Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
Λυμένα Παραδείγματα – Φυλλάδιο 5

Διδάσκων: Μιχάλης Παρασκευάς

ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΣΥΝΕΛΙΚΤΙΚΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

- Αναλυτικός υπολογισμός του συνελικτικού ολοκληρώματος
- Γραφικός υπολογισμός του συνελικτικού ολοκληρώματος
- Συνδεσμολογίες ΓΧΑ συστημάτων

1. Αναλυτικός υπολογισμός του συνελικτικού ολοκληρώματος

📖 Παράδειγμα 1 (*)
Να υπολογίσετε τη συνέλιξη ανάμεσα στα σήματα συνεχούς χρόνου $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ και $y(t) = e^{-\beta t}u(t)$. Θεωρήστε $\alpha \neq \beta, \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$.

Απάντηση: Η συνέλιξη των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\tau}\, u(\tau)\, e^{-\beta(t-\tau)}\, u(t-\tau)\, d\tau$$

όπου οι βηματικές συναρτήσεις $u(\tau)$ και $u(t-\tau)$ ορίζονται ως:

$$u(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \tau < t \\ 0, & \tau > t \end{cases}$$

Στη γενική περίπτωση το παραπάνω ολοκλήρωμα πρέπει να υπολογισθεί στο άπειρο διάστημα $(-\infty, +\infty)$. Ωστόσο, η ύπαρξη των δύο βηματικών συναρτήσεων περιορίζει τον υπολογισμό στην περιοχή $0 < \tau < t$, αφού οι βηματικές συναρτήσεις είναι και οι δύο διάφορες του μηδενός (και ίσες με τη μονάδα) μόνο στο διάστημα $0 < \tau < t$ και μηδέν οπουδήποτε αλλού. Με βάση τη διαπίστωση αυτή βρίσκουμε:

$$z(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau}\, e^{-\beta(t-\tau)}\, d\tau = e^{-\beta t}\int_0^t e^{(\beta-\alpha)\tau}\, d\tau = e^{-\beta t}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha)\tau}}{\beta-\alpha}\right]_0^t$$
$$= \frac{e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}\left[e^{(\beta-\alpha)t} - 1\right] = \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$$

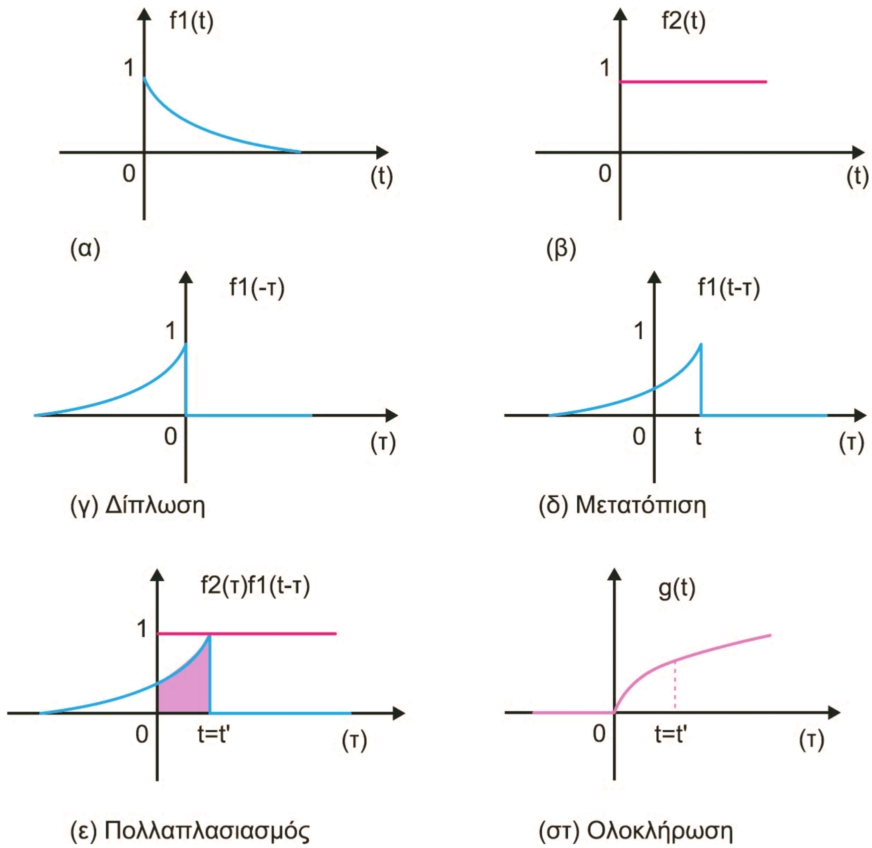
Η σχέση αυτή ισχύει για την περιοχή τιμών $t > 0$ και επειδή για $t < 0$ είναι $z(t) = 0$ μπορούμε να συνδυάσουμε τις παραπάνω περιπτώσεις σε μία εξίσωση γράφοντας:

