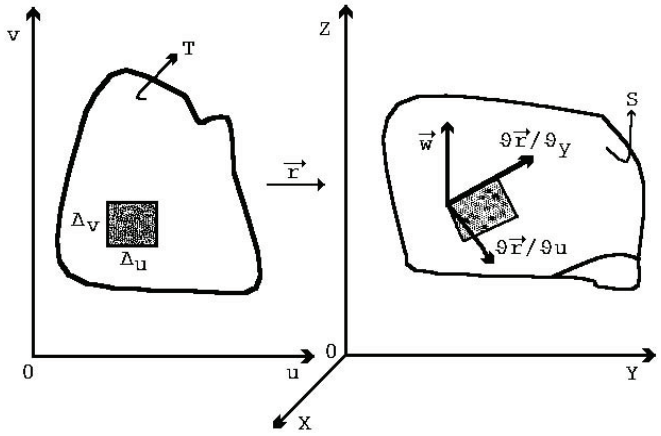
Σύμφωνα και με το Σχ. 20.2.2 - 1 πρέπει στην περίπτωση αυτή το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις Δu και Δv να απεικονίζεται μέσω της $\mathbf{r}$ σε ένα παραλληλόγραμμο - με την ευρεία έννοια του όρου - επί της επιφάνειας S, που ορίζεται από τα διανύσματα

$$\mathbf{r}_u\,\Delta u \quad \text{και} \quad \mathbf{r}_v\,\Delta v$$

και το οποίο έχει εμβαδόν

$$\Delta S = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\;\Delta u\,\Delta v. \qquad (20.2.2\text{ - }3)$$

Το ΔS είναι δυνατόν να θεωρηθεί τότε ως το **στοιχειώδες εμβαδόν** της επιφάνειας S.



Σχήμα 20.2.2 - 1: το θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο $\mathbf{w}$ και αντίστοιχο θεμελιώδες εμβαδόν.

Παράδειγμα 20.2.2 - 1

Ζητείται το θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο της επιφάνειας με διανυσματική εξίσωση (Σχ. 20.2.2 - 2a)

$$\mathbf{r}(u,v) = (u+v)\,\mathbf{i} + (u-v)\,\mathbf{j} + v^2\,\mathbf{k}.$$

Λύση. Είναι

$$X(u,v) = u+v, \quad Y(u,v) = u-v \quad \text{και} \quad Z(u,v) = v^2.$$

Τότε

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \text{και} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2v\,\mathbf{k},$$

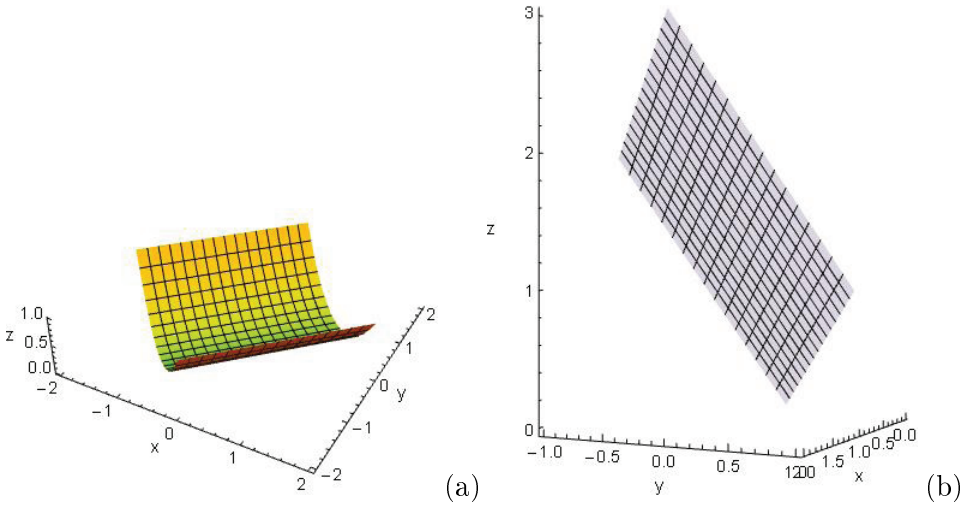
οπότε

$$\mathbf{w} = 2v\,\mathbf{i} - 2v\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}.$$

■

Άσκηση

Να υπολογιστεί το θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο των παρακάτω επιφανειών με παραμετρικές εξισώσεις:

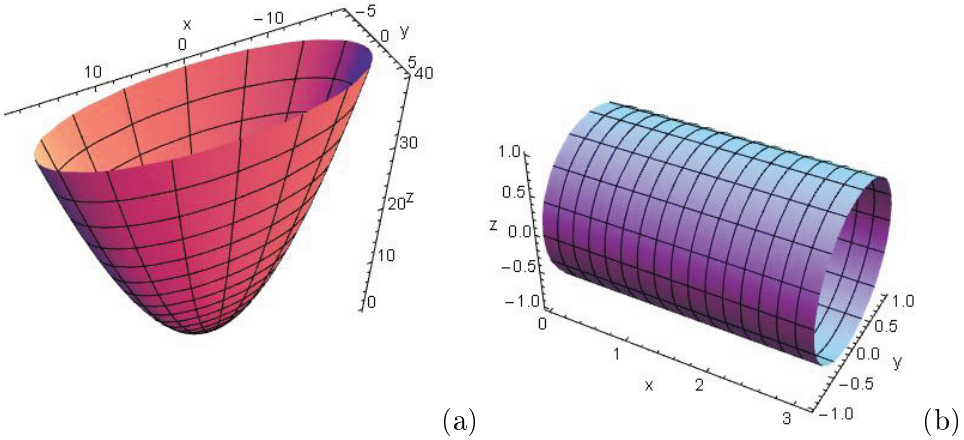


Σχήμα 20.2.2 - 2: Η επιφάνεια S στο: (a) Παράδειγμα 20.2.2 - 1 και (b) στην Άσκηση (i), όταν $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = 1$, $b_2 = -1$, και $b_3 = 2$.

i) $\mathbf{r}(u,v) = (x_0 + a_1u + b_1v)\,\mathbf{i} + (y_0 + a_2u + b_2v)\,\mathbf{j} + (z_0 + a_3u + b_3v)\,\mathbf{k}$
επίπεδο - plane - (Σχ. 20.2.2 - 2b).

ii) $\mathbf{r}(u,v) = au\cos v\,\mathbf{i} + bu\sin v\,\mathbf{j} + u^2\,\mathbf{k}$
ελλειπτικό παραβολοειδές - elliptic paraboloid - (Σχ. 20.2.2 - 3a), ενώ το αντίστοιχο **υπερβολικό παραβολοειδές** - elliptic paraboloid $\mathbf{r}(u,v) = a(u+v)\,\mathbf{i} \pm bv\,\mathbf{j} + \left(u^2 + 2uv\right)\,\mathbf{k}$.

iii) $\mathbf{r}(u,v) = u\,\mathbf{i} + a\sin v\,\mathbf{j} + a\cos v\,\mathbf{k}$
κυκλικός κύλινδρος (cylinder) με βάση στο yz-επίπεδο ακτίνας a (Σχ. 20.2.2 - 3b). Ο αντίστοιχος κυκλικός κύλινδρος με βάση στο xy-επίπεδο ακτίνας a έχει παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(u,v) = a\sin v\,\mathbf{i} + a\cos v\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k}$, ενώ ο **ελλειπτικός κύλινδρος** με βάση στο xy-επίπεδο και ημιάξονες a, b την $\mathbf{r}(u,v) = a\sin v\,\mathbf{i} + b\cos v\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k}$



(a) (b)

Σχήμα 20.2.2 - 3: Η επιφάνεια S στην: (a) Άσκηση (ii), όταν $a3$, $b = 1$ και (b) Άσκηση (iii), όταν $a = 1$.

iv) $\mathbf{r}(u, v) = R\cos v\cos u\,\mathbf{i} + R\sin u\cos v\,\mathbf{j} + R\sin v\,\mathbf{k}$
σφαίρα (sphere) ακτίνας R - (Σχ. 20.2.2 - 4a),

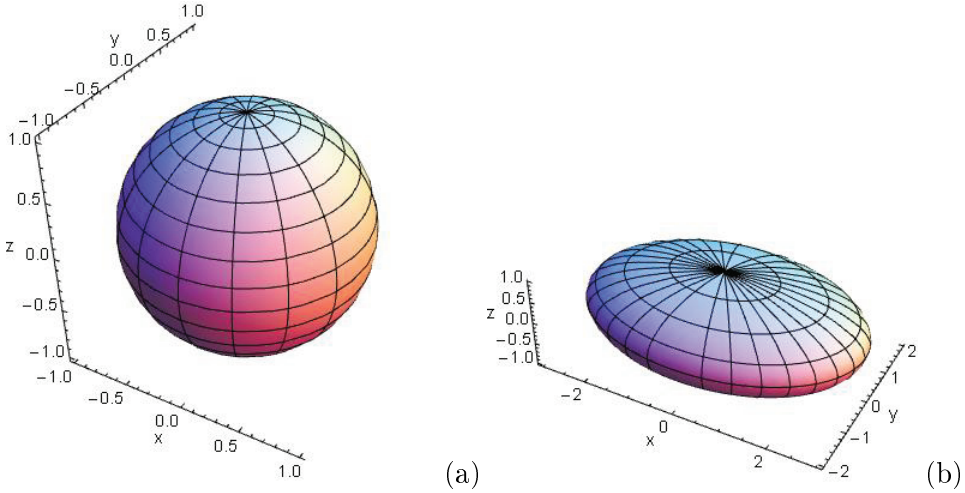
v) $\mathbf{r}(u, v) = a\sin u\cos v\,\mathbf{i} + b\sin u\sin v\,\mathbf{j} + c\cos u\,\mathbf{k}$
ελλειψοειδές -ellipsoid - (Σχ. 20.2.2 - 4b).

Η εντολή υπολογισμού του θεμελιώδους διανυσματικού γινομένου της Άσκησης (v) με το MATHEMATICA είναι:

```
X[u_, v_] := a Sin[u] Cos[v]
Y[u_, v_] := b Sin[u] Sin[v]
Z[u_, v_] := c  Cos[u]
Ru = {D[X[u, v], u], D[Y[u, v], u], D[Z[u, v], u]}
Rv = {D[X[u, v], v], D[Y[u, v], v], D[Z[u, v], v]}
w = Simplify[Cross[Ru, Rv]]
|w| = FullSimplify[Sqrt[vct.vct]]
```

ενώ του αντίστοιχου τριδιάστατου γραφικού

```
a = 3; b = 2; c = 1;
ParametricPlot3D[{X[u, v], Y[u, v], Z[u, v]},
{u, 0,2 Pi}, {v, -Pi/2, Pi/2}, Boxed -> False,
  AxesLabel -> {"x", "y  ", "z   "},
  PlotStyle -> {LightYellow, Thick},
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14}]
```



Σχήμα 20.2.2 - 4: Η επιφάνεια S στην: (a) Άσκηση (iv), όταν $R = 1$ και (b) Άσκηση (v), όταν $a = 2$, $b = 2$ και $c = 1$.

Απαντήσεις

(i) $\mathbf{w} = (-a_3b_2 + a_2b_3)\,\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mathbf{j} + (-a_2b_1 + a_1b_2)\,\mathbf{k}$,

(ii) $\mathbf{w} = -2bu^2\cos v\,\mathbf{i} - 2au^2\sin v\,\mathbf{j} + abu\,\mathbf{k}$, (iii) $\mathbf{w} = a\sin v\,\mathbf{j} + a\cos v\,\mathbf{k}$,

(iv) $\mathbf{w} = R^2\cos u\cos^2 v\,\mathbf{i} + R^2\sin u\cos^2\,\mathbf{j} + R^2\sin u\cos v\,\mathbf{k}$,

(v) $\mathbf{w} = bc\sin^2 u\cos v\,\mathbf{i} + ac\sin^2 u\sin v\,\mathbf{j} + ab\cos u\sin u\,\mathbf{k}$.

20.2.3 Φυσική ερμηνεία και ορισμός

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η έννοια, το επιφανειακό ολοκλήρωμα δίνεται ως ένα παράδειγμα από τη μελέτη της ροής των ρευστών.

Αν (x, y, z) είναι ένα τυχόν σημείο του ρευστού, τότε έστω $\rho = \rho(x, y, z)$ η πυκνότητα και $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$ η αντίστοιχη ταχύτητα, που θεωρείται ότι μεταβάλλονται σε κάθε σημείο του ρευστού και ορίζουν η 1η ένα βαθμωτό πεδίο (πυκνοτήτων) και η 2η ένα διανυσματικό πεδίο (ταχυτήτων).

Τότε ορίζεται το διανυσματικό πεδίο **πυκνοτήτων ροής** του ρευστού ως

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \rho(x, y, z)\mathbf{v}(x, y, z)$$

και μετρά τη μεταβολή της μάζας του ρευστού ανά μονάδα εμβαδού στο σημείο (x, y, z).

Έστω τώρα ότι ζητείται να υπολογιστεί η **ολική μάζα** του ρευστού, που διέρχεται από μία επιφάνεια S στη μονάδα του χρόνου. Υποτίθεται ότι η παραμετρική εξίσωση της S είναι της μορφής $(20.2.1-2)$, δηλαδή

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = X(u,v)\,\mathbf{i} + Y(u,v)\,\mathbf{j} + Z(u,v)\,\mathbf{k}, \quad \text{όταν} \quad (u,v) \in T \tag{20.2.3 - 1}$$

και ότι ο τόπος T έχει το σχήμα ορθογώνιου παραλληλογράμμου, όπου οι συναρτήσεις X, Y και Z παραγωγίζονται ως προς u και v αντίστοιχα.

