Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Πάτρα, 08.02.2022

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ: **ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**

Πρόγραμμα Σπουδών ΗΜΜΥ (Πανεπιστήμιο)

Επιλύονται όλα τα θέματα της Ομάδας 1. Επίσης, δίνεται η επίλυση θεμάτων της ομάδας 2 που είναι σημαντικά διαφορετικά από τα αντίστοιχα της ομάδας 1.

ΘΕΜΑ 1 (3 μονάδες)

Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει απόκριση συχνότητας που δίνεται από τη σχέση:

$$H(\Omega) = \frac{3 + j\Omega}{2 + 3j\Omega - \Omega^2}$$

(α) Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα. **[1]**

Απάντηση: Για τη δοθείσα απόκριση συχνότητας έχουμε:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{3 + j\Omega}{2 + 3j\Omega - \Omega^2} \Rightarrow Y(\Omega)(2 + 3j\Omega - \Omega^2) = X(\Omega)(3 + j\Omega) \Rightarrow$$

$$(j\Omega)^2 Y(\Omega) + 3j\Omega Y(\Omega) + 2Y(\Omega) = j\Omega X(\Omega) + 3X(\Omega) \qquad (1)$$

Από την ιδιότητα παραγώγισης του μετασχηματισμού Fourier, γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$F\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} = (j\Omega)^2 Y(\Omega), \quad F\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = (j\Omega)Y(\Omega), \quad F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = (j\Omega)X(\Omega)$$

Επομένως, η σχέση (1) γράφεται:

$$F\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + 3F\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 2y(t) = F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + 3x(t)$$

οπότε η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα είναι:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

(β) Να βρεθεί η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος. **[1]**

Απάντηση: Η κρουστική απόκριση $h(t)$ θα υπολογιστεί με αντίστροφο μετασχηματισμού Fourier της απόκρισης συχνότητας $H(\Omega)$, κάνοντας χρήση της μεθόδου ανάλυσης σε απλά κλάσματα:

$$H(\Omega) = \frac{3 + j\Omega}{2 + 3j\Omega - \Omega^2} = \frac{3 + j\Omega}{(1 + j\Omega)(2 + j\Omega)} = \frac{A}{1 + j\Omega} + \frac{B}{2 + j\Omega} = \frac{2A + j\Omega A + B + j\Omega B}{(1 + j\Omega)(2 + j\Omega)}$$

Λόγω της ισότητας του δεύτερου και τέταρτου κλασμάτων, έχουμε την μιγαδική ισότητα:

$$2A + j\Omega A + B + j\Omega B = 3 + j\Omega$$

από την οποία προκύπτει το σύστημα:

$$2A + B = 3$$
$$A + B = 1$$

Λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε $A = 2, B = -1$. Άρα, η συνάρτηση Fourier αναλύεται στο άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$H(\Omega) = \frac{2}{1 + j\Omega} - \frac{1}{2 + j\Omega}$$

Επειδή ισχύει:

$$e^{-at}u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a+j\Omega}$$

βρίσκουμε:

$$h(t) = F^{-1}\{H(\Omega)\} = 2F^{-1}\left\{\frac{1}{1+j\Omega}\right\} - F^{-1}\left\{\frac{1}{2+j\Omega}\right\} = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

Σημείωση: Οι συντελεστές A και B μπορούν να ευρεθούν επίσης με τη μέθοδο που χρησιμοποιούμε στον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace (βλ. Θέμα 3).

(γ) Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x(t) = e^{-3t}u(t)$. **[1]**

Απάντηση: Για τον υπολογισμό της εξόδου $y(t)$ θα εργαστούμε στο πεδίο της συχνότητας λόγω της απλότητας που εξασφαλίζει. Αρχικά θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier $X(\Omega)$ της εισόδου. Είναι:

$$X(\Omega) = F\{e^{-3t}u(t)\} = \frac{1}{3+j\Omega}$$

Κατόπιν υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της εξόδου:

$$Y(\Omega) = H(\Omega)\,X(\Omega) = \frac{3+j\Omega}{(1+j\Omega)(2+j\Omega)}\,\frac{1}{(3+j\Omega)} = \frac{1}{(1+j\Omega)(2+j\Omega)}$$