$$z(t) = \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}u(t)$$

2. Γραφικός υπολογισμός του συνελικτικού ολοκληρώματος

📖 Παράδειγμα 2 (*)
Να υπολογιστεί η συνέλιξη μεταξύ των συναρτήσεων $f_1(t) = e^{-t}u(t)$ και $f_2(t) = u(t)$.

Απάντηση:



Διατηρούμε σταθερή τη συνάρτηση $f_2(\tau) = u(\tau)$, ενώ στη συνάρτηση $f_1(t)$ εφαρμόζουμε ανάκλαση $f_1(-\tau) = e^{\tau}u(-t)$ και κατόπιν μετατόπιση στο χρόνο, οπότε παράγεται η συνάρτηση $f_1(t-\tau) = e^{t+\tau}u(t-\tau)$. Υπολογίζουμε το εμβαδόν μεταξύ των γραφικών παρασράσεων των δύο συναρτήσεων μέσω του ολοκληρώματος:

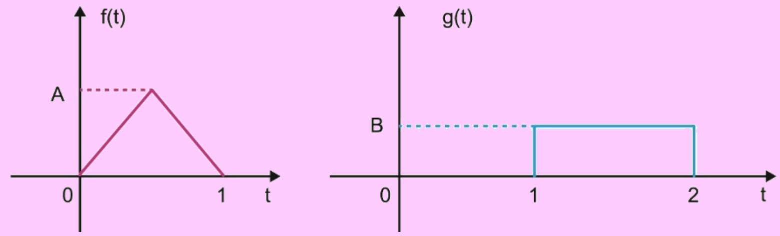
$$g(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) f_1(t-\tau) dt$$

Επειδή κατά την εφαρμογή της γραφικής μεθόδου (σχήματα (γ) έως (στ)) προκύπτουν εμβαδά που δεν μπορούν να υπολογιστούν με απλά γεωμετρικά σχήματα, συνεχίζουμε την επίλυση του ολοκληρώματος. Είναι:

$$g(t) = \int_0^t 1\, e^{-(t-\tau)} dt = e^{-t}\left([e^{\tau}]_0^t\right) = e^{-t}[e^t - 1] = 1 - e^{-t}$$

📖 Παράδειγμα 3

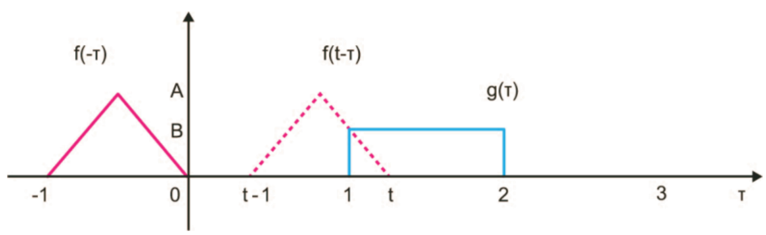
Να υπολογισθεί το συνελικτικό ολοκλήρωμα των σημάτων $f(t)$ και $g(t)$ που φαίνονται στο σχήμα.



Απάντηση: Το συνελικτικό ολοκλήρωμα είναι $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) f(t-\tau) dt$ και θα το υπολογίσουμε στα παρακάτω διαστήματα του χρόνου (t):

1) $t < 1$: $f(t) * g(t) = 0$

2) $1 < t \leq 3/2$: $f(t) * g(t) = B \int_1^t (-2A\tau + 2At) dt = ABt^2 - 2ABt + AB$. Ο υπολογισμός βασίστηκε στο σχήμα:

