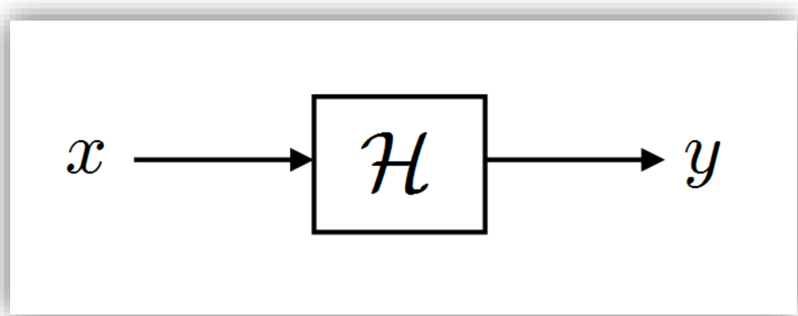
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΔΗΓΟΣ

Εργαστηριακή Άσκηση 2
«Συστήματα Συνεχούς Χρόνου»



Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Οκτώβριος 2023

Έκδοση: 4.0

Πίνακας Περιεχομένων

Μέρος Α’: Είδη Συστημάτων

1. Στόχος Εργαστηριακού Μέρους

Στόχος του εργαστηριακού μέρους είναι η κατανόηση βασικών ιδιοτήτων των συστημάτων, όπως η αιτιότητα, η γραμμικότητα, η ευστάθεια και η χρονική μεταβλητότητα, με τη βοήθεια του Matlab.

2. Προαπαιτούμενες Γνώσεις

Ενότητα 2.5 του βιβλίου.

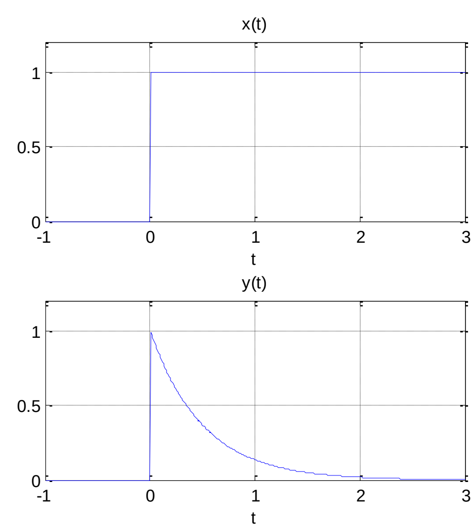
3. Αιτιότητα

Ένα σύστημα είναι **αιτιατό** (causal) όταν η παρούσα τιμή της εξόδου του δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου. Δηλαδή, η έξοδος $y(t)$ εξαρτάται μόνο από την παρούσα και από τις προηγούμενες τιμές της εισόδου $x(t)$.

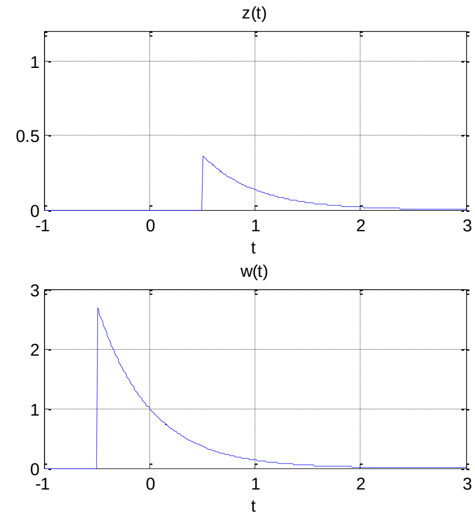
Παράδειγμα 1 – Μελέτη αιτιότητας συστημάτων

Να εξετάσετε εάν τα συστήματα με σχέσεις εισόδου - εξόδου $y(t) = e^{-2t}x(t)$, $z(t) = e^{-2t}x(t-0.5)$ και $w(t) = e^{-2t}x(t+0.5)$ είναι αιτιατά ή όχι. Για τη μελέτη σας θεωρήστε είσοδο το αιτιατό σήμα $x(t) = u(t)$.

```
clear all; syms t

u(t) = heaviside(t);
x(t) = u(t);
y(t) = exp(-2*t) * x(t);
z(t) = exp(-2*t) * x(t-0.5);
w(t) = exp(-2*t) * x(t+0.5);

figure(1)
subplot(211);
ezplot( x(t), [-1 3] ); title('x(t)')
ylim([0 1.2]); grid on

subplot(212);
ezplot( y(t), [-1 3] ); title('y(t)')
ylim([0 1.2]); grid on
```



```
figure(2)
subplot(211);
ezplot( z(t), [-1 3] ); title('z(t)')
ylim([0 1.2]); grid on

subplot(212);
ezplot( w(t), [-1 3] ); title('w(t)')
ylim([0 3]); grid on
```



