Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
Λυμένα Παραδείγματα – Φυλλάδιο 7
Διδάσκων: Μιχάλης Παρασκευάς

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE
- Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace
- Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

1. Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Παράδειγμα 1
Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t) = t,\ \ 0 \le t \le 1$.

Απάντηση: Γράφουμε το σήμα $x(t) = t,\ \ 0 \le t \le 1$ ως εξής:

$$x(t) = t[u(t) - u(t-1)] = t\,u(t) - t\,u(t-1)$$

Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης είναι:

$$u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s}, \qquad R_u = Re\{s\} > 0$$

Από την ιδιότητα μετατόπισης στο χρόνο του μετασχηματισμού Laplace ισχύει:

$$u(t-t_0) \xrightarrow{L} e^{-st_0}\frac{1}{s}, \qquad R_u' = R_u = Re\{s\} > 0$$

Για $t_0 = 1$ έχουμε:

$$u(t-1) \xrightarrow{L} e^{-s}\frac{1}{s}, \qquad R_u' = R_u = Re\{s\} > 0$$

Επομένως, ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $y(t) = u(t) - u(t-1)$ είναι:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - e^{-s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s}(1 - e^{-s}), \qquad R_y = Re\{s\} > 0$$

Από την ιδιότητα παραγώγισης στη μιγαδική συχνότητα του μετασχηματισμού Laplace γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$x(t) = t\,y(t) \xrightarrow{L} -\frac{dY(s)}{ds} = X(s), \qquad R_x = R_y = Re\{s\} > 0$$

Υπολογίζοντας την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης:

$$Y(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$$

βρίσκουμε:

$$X(s) = -\frac{dY(s)}{ds} = \cdots = \frac{e^{-s}(e^s - s - 1)}{s^2}, \qquad R_x = Re\{s\} > 0$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t) = t\,cos(\Omega t)$.

Απάντηση: Εφαρμόζοντας στο δοθέν σήμα την ιδιότητα της παραγώγισης στη μιγαδική συχνότητα του μετασχηματισμού Laplace, δηλαδή:

$$t\,x(t) \xrightarrow{L} -\frac{dX(s)}{ds}$$

θα έχουμε:

$$L\{t\,cos(\Omega t)\} = -\frac{d}{ds}\{L\{cos(\Omega t)\}\}$$

Επειδή $cos(\Omega t) \xrightarrow{L} s/(s^2 + \Omega^2)$, θα έχουμε:

$$t\,cos(\Omega t) \xrightarrow{L} -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2 + \Omega^2}\right) = \frac{s^2 - \Omega^2}{(s^2 + \Omega^2)^2}$$

Παράδειγμα 3

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t) = t^2 cos(\Omega t)$.

Απάντηση: Εφαρμόζοντας στο δοθέν σήμα δύο φορές την ιδιότητα της παραγώγισης του μετασχηματισμού Laplace στη μιγαδική συχνότητα έχουμε:

$$\begin{aligned} L\{t^2 cos(\Omega t)\} &= L\{(-t)(-t)cos(\Omega t)\} = -\frac{d}{ds}\{L\{-t\,cos(\Omega t)\}\} \\ &= -\frac{d}{ds}\left\{\frac{d}{ds}L\{cos(\Omega t)\}\right\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2 + \Omega^2}\right)\right] \\ &= -\frac{d}{ds}\left[\frac{s^2 - \Omega^2}{(s^2 + \Omega^2)^2}\right] = \frac{2s^3 - 6s\Omega^2}{(s^2 + \Omega^2)^3} \end{aligned}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν παραγωγίζαμε την απάντηση στο προηγούμενο παράδειγμα.

2. Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Παράδειγμα 4

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:

$$X(s) = \frac{s^4 + 8s^3 + 11s^2 - 2s - 18}{s^3 + 2s^2 - s - 2}$$

με περιοχή σύγκλισης $-1 < \sigma < 1$.

