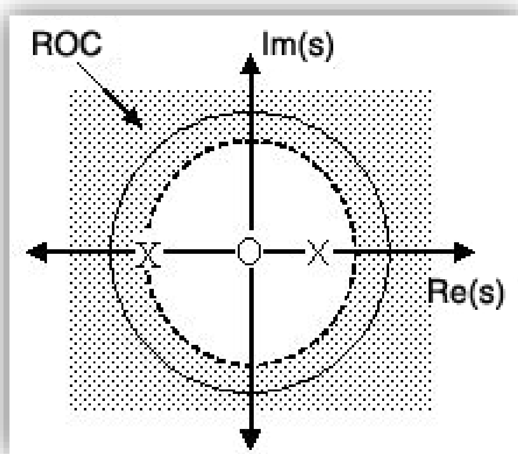
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΔΗΓΟΣ

Εργαστηριακή Άσκηση 03
«Μετασχηματισμός Laplace»



Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Οκτώβριος 2023

Έκδοση: 4.0

Πίνακας Περιεχομένων

Μετασχηματισμός Laplace

1. Στόχος Εργαστηριακού Μέρους

Σε αυτή το εργαστηριακό μέρος εξετάζουμε τον μετασχηματισμό Laplace, ο οποίος παράγει την περιγραφή ενός συστήματος στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας.

2. Προαπαιτούμενες Γνώσεις

Ενότητες 4.1 έως 4.11 του βιβλίου.

3. Μετασχηματισμός Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace «μεταφέρει» ένα σήμα $x(t)$ από το πεδίο του χρόνου t στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας s, όπου το s είναι ένας μιγαδικός αριθμός $s = \sigma + j\omega$, με σ και ω πραγματικούς αριθμούς. Ορίζουμε τον **αμφίπλευρο μετασχηματισμό Laplace** από τη σχέση:

$$L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st} dt = X(s)$$

Θέτοντας το κάτω όριο ολοκλήρωσης στο 0 έχουμε τον **μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace**.

Το υποσύνολο των τιμών του μιγαδικού επιπέδου s, για τις οποίες ο μετασχηματισμός Laplace συγκλίνει (απόλυτα ή υπό συνθήκες) ονομάζεται **περιοχή σύγκλισης** (Region of Convergence, ROC) του μετασχηματισμού και αποτελεί μέρος του υπολογισμού του μετασχηματισμού Laplace.

Ο συμβολισμός που χρησιμοποιούμε για τον μετασχηματισμό Laplace είναι: $X(s) = L\{x(t)\}$.

4. Πόλοι και Μηδενικά του Μετασχηματισμού Laplace

Έστω ότι ο μετασχηματισμός Laplace μίας συνάρτησης $x(t)$, εκφρασμένος σε ρητή μορφή, είναι:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_M S^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Τα $\alpha_n, n = 1,2, \dots, N$ και $b_m, m = 1,2, \dots, M$ είναι πραγματικοί αριθμοί (σταθερές) και οι βαθμοί των πολυωνύμων M και N είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Παραγοντοποιώντας αριθμητή και παρονομαστή, το παραπάνω κλάσμα μπορεί να γραφεί:

$$X(s) = \frac{b_0 (s - z_1)(s - z_2) \dots . (s - z_M)}{a_0 (s - p_1)(s - p_2) \dots . (s - p_N)} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{m=1}^{M} (s - z_k)}{\prod_{n=1}^{N} (s - p_k)}\, s^{M-N}$$

Οι τιμές του s που μηδενίζουν τον αριθμητή δηλαδή τα $z_1, z_2, \dots, z_M$, ονομάζονται **μηδενικά** (zeros), ενώ οι τιμές του s που μηδενίζουν τον παρονομαστή δηλαδή τα $p_1, p_2, \dots, p_N$, ονομάζονται **πόλοι** (poles) της συνάρτησης $X(s)$. Η αποτύπωση των πόλων και των μηδενικών σε διάγραμμα ονομάζεται **διάγραμμα πόλων – μηδενικών** (pole-zero map).

5. Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Δοθέντος του μετασχηματισμού Laplace «επιστρέφουμε» στο πεδίο του χρόνου με τον αντίστροφο Μετασχηματισμό Laplace, που εκφράζεται ως:

$$L^{-1}\{X(s)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma-j\infty} X(s)\, e^{st} ds$$

Για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace εφαρμόζεται (μεταξύ άλλων) η **μέθοδος του αναπτύγματος σε απλά κλάσματα** (ενότητα 3.13.1 του βιβλίου).