Παρατηρούμε ότι τα δύο πρώτα συστήματα είναι αιτιατά, ενώ το τρίτο είναι μη-αιτιατό.

4. Γραμμικότητα

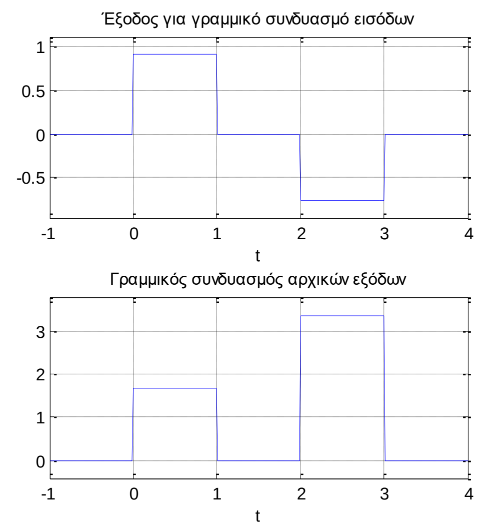
Ένα σύστημα που βρίσκεται σε αρχική ηρεμία ονομάζεται **γραμμικό** (linear), όταν και μόνον όταν δοθέντων δύο σημάτων εισόδου $x_1(t)$ και $x_2(t)$, ισχύει η σχέση (a_1 και $a_2 \in$R):

$$S[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = a_1 S[x_1(t)] + a_2 S[x_2(t)]$$

Παράδειγμα 2 – Μελέτη γραμμικότητας συστημάτων

Να εξετάσετε εάν το σύστημα με σχέση εισόδου – εξόδου $y(t) = sin[\,x(t)]$ είναι γραμμικό. Για σήματα εισόδου θεωρήστε τα $x_1(t) = u(t) - u(t-1)$ και $x_2(t) = u(t-2) - u(t-3)$ και συντελεστές $a_1 = 2$ και $a_2 = 4$.

```
clear all; syms t
u(t) = heaviside(t);
a1 = 2; a2 = 4;
x1(t) = u(t) - u(t-1);
x2(t) = u(t-2) - u(t-3);
y1(t) = sin(x1(t));
y2(t) = sin(x2(t));
% Υπολογισμός γραμμικού συνδυασμού εισόδων
x(t) = a1*x1(t) + a2*x2(t);
% Υπολογισμός εξόδου για γραμμικό συνδυασμό
εισόδων
y(t) = sin(x(t));
% Υπολογισμός γραμμικού συνδυασμού εξόδων
yy(t) = a1*y1(t) + a2*y2(t);
subplot(211);
ezplot( y(t), [-1 4] ); grid on
title('Έξοδος για γραμμικό συνδυασμό εισόδων');
subplot(212);
ezplot( yy(t), [-1 4] ); grid on
title('Γραμμικός συνδυασμός αρχικών εξόδων');
```



Από τη σύγκριση των παραπάνω σχημάτων προκύπτει ότι το σύστημα δεν είναι γραμμικό.