Γράφουμε το $Y(\Omega)$ ως άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{(1+j\Omega)(2+j\Omega)} = \cdots = \frac{1}{(1+j\Omega)} - \frac{1}{(2+j\Omega)}$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier ανακτούμε την έξοδο $y(t)$:

$$y(t) = F^{-1}\{Y(\Omega)\} = \cdots = (e^{-t} - e^{-2t})\,u(t)$$

ΘΕΜΑ 2 (4 μονάδες)

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου που περιγράφεται από τη σχέση:

$$x(t) = 2cos(40t) + 20sinc\left(\frac{20}{\pi}t\right) - 10sinc^2\left(\frac{10}{\pi}t\right)$$

περνάει μέσα από ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με απόκριση συχνότητας:

$$H(\Omega) = rect\left(\frac{\Omega}{60}\right)$$

(α) Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα $X(\Omega)$. **[1]**

Απάντηση: Επειδή ισχύει:

$$A\,cos(\Omega_0 t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \pi A[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$$

ο μετ. Fourier του πρώτου όρου είναι:

$$2\,cos(40t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\,[\delta(\Omega + 40) + \delta(\Omega - 40)]$$

Επειδή ισχύει:

$$\left(\frac{B}{2\pi}\right) sinc\left(\frac{Bt}{2\pi}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} rect\left(\frac{\Omega}{B}\right)$$

ο μετ. Fourier του δεύτερου όρου είναι:

$$20\,sinc\left(\frac{20}{\pi}t\right) = \pi\,\frac{40}{2\pi}\,sinc\left(\frac{40}{2\pi}t\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} \pi\,rect\left(\frac{\Omega}{40}\right)$$

Τέλος, επειδή ισχύει:

$$\left(\frac{B}{2\pi}\right) sinc^2\left(\frac{Bt}{2\pi}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} tri\left(\frac{\Omega}{B}\right)$$

ο μετ. Fourier του τρίτου όρου είναι:

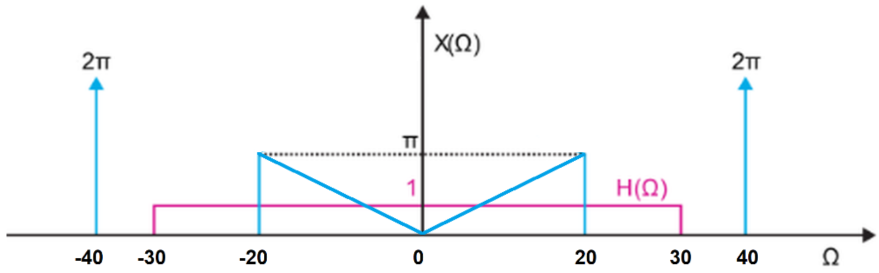
$$10sinc^2\left(\frac{10}{\pi}t\right) = \pi\left(\frac{20}{2\pi}\right) sinc^2\left(\frac{20t}{2\pi}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} \pi\,tri\left(\frac{\Omega}{20}\right)$$

Λόγω της γραμμικότητας του μετ. Fourier βρίσκουμε ότι το συνολικό φάσμα $X(\Omega)$ είναι:

$$X(\Omega) = 2\pi\,[\delta(\Omega + 40) + \delta(\Omega - 40)] + \pi\, rect\left(\frac{\Omega}{40}\right) - \pi\, tri\left(\frac{\Omega}{20}\right)$$

(β) Να σχεδιαστεί η απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$. **[1]**

Απάντηση: Το βαθυπερατό φίλτρο έχει συχνότητα αποκοπής $\Omega_H = 30\ (rad/sec)$ και μοναδιαίο κέρδος. Η γραφική παράσταση των φασμάτων $X(\Omega)$ και $H(\Omega)$ είναι:



(γ) Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους $Y(\Omega)$ της εξόδου του φίλτρου. **[1]**

Απάντηση: Το φάσμα $Y(\Omega)$ της εξόδου δίνεται από τη σχέση:

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$$

Με βάση το προηγούμενο σχήμα προκύπτει:

$$Y(\Omega) = \pi\, rect\left(\frac{\Omega}{40}\right) - \pi\, tri\left(\frac{\Omega}{20}\right)$$