6. Υπολογισμός Laplace με εντολές laplace() & ilaplace()

Στο Matlab μπορούμε να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace μιας συμβολικής έκφρασης με τις εντολές `laplace()` και `ilaplace()`.

Παράδειγμα 1 – Υπολογισμός μετασχηματισμού Laplace

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των σημάτων $x_1(t) = e^{-t}$ και $x_2(t) = u(t)\cos(2\pi t)$.

```
clear all; syms t s                    X1(s) = 1/(s + 1)
x1(t) = exp(-t);
X1(s) = laplace(x1(t), s)
x2(t) = heaviside(t) * cos(2*pi*t);    X2(s) = s/(s^2 + 4*pi^2)
X2(s) = laplace(x2(t), s)
```

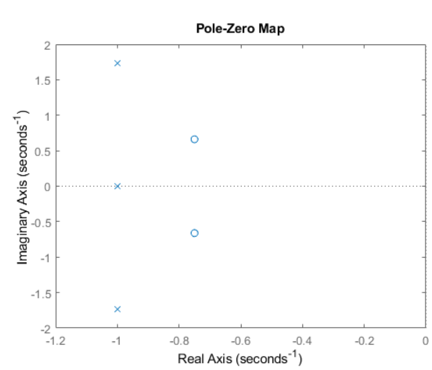
Παράδειγμα 2 – Πόλοι και Μηδενικά μετασχηματισμού Laplace

Να εξεταστεί εάν είναι ευσταθές το σύστημα που περιγράφεται από τον μετασχηματισμό Laplace:

$$H(s) = \frac{2s^2 + 3s + 2}{2s^3 + 6s^2 + 12s + 8}$$

```
num = [2 3 2];
den = [2 6 12  8];
poloi = roots(den)
pzmap(num, den)
```

```
poloi =
 - 1.0000 + 1.7321i
 - 1.0000 - 1.7321i
 - 1.0000 + 0.0000i
```



Επειδή όλοι οι πόλοι έχουν αρνητικό μέρος, το σύστημα είναι ευσταθές. Ακολουθεί το διάγραμμα πόλων-μηδενικών.

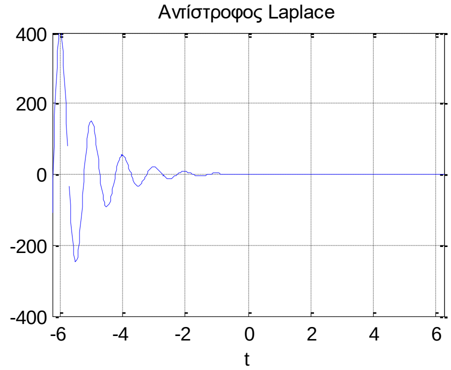
Παράδειγμα 3 – Υπολογισμός αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace

Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης ($\omega_0 = 2\pi$ και $\alpha = 1$):

$$X(s) = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_0^2}$$

```
clear all; syms t s
a = 1; w0 = 2*pi;
% Ορισμός συνάρτησης X(s)
X(s) = (s+a)/((s+a)^2 + w0^2);
% Υπολογισμός αντίστροφου Laplace
x(t) = ilaplace(X(s), t)
% Σχεδιασμός διαγράμματος
ezplot (x(t)); grid on
ylim([-400 400])
```

```
x(t) = exp(-t) *
cos((2778046668940015^(1/2)*t)/
8388608)
```



Παράδειγμα 4 – Υπολογισμός αντίστροφου μετ. Laplace με ανάπτυγμα σε απλά κλάσματα

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης (άσκηση 3.21 βιβλίου):

$$X(s) = \frac{s}{(s + 1)^3\,(s + 2)}$$

Απάντηση: Για την επίλυση του παραδείγματος απαιτείται η μελέτη της ενότητας 3.13.1. Ακολουθεί επίλυση με τη βοήθεια του Matlab και συγκεκριμένα με τη συνάρτηση **`residue()`**. Η συνάρτηση residue μετατρέπει μία ρητή συνάρτηση σε άθροισμα κλασμάτων και συντάσσεται ως εξής: **`[C,L,R] = residue(num, den)`** όπου num είναι το διάνυσμα των συντελεστών του πολυωνύμου του αριθμητή, den είναι το διάνυσμα των συντελεστών του πολυωνύμου του παρονομαστή, C και L είναι τα διανύσματα των συντελεστών C_i και λ_i, $i = 1, \dots N$ της σχέσης (3.49) και R είναι το πιθανό υπόλοιπο. Γράφουμε τη δοθείσα σχέση ως:

$$X(s) = \frac{s}{(s + 1)^3\,(s + 2)} = \frac{s}{s^4 + 5s^3 + 9s^2 + 7s + 2}$$

Δίνουμε στο Matlab τις ακόλουθες εντολές:

```
num = [1 0];
den = [1 5 9 7 2];
[C, L, R] = residue(num, den)
```