Έστω επίσης ότι ο τόπος T έχει διαμεριστεί στα επιμέρους ορθογώνια παραλληλόγραμμα

$$T_1, \quad T_2, \quad \ldots, \quad T_\nu. \tag{20.2.3 - 2}$$

Τότε, επειδή μέσω της $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, όπως αυτή ορίζεται στην $(20.2.3-1)$, είναι

$$\mathbf{r} : T \quad \longrightarrow \quad S,$$

σύμφωνα με τις διαμερίσεις $(20.2.3-2)$ θα έχουμε

$$\mathbf{r} : T_1 \quad \to \quad S_1, \quad \mathbf{r} : T_2 \quad \to \quad S_2, \ldots, \mathbf{r} : T_\nu \quad \to \quad S_\nu,$$

δηλαδή η επιφάνεια S διαμερίζεται στις επιμέρους επιφάνειες

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_\nu$$

με αντίστοιχα εμβαδά

$$E_1, \quad E_2, \quad \ldots, \quad E_\nu.$$

Υποθέτοντας ότι η πυκνότητα ρ και η ταχύτητα $\mathbf{v}$ στην επιφάνεια S_k για κάθε $k = 1, 2, \ldots, \nu$ είναι σταθερές, ο όγκος του ρευστού που διέρχεται από την επιφάνεια S_k, θα ισούται με τον όγκο του στερεού, που έχει βάση E_k παράπλευρες ακμές παράλληλες προς το διάνυσμα $\mathbf{v}$ και ύψος $h_k = \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}$, όπου $\mathbf{n} = \mathbf{w}/|\mathbf{w}|$ το **μοναδιαίο διάνυσμα** κατά τη διεύθυνση του θεμελιώδους διανύσματος

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

και το οποίο όπως είναι ήδη γνωστό από την Παράγραφο 20.2.2 είναι **κάθετο** στην επιφάνεια S_k για κάθε $k = 1, 2, \ldots, \nu$ (Σχ. 20.2.3 - 1).

Η μάζα του ρευστού που διέρχεται από την επιφάνεια S_k στην περίπτωση αυτή είναι

$$m_k = \rho V_k = \rho\left(E_k h_k\right) = \rho E_k\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\right) = E_k\left(\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\right) = E_k\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\right)$$

για κάθε $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, \nu$ και κατά συνέπεια η ολική μάζα M ισούται με

$$M = \sum_{k=1}^{\nu} m_k = \sum_{k=1}^{\nu} E_k\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\right).$$

Έστω

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \varphi,$$

όταν λόγω του εσωτερικού γινομένου το φ είναι **βαθμωτό μέγεθος**. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(20.2.2-3)$ είναι

$$E_k = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|\Delta u_k\,\Delta v_k,$$

οπότε τελικά

$$M = \sum_{k=1}^{n}\varphi\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|\Delta u_k\,\Delta v_k. \qquad (20.2.3\text{ - }3)$$

Υποθέτοντας ότι το γινόμενο

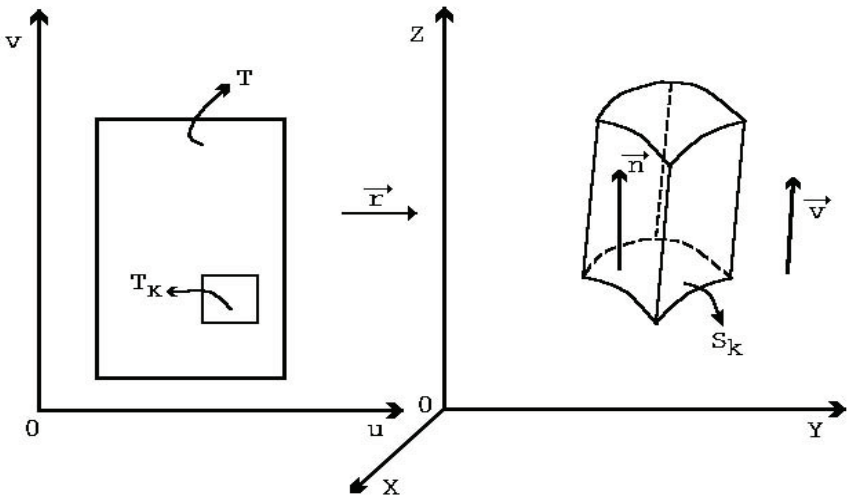
$$\varphi\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|$$

έχει **σταθερή τιμή** σε κάθε ανοικτό ορθογώνιο T_k, η ποσότητα αυτή ορίζει μία κλιμακωτή συνάρτηση, οπότε με ανάλογο συλλογισμό εκείνου του ορισμού του διπλού ολοκληρώματος,[12] όταν το ν τείνει στο άπειρο, δηλαδή ο διαμερισμός του T γίνεται, έτσι ώστε οι αντίστοιχες μέσω της $\mathbf{r}$ επιφάνειες S_k να έχουν διαγώνιο που τείνει στο μηδέν, δηλαδή **απειροστή επιφάνεια** ds, η $(20.2.3-3)$ εκφράζεται με τη μορφή ενός διπλού ολοκληρώματος με μεταβλητές u και v, δηλαδή

$$M = \iint_T \varphi\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv. \qquad (20.2.3\text{ - }4)$$

Σύμφωνα και με την $(20.2.3-4)$ έχουμε τους παρακάτω ορισμούς του επιφανειακού ολοκληρώματος.

[12] Βλέπε Μάθημα *Πολλαπλά Ολοκληρώματα - Διπλά ολοκληρώματα*.



Σχήμα 20.2.3 - 1: φυσική ερμηνεία επιφανειακού ολοκληρώματος.

Σε βαθμωτό πεδίο (1ο είδος)

Ορισμός 20.2.3 - 1. *Έστω S μία επιφάνεια με παραμετρική εξίσωση*

$$\mathbf{r}(u,v) = X(u,v)\,\mathbf{i} + Y(u,v)\,\mathbf{j} + Z(u,v)\,\mathbf{k}, \quad \text{όταν} \quad (u,v) \in T$$

και φ μία **βαθμωτή** *συνάρτηση που ορίζεται επί της S. Τότε ορίζεται ως επιφανειακό ολοκλήρωμα του 1ου είδους της φ επί της S το*

$$\iint\limits_S \varphi\, ds = \iint\limits_T \varphi\left[\mathbf{r}(u,v)\right] \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du\, dv, \qquad (20.2.3 - 5)$$

όταν το τελευταίο ολοκλήρωμα υπάρχει.

Εφαρμογές του επιφανειακού ολοκληρώματος του 1ου είδους θα δοθούν στην Παράγραφο 20.2.4, που ακολουθεί.

Σε διανυσματικό πεδίο (2ο είδος)

Ορισμός 20.2.3 - 2. *Έστω S μία επιφάνεια με παραμετρική εξίσωση*

$$\mathbf{r}(u,v) = X(u,v)\,\mathbf{i} + Y(u,v)\,\mathbf{j} + Z(u,v)\,\mathbf{k}, \quad \text{όταν} \quad (u,v) \in T$$

και $\mathbf{F}$ *μία* διανυσματική *συνάρτηση που ορίζεται επί της* S*. Τότε ορίζεται ως επιφανειακό ολοκλήρωμα του* 2*ου είδους της* $\mathbf{F}$ *επί της* S *το*

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{s} = \iint_T \mathbf{F}\left[\mathbf{r}(u,v)\right] \cdot \mathbf{w}\, du\, dv, \tag{20.2.3 - 6}$$

όταν

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

το διάνυσμα του θεμελιώδους γινομένου και το ολοκλήρωμα $(20.2.3 - 6)$ *υπάρχει.*

Σημειώσεις 20.2.3 - 1

- Στην περίπτωση που η επιφάνεια είναι κλειστή, τότε χρησιμοποιείται ο συμβολισμός
$$\oint\!\!\oint_S \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{s}. \tag{20.2.3 - 7}$$
- Το επιφανειακό ολοκλήρωμα $(20.2.3 - 6)$ εκφράζει τη ροή (flux) του πεδίου F στην επιφάνεια S (βλέπε Παράγραφο 20.2.3).

Παράδειγμα 20.2.3 - 1

Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

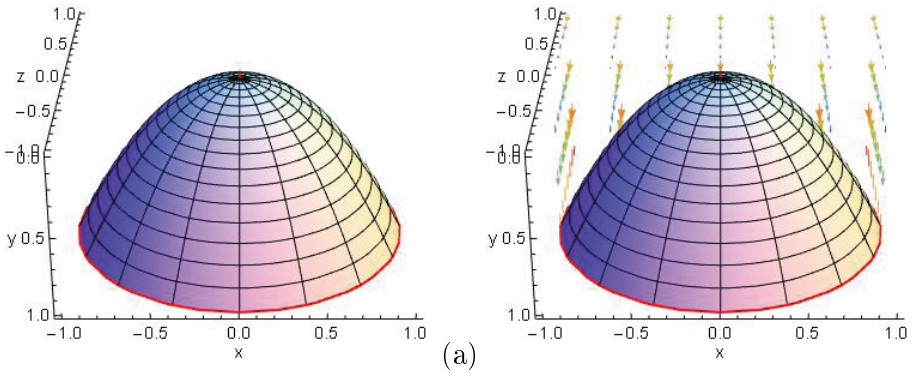
όταν S το παραβολοειδές (Σχ. 20.2.3 - 2a)

$$y = x^2 + z^2, \quad y \in [0,1] \quad \text{και} \quad x^2 + z^2 \leq 1, \quad \text{όταν} \quad y = 1$$

και F το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k} \quad (\Sigma\chi.\ 20.2.3 - 2a).$$

Λύση. Η εξίσωση του παραβολοειδούς είναι της μορφής $y = g(x,z)$, οπότε μια παραμετρική εξίσωσή του είναι δυνατόν να προκύψει από την παραμετρική



Σχήμα 20.2.3 - 2: Παράδειγμα 20.2.3 - 1: (a) η επιφάνεια S - **παραβολοειδές** με βάση (κόκκινη καμπύλη) στο xz-επίπεδο και θετική φορά διαγραφής - με παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(u,v) = v\sin u\,\mathbf{i} + v^2\,\mathbf{j} + v\cos u\,\mathbf{k}$ και (b) η ροή του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}$ στην S.

εξίσωση της $g(x,z)$, που είναι στην περίπτωση αυτή ο κυκλικός δίσκος στο xz-επίπεδο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $R = 1$.

Άρα χρησιμοποιώντας τους γνωστούς τύπους για την παραμετρική μορφή περιφέρειας (πολικές συντεταγμένες)[13] έχουμε

$$x = R\cos\theta, \quad z = R\sin\theta, \quad \text{όταν} \quad \theta \in [0,2\pi], \quad R \in [0,1].$$

Έστω

$$\theta \to u \quad \text{και} \quad R = v.$$

Επειδή η εξίσωση του παραβολοειδούς είναι $y = x^2 + z^2$, σύμφωνα με την παραπάνω παραμετρική μορφή των x, y πρέπει $y = v^2\sin^2 u + v^2\cos^2 u = v^2$, οπότε η παραμετρική εξίσωση είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u,v) &= X(u,v)\,\mathbf{i} + Y(u,v)\,\mathbf{j} + Z(u,v)\,\mathbf{k} \\ &= v\sin u\,\mathbf{i} + v^2\,\mathbf{j} + v\cos u\,\mathbf{k},\end{aligned}$$

όταν

$$T = \{(u,v) :\ u \in [0,2\pi] \quad \text{και} \quad v \in [0,1]\}.$$

[13] Βλέπε Μάθημα *Διανυσματικές Συναρτήσεις*.