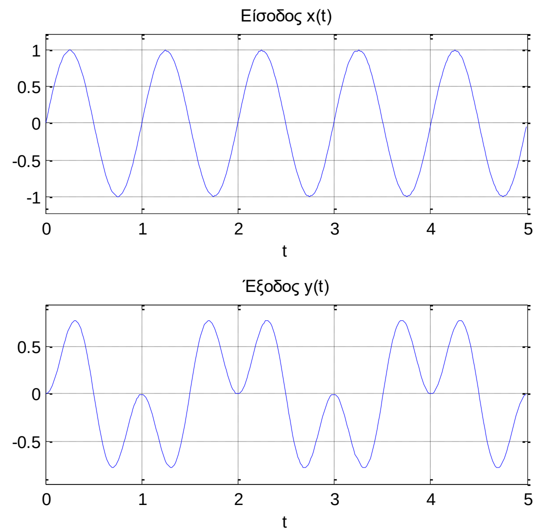
5. Ευστάθεια

Ένα σύστημα ονομάζεται **ευσταθές** όταν για μια φραγμένη είσοδο παράγει μια φραγμένη έξοδο (ΦΕΦΕ). Μαθηματικά ορίζεται ως εξής: Εάν υπάρχει θετικός αριθμός $M < \infty$ για τον οποίο ισχύει $|x(t)| \leq M$, τότε θα πρέπει να υπάρχει θετικός αριθμός $N < \infty$ για τον οποίο να ισχύει $|y(t)| \leq N$, ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές.

Παράδειγμα 3 – Μελέτη ευστάθειας συστημάτων

Να ελέγξετε αν το σύστημα $y(t) = x(t)\, sin(\pi t)$ είναι ευσταθές ή όχι. Χρησιμοποιήστε για είσοδο το φραγμένο σήμα $x(t) = sin(2\pi t)$.

```
clear all; syms t
x(t) = sin(2*pi*t);
y(t) = x(t) * sin(pi*t);

subplot(211);
ezplot( x(t), [0 5] );
grid on
title('Είσοδος x(t)');

subplot(212);
ezplot( y(t), [0 5] );
grid on
title('Έξοδος y(t)');
```



Από τη σύγκριση των δύο γραφημάτων, προκύπτει ότι για φραγμένη είσοδο παράγεται φραγμένη έξοδος, οπότε το σύστημα είναι ευσταθές κατά BIBO (Bounded Input Bounded Output).

6. Χρονική Μεταβλητότητα

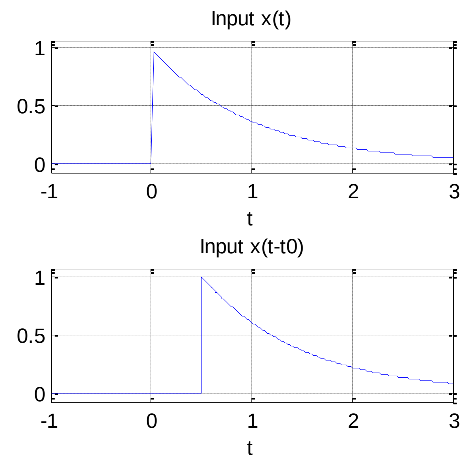
Ένα σύστημα λέγεται **χρονικά αμετάβλητο** (time invariant) ή **χρονικά σταθερό ή χρονικά αναλλοίωτο**, όταν και μόνον όταν χρονικές ολισθήσεις του σήματος εισόδου $x(t)$ μεταφράζονται σε *αντίστοιχες* χρονικές ολισθήσεις στο σήμα εξόδου $y(t)$.

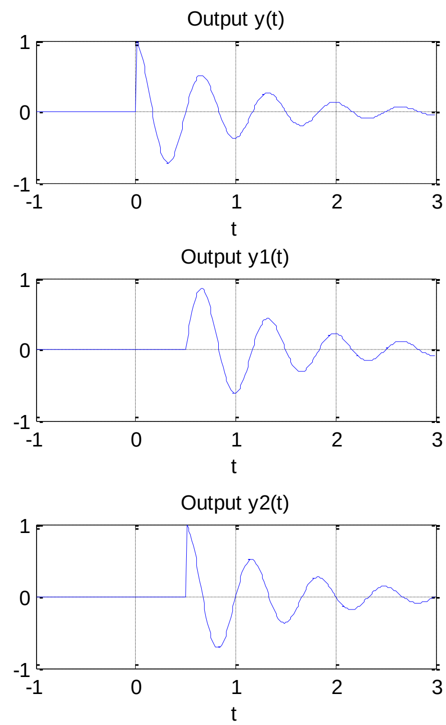
Παράδειγμα 4 – Μελέτη χρονικής μεταβλητότητας συστημάτων

Να εξετάσετε αν είναι χρονικά αμετάβλητο το σύστημα με σχέση εισόδου – εξόδου $y(t) = x(t)\cos(\Omega_0 t)$.