(δ) Να υπολογιστεί το σήμα $y(t)$ στο πεδίο του χρόνου. **[1]**

Απάντηση: Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, και επειδή το (βαθυπερατό) φίλτρο επιτρέπει τη διέλευση των συχνοτήτων του σήματος εισόδου που βρίσκονται στη ζώνη διέλευσης και αποκόπτει τις συχνότητες που βρίσκονται στη ζώνη αποκοπής, προκύπτει ότι η συχνότητα που οφείλεται στον όρο $2cos(20t)$ αποκόπτεται και το σήμα $y(t)$ στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$y(t) = 20sinc\left(\frac{20}{\pi}t\right) - 10sinc^2\left(\frac{10}{\pi}t\right)$$

Για το αντίστοιχο θέμα της Ομάδας 2 στην έξοδο του υψιπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής $\Omega_L = 30\ (rad/sec)$ περνάει μόνο η συχνότητα 40 rad/sec. Επομένως, το σήμα $y(t)$, είναι:

$$y(t) = 2cos(40t)$$

ΘΕΜΑ 3 (2 μονάδες)

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:

$$X(s) = \frac{4s^2 + 2s - 3}{s^3 + 2s^2 - s - 2}$$

με περιοχή σύγκλισης $-1 < \sigma < 1$.

Απάντηση: Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή και το κλάσμα γράφεται:

$$X(s) = \frac{4s^2 + 2s - 3}{s^3 + 2s^2 - s - 2} = \frac{4s^2 + 2s - 3}{(s+1)(s-1)(s+2)}$$

Οι ρίζες $(\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2)$ είναι απλές και πραγματικές, άρα το κλάσμα διασπάται στα απλά κλάσματα:

$$X(s) = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s-1} + \frac{C_2}{s+2}$$

Υπολογίζουμε τις σταθερές C_1, C_2 και C_3:

$$C_1 = (s+1)\frac{4s^2+2s-3}{(s+1)(s-1)(s+2)}|_{s=-1} = \frac{4s^2+2s-3}{(s-1)(s+2)}|_{s=-1} = \frac{1}{2}$$
$$C_2 = (s-1)\ \frac{4s^2+2s-3}{(s+1)(s-1)(s+2)}|_{s=1} = \frac{4s^2+2s-3}{(s+1)(s+2)}|_{s=1} = \frac{1}{2}$$
$$C_3 = (s+2)\frac{4s^2+2s-3}{(s+1)(s-1)(s+2)}|_{s=-2} = \frac{4s^2+2s-3}{(s+1)(s-1)}|_{s=-2} = -\frac{9}{4}$$

Επομένως το ανάπτυγμα της δοθείσας συνάρτησης $X(s)$ σε απλά κλάσματα είναι:

$$X(s) = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{s+1} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{s-1} - \left(\frac{9}{4}\right)\frac{1}{s+2}$$

Στο σημείο αυτό θα αξιοποιήσουμε την πληροφορία της περιοχής σύγκλισης $-1 < \sigma < 1$ για να διαπιστώσουμε τη μορφή και τη διάρκεια των σημάτων χρόνου. Δεδομένου ότι οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ και $\lambda_3 = -2$, η δοθείσα περιοχή σύγκλισης μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\{-1 < \sigma < 1\} = \{\sigma > -1\} \cap \{\sigma < 1\} \cap \{\sigma > -2\}$$

Ο αντίστροφος μετ. Laplace είναι το άθροισμα των αντίστροφων μετασχηματισμών κάθε κλάσματος και επειδή δύο επιμέρους περιοχές σύγκλισης είναι δεξιάς πλευράς και μία είναι αριστερής πλευράς, προκύπτει:

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{t}u(-t) - \frac{9}{4}e^{-2t}u(t)$$

ΘΕΜΑ 3 (2 μονάδες) – Ομάδα Β'

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:

$$X(s) = \frac{s-1}{s^2+2s+4}$$

με περιοχή σύγκλισης $\sigma > -1$.