Τότε

$$\begin{aligned} x &= X(u,v) = v\sin u, \quad y = Y(u,v) = v^2 \quad \text{και} \\ z &= Z(u,v) = v\cos u. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\left[\mathbf{r}(u,v)\right] &= \mathbf{F} = y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k} \\ &= v^2\,\mathbf{j} - v\cos u\,\mathbf{k} = \left\langle 0, v^2, -v\cos u\right\rangle . \quad (20.2.3\text{ - }8) \end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= v\cos u\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - v\sin u\,\mathbf{k}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \sin u\,\mathbf{i} + 2v\,\mathbf{j} + \cos u\,\mathbf{k}, \end{aligned}$$

οπότε το θεμελιώδες γινόμενο θα ισούται με

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v\cos u & 0 & -v\sin u \\ \sin u & 2v & \cos u \end{vmatrix} \\ &= 2v^2\sin u\,\mathbf{i} - v\,\mathbf{j} + 2v^2\cos u\,\mathbf{k} \\ &= \left\langle 2v^2\sin u, -v, 2v^2\cos u\right\rangle . \quad (20.2.3\text{ - }9) \end{aligned}$$

Από τις $(20.2.3-8)$ και $(20.2.3-9)$ προκύπτει τότε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\cdot\mathbf{w} &= \left\langle 0, v^2, -v\cos u\right\rangle \cdot \left\langle 2v^2\sin u, -v, 2v^2\cos u\right\rangle \\ &= -v^3\left(1 + 2\cos^2 u\right), \quad (20.2.3\text{ - }10) \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας στον τύπο $(20.2.3-6)$ διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{s} &= \iint\limits_T \mathbf{F}\left[\mathbf{r}(u,v)\right]\cdot\mathbf{w}\,du\,dv \\
&= -\int\limits_0^{2\pi}\left(1+2\cos^2 u\right)\left[\int\limits_0^1 v^3\,dv\right]du \\
&= -\int\limits_0^{2\pi}\left(1+2\cos^2 u\right)\left[\frac{v^4}{4}\,dv\right]du \\
&= -\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\left(1+2\cos^2 u\right)du \\
&= -\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\left[1+2\left(\frac{1+\cos 2u}{2}\right)\right]du \\
&= -\frac{1}{4}\left[2u+\frac{1}{2}\sin 2u\right]_0^{2\pi} = -\pi.
\end{aligned}$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA έγινε με το παρακάτω πρόγραμμα:

Πρόγραμμα 20.2.3 - 1 (επιφανειακού ολοκληρώματος 2ου είδους)

```
Z[u_, v_] := v Cos[ u]
X[u_, v_] := v Sin[u]
Y[u_, v_] := v^2
Ru = {D[X[u, v], u], D[Y[u, v], u], D[Z[u, v], u]};
Rv = {D[X[u, v], v], D[Y[u, v], v], D[Z[u, v], v]};
Print["r_u = ", Ru]; Print["r_v = ", Rv];
vct = Simplify[Cross[Ru, Rv]];
Print["Fundamental Product = ", Simplify[Cross[Ru, Rv]]]
F[u_, v_] := {0, Y[u, v], -Z[u, v]}
Print["F[r(u,v)].w = ", F[u, v].vct]
Integrate[F[u, v].vct, {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, 1}]
```

της επιφάνειας S με την εντολή:

```
S = ParametricPlot3D[{X[u, v], Y[u, v], Z[u, v]}, {u, 0, 2 Pi},
  {v,0, 1}, Boxed -> False, AxesLabel -> {"  x  ", "y  ", "z   "},
  PlotStyle -> {LightYellow, Thick},
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14},
  ViewPoint -> {0, -2, -4}, BoundaryStyle -> Directive[Red, Thick]]
```

και του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$ επί της S:

```
F = VectorPlot3D[{0, y, -z}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, 0, 1},
  AxesLabel -> {"x", "y", "z"},  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial",
  FontSize -> 14}, VectorPoints -> 7, VectorScale -> Medium,
  VectorColorFunction -> "Rainbow"]
Show[S,F]
```

Άσκηση

Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

όταν S το παραβολοειδές $z = 16 - x^2 - y^2$ ($\Sigma\chi.$ 20.2.3 - 3a) με $z \geq 0$ και $\mathbf{F}$ το διανυσματικό πεδίο

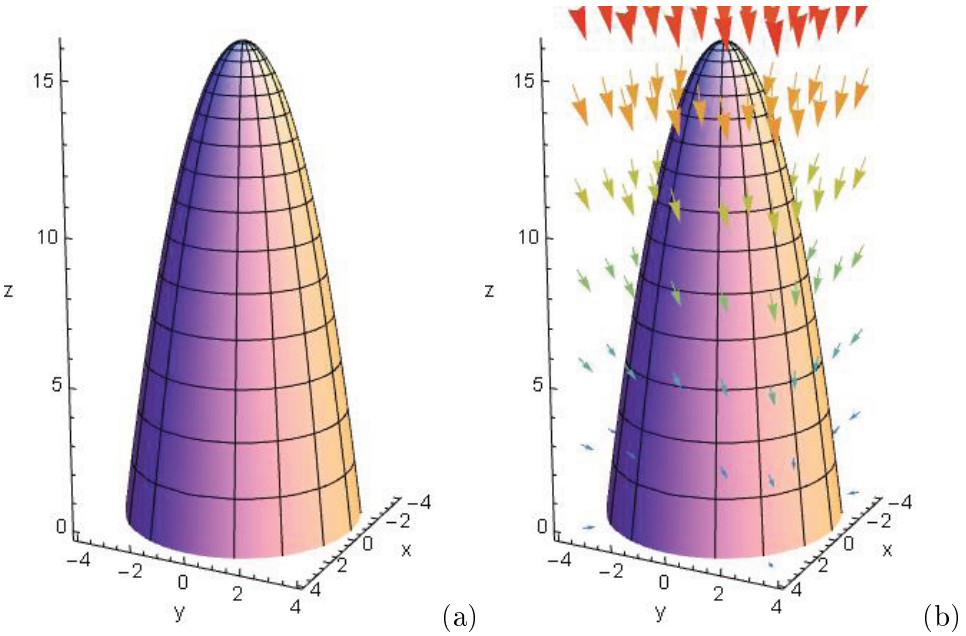
$$\mathbf{F} = y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \quad (\Sigma\chi.\ 20.2.3 - 3b)$$

με κατεύθυνση την αρνητική φορά του z-άξονα.

Απαντήσεις

Θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο $w = -2v^2 \cos u\, i - 2v^2 \sin u\, j - v\, k$, οπότε

$$\iint_T \mathbf{F}\left[\mathbf{r}(u,v)\right] \cdot w\, du\, dv = \int_0^4 \int_0^{2\pi} \left[-v\left(16 - v^2\right) - 4v^3 \cos u \sin u\right] du\, dv = -128\pi.$$



Σχήμα 20.2.3 - 3: Παράδειγμα 20.2.3 - 1: (a) η επιφάνεια S - **παραβολοειδές** με βάση στο xy-επίπεδο και θετική φορά διαγραφής - με παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(u,v) = v\cos u\,\mathbf{i} + v\sin u\,\mathbf{j} + \left(16 - v^2\right)\,\mathbf{k}$ και (b) η ροή του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ στην S.

20.2.4 Εφαρμογές επιφανειακού ολοκληρώματος

Οι σημαντικότερες ανάλογα με τη φυσική ερμηνεία της συνάρτησης φ δίνονται στη συνέχεια.

- **εμβαδόν** $\varphi = 1$
  Τότε ο τύπος $(20.2.3 - 5)$ γράφεται

$$\iint\limits_S ds = \iint\limits_T \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du dv \qquad (20.2.4 - 1)$$

  και εκφράζει το **εμβαδόν** της επιφάνειας S.

- **ολική μάζα**
  Αν η φ παριστάνει την **πυκνότητα** ρ της μάζας ανά μονάδα εμβαδού για

το υλικό ενός λεπτού κελύφους, που έχει το σχήμα της επιφανείας S, τότε η **ολική μάζα** M του κελύφους δίνεται από τον τύπο

$$M = \iint_S \rho\, ds = \iint_T \rho\left[\mathbf{r}(u,v)\right] \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\, dv. \qquad (20.2.4 - 2)$$

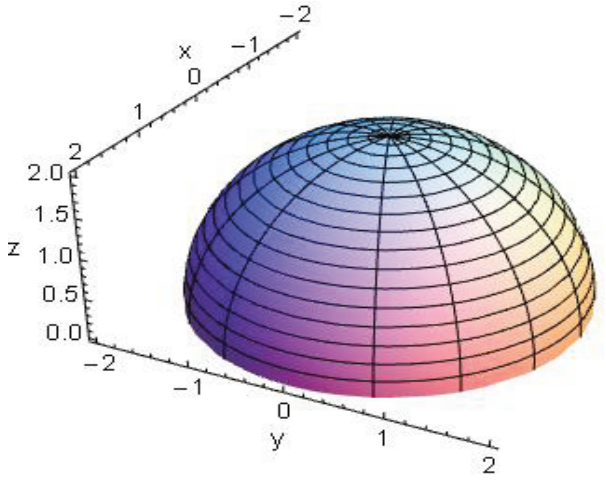
Στην περίπτωση αυτή οι συντεταγμένες $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ του κέντρου μάζας δίνονται από τους τύπους

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{M} \iint_S x\rho(x,y,z)\, ds \\ &= \frac{1}{M} \iint_T X(u,v)\rho\left[\mathbf{r}(u,v)\right] \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\, dv, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{1}{M} \iint_S y\rho(x,y,z)\, ds \\ &= \frac{1}{M} \iint_T Y(u,v)\rho\left[\mathbf{r}(u,v)\right] \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\, dv, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{z} &= \frac{1}{M} \iint_S z\rho(x,y,z)\, ds \qquad (20.2.4 - 3) \\ &= \frac{1}{M} \iint_T Z(u,v)\rho\left[\mathbf{r}(u,v)\right] \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\, dv. \end{aligned}$$

- **ροπή αδράνειας**
  Αν $d = d(x,y,z)$ είναι η κάθετη απόσταση από τον άξονα l τυχόντος σημείου $M(x,y,z)$ της επιφάνειας S, τότε η **ροπή αδράνειας** I της S



Σχήμα 20.2.4 - 1: Το άνω ημισφαίριο της σφαίρας του Παραδείγματος 20.2.4 - 1, όταν $R = 2$.

ως προς τον άξονα l είναι

$$\mathrm{I}_l = \iint_S d^2(x,y,z)\varphi(x,y,z)\,ds \qquad (20.2.4\text{ - }4)$$

$$= \iint_T d^2\left[\mathbf{r}(u,v)\right]\varphi\left[\mathbf{r}(u,v)\right]\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv.$$

Παράδειγμα 20.2.4 - 1

Ζητείται να υπολογιστεί η επιφάνεια S, η ολική μάζα M και οι συντεταγμένες $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ του κέντρου της μάζας του άνω ημισφαιρίου της σφαίρας (Σχ. 20.2.4 - 1)

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

όταν η πυκνότητα $\rho(x,y,z)=c$ σταθερά.

Λύση. Μια παραμετρική εξίσωση της σφαίρας δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{r}(u,v) = X(u,v)\,\mathbf{i}+Y(u,v)\,\mathbf{j}+Z(u,v)\,\mathbf{k}$$

$$= R\cos u\cos v\,\mathbf{i}+R\sin u\cos v\,\mathbf{j}+R\sin v\,\mathbf{k},$$

όταν $u \in [0, 2\pi]$ και $v \in [0, \pi/2]$, επειδή πρόκειται για το άνω ημισφαίριο.

Άρα

$$\begin{aligned} x &= X(u,v) = R\cos u \cos v, \\ y &= Y(u,v) = R\sin u \cos v \quad \text{και} \\ z &= R\sin v. \end{aligned} \tag{20.2.4 - 5}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= -R\sin u\cos v\,\mathbf{i} + R\cos u\cos v\,\mathbf{j} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= -R\cos u\sin v\,\mathbf{i} - R\sin u\sin v\,\mathbf{j} + R\cos v\,\mathbf{k}, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R\sin u\cos v & R\cos u\cos v & 0 \\ -R\cos u\sin v & -R\sin u\sin v & R\cos v \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} R\cos u\cos v & 0 \\ -R\sin u\sin v & R\cos v \end{vmatrix} \mathbf{i} \\ &\quad - \begin{vmatrix} -R\sin u\cos v & 0 \\ -R\sin u\sin v & R\cos v \end{vmatrix} \mathbf{j} \\ &\quad + \begin{vmatrix} -R\sin u\cos v & R\cos u\cos v \\ -R\cos u\sin v & -R\sin u\sin v \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= R^2\cos u\cos^2 v\,\mathbf{i} + R^2\sin u\cos^2 v\,\mathbf{j} + R^2\sin v\cos v\,\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
|\mathbf{w}| &= \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \\
&= R^2\sqrt{\cos^2 u \cos^4 v + \sin^2 u \cos^4 v + \sin^2 v \cos^2 v} \\
&= R^2\sqrt{\cos^4 v\left(\cos^2 u + \sin^2 u\right) + \sin^2 v \cos^2 v} \\
&= R^2\sqrt{\cos^2 v\left(\cos^2 v + \sin^2 v\right)} \\
&= R^2 \cos v. \qquad (20.2.4 \text{ - } 6)
\end{aligned}$$

Τότε το εμβαδόν E της επιφάνειας S σύμφωνα με τον τύπο $(20.2.4-1)$ είναι

$$\begin{aligned}
E(s) = \iint\limits_S ds &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2} R^2 \cos v \, du \, dv \\
&= R^2 \int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^{\pi/2} \cos v \, dv\right] du = 2\pi R^2
\end{aligned}$$

και η ολική μάζα M με τον τύπο $(20.2.4-2)$

$$M = \iint\limits_S \rho(x,y,z)\, ds = cR^2 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \cos v \, du \, dv = 2\pi R^2 c,$$

όπου $\rho(x,y,z) = c$ σταθερά.