Θεωρείστε σήμα δοκιμής $x(t) = e^{-t}\, u(t)$, συχνότητα $\Omega_0 = 3\pi$ και χρονική ολίσθηση $t_0 = 0.5$.

```
clear all; syms t
t0 = 0.5;
W0 = 3*pi;
u(t) = heaviside(t);
x(t) = exp(-t) * u(t);
y(t) = x(t) * cos( W0*t );

% Έξοδος για χρονικά ολισθημένη είσοδο
y1(t) = x(t-t0) * cos( W0*t );
% Χρονικά ολισθημένη έξοδος
y2(t) = y(t-t0);

figure(1)
subplot(211);
ezplot( x(t),[-1,3] );
title('Input x(t)'); grid on;

subplot(212);
ezplot(x(t-t0),[-1,3]);
title('Input x(t-t0)'); grid on

figure(2)
subplot(311);
ezplot(y(t),[-1,3]); grid on
title('Output y(t)'); ylim([-1 1]);

subplot(312);
ezplot(y1(t),[-1,3]); grid on
title('Output y1(t)'); ylim([-1 1]);

subplot(313);
ezplot(y2(t),[-1,3]); grid on
title('Output y2(t)'); ylim([-1 1]);
```

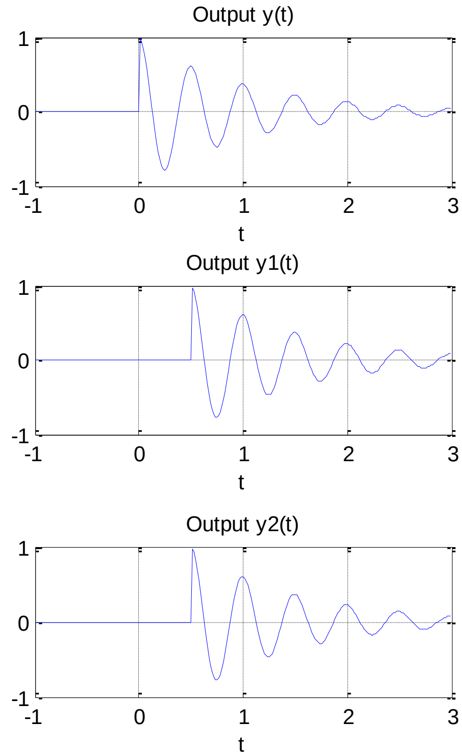




Παρατηρούμε ότι η έξοδος $y_1(t)$ (για είσοδο την $x(t-t_0)$) <u>δεν ταυτίζεται</u> με την έξοδο $y_2(t)$ (μετατοπισμένη έξοδος κατά t_0), οπότε το σύστημα είναι χρονικά μεταβαλλόμενο.

Επαναλάβατε για $\Omega_0 = 4\pi$. Τι παρατηρείτε;

<u>Απάντηση</u>: Εκτελώντας τον προηγούμενο κώδικα για `W0 = 4*pi` λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα σε ότι αφορά την έξοδο $y(t)$.



Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή η έξοδος $y_1(t)$ (για είσοδο την $x(t-t_0)$) ταυτίζεται με την έξοδο $y_2(t)$ (μετατοπισμένη έξοδος κατά t_0), οπότε το σύστημα δείχνει να είναι χρονικά αμετάβλητο. Ωστόσο επειδή αυτό δεν ισχύει για όλα τα Ω_0 συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι **χρονικά μεταβαλλόμενο**.

7. Άλυτες Ασκήσεις

1. Να εξετάσετε εάν το σύστημα με σχέση εισόδου-εξόδου $y(t) = x(|t|)$ είναι αιτιατό ή όχι. Για τη μελέτη σας θεωρήστε είσοδο $x(t) = t \cdot u(t)$.

2. Να εξετάσετε εάν το σύστημα με σχέση εισόδου – εξόδου $y(t) = dx(t) \,/\, dt$ είναι γραμμικό. Για εισόδους θεωρήστε τα $x_1(t) = \sin(\pi t)$ και $x_2(t) = 2\sin(2\pi t)$ και συντελεστές $a_1 = 2$ και $a_2 = 4$.

