Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Πάτρα, 07.02.2023

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ: **ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**

Πρόγραμμα Σπουδών ΗΜΜΥ (Πανεπιστήμιο)

Ομάδα 1

ΘΕΜΑ 1 (2 μονάδες)

Να διερευνήσετε αν τα παρακάτω σήματα είναι περιοδικά και σε θετική περίπτωση να υπολογίσετε την περίοδο καθενός από αυτά:

(α) $x(t) = \cos(300\pi t) + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t-n)$ **[1]** (β) $x(t) = \cos(300t) + \cos(300\pi t)$ **[1]**

(α) Γράφουμε το σήμα στη μορφή:

$$x(t) = \cos(150 \times 2\pi t) + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t-n)$$

Οι περίοδοι των επιμέρους περιοδικών όρων του αθροίσματος είναι:

$$T_1 = \frac{1}{150} sec \qquad \text{και} \qquad T_2 = 1\, sec$$

Ο λόγος των περιόδων είναι:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{(1/150)}{1} = \frac{1}{150}$$

και είναι ρητός. Άρα το σήμα είναι **περιοδικό** με περίοδο $T = 150T_1 = T_2 = 1\, sec$.

(β) Γράφουμε το σήμα στη μορφή:

$$x(t) = \cos\left(\frac{150}{\pi} \times 2\pi t\right) + \cos(150 \times 2\pi t)$$

Οι περίοδοι των επιμέρους περιοδικών όρων του αθροίσματος είναι:

$$T_1 = \frac{\pi}{150} sec \qquad \text{και} \qquad T_2 = \frac{1}{150} sec$$

Ο λόγος των περιόδων είναι:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{(\pi/150)}{(1/150)} = \pi$$

και είναι **άρρητος**. Άρα το σήμα **δεν είναι περιοδικό**.

ΘΕΜΑ 2 (2 μονάδες)

Να εξετάσετε αν είναι: (α) γραμμικό ή μη-γραμμικό **[1]**, (β) χρονικά μεταβαλλόμενο ή αμετάβλητο **[1]**, το σύστημα συνεχούς χρόνου:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t)$$

(α) Για εισόδους $x_1(t)$ και $x_2(t)$ παράγονται οι έξοδοι $y_1(t)$ και $y_2(t)$ και ικανοποιούνται οι ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + 6y_1(t) = x_1(t) \qquad \text{και} \qquad \frac{dy_2(t)}{dt} + 6y_2(t) = x_2(t)$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη διαφορική εξίσωση με μία σταθερή α_1 και τη δεύτερη με μια σταθερή α_2 και λαμβάνουμε:

$$\alpha_1 \frac{dy_1(t)}{dt} + 6\alpha_1 y_1(t) = \alpha_1 x_1(t) \Rightarrow \frac{d[\alpha_1 y_1(t)]}{dt} + 6\alpha_1 y_1(t) = \alpha_1 x_1(t)$$

και

$$\alpha_2 \frac{dy_2(t)}{dt} + 6\alpha_2 y_2(t) = \alpha_2 x_2(t) \Rightarrow \frac{d[\alpha_2 y_2(t)]}{dt} + 6\alpha_2 y_2(t) = \alpha_2 x_2(t)$$

Προσθέτοντας κατά μέλος τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε:

$$\frac{d[\alpha_1 y_1(t)]}{dt} + \frac{d[\alpha_2 y_2(t)]}{dt} + 6\alpha_1 y_1(t) + 6\alpha_2 y_2(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

Επομένως:

$$\frac{d[\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)]}{dt} + 6\big(\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)\big) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

Θέτοντας ως $x(t)$ τη συνδυασμένη είσοδο των $x_1(t)$ και $x_2(t)$:

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

και ως $y(t)$ τη συνδυασμένη έξοδο των $y_1(t)$ και $y_2(t)$:

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t)$$

Επομένως, η διαφορική εξίσωση ικανοποιείται από τη συνδυασμένη είσοδο $x(t)$ και τη συνδυασμένη έξοδο $y(t)$. Άρα το σύστημα είναι **γραμμικό**.