Επειδή πρόκειται για το άνω ημισφαίριο, λόγω συμμετρίας πρέπει

$$\overline{x} = \overline{y} = 0,$$

οπότε αρκεί να υπολογιστεί το $\overline{z}$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(20.2.4-5)$ είναι

$$z = Z(u,v) = R\sin v,$$

ενώ με τον $(20.2.4-6)$

$$|\mathbf{w}| = R^2 \cos v,$$

διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \frac{1}{M}\iint\limits_S z\,\overbrace{\rho(x,y,z)}^{c\ \text{σταθερά}}\,ds = \frac{c}{M}\iint\limits_S z\,ds \\
&= \frac{c}{M}\iint\limits_T \underbrace{Z(u,v)}_{R\sin v}\overbrace{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|}^{R^2\cos v}\,du\,dv \\
&= \frac{cR^3}{M}\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^{\pi/2}\cos v\sin v\,dv\right]du = \frac{cR^3}{2M}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2v\,dv\right]du \\
&= \frac{cR^3}{2M}\int\limits_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos 2v\right]_0^{\pi/2}du = \frac{cR^3}{2M}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,du = \frac{cR^3}{2M}\int\limits_0^{2\pi}du \\
&= \frac{2\pi cR^3}{4M} = \frac{R}{2}, \quad \text{όταν} \quad M = 2\pi R^2 c.
\end{aligned}$$

Άρα

$$(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \left(0,0,\frac{R}{2}\right).$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA έγινε με το παρακάτω πρόγραμμα:

Πρόγραμμα 20.2.4 - 2 (επιφανειακού ολοκληρώματος 1ου είδους)

```
X[u_, v_] := R Cos[ u] Cos[v]
Y[u_, v_] := R Sin[u] Cos[v]
Z[u_, v_] := R Sin[v]
Ru = {D[X[u, v], u], D[Y[u, v], u], D[Z[u, v], u]}
Rv = {D[X[u, v], v], D[Y[u, v], v], D[Z[u, v], v]}
vct = Simplify[Cross[Ru, Rv]]
Print["Modulus Fundamental Product = ", Simplify[Sqrt[vct.vct]]]
f[u_, v_] := c
Print["Density = ", f[u, v]]
Print["Surface Area = ",
```

```
 Integrate[R^2 Cos[v], {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, Pi/2}]]
Print["Mass = ",
 Integrate[R^2 Cos[v] f[u, v], {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, Pi/2}]]
Print["Centre of mass z = ",
 Integrate[
   Z[u, v] R^2 Cos[v] f[u, v], {u, 0, 2 Pi}, {v, 0,
    Pi/2}]/(2 c Pi R^2)]
ParametricPlot3D[{X[u, v], Y[u, v], Z[u, v]}, {u, 0, 2 Pi}, {v, 0,
  Pi/2}, Boxed -> False, AxesLabel -> {"x  ", "y  ", "z   "},
 PlotStyle -> {LightYellow, Thick},
 BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14},
 ViewPoint -> {Pi, Pi/2, 2}]
```

Άσκηση

Έστω S το τμήμα της επιφάνειας της σφαίρας

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

που περιορίζεται από τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy και Oz ($\Sigma\chi.$ 20.2.4 - 2). Αν η πυκνότητα της μάζας ανά μονάδα εμβαδού είναι

$$\rho(x, y, z) = x - 3y + 4,$$

να υπολογιστεί το εμβαδόν S, η μάζα και οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας.

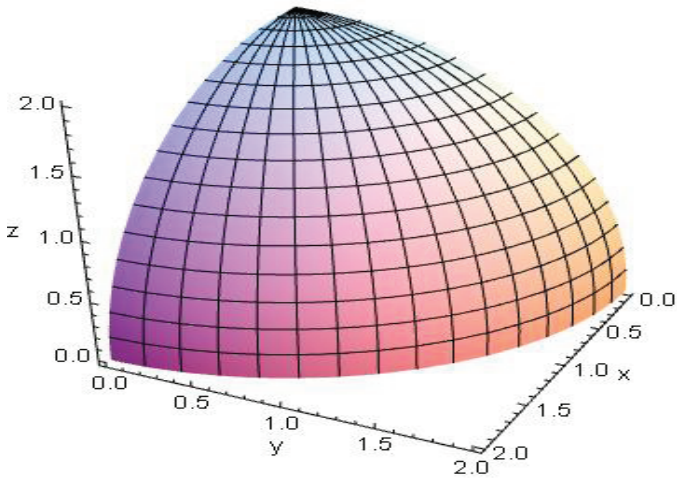
Απαντήσεις

Σύμφωνα με την $(20.2.4 - 6)$ είναι $|\mathbf{w}| = R^2 \cos v$, ενώ από την παραμετρική παράσταση της σφαίρας προκύπτει ότι

$$\rho(x, y, z) = x - 3y + 4 = 2\cos u \cos v - 6 \sin u \cos v + 4.$$

Άρα $S = 2\pi$, $M = 4\pi$ και

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{\pi}, \frac{4}{3\pi}, 2 - \frac{8}{3\pi}\right).$$



Σχήμα 20.2.4 - 2: Ο τόπος μεταβολής των παραμέτρων είναι $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

20.2.5 Σχετικά θεωρήματα

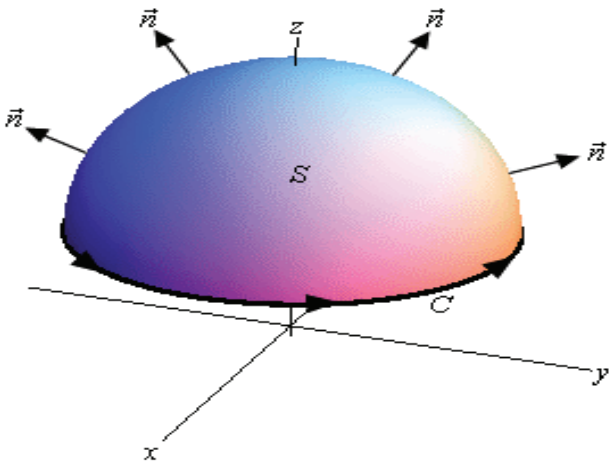
Δίνονται στη συνέχεια ορισμένα βασικά θεωρήματα σχετικά με τα επικαμπύλια και τα επιφανειακά ολοκληρώματα με σημαντικές εφαρμογές στις θετικές επιστήμες, ενώ ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

Θεώρημα 20.2.5 - 1 (Stokes). [14] *Αν S είναι μία επιφάνεια, που έχει για σύνορο μία απλή κλειστή καμπύλη C και $\mathbf{F}$ ένα διανυσματικό πεδίο, που ορίζεται πάνω στην S (Σχ. 20.2.5 - 1) και έχει παραγώγους 1ης τάξης συνεχείς συναρτήσεις, τότε αν $\mathbf{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S και η φορά διαγραφής της καμπύλης C είναι η θετική, ισχύει*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, ds. \qquad (20.2.5 - 1)$$

Ο τύπος $(20.2.5 - 1)$ είναι γνωστός ως **τύπος του Stokes**.

[14] Βλέπε επίσης *http://en.wikipedia.org/wiki/Stoke%27_theorem* και γενικότερη αναζήτηση σε **Stokes' theorem**.



Σχήμα 20.2.5 - 1: Θεώρημα του Stokes.

Παρατηρήσεις 20.2.5 - 1

- το θεώρημα εκφράζει μία σχέση μεταξύ ενός επιφανειακού ολοκληρώματος με ένα ή περισσότερα, σε πιο γενικές περιπτώσεις, επικαμπύλια ολοκληρώματα, που ορίζονται επάνω σε μία ή περισσότερες καμπύλες, που αποτελούν το σύνορο της επιφάνειας,
- το θεώρημα του Green αποτελεί μία ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Stokes.

Τύπος υπολογισμού

Έστω

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) \quad \text{και} \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F}.$$

Τότε

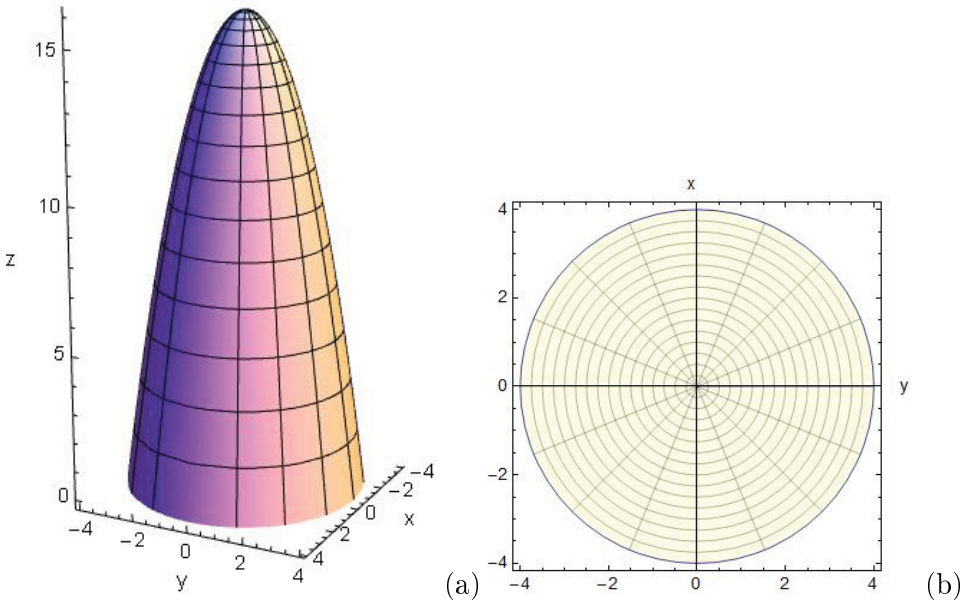
- αν η επιφάνεια S στο επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s}$ του τύπου του Stokes έχει παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(u, v)$, όταν $(u, v) \in T$ με θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο $\mathbf{w} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$, ενώ
- η κλειστή καμπύλη C στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ έχει παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(t)$,

ο τύπος του Stokes γράφεται

$$\oint_C \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \iint_T \mathbf{G}[\mathbf{r}(u,v)] \cdot \mathbf{w}\, du\, dv. \qquad (20.2.5 - 2)$$

Παράδειγμα 20.2.5 - 1

Να επαληθευτεί $(20.2.5 - 2)$ του Θεωρήματος του Stokes, όταν S είναι η επιφάνεια του παραβολοειδούς $z = 16 - x^2 - y^2$ με $z \geq 0$ (Σχ. 20.2.5 - 2a) και $\mathbf{F}$ το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = 3y\,\mathbf{i} + 4z\,\mathbf{j} - 6x\,\mathbf{k}$.



Σχήμα 20.2.5 - 2: Παράδειγμα 20.2.3 - 1: (a) η επιφάνεια S - παραβολοειδές στο xy-επίπεδο και θετική φορά διαγραφής - με παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(u,v) = v\cos u\,\mathbf{i} + v\sin u\,\mathbf{j} + \left(16 - v^2\right)\mathbf{k}$ και (b) ο κυκλικός δίσκος κέντρου $(0,0)$ ακτίνας $R = 4$. Η παραμετρική εξίσωση της περιφέρειας είναι $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\,\mathbf{j} + 4\sin t\,\mathbf{j}$, όταν $t \in [0, 2\pi)$.

Υπολογισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία λύσης των αντίστοιχων επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων του 2ου είδους της Παραγράφου 20.1.1 στην περίπτωση αυτή η

καμπύλη C, που είναι η βάση του παραβολοειδούς είναι περιφέρεια κύκλου κέντρου $(0,0)$ ακτίνας $R=4$ (Σχ. 20.2.5 - 2b), έχει παραμετρική εξίσωση

$$\mathbf{r}(t) \quad = \quad x(t)\,\mathbf{j} + y(t)\,\mathbf{j} = 4\cos t\,\mathbf{j} + 4\sin t\,\mathbf{j}, \qquad (20.2.5\text{ - }3)$$

όταν $t \in [0, 2\pi)$.

Επομένως

$$x = x(t) = 4\cos t, \quad y = y(t) = 4\sin t \quad \text{και} \quad z = z(t) = 0,$$

οπότε

$$x'(t) = -4\sin t, \qquad y'(t) = 4\cos t \quad \text{και} \quad z'(t) = 0. \qquad (20.2.5\text{ - }4)$$

Το διανυσματικό πεδίο γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k} \\ &= 3y\,\mathbf{i} + 4z\,\mathbf{j} - 6x\,\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα και με την $(20.2.5-4)$ είναι

$$\begin{aligned} P(x,y,z) &= 3y = 12\sin t = P(t), \quad Q(x,y,z) = 4z = 16\sin t = Q(t) \\ R(x,y,z) &= 0 = R(t), \end{aligned}$$

οπότε σύμφωνα με το 1ο μέλος του τύπου $(20.2.5-2)$ είναι

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)d\,t \\ &= \int_0^{2\pi} \left[P(t)x'(t) + Q(t)y'(t) + R(t)z'(t)\right]\,d\,t \\ &= -48\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,d\,t = -48\pi. \qquad (20.2.5\text{ - }5) \end{aligned}$$

Υπολογισμός του επιφανειακού ολοκληρώματος

Αρχικά υπολογίζεται ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου $F = 3y\,\mathbf{i} + 4z\,\mathbf{j} - 6x\,\mathbf{k}$ ως εξής:

$$\mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y & 4z & -6x \end{vmatrix} = -4\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}.$$

[15]Η εξίσωση του παραβολοειδούς είναι της μορφής $z = g(x, y)$, οπότε μια παραμετρική εξίσωσή του είναι δυνατόν να προκύψει από την παραμετρική εξίσωση της $g(x, y)$, που είναι στην περίπτωση αυτή ο κυκλικός δίσκος στο xy-επίπεδο κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας $R = 4$ ($\Sigma\chi.$ 20.2.5 - 2b).