3. Να ελέγξετε αν το σύστημα με σχέση εισόδου - εξόδου $y(t) = \ t\, e^{x(t)}$ είναι ευσταθές ή όχι. Χρησιμοποιήστε είσοδο $x(t) = \sin(\pi t)$.

4. Να εξετάσετε αν το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου $y(t) = cos[x(t)]$ είναι χρονικά αμετάβλητο ή όχι. Θεωρείστε σήμα δοκιμής $x(t) = e^{-t}\, u(t)$ και χρονική ολίσθηση $t_0 = 1$.

Μέρος Β': Συνέλιξη – Συνδεσμολογίες Συστημάτων

1. Στόχος εργαστηριακού μέρους

Σε αυτό το μέρος θα υπολογίσουμε τη συνέλιξη δύο σημάτων με διάφορους τρόπους, με κυριότερο τη χρήση της συνάρτησης conv(). Επίσης, θα μελετήσουμε συνδεσμολογίες συστημάτων.

2. Προαπαιτούμενες Γνώσεις

Ενότητες 2.6.2 και 2.6.3 του βιβλίου.

3. Θεωρητικός Υπολογισμός Συνέλιξης

Η απόκριση ενός γραμμικά χρονικά αμετάβλητου (ΓΧΑ) συστήματος σε οποιαδήποτε διέγερση της εισόδου υπολογίζεται από τη συνέλιξη του σήματος εισόδου $x(t)$ με την κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος. Η μαθηματική σχέση που αναπαριστά τη συνέλιξη είναι η ακόλουθη:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Συμβολικά γράφεται ως:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

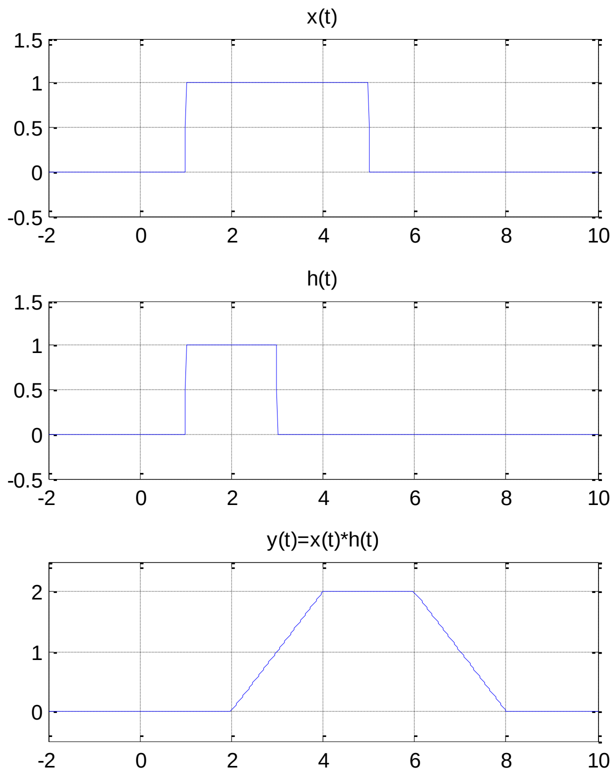
4. Υπολογισμός Συνέλιξης στο Matlab

Παράδειγμα 1 – Υπολογισμός συνέλιξης με συμβολικές μεταβλητές

Να υπολογίσετε τη συνέλιξη $y(t) = x(t) * h(t)$ για τα σήματα συνεχούς χρόνου $x(t) = u(t-1) - u(t-5)$ και $h(t) = u(t-1) - u(t-3)$, με χρήση συμβολικών μεταβλητών.

```
clear all; syms t r
u(t) = heaviside(t);
x(t) = u(t-1) - u(t-5);
h(t) = u(t-1) - u(t-3);

y(t) = int(h(t-r)*x(r), r, -inf, inf);

ty = -2 : 0.01 : 10;
x = subs(x(t), t, ty);
h = subs(h(t), t, ty);
y = subs(y(t), t, ty);

subplot(311), plot(ty, x),
```

```
ylim([-0.5 1.5]), grid on, title('x(t)');
subplot(312), plot(ty, h),
ylim([-0.5 1.5]), grid on, title('h(t)');
subplot(313), plot(ty, y),
ylim([-0.5 1.5]), grid on, title('y(t)=x(t)*h(t)');
```