και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα:

```
C =              L =             R =
   2.0000          -2.0000            []
  -2.0000          -1.0000
   2.0000          -1.0000
  -1.0000          -1.0000
```

Παρατηρούμε ότι έχουμε δύο ρίζες, εκ των οποίων η μία είναι πολλαπλή (τριπλή). Επομένως, η συνάρτηση $X(s)$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων γράφεται:

$$X(s) = \frac{2}{s+2} - \frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3}$$

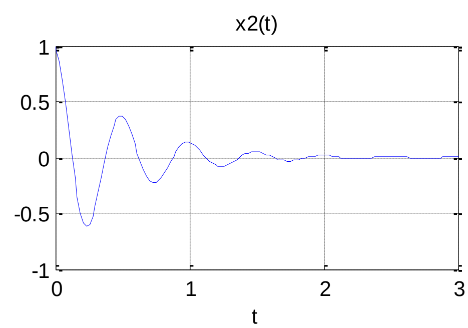
Άρα, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι το άθροισμα των αντίστροφων μετασχηματισμών κάθε επιμέρους κλάσματος και δίνεται από τη σχέση (4.35), δηλαδή:

$$x(t) = [2e^{-2t} - 2e^{-t} + 2\,t\,e^{-t} - \frac{t^2}{2}e^{-t}]\,u(t)$$

Παράδειγμα 5 – Υπολογισμός αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace

Να λυθεί το παράδειγμα 3 με τη μέθοδο του αναπτύγματος σε απλά κλάσματα:

```
clear all; syms t s
a = 1; W0 = 4*pi;
% Ορισμός συνάρτησης X(s)
X(s) = (s+a)/((s+a)^2+W0^2);
x(t) = simplify(ilaplace(X(s), t))
% Σχεδιασμός διαγράμματος
ezplot (x(t)); title('x(t)');
axis([0,3, -1, 1]); grid on
```



7. Επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με τον μετασχηματισμό Laplace

Η γενική μορφή μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (Δ.Ε.) είναι:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t)$$

Θα επιλύσουμε την Δ.Ε. χρησιμοποιώντας την ιδιότητα μετασχηματισμού Laplace της παραγώγου που δίνεται από τη σχέση:

$$L\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s * L\left\{\frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}}\right\} - x^n(0)$$

Για την επίλυση της Δ.Ε. η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η εξής:

1. Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της Δ.Ε.
2. Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace των παραγώγων.
3. Επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει ως προς το $Y(s)$.

4. Υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $Y(s)$ και βρίσκουμε την $y(t)$, η οποία είναι η ζητούμενη λύση της Δ.Ε.

Παράδειγμα 6 – Επίλυση ΓΕΔΣΣ με χρήση μετασχηματισμού Laplace

Να βρεθεί η λύση της διαφορικής εξίσωσης $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t}$, με αρχικές συνθήκες $y(0) = 2$ και $y'(0) = 3$.

`syms t s Y`
`% Αρχικές συνθήκες`
`y0 = 2; y10 = 3;`
`% Δεξί μέλος`
`x(t) = exp(-t);`
`X = laplace(x(t), s)`
	`X = 1/(s + 1)`

`Y1 = s*Y - y0` `Y2 = s*Y1 - y10`	`Y1 = Y*s - 2` `Y2 = s*(Y*s - 2) – 3`
`% Αριστερό μέλος` `G = Y2 + 3*Y1 + 2*Y - X`	`G =  2*Y + 3*Y*s - 1/(s + 1) + s*(Y*s - 2) – 9`

`% Επίλυση`
`Sol = solve(G, Y)`
`y(t) = ilaplace(Sol, t)`
	`Sol = (2*s + 1/(s + 1) + 9)/(s^2 + 3*s + 2)`
	`y(t) = 6*exp(-t) - 4*exp(-2*t) + t*exp(-t)`

`% Έλεγχος` `test_sol = diff(y(t),2) + 3*diff(y(t)) + 2*y(t) - x(t)`	`test_sol = 0`

8. Άλυτες ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t) = u(t)sin(2\pi t)$
2. Να εξεταστεί εάν είναι ευσταθές το σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 4}{s^3 - s^2 + 2s + 1}$$

3. Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:

$$\frac{\Omega_0}{(s+a)^2 + \Omega_0^2}$$

όπου $a = 1,\ \Omega_0 = 2\pi$.

4. Να βρεθεί με τη βοήθεια του Matlab η λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'(t) + 2\,y(t) = u(t)$, με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$.