Απάντηση: Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο του παρονομαστή και βρίσκουμε τις ρίζες $\lambda_1 = -1 + j\sqrt{3}$ και $\lambda_2 = -1 - j\sqrt{3}$. Ισχύει $\lambda_2 = \lambda_1^*$. Επομένως η συνάρτηση $X(s)$ γράφεται:

$$X(s) = \frac{C_1}{s-\lambda_1} + \frac{C_1^*}{s-\lambda_1^*}$$

Ο συντελεστής C_1 υπολογίζεται:

$$C_1 = (s-\lambda_1)X(s)|_{s=\lambda_1} = (s-\lambda_1)\frac{s-1}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_1^*)}|_{s=\lambda_1} = \cdots = \frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{3}$$

Προφανώς ισχύει:

$$C_1^* = \frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{3}$$

Επειδή το πραγματικό μέρος των πόλων είναι -1 και η περιοχή σύγκλισης είναι δεξιάς πλευράς προκύπτει ότι και οι δύο συνιστώσες του σήματος είναι δεξιάς πλευράς. Επομένως, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι:

$$\begin{aligned}
x(t) = \left[C_1 e^{\lambda_1 t} + C_1^* e^{\lambda_1^* t}\right]u(t) &= \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{3}\right)e^{(-1+j\sqrt{3})t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{3}\right)e^{(-1-j\sqrt{3})t}\right]u(t) \\
&= \left[\frac{1}{2}e^{-t}e^{j\sqrt{3}t} + \frac{j\sqrt{3}}{3}e^{-t}e^{j\sqrt{3}t} + \frac{1}{2}e^{-t}e^{-j\sqrt{3}t} - \frac{j\sqrt{3}}{3}e^{-t}e^{-j\sqrt{3}t}\right]u(t) \\
&= \frac{1}{2}e^{-t}\left[e^{j\sqrt{3}t} + e^{-j\sqrt{3}t}\right]u(t) + \frac{j\sqrt{3}}{3}e^{-t}\left[e^{j\sqrt{3}t} - e^{-j\sqrt{3}t}\right]u(t) \\
&= \frac{1}{2}e^{-t}2\cos(\sqrt{3}t)\,u(t) + \frac{j\sqrt{3}}{3}e^{-t}j2\sin(\sqrt{3}t)\,u(t) \\
&= \left[\cos(\sqrt{3}t) - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)\right]e^{-t}u(t)
\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4 (2 μονάδες)

Να υπολογιστεί με χρήση του μετασχηματισμού Laplace η κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος με ΓΔΕΣΣ:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=x(t),\quad \text{αρχικές συνθήκες } y(0^-)=1, y'(0^-)=0$$

Απάντηση: Θα υπολογίσουμε αρχικά μία γενική λύση ανεξάρτητα της εφαρμοζόμενης εισόδου και κατόπιν θα βρούμε την κρουστική απόκριση. Ξεκινάμε υπολογίζοντας τον μετασχηματισμό Laplace των δύο μελών της ΓΔΕΣΣ και λύνοντας ως προς $Y(s)$:

$$[s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)]+5[sY(s)-y(0^-)]+6Y(s)=X(s)$$
$$\Rightarrow s^2Y(s)-s+5sY(s)-5+6Y(s)=X(s)$$
$$\Rightarrow Y(s)[s^2+5s+6]-(s+5)=X(s)$$
$$\Rightarrow Y(s)(s+2)(s+3)=X(s)+(s+5)$$
$$\Rightarrow Y(s)=\frac{X(s)}{(s+2)(s+3)}+\frac{s+5}{(s+2)(s+3)}$$

Για είσοδο $x(t)=\delta(t)$ έχουμε:

$$X(s)=1,\qquad Re\{s\}>0$$

Επομένως:

$$Y(s)=\frac{1}{(s+2)(s+3)}+\frac{s+5}{(s+2)(s+3)}=\frac{s+6}{(s+2)(s+3)}=\frac{R_1}{s+2}+\frac{R_2}{s+3}$$

Υπολογίζουμε τα υπόλοιπα R_1, R_2 από τις σχέσεις:

$$R_1=\frac{s+6}{(s+2)(s+3)}(s+2)\Big|_{s=-2}=\frac{s+6}{s+3}\Big|_{s=-2}=\frac{-2+6}{-2+3}=4$$

$$R_2=\frac{s+6}{(s+2)(s+3)}(s+3)\Big|_{s=-3}=\frac{s+6}{s+2}\Big|_{s=-3}=\frac{-3+6}{-3+2}=-3$$

Οπότε:

$$Y(s)=4\frac{1}{s+2}-3\frac{1}{s+3}$$

και εφόσον η περιοχή σύγκλισης είναι δεξιάς πλευράς, η κρουστική απόκριση $h(t)$ είναι:

$$h(t)\equiv y(t)=[4e^{-2t}-3e^{-3t}]u(t)$$