Παράδειγμα 2 – Υπολογισμός συνέλιξης με το εργαλείο cconvdemo

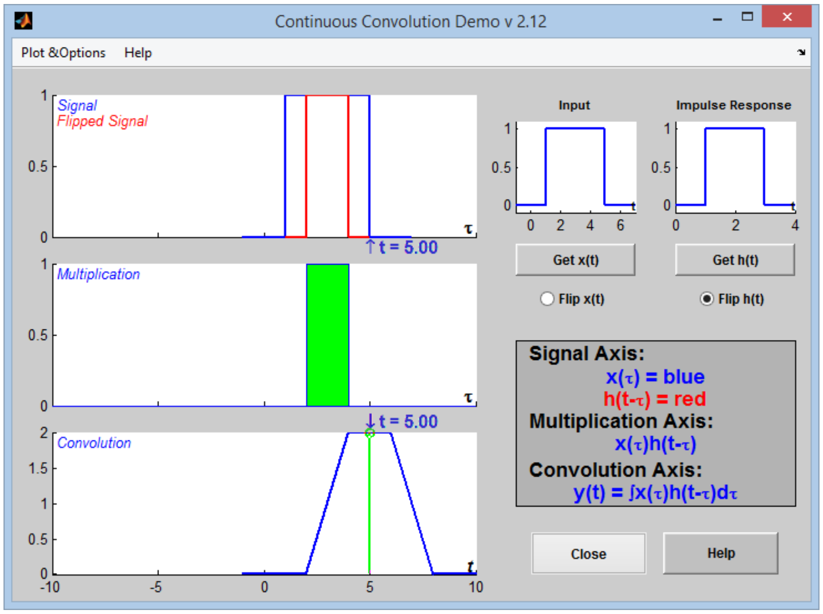
Στο παράδειγμα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το «Continuous Convolution Demo», το οποίο είναι ένα πρόγραμμα γραμμένο σε Matlab που οπτικοποιεί τη διαδικασία της συνέλιξης σημάτων συνεχούς χρόνου.

Βήμα 1 Κατεβάστε το **Continuous Convolution Demo** από τη διαδικτυακή διεύθυνση https://dspfirst.gatech.edu/matlab/

Βήμα 2 Αποσυμπιέστε το αρχείο **cconvdemo-v218.zip** στον τρέχοντα φάκελο του MATLAB.

Βήμα 3 Εκτελέστε το αρχείο **cconvdemo.m**

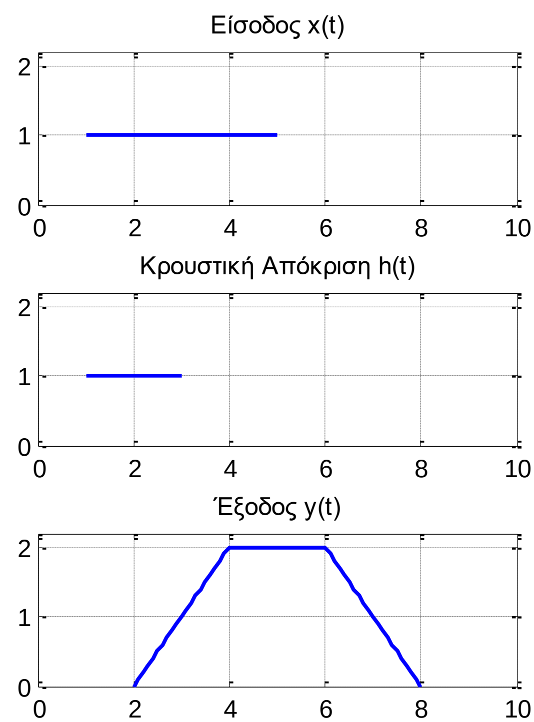
Βήμα 4 Επαληθεύστε τη συνέλιξη των σημάτων του Παραδείγματος 1.



Παράδειγμα 3 – Υπολογισμός συνέλιξης με τη συνάρτηση conv()

Να υπολογίσετε τη συνέλιξη του Παραδείγματος 1 με τη συνάρτηση `conv()`.