ΘΕΜΑ 3 (2 μονάδες)

Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει κρουστική απόκριση $h(t) = \delta'(t) + \delta(t) - e^{-2t}u(t)$. Για να λάβουμε έξοδο $y(t) = e^{-t}u(t)$ ποια είσοδο $x(t)$ πρέπει να εφαρμόσουμε; **[2]**

Με μετασχηματισμό Laplace υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος από την κρουστική απόκριση $h(t)$:

$$H(s) = s + 1 - \frac{1}{s+2} = \cdots = \frac{s^2 + 3s + 1}{s+2} \qquad \text{Περιοχή σύγκλισης:} \quad Re(s) > -2$$

Ο μετασχηματισμός Laplace $Y(s)$ της εξόδου $y(t) = e^{-t}u(t)$ είναι:

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

Υπολογίζουμε το $X(s)$ από τη σχέση:

$$X(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{s^2+3s+1}{s+2}} = \frac{(s+2)}{(s^2+3s+1)(s+1)} = \frac{(s+2)}{(s+1)(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε έναν διπλό πραγματικό πόλο στο $s = -1$. Από τη θέση του πόλου προκύπτουν οι πιθανές περιοχές σύγκλισης: $Re(s) < -1$ και $Re(s) > -1$. Από τον πίνακα της σελ. 128 για το σήμα εισόδου $x(t)$ βρίσκουμε:

(α) Για $Re(s) < -1$, το σήμα είναι αριστερής πλευράς:

$$x(t) = -t\, e^{-t}u(-t)$$

(β) Για $Re(s) > -1$, το σήμα είναι δεξιάς πλευράς:

$$x(t) = t\, e^{-t}u(t)$$

ΘΕΜΑ 4 (2 μονάδες)

Να υπολογίσετε: (α) την κρουστική και (β) τη βηματική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος που έχει συνάρτηση μεταφοράς **[2]**:

$$H(S) = \frac{s-1}{s^2+6s+8}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου για βηματική είσοδο είναι:

$$Y(s) = X(s)\,H(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{s-1}{s(s^2+6s+8)} = \frac{s-1}{s(s+2)(s+4)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+2} + \frac{C_3}{s+4}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές:

$$C_1 = \lim_{s\to 0} \frac{1}{(s+2)(s+4)} = \cdots = -\frac{1}{8} \qquad C_2 = \lim_{s\to -2} \frac{1}{s(s+4)} = \cdots = \frac{3}{4} \qquad C_3 = \lim_{s\to -4} \frac{1}{s(s+2)} = \cdots = \frac{5}{8}$$

Άρα:

$$Y(s) = -\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{5}{8}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$

Επομένως η βηματική απόκριση είναι:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = -\frac{1}{8}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{3}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{5}{8}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} = \left[-\frac{1}{8} + \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{5}{8}e^{-4t}\right]u(t)$$

Η κρουστική απόκριση ισούται με την πρώτη παράγωγο της βηματικής απόκρισης, δηλαδή είναι:

$$h(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \left(\frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{5}{8}e^{-4t}\right)u(t) + \left(-\frac{1}{8} + \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{5}{8}e^{-4t}\right)\delta(t)$$

ΘΕΜΑ 5 (2 μονάδες)

(α) Να υπολογιστεί με τον μετασχηματισμό Laplace η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος που είναι σε αρχική ηρεμία και έχει ΓΔΕΣΣ **[1,5]**:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

(β) Το σύστημα είναι ευσταθές ή ασταθές; Εξηγήστε. **[0,5]**

(α) Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace των δύο μελών της ΓΔΕΣΣ και λύνουμε ως προς $Y(s)$:

$$[s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-)] - [sY(s) - y(0^-)] - 2Y(s) = X(s)$$
$$\Rightarrow s^2Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s)$$
$$\Rightarrow Y(s)[s^2 - s - 2] = X(s)$$
$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)} = \frac{C_1}{(s+1)} + \frac{C_2}{(s-2)}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές:

$$C_1 = \lim_{s\to -1} \frac{1}{(s-2)} = \cdots = -\frac{1}{3} \qquad C_2 = \lim_{s\to -2} \frac{1}{(s+1)} = \cdots = -1$$

Άρα:

$$Y(s) = \left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s-2)}$$

Και η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(t) = \left[-\frac{1}{3}e^{-t} - e^{2t}\right]u(t)$$

(β) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-2) = 0$$

Άρα οι ρίζες είναι $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 2$. Επειδή υπάρχει ρίζα στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο, το σύστημα είναι **ασταθές**. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν παρατηρήσουμε ότι ο εκθέτης του όρου e^{2t} είναι θετικός αριθμός.

Ομάδα 2

ΘΕΜΑ 1 (2 μονάδες)

Να διερευνήσετε αν τα παρακάτω σήματα είναι περιοδικά και σε θετική περίπτωση να υπολογίσετε την περίοδο καθενός από αυτά:

(α) $x(t) = \cos(300\pi t) + \cos(600\pi t)$ **[1]** (β) $x(t) = \cos(300\pi t)\, u(t)$ **[1]**

(α) Γράφουμε το σήμα στη μορφή:

$$x(t) = \cos(150 \times 2\pi t) + \cos(300 \times 2\pi t)$$

Οι περίοδοι των επιμέρους περιοδικών όρων του αθροίσματος είναι:

$$T_1 = \frac{1}{150} sec \qquad \text{και} \qquad T_2 = \frac{1}{300}\ sec$$

Ο λόγος των περιόδων είναι:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{(1/150)}{(1/300)} = \frac{300}{150} = \frac{2}{1}$$

και είναι ρητός. Άρα το σήμα είναι **περιοδικό** με περίοδο $T = 1/150\ sec$.