Απάντηση: Επειδή ο βαθμός του πολυωνύμου αριθμητή είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο του παρονομαστή, θα εφαρμόσουμε αρχικά μακρά διαίρεση ώστε να μειώσουμε τον βαθμό του πολυωνύμου του αριθμητή. Είναι:

$$X(s) = \frac{s^4 + 8s^3 + 11s^2 - 2s - 18}{s^3 + 2s^2 - s - 2} = \cdots = s + 6 + \frac{4s^2 + 2s - 3}{s^3 + 2s^2 - s - 2}$$
$$= s + 6 + \frac{4s^2 + 2s - 3}{(s+1)(s-1)(s+2)}$$

Παρατηρούμε ότι οι ρίζες ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$) είναι απλές και πραγματικές, άρα το κλάσμα διασπάται στα απλά κλάσματα:

$$\frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s-1} + \frac{C_2}{s+2}$$

Υπολογίζουμε τις σταθερές C_1, C_2 και C_3 από τη σχέση (3.50) και βρίσκουμε:

$$C_1 = (s+1)\frac{4s^2 + 2s - 3}{(s+1)(s-1)(s+2)}\Big|_{s=-1} = \frac{4s^2 + 2s - 3}{(s-1)(s+2)}\Big|_{s=-1} = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = (s-1)\ \frac{4s^2 + 2s - 3}{(s+1)(s-1)(s+2)}\Big|_{s=1} = \frac{4s^2 + 2s - 3}{(s+1)(s+2)}\Big|_{s=1} = \frac{1}{2}$$

$$C_3 = (s+2)\frac{4s^2 + 2s - 3}{(s+1)(s-1)(s+2)}\Big|_{s=-2} = \frac{4s^2 + 2s - 3}{(s+1)(s-1)}\Big|_{s=-2} = -\frac{9}{4}$$

Επομένως το ανάπτυγμα της δοθείσας συνάρτησης $X(s)$ σε απλά κλάσματα είναι:

$$X(s) = s + 6 + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{9}{4}\frac{1}{s+2}$$

Στο σημείο αυτό αξιοποιούμε την πληροφορία της περιοχής σύγκλισης $-1 < \sigma < 1$. Δεδομένου ότι οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ και $\lambda_3 = -2$, η δοθείσα περιοχή σύγκλισης μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\{-1 < \sigma < 1\} = \{\sigma > -1\} \cap \{\sigma < 1\} \cap \{\sigma > -2\}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι το άθροισμα των αντίστροφων μετασχηματισμών κάθε επιμέρους κλάσματος και επειδή δύο επιμέρους περιοχές σύγκλισης είναι δεξιάς πλευράς και μία είναι αριστερής πλευράς, προκύπτει:

$$x(t) = \delta'(t) + 6\delta(t) + \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{t}u(-t) - \frac{9}{4}e^{-2t}u(t)$$

Τονίζουμε ότι η πληροφορία της περιοχής σύγκλισης (δεξιάς ή αριστερής πλευράς) μας βοηθάει να καθορίσουμε αν οι επιμέρους συνιστώσες του σήματος είναι δεξιάς ή αριστερής πλευράς, αντίστοιχα.

📖 Παράδειγμα 5 (*)

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:

$$X(s) = \frac{s}{(s+1)^3\,(s+2)}$$

με περιοχή σύγκλισης $\sigma > -1$.

Απάντηση: Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής έχει μία πραγματική τριπλή ρίζα την $\lambda_1 = -1$ και μία απλή, την $\lambda_2 = -2$. Έτσι, η συνάρτηση $X(s)$ γράφεται ως:

$$X(s) = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{(s+1)^2} + \frac{C_3}{(s+1)^3} + \frac{C_4}{s+2}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές C_1, C_2, C_3 και C_4:

$$C_1 = \frac{1}{(3-1)!}\,\frac{d^2}{ds^2}(s+1)^3 X(s)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{s}{s+2}\right] = -2$$

$$C_2 = \frac{1}{(3-2)!}\,\frac{d}{ds}(s+1)^3 X(s)\Big|_{s=-1} = 2$$

$$C_3 = (s+1)^3 X(s)\big|_{s=-1} = -1$$

$$C_4 = (s+2)\,X(s)\big|_{s=-2} = 2$$

Επομένως, η συνάρτηση $X(s)$ αναπτύσσεται στο άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$X(s) = -\frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{2}{s+2}$$