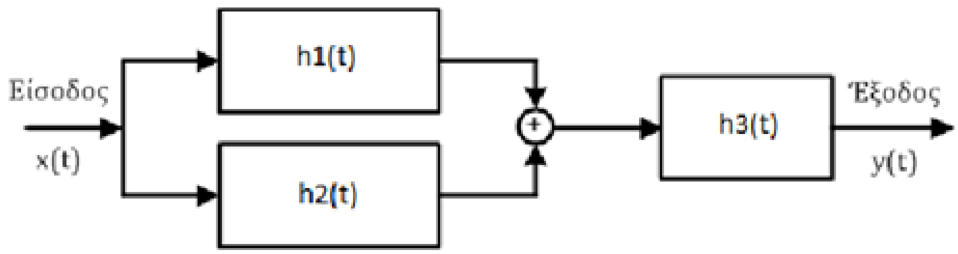
```
% Δημιουργία κλιμάκων χρόνου
Step = 0.1;
th = 1 : Step : 3;
tx = 1 : Step : 5;

% Δημιουργία σημάτων x(t) και h(t)
h = ones(1, length(th));
x = ones(1, length(tx));

% Υπολογισμός συνέλιξης
y = conv(x, h) .* Step - Step;

% Δημιουργία κλίμακας χρόνου σήματος εξόδου
ty = min(tx) + min(th) : Step : max(tx) +
max(th);

% Σχεδιασμός διαγραμμάτων
subplot(311);
plot(tx, x, 'LineWidth', 2);
grid on; axis([0, 10, 0, 2.2]);
title('Είσοδος x(t)')
subplot(312);
plot(th, h, 'LineWidth', 2);
grid on; axis([0, 10, 0, 2.2]);
title('Κρουστική Απόκριση h(t)')
subplot(313);
plot(ty, y, 'LineWidth', 2);
grid on; axis([0, 10, 0, 2.2]);
title('Έξοδος y(t)')
```



5. Συνδεσμολογίες Συστημάτων

Παράδειγμα 4 – Υπολογισμός ισοδύναμης κρουστικής απόκρισης και εξόδου συνδεσμολογίας συστημάτων

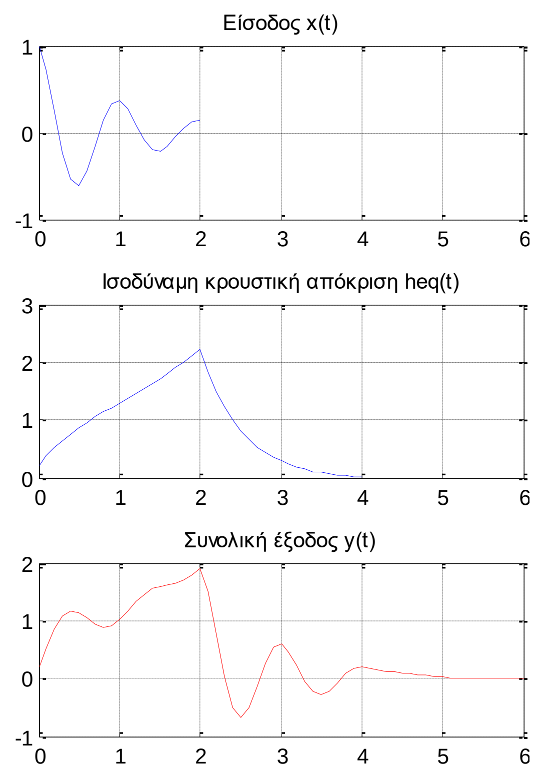
Να υπολογίσετε την ισοδύναμη κρουστική απόκριση και την έξοδο $y(t)$ για την παρακάτω συνδεσμολογία συστημάτων:



Δίνεται ότι: $x(t) = \cos(2\pi t)\, e^{-t}\, [u(t) - u(t-2)]$, $h1(t) = u(t) - u(t-2)$,