Άρα χρησιμοποιώντας τους τύπους $(20.2.5 - 3)$ έχουμε

$$x = R\cos\theta, \quad z = R\sin\theta, \quad \text{όταν} \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad R \in [0, 4].$$

Έστω

$$\theta \to u \quad \text{και} \quad R = v.$$

Επειδή η εξίσωση του παραβολοειδούς είναι $z = 16 - x^2 - y^2$, σύμφωνα με την παραπάνω παραμετρική μορφή των x, y πρέπει

$$z = 16 - v^2\sin^2 u - v^2\cos^2 u = 16 - v^2,$$

οπότε η παραμετρική εξίσωση είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= X(u, v)\,\mathbf{i} + Y(u, v)\,\mathbf{j} + Z(u, v)\,\mathbf{k} \\ &= v\sin u\,\mathbf{i} + v\cos u\,\mathbf{j} + \left(16 - v^2\right)\,\mathbf{k}, \end{aligned}$$

όταν

$$T = \{(u, v) :\ u \in [0, 2\pi] \quad \text{και} \quad v \in [0, 4]\}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} x &= X(u, v) = v\sin u, \quad y = Y(u, v) = v\cos u, \quad \text{και} \\ z &= Z(u, v) = 16 - v^2. \end{aligned}$$

[15]Βλέπε ανάλογη λύση στο Παράδειγμα 20.2.3 - 1.

Προφανώς είναι

$$\mathbf{G}\left[\mathbf{r}(u,v)\right] = -4\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k} = \langle -4, 6, -3\rangle\,. \qquad (20.2.5\text{ - }6)$$

Είναι

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= -v\sin u\,\mathbf{i} + v\cos u\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k},\\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \cos u\,\mathbf{i} + \sin u\mathbf{j} - 2v\,\mathbf{k},\end{aligned}$$

οπότε το θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο θα ισούται με

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -v\sin u & v\cos u & 0\\ \cos u & \sin u & -2v\end{vmatrix}\\ &= -2v^2\cos u\,\mathbf{i} - 2v^2\sin u\,\mathbf{j} - v\mathbf{k}\\ &= \left\langle -2v^2\cos u, -2v^2\sin u, -v\right\rangle. \qquad (20.2.5\text{ - }7)\end{aligned}$$

Επειδή πρέπει το διάνυσμα $\mathbf{w}$ να έχει τη θετική διεύθυνση του z-άξονα, από τις $(20.2.5-6)$ και $(20.2.5-7)$ προκύπτει τότε ότι

$$\begin{aligned}\mathbf{G}\cdot(-\mathbf{w}) &= \langle -4,6,-3\rangle\cdot\left\langle 2v^2\cos u, 2v^2\sin u, v\right\rangle\\ &= -8v^2\cos u + 12v^2\sin u - 3v, \qquad (20.2.5\text{ - }8)\end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας στο 2ο μέλος του τύπου $(20.2.5-2)$ διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned}\iint\limits_S \mathbf{G}\cdot d\,\mathbf{s} &= \iint\limits_T \mathbf{G}\left[\mathbf{r}(u,v)\right]\cdot(-\mathbf{w})\;du\,dv\\ &= -\int_0^{2\pi}\left[\int_0^4\left(-3v - 8v^2\cos u + 12v^2\sin u\right)\,dv\right]\,du\\ &= -\int_0^{2\pi}\left(-24 - \frac{512}{3}\cos u + 256\sin u\right)\,du \qquad (20.2.5\text{ - }9)\\ &= -48\pi \qquad (20.2.5\text{ - }10)\end{aligned}$$

Από τις $(20.2.5-5)$ και $(20.2.5-10)$ προκύπτει τότε ότι ισχύει ο τύπος του Stokes.

Η γραφική παράσταση του κυκλικού δίσκου στο Σχ. 20.2.5 - 2b έγινε με την παρακάτω εντολή του MATHEMATICA:

```
ParametricPlot[{X[u, v], Y[u, v]}, {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, 4},
 AxesLabel -> {"  y  ", "x  "},
 PlotStyle -> Directive[Opacity[0.7], LightYellow],
 BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14}]
```

Θεώρημα 20.2.5 - 2 (απόκλισης). [16] *Έστω* V *ένα* [17] *συμπαγές (compact) στερεό που περιβάλλεται εξωτερικά από μία κλειστή κατά τμήματα λεία επιφάνεια* S*. Τότε, αν* $\mathbf{F}$ *είναι ένα διανυσματικό πεδίο που ορίζεται στο* V *και έχει παραγώγους πρώτης τάξης συνεχείς συναρτήσεις, ισχύει*

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \oint\!\!\oint_S \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{s} = \oint\!\!\oint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds, \qquad (20.2.5\text{ - }11)$$

όταν $\mathbf{n}$ *το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην* S *με φορά προς το εξωτερικό της* S*.*

Σημείωση 20.2.5 - 1

Το θεώρημα εκφράζει μία σχέση μεταξύ ενός τριπλού ολοκληρώματος, που ορίζεται σε ένα στερεό και ενός ολοκληρώματος που ορίζεται σε μία επιφάνεια S και περιβάλλει το στερεό.

Τύπος υπολογισμού

Αν

- $$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x,y,z) = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}, \quad \text{τότε} \quad \nabla\cdot\mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z$$

  βαθμωτή συνάρτηση, δηλαδή το 1ο μέλος είναι ένα τριπλό ολοκλήρωμα.

[16] Βλέπε επίσης *http://en.wikipedia.org/wiki/Divergence_theorem* και γενικότερη αναζήτηση σε **divergence theorem**. Είναι γνωστό επίσης και ως **θεώρημα του Gauss** ή και **θεώρημα του Ostrogradsky**.

[17] **Συμπαγές** θεωρείται ένα στερεό, όταν είναι κλειστό και φραγμένο.

- Η επιφάνεια S στο επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ του τύπου (20.2.5−11) έχει παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(u,v)$, όταν $(u,v)\in T$ με θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο $\mathbf{w}=\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$,

τότε ο τύπος $(20.2.5-11)$ γράφεται

$$\iiint\limits_V (P_x+Q_y+R_z)\,dV=\iint\limits_T \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)]\cdot\mathbf{w}\,du\,dv. \qquad (20.2.5\text{ - }12)$$

Παράδειγμα 20.2.5 - 2

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα της απόκλισης να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\oint\!\!\oint\limits_S \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{s},\quad \text{όταν}\quad \mathbf{F}=2x\,\mathbf{i}+y^2\,\mathbf{j}+z^2\,\mathbf{k}$$

και S η μοναδιαία σφαίρα με εξίσωση $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2=1\}$.

Λύση. Έστω

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}(x,y,z)=P\,\mathbf{i}+Q\,\mathbf{j}+Q\,\mathbf{k}=2x\,\mathbf{i}+y^2\,\mathbf{j}+z^2\,\mathbf{k},$$

οπότε $P=2x,\quad Q=y^2\quad$ και $\quad R=z^2$.

Τότε

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=P_x+Q_y+R_z=2+2y+2z.$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο $(20.2.5-12)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\oint\!\!\oint\limits_S \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{s} &= \iiint\limits_V (P_x+Q_y+R_z)\,dV\\
&= 2\iiint\limits_V (1+y+z)\,dV\\
&= 2\iiint\limits_V 1\,dV+2\iiint\limits_V y\,dV+2\iiint\limits_V z\,dV\\
&= 2\,\frac{4\pi}{3}+2\cdot 0+2\cdot 0=\frac{8\pi}{3}\,,
\end{aligned}$$

επειδή ο όγκος V της σφαίρας ακτίνας r είναι[18]

$$V = \iiint_V 1\, dV = \frac{4\pi r^3}{3} \overbrace{=}^{r=1} \frac{4\pi}{3}$$

και λόγω συμμετρίας

$$\iiint_V y\, dV = \iiint_V z\, dV = 0.$$

■

Με τη βοήθεια του Θεωρήματος 20.2.5 - 2 αποδεικνύεται το παρακάτω σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα 20.2.5 - 3 (Gauss). *Έστω S μία τυχούσα κλειστή επιφάνεια. Αν $Oxyz$ είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων και $\mathbf{r}$ το διάνυσμα θέσης τυχόντος σημείου (x, y, z) της S, τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα*

$$\iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3}\, ds, \tag{20.2.5 - 13}$$

όπου $\mathbf{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην S, ισούται με

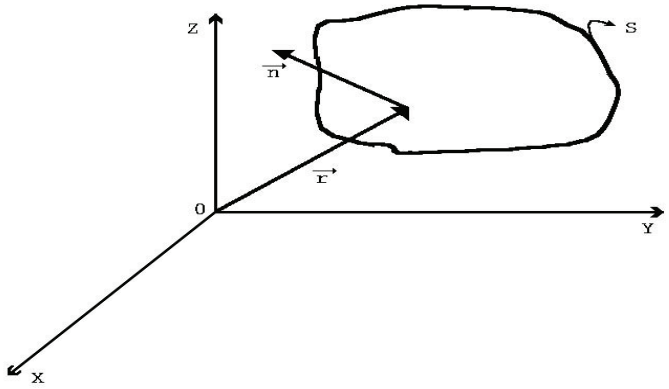
i) το μηδέν, αν το O βρίσκεται έξω απο την S (Σχ. 20.2.5 - 3),

ii) 4π, όταν το O βρίσκεται στο εσωτερικό της S (Σχ. 20.2.5 - 4).

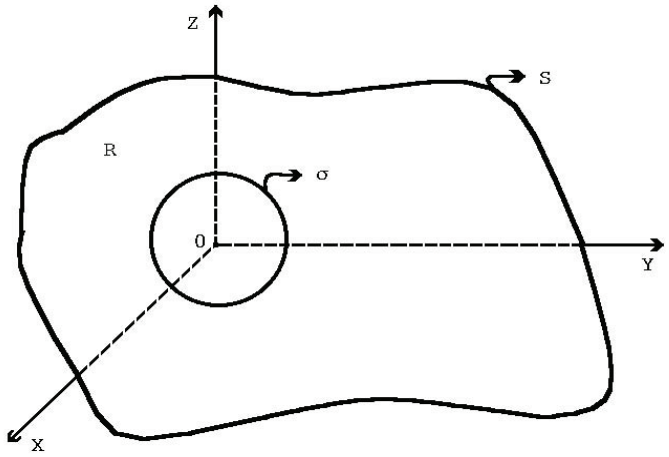
Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Gauss

Αν dS είναι μία στοιχειώδης επιφάνεια, τότε ενώνονται όλα τα σημεία που αποτελούν το σύνορό της με την αρχή O και με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται ένας κώνος με βάση dS και κορυφή το O (Σχ. 20.2.5 - 5). Στη συνέχεια ο κώνος αυτός τέμνεται με μία σφαίρα που έχει κέντρο το O και ακτίνα r και συμβολίζεται με $d\Omega$ η τομή αυτή. Τότε, όπως είναι γνωστό, η στερεά γωνία $d\omega$, που αντιστοιχεί στην επιφάνεια dS και έχει κορυφή το O, ισούται με

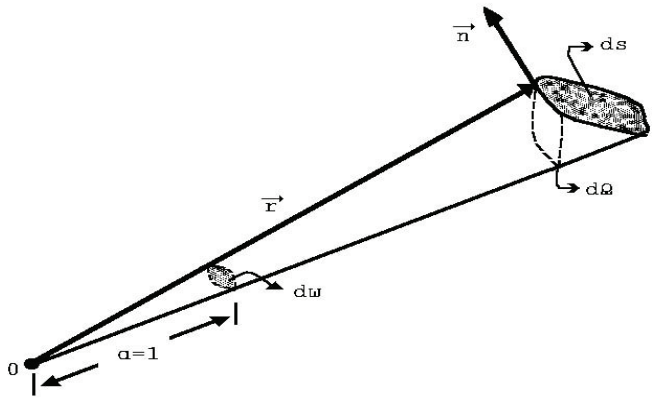
[18] Βλέπε Μάθημα *Πολλαπλά Ολοκληρώματα - Εφαρμογές τριπλού ολοκληρώματος* και *http://en.wikipedia/wiki/Volume*



Σχήμα 20.2.5 - 3: Θεώρημα 20.2.5 - 3 του Gauss - περίπτωση (i).



Σχήμα 20.2.5 - 4: Θεώρημα 20.2.5 - 3 του Gauss - περίπτωση (ii).



Σχήμα 20.2.5 - 5: γεωμετρική ερμηνεία θεωρήματος 20.2.5 - 3 του Gauss.

$$d\omega = \frac{d\Omega}{r^2}, \qquad (20.2.5 - 14)$$

ενώ η αριθμητική της τιμή θα είναι ίση με το εμβαδόν της τομής του κώνου με τη σφαίρα που έχει για κέντρο το O και ακτίνα $\alpha = 1$.