(β) Το σήμα **δεν είναι περιοδικό** επειδή η ύπαρξη της συνάρτησης $u(t)$ δεν ικανοποιεί την απαίτηση της άπειρης διάρκειας $-\infty < t < \infty$ του σήματος.

ΘΕΜΑ 2 (2 μονάδες)

Να ελέγξετε ως προς την ασυμπτωτική ευστάθεια το σύστημα: **[2]**

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

Άρα οι ρίζες είναι $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 2$. Επειδή υπάρχει ρίζα στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο, το σύστημα είναι **ασταθές**. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν παρατηρήσουμε ότι ο εκθέτης του όρου e^{2t} είναι θετικός αριθμός.

ΘΕΜΑ 3 (2 μονάδες)

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:

$$X(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 12s - 4}{s^2 + 3s + 2}$$

με περιοχή σύγκλισης $\sigma > -2$ **[1.5]** Πως αλλάζει το αποτέλεσμα για περιοχή σύγκλισης $\sigma < -1$; **[0.5]**

Επειδή ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρονομαστή, εφαρμόζουμε μακρά διαίρεση και βρίσκουμε:

$$X(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 12s - 4}{s^2 + 3s + 2} = \cdots = s + 4 - \frac{2(s+6)}{(s+1)(s+2)} = s + 4 + \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+2}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές:

$$C_1 = \lim_{s \to -1} \frac{2(s+6)}{(s+2)} = \cdots = -10 \qquad C_2 = \lim_{s \to -2} \frac{2(s+6)}{(s+1)} = \cdots = -8$$

Άρα:

$$X(s) = s + 4 - \frac{10}{s+1} + \frac{8}{s+2}$$

Έχουμε δύο πραγματικούς πόλους στις θέσεις $s = -1$ και $s = -2$. Εφόσον γνωρίζουμε (από την εκφώνηση) ότι η περιοχή σύγκλισης είναι δεξιάς πλευράς $\sigma > -2$, η συνάρτηση $x(t)$ είναι:

$$x(t) = \delta'(t) + 4\delta(t) - 10e^{-t}u(t) + 8e^{-2t}u(t)$$

(β) Για περιοχή σύγκλισης αριστερής πλευράς $\sigma < -1$ η συνάρτηση $x(t)$ είναι:

$$x(t) = \delta'(t) + 4\delta(t) + 10e^{-t}u(-t) - 8e^{-2t}]u(-t)$$

ΘΕΜΑ 4 (2 μονάδες)

Ένα ΓΧΑ σύστημα (σε αρχική ηρεμία) έχει συνάρτηση μεταφοράς που δίνεται από τη σχέση:

$$H(s) = \frac{s-1}{s^2 + 5s + 4}$$

(α) Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα. **[1]**

(β) Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x(t) = e^{-4t}\, u(t)$. **[1]**

(α) Για τη συνάρτηση μεταφοράς έχουμε:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s-1}{s^2+5s+4} \Rightarrow Y(s)(s^2+5s+4) = X(s)(s-1)$$

$$\Rightarrow s^2Y(s) + 5sY(s) + 4Y(s) = sX(s) - X(s)$$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα παραγώγισης του μετασχηματισμού Fourier και λαμβάνουμε:

$$F\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + 5F\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 4y(t) = F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} - x(t)$$

Επομένως η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα είναι:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{dx(t)}{dt} - x(t)$$

(β) Ο μετασχηματισμός Laplace της εισόδου είναι:

$$X(s) = L\{e^{-4t}u(t)\} = \frac{1}{s+4}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου είναι:

$$Y(s) = H(s)\,X(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+4)}\,\frac{1}{(s+4)} = \frac{C_1}{(s+1)} + \frac{C_2}{(s+4)} + \frac{C_3}{(s+4)^2}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές:

$$C_1 = (s+1)\left.\frac{s-1}{(s+1)(s+4)^2}\right|_{s=-1} = \left.\frac{s-1}{(s+4)^2}\right|_{s=-1} = \cdots = -\frac{2}{9}$$

$$C_2 = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{ds}(s+4)^2\left.\frac{s-1}{(s+1)(s+4)^2}\right|_{s=-4} = \frac{d}{ds}\left.\left(\frac{s-1}{s+1}\right)\right|_{s=-4} = -\left.\frac{2s}{(s+1)^2}\right|_{s=-4} = \frac{8}{9}$$

$$C_3 = (s+4)^2\left.\frac{s-1}{(s+1)(s+4)^2}\right|_{s=-4} = \left.\frac{s-1}{s+1}\right|_{s=-4} = \frac{5}{3}$$