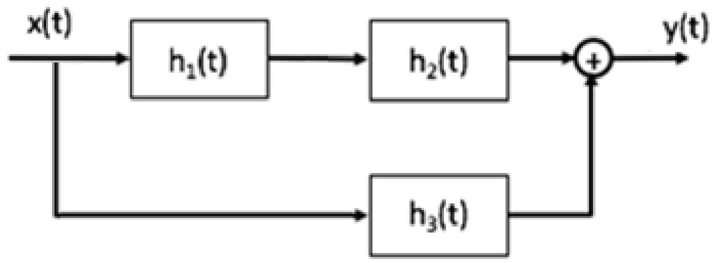
$h2(t) = 0.5^{-t}\, [u(t) - u(t-2)]$ και $h3(t) = e^{-2t}[u(t) - u(t-2)]$.

```
Step = 0.1;
% Δημιουργία κλίμακας χρόνου
t = 0 : Step : 2;
% Δημιουργία σημάτων x(t), h1(t), h2(t), h3(t)
x = cos(2*pi*t) .* exp(-t) .* ones(1,length(t));
h1 = ones(1, length(t));
h2 = 0.5.^(-t) .* ones(1, length(t));
h3 = exp(-2*t) .* ones(1, length(t));
% Υπολογισμός ισοδύναμης κρουστικής απόκρισης
heq = conv(h1+h2, h3) * Step;
% Υπολογισμός εξόδου y(t) = x(t) * h(t)
tt = 0 : Step : 2*max(t);
ty = 0 : Step : 3*max(t);
y = conv(heq, x);
% Σχεδιασμός διαγραμμάτων
subplot(311); plot(t, x);
title('Είσοδος x(t)'); xlim([0 6]); grid on
subplot(312); plot(tt, heq);
title('Ισοδύναμη κρουστική απόκριση heq(t)');
xlim([0 6]); grid on
subplot(313); plot(ty, y, 'r');
title('Συνολική έξοδος y(t)');
xlim([0 6]); grid on
```



6. Άλυτες Ασκήσεις

1. Υπολογίστε με χρήση συμβολικών μεταβλητών τη συνέλιξη $y(t) = x(t) * h(t)$ για τα σήματα $x(t) = u(t) - u(t-2)$ και $h(t) = e^{-t}[u(t) - u(t-2)]$.
2. Υπολογίστε με την εφαρμογή Convolution Demo 1 τη συνέλιξη για $x(t) = u(t) - u(t-4)$ και $h(t) = \sin(\pi t) * (u(t) - u(t-4))$
3. Υπολογίστε την συνέλιξη ενός οποιουδήποτε συστήματος με τη συνάρτηση Dirac. Τι συμπεραίνετε;
4. Να υπολογίσετε με τη συνάρτηση conv() τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = u(t) - u(t-2)$ και $h(t) = e^{-(t-1)}[u(t-1) - u(t-4)]$.
5. Να υπολογίσετε την ισοδύναμη κρουστική απόκριση και την έξοδο $y(t)$ για την παρακάτω συνδεσμολογία συστημάτων:

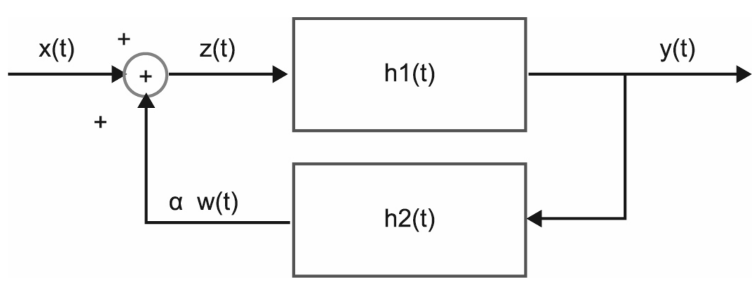


Δίνονται:

$h_1(t) = 4\,cos(2\pi t) \cdot e^{-t} \cdot [u(t) - u(t-3)]$, $h_2(t) = e^{-4t} \cdot [u(t) - u(t-3)]$,

$h_3(t) = u(t) - u(t-3)$ και $x(t) = u(t) - u(t-3)$

6. Να επιλυθεί η προηγούμενη άσκηση με χρήση συμβολικών μεταβλητών. Τι παρατηρείτε;
7. Να υπολογίσετε την ισοδύναμη κρουστική απόκριση και την έξοδο $y(t)$ για την παρακάτω συνδεσμολογία συστημάτων:



Δίνονται:

$h_1(t) = e^{-2t}\cos(4\pi t)\ [u(t) - u(t-2)]$, $h_2(t) = e^{-t}[u(t) - u(t-2)]$

$x(t) = sin(5\pi t)\,[u(t) - u(t-2)]$, $a = -2$ (αρνητική ανάδραση)