Έστω $\mathbf{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια dS και έστω επίσης ότι θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{r}$ και $\mathbf{n}$. Τότε από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{r}||\mathbf{n}| \cos\theta = r\cos\theta,$$

δηλαδή

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r},$$

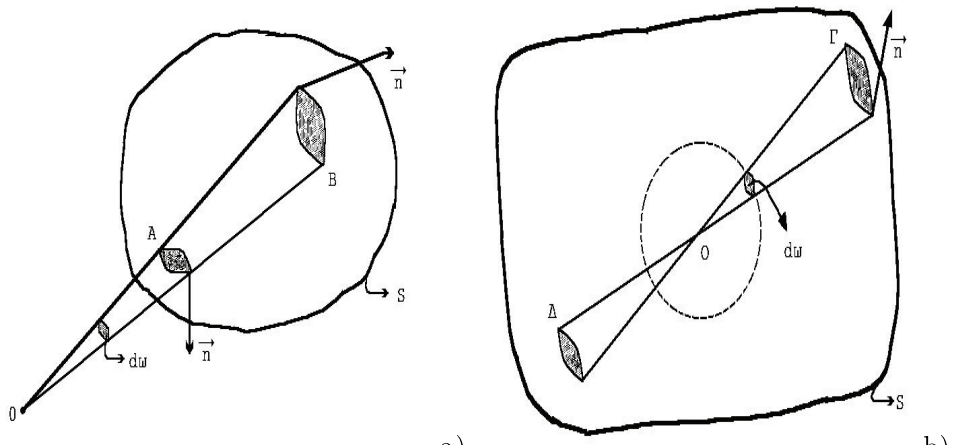
οπότε

$$d\Omega = \pm\cos\theta\, dS = \pm\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r}\, dS.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην $(20.2.5 - 14)$ προκύπτει

$$d\omega = \pm\frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta}}{r^3}\, dS,$$

όπου το πρόσημο εξαρτάται από το είδος της γωνίας θ (τίθεται το $+$, αν η γωνία θ είναι δεξιόστροφη, διαφορετικά το $-$).



a) b)

Σχήμα 20.2.5 - 6: γεωμετρική ερμηνεία Θεωρήματος 20.2.5 - 3 του Gauss - περιπτώσεις: (i) Σχ. (a) και (ii) Σχ. (b).

Αν τώρα το O βρίσκεται έξω από την επιφάνεια S (Σχ. 20.2.5 - 6a), τότε η στερεά γωνία $d\omega$ στη θέση A είναι ίση με

$$d\omega = -\left(\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{n}}{r^3}\right) dS,$$

ενώ στη θέση B ίση με

$$d\omega = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} ds.$$

Προφανώς τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα υπεράνω των επιφανειών αυτών είναι 0.

Αν, τέλος, το σημείο O βρίσκεται στο εσωτερικό της S (Σχ. 20.2.5 - 6b), τότε στις θέσεις Γ και Δ είναι

$$d\omega = \left(\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{n}}{r^3}\right) dS,$$

οπότε τα επιφανειακά ολοκληρώματα υπεράνω και των δύο αυτών επιφανειών θα προστίθενται.

Η ολική στερεά γωνία, όταν η ολοκλήρωση γίνεται υπεράνω της S, ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας με κέντρο το O και ακτίνα $\alpha = 1$, δηλαδή είναι ίση με 4π.

20.3 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Apostol, T. (1962). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός ΙΙ*. Εκδόσεις Ατλαντίς-Μ. Πεχλιβανίδης. ISBN 61–11601.

[4] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[5] Marsden, J.E. & Tromba, A.J. (2011). *Διανυσματικός Λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–730–945–7.

[6] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Ευρετήριο

ακολουθία
  αξίωμα σύγκλισης, 517
  δείκτης, 501
  ισοσυγκλίνουσα, 512
  μηδενική, 509
  μονοτονία, 505
  ορισμός
    γενικός, 501
    πραγματικών αριθμών, 502
  πράξεις, 503, 512
  σύγκλιση, 508
    ιδιότητες, 511
    ομαλή, 534
  φραγμένη, 504
  όριο
    αθροίσματος, 512
    απόλυτης τιμής, 515
    γινομένου, 513
    γραμμική ιδιότητα, 514
    διαφοράς, 513
    πηλίκου, 514
    ρίζας, 516
  όρος, 501
ακρότατο
  απόλυτο, 668
    θεώρημα, 668
    υπολογισμός, 668
  με 1 συνθήκη, 673
  με 2 συνθήκες, 682
  με συνθήκη, 672
  τοπικό, 649, 657
    ελάχιστο, 651, 657
    κρίσιμο σημείο, 651, 658
    μέγιστο, 651, 657
    ολικό, 650
    ορισμός, 649
    σημείο καμπής, 651
    συνθήκη, 650, 657
ανάπτυγμα
  Maclaurin
    πίνακας, 328
απειροστό, 279
απόκλιση
  ιδιότητες, 888
  ορισμός, 887
απόσβεση
  ασθενής, 753
  ισχυρή, 749
  κρίσιμη, 751
αριθμός
  e, 518
  υπερβατικός, 519

βήμα
  μεθόδου απαλοιφής Gauss, 217
βελτιστοποίηση, 668

γινόμενο
  εξωτερικό, 41
    ιδιότητες αλγεβρικές, 42
    ιδιότητες γεωμετρικές, 43
    ορισμός, 41
    υπολογισμός, 43
  εσωτερικό, 39
    ιδιότητες, 39

ορισμός, 39
θεμελιώδες διανυσματικό, 999
μεικτό, 45
γεωμετρική ερμηνεία, 47
ορισμός, 45
υπολογισμός, 46
γραμμικό φάσμα
πλάτους, 577, 580, 589
φάσης, 577, 589

διάνυσμα
άλγεβρα, 29
ακτινικό, 33
γραμμική ανεξαρτησία, 49
γωνία, 41
ελεύθερο, 31
εφαπτόμενο, 853
μοναδιαίο, 854
εφαρμοστό, 31
θέσης, 33
θεμελιώδες, 999
ισότητα, 31
μηδενικό, 29
μοναδιαίο, 32
ολισθαίνον, 31
ορισμός, 29
πολλαπλασιασμός
με πραγματικό αριθμό, 32
πρόσθεση, 31
στοιχεία, 30
συντελεστής διεύθυνσης, 57
συντεταγμένες, 33
διαμέριση, 386
διαφορική
εξίσωση
εφαρμογές στη μηχανική, 755
διαφορική εξίσωση
Bernoulli, 732
Riccati, 735
διαφορικό
ορισμός, 283
τάξης
1, 283
ν, 284
διαφορικό
ορισμός, 284
δυναμοσειρά, 545
ορισμός, 545
σύγκλιση, 545

ελικα Αρχιμήδη, 479
ελλειψη, 74
άξονας
μεγάλος, 76
μικρός, 76
βασικά στοιχεία, 76
διευθετούσες, 77
εκκεντρότητα, 76
εξίσωση
αναλυτική, 75
διανυσματική, 77
εφαπτομένης, 76
παραμετρική, 77
εστίες, 75
ιδιότητες, 76
ορισμός, 75
εμβαδόν
επίπεδου σχήματος, 934
επιφάνειας, 937
από περιστροφή, 449, 455
εξίσωση
2ου βαθμού, 150
γενική
2ου βαθμού, 90
διαφορική
1ης τάξης, 693
1ης τάξης γραμμική μη ομογενής, 724, 738
1ης τάξης γραμμική ομογενής, 724
1ης τάξης εφαρμογές, 743
2ης τάξης, 747
2ης τάξης γραμμική μη ομογενής, 747

2ης τάξης γραμμική ομογενής, 747, 748
2ης τάξης μη ομογενής, 761
γενική λύση, 688
γραμμική 1ης τάξης, 723, 738
θεώρημα λύσης μη ομογενούς, 692
ιδιάζουσα λύση, 695
μέθοδος του Lagrange, 724
με μερικές παραγώγους, 687
μερική λύση, 689
μη γραμμική, 691
μη ομογενής γραμμική, 691, 692
ολοκληρωτική καμπύλη, 688
ομογενής, 717
ομογενής γραμμική, 691, 692
πλήρης, 703
συνήθης, 687
χωρισμένες μεταβλητές, 694
διωνυμική, 149
πολυωνυμική, 113
χαρακτηριστική, 226, 693, 748
εξισώσεις
διαφορικές
γραμμικές, 691
επίπεδο, 67
Gauss, 141
από δύο σημεία παράλληλο προς διάνυσμα, 69
από σημείο παράλληλο προς δύο διανύσματα, 67
από τρία σημεία, 70
εξίσωση
αναλυτική, 68–71
γενική, 71
διανυσματική, 68–70
παραμετρική, 68–70
εφαπτόμενο, 630, 632
κάθετο, 630, 632
μιγαδικό, 141
επιφάνεια
απειροστή, 1006
εμβαδόν
στοιχειώδες, 1000
ορισμός, 995
παραμετρική παράσταση, 995
ευθεία, 55
από δύο σημεία, 60
από σημείο παράλληλη προς διάνυσμα, 58
απόσταση από σημείο, 65
ασύμπτωτη, 342
κατακόρυφη, 342
γωνία ευθειών, 56
εξίσωση
αναλυτική γενική, 63
αναλυτική στο επίπεδο, 59, 62
αναλυτική στον χώρο, 59, 61, 62
γενική, 63
διανυσματική, 58, 60
διερεύνηση, 63
εφαπτομένης, 281, 852
κάθετης, 281, 852
παραμετρική, 58, 60
παραμετρική στο επίπεδο, 61
παραμετρική στον χώρο, 60
προσανατολισμένη, 19
συνθήκη
καθετότητας, 57
παραλληλίας, 57
συνθήκη δέσμης 3 ευθειών, 65
συντελεστής διεύθυνσης, 55
συντεταγμένες επί την αρχή, 64
τέμνουσα, 279
ευθύγραμμο τμήμα
εξίσωση παραμετρική, 61

θεώρημα
Bolzano, 261
γενίκευση, 261
de Moivre, 143
Fermat, 329
Fubini, 903

Gauss, 1028
Green, 991
Rolle, 330
Schwarz, 625
Stokes, 1020
Απειροστικού Λογισμού, 392
ακροτάτων
  1 μεταβλητή, 327, 329
  2 μεταβλητών, 650
  3 μεταβλητών, 657
ανεξαρτησίας επικαμπύλιου ολοκληρώματος, 976
αντίστροφου πίνακα, 206
απόκλισης Gauss, 1026
απόλυτων ακρότατων, 668
διωνυμικό, 310
δυναμοσειράς
  ολοκλήρωσης, 549
  παραγώγισης, 549
ελέγχου μονοτονίας, 333
θεμελιώδες Άλγεβρας, 262
θεμελιώδες της Άλγεβρας, 164
κανόνων de L'Hôspital, 300, 301
λύσης μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, 692
μέγιστης και ελάχιστης τιμής, 262
μέσης τιμής, 391
μετασχηματισμού Laplace
  παραγώγου, 789
  περιοδικής συνάρτησης, 792
  προπορείας, 786, 809
  υστέρησης, 787, 809
μονοτονίας συνάρτησης
  αντίστροφης, 102
  σύνθετης, 108
ομαλή σύγκλιση και
  ολοκλήρωση, 539
  παραγώγιση, 540
  συνέχεια, 539
ορισμένου ολοκληρώματος, 387
παράγωγος σύνθετης συνάρτησης, 286, 618, 637
συνέχεια
  αντίστροφης συνάρτησης, 261
  σύνθετης συνάρτησης, 259
σύγκλισης
  δυναμοσειράς, 545
  σειράς, 526–528
ύπαρξης
  αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, 808
  μετασχηματισμού Laplace, 783
ύπαρξης αντίστροφης συνάρτησης, 107

ιδιοδιάνυσμα
  ορισμός, 225
ιδιοτιμή
  ορισμός, 225
  υπολογισμός, 225

κέντρο βάρους
  επιφάνειας, 939
  όγκου, 959
καμπυλότητα, 338
καμπύλη
  Agnesi, 441
  αστεροειδής, 441, 445, 461, 491
  καρδιοειδής, 446, 461, 480, 496
  κυκλοειδής, 445, 456, 491
  λεία, 856
  μήκος, 985
  ολοκληρωτική, 688
  υπερβολική σπειροειδής, 480
  υπολογισμός
    προσεγγιστικός, 462
κανόνες de L'Hôpital, 300
κλίση
  ιδιότητες, 876
  ορισμός, 875
κωνικές τομές, 72
  γενικό πρόβλημα, 86

κύκλος, 72
εξίσωση
αναλυτική, 72
γενικής μορφής, 72
διανυσματική, 73
εφαπτομένης, 72
παραμετρική, 73
ορισμός, 72
κύκλωμα
RC, 743
RL, 745
RLC, 759
Thompson, 760
κύμα
αρμονικό, 561
μήκος, 111, 561

λημνίσκοι του Bernoulli, 447

μάζα
ελατηρίου, 986
κέντρο, 939
κελύφους, 1014
στερεού, 959
συντεταγμένες κέντρου, 985
υπολογισμός, 938, 985
μέθοδος
Cramer, 214
Lagrange, 673, 762
απαλοιφής Gauss, 217
χωρίς διάταξη, 217
ελάχιστων τετραγώνων, 659
διακριτή 1ου βαθμού, 660
διακριτή 1ου-βαθμού, 661
διακριτή m-βαθμού, 663, 665
ολοκλήρωσης
με αντικατάσταση, 361
με δημιουργία διαφορικού, 354
με υποβιβασμό, 371
παραγοντική, 363
προσεγγιστική, 379
ρητών συναρτήσεων, 373
τριγωνομετρικών συναρτήσεων, 378
μέτρο
ευθύγραμμου τμήματος, 20
μήκος
ελατηρίου, 986
κύματος, 111, 561
μετασχηματισμός
Fourier
ιδιότητες, 594
ορισμός, 592
Laplace
αντίστροφος, 782
θεώρημα ύπαρξης, 783
ορισμός, 782
πίνακας μετασχηματισμών, 811
συνθήκες Dirichlet, 784
Laplace αντίστροφος
μέθοδοι υπολογισμού, 810, 814
γραμμικός, 925
ομογραφικός, 926
μιγαδικός αριθμός
δύναμη, 134
δύναμη μιγαδική, 155
λογάριθμος, 154
μέτρο, 137
μορφές
εκθετική, 146
πολική, 145
τριγωνομετρική, 140
ρίζα, 147
συζυγής, 135