Επειδή η περιοχή σύγκλισης είναι δεξιάς πλευράς και γράφεται:

$$\{\sigma > -1\} = \{\sigma > -2\} \cap \{\sigma > -1\}$$

προκύπτει ότι όλες οι συνιστώσες του σήματος είναι δεξιάς πλευράς. Επομένως, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι:

$$x(t) = [-2e^{-t} + 2\,t\,e^{-t} - \frac{t^2}{2}e^{-t} + 2e^{-2t}]\,u(t)$$

Επαλήθευση επίλυσης με το θεώρημα αρχικής τιμής:

$$\lim_{s\to\infty} s\,X(s) = x(0^+)$$

Το αριστερό μέλος είναι:

$$\lim_{s\to\infty} s\,X(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{s^2}{s^4+5s^3+9s^2+7s+2} = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{s^2+5s+9+7/s+2/s^2} = 0$$

και το δεξί μέλος είναι:

$$x(0^+) = \lim_{t\to0^+}[-2e^{-t} + 2\,t\,e^{-t} - \frac{t^2}{2}e^{-t} + 2e^{-2t}]\,u(t) = 0$$

📖 Παράδειγμα 6

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:

$$X(s) = \frac{2s+3}{s^2+2s+4}$$

με περιοχή σύγκλισης $\sigma > -1$.

Απάντηση: Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο του παρονομαστή και βρίσκουμε τις ρίζες $\lambda_1 = -1 + j\sqrt{3}$ και $\lambda_2 = -1 - j\sqrt{3}$. Ισχύει $\lambda_2 = \lambda_1^*$. Επομένως η συνάρτηση $X(s)$ γράφεται:

$$X(s) = \frac{C_1}{s-\lambda_1} + \frac{C_1^*}{s-\lambda_1^*}$$

Ο συντελεστής C_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$C_1 = (s-\lambda_1)X(s)|_{s=\lambda_1} = (s-\lambda_1)\frac{2s+3}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_1^*)}|_{s=\lambda_1} = \cdots = 1 - \frac{j}{\sqrt{3}} = \sqrt{4/3}\, e^{j\pi/6}$$

Προφανώς ισχύει: $C_1^* = 1 + \frac{j}{\sqrt{3}} = \sqrt{4/3}\, e^{-j\pi/6}$. Επειδή το πραγματικό μέρος των πόλων είναι -1 και η περιοχή σύγκλισης είναι δεξιάς πλευράς προκύπτει ότι και οι δύο συνιστώσες του σήματος είναι δεξιάς πλευράς. Επομένως, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι:

$$x(t) = \left[C_1 e^{\lambda_1 t} + C_1^* e^{\lambda_1^* t}\right] u(t) = \left[\sqrt{4/3}\, e^{j\pi/6} e^{(-1+j\sqrt{3})t} + \sqrt{4/3}\, e^{-j\pi/6} e^{(-1-j\sqrt{3})t}\right] u(t)$$

$$= \sqrt{4/3}\left[e^{j\pi/6} e^{-t} e^{j\sqrt{3}t} + e^{-j\pi/6} e^{-t} e^{-j\sqrt{3}t}\right] u(t)$$

$$= \sqrt{4/3}\, e^{-t}\left[e^{j(\sqrt{3}t+\pi/6)} + e^{-j(\sqrt{3}t+\pi/6)}\right] u(t) = \cdots$$

$$= 2\sqrt{4/3}\, e^{-t} cos\left(\sqrt{3}t + \pi/6\right) u(t)$$

Σημείωση: Παραδείγματα που σημειώνονται με αστερίσκο (*), υπάρχουν και στις διαφάνειες των διαλέξεων θεωρίας.