Άρα:

$$Y(s) = \left(-\frac{2}{9}\right)\frac{1}{(s+1)} + \left(\frac{8}{9}\right)\frac{1}{(s+4)} + \left(\frac{5}{3}\right)\frac{1}{(s+4)^2}$$

Εφαρμόζουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και ανακτούμε την έξοδο $y(t)$:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \cdots = \left(-\frac{2}{9}e^{-t} + \frac{8}{9}e^{4t} + \frac{5}{3}te^{-4t}\right) u(t)$$

ΘΕΜΑ 5 (2 μονάδες)

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου περιγράφεται από τη σχέση:

$$x(t) = cos(20t) + 10sinc\left(\frac{10}{\pi}t\right) + 5sinc^2\left(\frac{5}{\pi}t\right)$$

(α) Να υπολογίστε και να σχεδιάσετε το φάσμα $X(\Omega)$. **[1]**

(β) Το σήμα περνάει μέσα από ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\Omega_H = 15\ (rad/sec)$. Σχεδιάστε το φάσμα του σήματος στην έξοδο του φίλτρου και δώστε την έκφραση στο χρόνο του σήματος εξόδου. **[1]**

(α) Επειδή $A\cos(\Omega_0 t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \pi A[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$ ο μετασχηματισμός Fourier του πρώτου όρου είναι:

$$cos(20t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \pi\,[\delta(\Omega + 20) + \delta(\Omega - 20)]$$

Επειδή $\left(\frac{B}{2\pi}\right) sinc\left(\frac{Bt}{2\pi}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} rect\left(\frac{\Omega}{B}\right)$ ο μετασχηματισμός Fourier του δεύτερου όρου είναι:

$$10\ sinc\left(\frac{10}{\pi}t\right) = \pi\ \frac{20}{2\pi} sinc\left(\frac{20}{2\pi}t\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} \pi\ rect\left(\frac{\Omega}{20}\right)$$

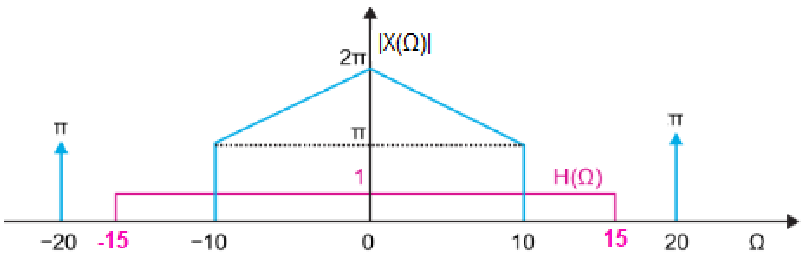
Τέλος, επειδή $\left(\frac{B}{2\pi}\right) sinc^2\left(\frac{Bt}{2\pi}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} tri\left(\frac{\Omega}{B}\right)$ ο μετασχηματισμός Fourier του τρίτου όρου είναι:

$$5sinc^2\left(\frac{5}{\pi}t\right) = \pi\left(\frac{10}{2\pi}\right) sinc^2\left(\frac{10t}{2\pi}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} \pi\ tri\left(\frac{\Omega}{10}\right)$$

Το συνολικό φάσμα $X(\Omega)$ είναι:

$$X(\Omega) = \pi\,[\delta(\Omega + 20) + \delta(\Omega - 20)] + \pi\ rect\left(\frac{\Omega}{20}\right) + \pi\ tri\left(\frac{\Omega}{10}\right)$$

Το βαθυπερατό φίλτρο έχει συχνότητα αποκοπής $\Omega_H = 15\ (rad/sec)$. Η γραφική παράσταση των φασμάτων $X(\Omega)$ και $H(\Omega)$ είναι:



(β) Το φάσμα της εξόδου είναι $Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$. Με βάση το σχήμα προκύπτει:

$$Y(\Omega) = \pi\ rect\left(\frac{\Omega}{20}\right) + \pi\ tri\left(\frac{\Omega}{10}\right)$$

Επειδή το βαθυπερατό φίλτρο αποκόπτει τις συχνότητες του σήματος εισόδου που βρίσκονται στη ζώνη αποκοπής, προκύπτει ότι μόνο ο όρος $cos(20t)$ αποκόπτεται. Οπότε το σήμα $y(t)$ είναι:

$$y(t) = 10sinc\left(\frac{10}{\pi}t\right) + 5sinc^2\left(\frac{5}{\pi}t\right)$$