νόμος Hooke, 756

ογκος
στερεού
από περιστροφή, 481
ογκος στερεού, 945, 958
ολοκλήρωμα
$\int \sqrt{1+4x^2}\,dx$, 938

$\int \sqrt{1+x^2}\,dx$, 473
$\int \sqrt{1-\cos x}\,dx$, 457
$\int \sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx$, 431
Dirichlet, 407
Fresnel, 405
αόριστο
  ιδιότητες, 353
  μέθοδοι ολοκλήρωσης, 354
  ορισμός, 351
γενικευμένο
  α' είδους, 410
  β' είδους, 424
  μεικτό, 426
διπλό
  αλλαγή συντεταγμένων, 923
  ιδιότητες, 901
  ορισμός, 900
  υπολογισμός, 903
επικαμπύλιο
  1ο είδος, 984
  2ο είδος, 966
  ιδιότητες, 974
  μορφές, 983
  ορισμός, 965, 984
  συνθήκη ανεξαρτησίας, 975
  σχετικά θεωρήματα, 1020
  υπολογισμός, 966
επιφανειακό
  εμβαδόν επιφάνειας, 1013
  ορισμός, 1007
  σχετικά θεωρήματα, 1020
  φυσική ερμηνεία, 1004
ημιτονικό, 407
ορισμένο
  Riemann, 388
  ειδικής μορφής, 404
  λογαριθμικό, 409
  μη στοιχειώδες, 404
  ορισμός, 387
  τύπος υπολογισμού, 392
  υπολογισμός, 392
τριπλό
  γεωμετρική ερμηνεία, 950
  ιδιότητες, 950
  ορισμός, 949
  υπολογισμός, 952
ολοκλήρωση
  με αντικατάσταση, 361
  με δημιουργία διαφορικού, 354
  με υποβιβασμό, 371
  παραγοντική, 363
  συναρτήσεων
    προσεγγιστικά, 379
    ρητών, 373
    τριγωνομετρικών, 378
ολοκληρωτικός παράγοντας, 709
όνομα
  Agnesi, 441
  Bézier, 317
  Bernoulli, 447, 732
  Bernstein, 314, 317
  Bolzano, 261
  Cauchy, 527
  Cauchy-Hadamard, 546
  Clairaut, 625
  Cramer, 214
  d'Alembert, 528, 538
  de Moivre, 143
  Dirac, 802
  Dirichlet, 407, 784
  Euler, 146, 165, 564, 588, 709
  Fermat, 329
  Fourier, 543, 564, 589
  Fresnel, 405
  Fubini, 903
  Gauss, 141, 217, 1026, 1028
  Gibbs, 568, 571, 574, 585
  Green, 991
  Heaviside, 794
  Hermite, 319
  Hooke, 756
  Jacobi, 924

L'Hôpital, 300
Lagrange, 673, 724, 762
Laguerre, 321
Laplace, 198, 782, 888
Legendre, 323
Leibniz, 312
Maclaurin, 325, 328, 551
Newton, 756
Ostrogradsky, 1026
Pascal, 311
Pauli, 196
Riccati, 735
Riemann, 388
Rolle, 330
Schwarz, 625
Stirling, 428
Stokes, 1020
Taylor, 325, 551
Weierstrass, 536
Αρχιμήδης, 479
ορίζουσα
Jacobi, 924
ελάσσονα, 198
ιδιότητες, 200
ορισμός, 197
τύπος Laplace, 198
χαρακτηριστική, 226
ορθογώνιες τροχιές, 701

παράγωγος
γεωμετρική ερμηνεία, 281
γεωμετρική σημασία, 852
διανυσματικής συνάρτησης
κανόνες, 857
κανόνες, 284
κατευθυνόμενη
ιδιότητες, 876
ορισμός, 869
ορισμός, 276, 277, 850
παραμετρική, 295
συνάρτησης
πεπλεγμένης, 298
υπολογισμός οριακών τιμών, 299
παραβολή, 84
βασικά στοιχεία, 85
διευθετούσα, 84
εξίσωση
αναλυτική, 85
διανυσματική, 85
εφαπτομένης, 85
παραμετρική, 85
εστία, 84
ημιπαράμετρος, 85
ιδιότητες, 85
κορυφή, 85
ορισμός, 84
παραμετρική παράσταση
έλλειψης, 77
επιπέδου, 68–70
επιφάνειας
ελλειψοειδές, 1003
επίπεδο, 1002
κύλινδρος, 1002
ορισμός, 995
παραβολοειδές, 1002
σφαίρα, 1003
ευθείας, 58, 60
καμπύλης
έλλειψης, 847
ευθείας, 844
κύκλου, 846, 970
ορισμός, 843
παραβολής, 848
κύκλου, 73
παραβολής, 85
σφαίρας, 997
υπερβολής, 83
πεδίο
αστρόβιλο, 892, 976
βαθμωτό, 866
διανυσματικό, 867
πυκνοτήτων ροής, 1004

συντηρητικό, 884
σωληνοειδές, 888
περιοχή
σημείου, 327
πινακας
αναπτυγμάτων κατά Maclaurin, 328
Pauli, 196
ίχνος, 178
αλγεβρική δομή, 180
αλγεβρικό συμπλήρωμα, 203
αναπτυγμάτων κατά Maclaurin, 328
αντίθετος, 182
αντίστροφος
ορισμός, 205
προτάσεις, 209
υπολογισμός, 206
αφαίρεση, 182
διάνυσμα, 177
διαφορετικός, 180
δύναμη, 187
ιδιότητες, 189
ειδικής μορφής, 189
Ερμιτιανός, 192
ανάστροφος, 190
αντιερμιτιανός, 193
αντισυμμετρικός, 191
αυστηρά διαγώνια ορισμένος, 189
διαγώνια ορισμένος, 189
διαγώνιος, 178
θετικός, 190
μη αρνητικός, 190
μοναδιαίος, 179
συζυγής ανάστροφος, 192
συμμετρικός, 190
τριγωνικός, 193
ισότητα, 180
μετασχηματισμών Laplace, 811
μηδενικός, 181
ολοκληρωμάτων συναρτήσεων
στοιχειωδών, 353
σύνθετων, 356
ολοκληρωτικών παραγόντων, 711, 712
ορισμός, 175
παραγώγων
στοιχειωδών συναρτήσεων, 278
σύνθετων συναρτήσεων, 287, 620
πολλαπλασιαμός
ιδιότητες, 183
πολλαπλασιασμός
ιδιότητες, 186
πολλαπλασιασμός με
αριθμό, 183
πίνακα, 184
πρόσθεση, 181
ιδιότητες, 181
συμπληρωματικός, 204
τετραγωνικός, 177
φάσμα, 227
φασματική ακτίνα, 227
χαρακτηριστικά μεγέθη, 227
χαρακτηριστικός, 226
πολλαπλασιαστής
Euler, 709
Gauss, 218
πολυώνυμα
Hermite, 319
Laguerre, 321
Legendre, 323
πολυώνυμο
Bernstein
βασικό ορισμός, 314
ορισμός, 317
συντελεστές, 317
Maclaurin, 551
Taylor, 325, 551
προσέγγιση ριζών, 164
χαρακτηριστικό, 226
πράξεις επιτρεπτές, 100
πράξεις μη επιτρεπτές, 300
πρόβλημα
αρχικής τιμής 1ης τάξης, 694
πρόγραμμα

πίνακα
αντίστροφου, 206
πρόγραμμα MATHEMATICA
Bernoulli equation, 734
Ricatti equation, 737
εξίσωση
διαφορική, 699
εξίσωση διαφορική
ολοκληρωτικός παράγοντας, 713, 714, 716, 720, 722
πλήρης, 707, 709
ευθείας
2 σημεία, 62
παράλληλης σε διάνυσμα, 60
ιδιοτιμών - ιδιοδιανυσμάτων, 228
μήκος καμπύλης
ορθογώνιες συντεταγμένες, 466
παραμετρική εξίσωση, 476
πολικές συντεταγμένες, 478
μετασχηματισμού
Laplace, 791
ολοκληρώματος
αόριστου, 369, 377
επικαμπύλιου 1ου είδους, 989
επικαμπύλιου 2ου είδους, 972
επιφανειακού 1ου είδους, 1018
επιφανειακού 2ου είδους, 1011
ορισμένου, 400
ορίζουσας, 200
οριακής τιμής, 243
πίνακα
Ερμιτιανού, 193
ανάστροφου, 190
διαγώνιου, 179
δύναμης πίνακα, 188
μοναδιαίου, 180
συζυγή ανάστροφου, 192
συμμετρικού, 191
συμπληρωματικού, 205
τριγωνικού, 194
παράγωγος
παραμετρική, 297
πεπλεγμένη, 298
πολλαπλασιασμού πινάκων, 186
πολυώνυμα
Bernstein, 314
Hermite, 320, 324
Laguerre, 322
σειράς Fourier
αρμονικοί πλάτους, 578
συντελεστές, 568
φάσμα πλάτους, 591
στερεού εκ περιστροφής, 490
συστήματα συντεταγμένων, 29
πρόγραμμα MATLAB
ολοκληρώματος
αόριστου, 368, 377
ορισμένου, 400

ροπή αδράνειας, 939, 985, 1014, 1015

σειρά
Fourier
άρτιων συναρτήσεων, 584
γραμμικό φάσμα, 589
εκθετική μορφή, 589
ορισμός, 543, 564
περιττών συναρτήσεων, 584
συντελεστές, 543, 564
τύποι Euler, 543, 564, 565
υπολογισμός συντελεστών, 543, 564, 584
φαινόμενο Gibbs, 568, 571, 574, 585
Maclaurin, 551
Taylor, 551
ακέραια, 545
αρμονική
ορισμός, 522
σύγκλιση στο άπειρο, 524
γεωμετρική
ορισμός, 522
σύγκλιση, 524

δεκαδική
ορισμός, 522
σύγκλιση, 525
ημιτόνου, 577
κριτήριο
Cauchy, 527
d'Alembert, 528, 538
Weierstrass, 536
σύγκρισης, 526
μερικό άθροισμα, 520
ορισμός, 520
συναρτήσεων, 531
συνημιτόνου, 577
σύγκλιση
άπειρο, 523
απλή, 523, 530
αποκλίνουσα, 524
δυναμοσειράς, 545
ιδιότητες, 525
κατ'εκδοχή, 523
ομαλή, 536
τριγωνομετρική, 542
ορισμός, 542, 562
υπολογισμός συντελεστών, 563
σημείο
καμπής, 338
κρίσιμο, 330
στροβιλισμός
ιδιότητες, 891
ορισμός, 891
συνάρτηση
Heaviside, 794
Laplacian, 889
αρμονική, 889
ιδιότητες, 561
ορισμός, 561
αρχική, 351
βαθμωτή, 866
γάμμα
ορισμός, 427, 793
τύποι υπολογισμού, 428
δέλτα, 802
διανυσματική, 866
γεωμετρική σημασία παραγώγου, 853
θέσης, 843
μέτρο, 867
ολοκλήρωση, 860
οριακή τιμή, 840
ορισμός, 837, 867
παράγουσα, 860
παράγωγος, 850
συνέχεια, 841
εκθετικής τάξης, 782
κλιμακωτή, 798
μηδενική, 238
μιγαδική
αναλυτική έκφραση, 163
αντίστροφη, 162
εκθετική, 165
λογαριθμική, 167
μονότιμη, 161
ορισμός, 161
πλειότιμη, 161
πολυωνυμική, 163
ρητή, 164
τριγωνομετρική, 169
υπερβολική, 171
όρισμα, 166
μοναδιαία, 794
μοναδιαίας κρούσης, 802
παράγουσα, 351, 703
περιοδική
θεμελιώδης περίοδος, 560
κυκλική συχνότητα, 561
κύμα, 560
μήκος κύματος, 561
ορισμός, 560
περίοδος, 560
συχνότητα, 561
τετραγωνικού παλμού, 797
πραγματική
άρτια, 106, 582

αντίστροφη, 101
αντίστροφη τριγωνομετρική, 116
αρμονική, 111
διάγραμμα, 98
διαφορικό, 283, 284
εκθετική, 117
ισότητα, 104
κλίση, 275, 849
κυκλική συχνότητα, 111
λογαριθμική, 118
λυμένη, 98
μοναδιαία, 105
μονοτονία, 107, 108
ορισμός, 97, 235, 835
παράγωγος, 276, 277, 850
πεπλεγμένη, 99, 114
περιοδική, 108
περιττή, 106, 582
πολλαπλασιασμός, 105
πολυωνυμική, 113
πρόσθεση, 104
ρητή, 113
συχνότητα, 111
σύνθετη, 103
τριγωνομετρική, 114
υπερβολική, 120
συγκλίνουσα, 238
σφάλματος, 404
συνέχεια
πλευρική, 266
συνθήκη
Dirichlet
μετασχηματισμού Laplace, 784
αρχική, 689
γραμμικής ανεξαρτησίας, 49
καθετότητας διανυσμάτων, 40
μετασχηματισμού Fourier, 593
παραλληλίας διανυσμάτων, 50
συντελεστής
διωνυμικός, 308
συντεταγμένες
καμπυλόγραμμες, 924
καρτεσιανές, 20
παράλληλη μετατόπιση, 22
παράλληλη μετατόπιση και στροφή, 23
κυλινδρικές, 26
ορθογώνιες, 20
πολικές, 25, 931
σφαιρικές, 27
σχέση
ισοδυναμίας, 130, 180
σχήμα
έλικα Αρχιμήδη, 480
έλλειψης, 75
ακρότατα συνάρτησης, 329
ακτινικό διάνυσμα, 34
ασυνέχεια
1ου είδους, 264
2ου είδους, 268
γενικό πρόβλημα κωνικών τομών, 87
γεωμετρικής ερμηνείας
διαφορικού, 283
διπλού ολοκληρώματος, 899, 948
μεικτού γινομένου διανυσμάτων, 48
ορισμένου ολοκληρώματος, 389, 899, 948
παραγώγου, 280
γωνία ευθειών, 57
διάνυσμα
θέσης, 34
κλίσης, 882
πολλαπλασιασμός με πραγματικό αριθμό, 32
πρόσθεση, 32
συμβολισμός, 30
διανύσματα
εξωτερικό γινόμενο, 42
εσωτερικό γινόμενο, 39
εμβαδόν
περιστροφής, 450, 451, 456
εμβαδόν σχήματος σε

πολικές συντεταγμένες, 447
επίπεδο
από σημείο παράλληλο προς δύο διανύσματα, 67
ευθεία
από δύο σημεία, 61
από σημείο παράλληλη προς διάνυσμα, 58
απόσταση από σημείο, 65
παραμετρική εξίσωση, 61
προσανατολισμένη, 20
συντελεστής διεύθυνσης, 56
θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο, 1001
θεώρημα
Bolzano, 261
Bolzano γενίκευση, 262
Fermat, 330, 331
Gauss, 1030, 1031
Green, 992
Rolle, 331
Stokes, 1021
μέγιστης και ελάχιστης τιμής, 263
μέσης τιμής, 332
καμπύλη
αστεροειδής, 446, 461, 494, 495
καρδιοειδής, 463, 481
κυκλοειδής, 446, 457, 492, 493
υπερβολική σπειροειδής, 481
κλίση, 882
κλιμακωτή συνάρτηση, 798
κύκλου
παραμετρικής παράστασης, 74
λημνίσκοι Bernoulli, 448
μερικών αθροισμάτων σειράς Fourier, 568, 572, 574, 576, 586, 591
ολοκλήρωμα
Fresnel, 406
ημιτονικό, 408
ομαλή σύγκλιση ακολουθιών, 535
παραβολή, 84
παραμετρική εξίσωση
ευθείας, 844
παραμετρική παράσταση
επιφάνειας, 996
ευθείας, 969
καμπύλων, 843
σφαίρας, 998
πεδίο
Coulomb, 886
περιοχή σημείου, 327
πολικές συντεταγμένες, 931
πολυώνυμα
Bernstein, 315, 316
Hermite, 320
Laguerre, 321
Legendre, 323
συνάρτηση
e^{-x^2}, 337
γάμμα, 429
σφάλματος, 405
συντεταγμένες
καρτεσιανές, 21
καρτεσιανές παράλληλη μετατόπιση, 23
κυλινδρικές, 27, 648
πολικές, 25, 644
σφαιρικές, 28, 648, 997
συντεταγμένες καρτεσιανές
στροφή των αξόνων, 24
σύστημα συντεταγμένων
προσανατολισμός, 22
τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού, 141
υπερβολή
συζυγής, 82
υπερβολής, 80
φάσμα
γραμμικό πλάτους (linear spectrum), 579, 581–583, 592
φυσική ερμηνεία
Θεωρήματος του Gauss, 1029
επιφανειακού ολοκληρώματος, 1007

όγκος
από περιστροφή, 482, 488, 489, 496
σύστημα
γραμμικό
γενική μορφή, 222
μη ομογενές, 212
ομογενές, 212
ορισμός, 211
κανονικών εξισώσεων, 662, 665
μη γραμμικό, 211
συμβιβαστό, 69
συντεταγμένων
καρτεσιανό, 20
κυλινδρικό, 26
ορθογώνιο, 20
ορθοκανονικό, 32
πλαγιογώνιο, 22
πολικό, 25
σφαιρικό, 27
χαρακτηριστικό, 226

ταλάντωση
αρμονική
ελεύθερη, 749, 753, 756, 757
ελεύθερη με απόσβεση, 757
εξαναγκασμένη, 777
ταυτότητα
Euler, 146
τελεστής
Laplace
ορισμός, 888
διαφορικός
ορισμός, 874
παραγώγου
ν-τάξης, 277, 851
1ης, 276, 850
2ης, 277, 851
3ης, 277, 851
τελεστής Laplace
ορισμός, 643
συντεταγμένες
καρτεσιανές, 643
κυλινδρικές, 647
πολικές, 646
σφαιρικές, 647
τρίγωνο Pascal, 311
τύποι
Euler, 543, 564
τύπος
Cauchy-Hadamard, 546
de Moivre, 143
Euler, 165, 588
ημίτονο, 147
συνημίτονο, 147
Leibniz, 312
Maclaurin, 325, 551
Stirling, 428
Stokes, 1020
Taylor, 325, 551

υπερβολή, 79
άξονας
δευτερεύων, 81
πρωτεύων, 80
ασύμπτωτες, 81
βασικά στοιχεία, 80
διευθετούσες, 83
εκκεντρότητα, 81
εξίσωση
αναλυτική, 79
διανυσματική, 83
εφαπτομένης, 81
παραμετρική, 83
εστίες, 79
ιδιότητες, 80
ισοσκελής, 82
κέντρο, 81
ορισμός, 79
συζυγής, 81

φάσμα, 227
φάσεων (phase spectrum), 580

φαινόμενο Gibbs, 568, 571, 574, 585
φασματική ακτίνα, 227
φυσική ερμηνεία
    θεωρήματος
        Gauss, 1028
        Stokes, 1021
    ολοκληρώματος
        επιφανειακού, 1004
φόρτιση πυκνωτή, 743

Ευρετήριο Ξενόγλωσσων Ονομάτων

binomial (διωνυμικός)
    coefficient (συντελεστής), 308
    theorem (θεώρημα), 310

circle, 72
complex number (μιγαδικός αριθμός), 129
conic sections (κωνικές τομές), 86
coordinates (συντεταγμένες)
    cartesian (καρτεσιανές), 20
    curvilinear (καμπυλόγραμμες), 924
    cylindrical (κυλινδρικές), 26
    polar (πολικές), 25, 931
    spherical (σφαιρικές), 27
curl (στροβιλισμός), 891

del (διαφορικός τελεστής), 874
determinant (ορίζουσα), 197
    Jacobian, 924
differential equation (διαφορική εξίσωση), 687
    Bernoulli, 732
    characteristic equation (χαρακτηριστική εξίσωση), 693
    Euler multiplier (πολλαπλασιαστής), 709
    exact (ακριβής), 703
    explicit (αναλυτική), 694
    homogeneous (ομογενής), 691, 717
    initial value problem (πρόβλημα αρχικής τιμής), 694
    integrating factor (ολοκληρωτικός παράγων), 709
    linear (γραμμική), 691
    linear 1st order (τάξης), 723, 738
    linear 2nd order (τάξης), 747
    potential function (παράγουσα), 703
    Riccati, 735
    separation of variables (χωρισμένων μεταβλητών), 694
    trivial solution (ιδιάζουσα λύση), 695
directional derivative (κατευθυνόμενη παράγωγος), 869
divergence (απόκλιση), 887

eigenvalue (ιδιοτιμή), 225
eigenvector (ιδιοδιάνυσμα), 225
ellipse (έλλειψη), 74
    axes (άξονας), 76
    eccentricity (εκκεντρότητα), 76

field (πεδίο)
    conservative (συντηρητικό), 884
    scalar (βαθμωτό), 866
    vector (διανυσματικό), 867
    vortex (αστρόβιλο), 892
Fourier
    series (σειρά), 562
    transform (μετασχηματισμός), 592
function
    complex-valued, 161
    Dirac, 803
    error, 404

gamma, 427, 793
Heaviside, 794
real-valued, 97, 601
absolute extremes, 668
chain rule, 637
conditional extremes, 672
continuity, 257, 610
differentiation, 275
extremes, 649
limit, 235, 608
local extremes, 649
partial derivative, 613
unit impulse, 803
unit step, 794
vector-valued
continuity, 841
definition, 837
differentiation, 850
integration, 860
limit, 840

gradient (κλίση), 875

hyperbola (υπερβολή), 79
axes (άξονες), 80

integral (ολοκλήρωμα)
definite (ορισμένο), 385
Dirichlet, 407
double (διπλό), 897
definition (ορισμός), 901
evaluation (υπολογισμός), 903, 923
properties (ιδιότητες), 901
Fresnel, 405
improper (γενικευμένο), 410
indefinite (αόριστο), 351
linear (επικαμπύλιο), 963
applications (εφαρμογές), 984
definition (ορισμός), 963, 983
evaluation (υπολογισμός), 966
Green theorem (θεώρημα), 991
properties (ιδιότητες), 974
sine (ημιτονικό), 407
surface (επιφανειακό), 994
applications (εφαρμογές), 1013
definition (ορισμός), 1006
Gauss theorem (θεώρημα), 1026
Ostrogradsky theorem (θεώρημα), 1026
Stokes' theorem (θεώρημα), 1020
triple (τριπλό), 947
definition (ορισμός), 949
evaluation (υπολογισμός), 952
properties (ιδιότητες), 950

Lagrange multipliers (πολλαπλασιαστές), 673
Laplace
equation (εξίσωση), 889
transform (μετασχηματισμός)
definition (ορισμός), 781
inverse (αντίστροφος), 807
properties (ιδιότητες), 785
theorem (θεώρημα), 782
Laplacian operator (τελεστής), 889
Leibniz rule (κανόνας), 312
line (ευθεία), 55

matrix (πίνακας)
adjoint (συμπληρωματικός), 204
adjugate (συμπληρωματικός), 204
Algebra (Άλγεβρα), 180
cofactor (αλγεβρικό συμπλήρωμα), 203
definition (ορισμός), 175
diagonal (διαγώνιος), 189
Hermitian (Ερμιτιανός), 192
inverse (αντίστροφος), 205
nonsingular (αντιστρέψιμος), 205
Pauli, 196
positive (θετικός), 190
power (δύναμη), 187
singular (μη αντιστρέψιμος), 205
spectrum (φάσμα), 227
strictly diagonal (αυστηρά διαγώνιος), 189

symmetric (συμμετρικός), 190
transpose (ανάστροφος), 190, 192
triangular (τριγωνικός), 193
method (μέθοδος)
Cramer, 214
Gauss, 217
Lagrange, 673, 762
least squares (ελάχιστων τετραγώνων), 659

name (όνομα)
Agnesi, 441
Bézier, 317
Bernoulli, 447, 732
Bernstein, 314, 317
Bolzano, 261
Cauchy, 527
Cauchy-Hadamard, 546
Clairaut, 625
Cramer, 214
d'Alembert, 528, 538
de Moivre, 143
Dirac, 802
Dirichlet, 407, 784
Euler, 146, 165, 564, 588, 709
Fermat, 329
Fourier, 543, 564, 589
Fresnel, 405
Fubini, 903
Gauss, 141, 217, 1026, 1028
Gibbs, 568, 571, 574, 585
Green, 991
Heaviside, 794
Hermite, 319
Hooke, 756
Jacobi, 924
L'Hôpital, 300
Lagrange, 673, 724, 762
Laguerre, 321
Laplace, 198, 782, 888
Legendre, 323
Leibniz, 312
Maclaurin, 325, 328, 551
Newton, 756
Ostrogradsky, 1026
Pascal, 311
Pauli, 196
Riccati, 735
Riemann, 388
Rolle, 330
Schwarz, 625
Stirling, 428
Stokes, 1020
Taylor, 325, 551
Weierstrass, 536
normal equations, 662

parabola (παραβολή), 84
Pascal's triangle (τρίγωνο), 311
product (γινόμενο)
cross (εξωτερικό), 41
dot (εσωτερικό), 39
inner (εσωτερικό), 39
scalar (βαθμωτό), 39
triple (τριπλό ή μεικτό), 45
vector (διανυσματικό), 41
vector fundamental (θεμελιώδες), 999

sequence (ακολουθία), 501
series (σειρά)
Fourier, 562
definition (ορισμός), 564
evaluation (υπολογισμός), 565
even and odd function (άρτιων και περιττών), 582
exponential form (εκθετική μορφή), 588
Gibbs phenomenon (φαινόμενο), 568
spectrum (φάσμα), 576
theorem (θεώρημα), 563
functions (συναρτήσεις), 529
Maclaurin, 550

power (δυναμοσειρά), 545
real numbers (πραγματικών αριθμών), 520
Taylor, 550
trigonometric (τριγωνομετρική), 542
surface (επιφάνεια), 67
system (σύστημα)
linear (γραμμικό)
definition (ορισμός), 211
general (γενικής μορφής), 222

tangent plane (εφαπτόμενο επίπεδο), 629
transform (μετασχηματισμός)
endomorphism (ομογραφικός), 926
homorphism (ομογραφικός), 926
Laplace, 782
inverse (αντίστροφος), 782, 807
linear (γραμμικός), 925

vector (διάνυσμα), 29
fundamental (θεμελιώδες), 999