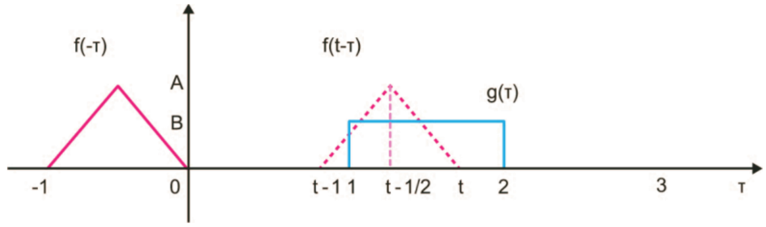


Υπολογισμός για $1 < t \leq \frac{3}{2}$

3) $3/2 \leq t \leq 5/2$:

$$f(t) * g(t) = \int_1^t g(\tau) f(t-\tau)\, dt =$$

$$= B \int_1^{t-1/2} [2A\tau + 2A(1-t)] d\tau + B \int_{t-1/2}^{t} [-2A\tau + 2At] d\tau = -ABt^2 + 4ABt - \frac{7}{2} ABt$$

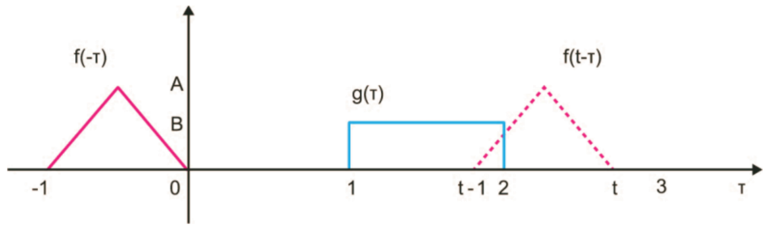


Υπολογισμός για $3/2 \leq t \leq 5/2$

Σημειώνεται ότι για το διάστημα $2 \leq t \leq 5/2$, τα όρια ολοκλήρωσης είναι $t-1$ έως 2, αλλά το αποτέλεσμα παραμένει το ίδιο και γι’ αυτό γράφουμε τη μορφή αυτή για το ολικό διάστημα $3/2 \leq t \leq 5/2$.

4) $5/2 \leq t \leq 3$:

$$f(t) * g(t) = \int_{t-1}^{2} g(\tau) f(t-\tau) dt = \int_{t-1}^{2} [2A\tau + 2A(1-t)] dt = AB\, t^2 - 6AB\, t + 9AB$$



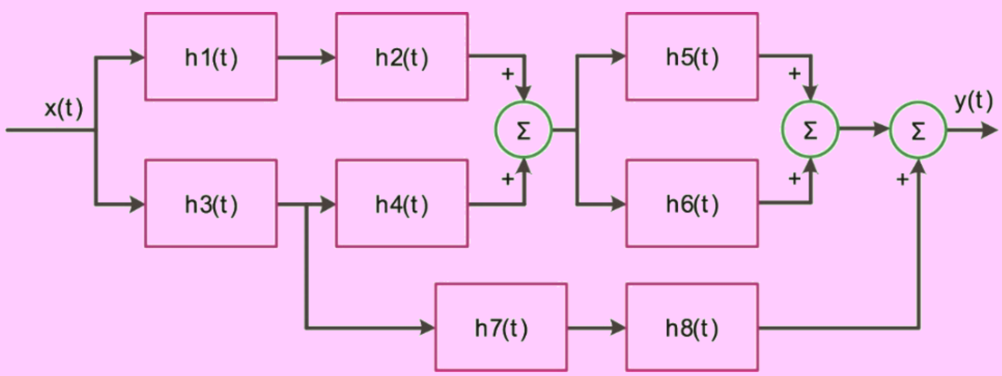
Υπολογισμός για $5/2 \leq\ t\ \leq\ 3$

5) $f(t) * g(t) =\ 0$, για $\ t\ \geq\ 3$

3. Συνδεσμολογίες ΓΧΑ συστημάτων

📖 Παράδειγμα 4

Να υπολογιστεί η ισοδύναμη κρουστική απόκριση της παρακάτω συνδεσμολογίας ΓΧΑ συστημάτων.



Απάντηση: Η δοθείσα συνδεσμολογία χωρίζεται σε τρία τμήματα:

- Στο αριστερό τμήμα που αποτελείται από τα συστήματα με επιμέρους αποκρίσεις $h_1(t), h_2(t)$, $h_3(t), h_4(t)$ με συνδυασμό σειριακής και παράλληλης σύνδεσης,
- στο δεξί τμήμα που αποτελείται από τα συστήματα με αποκρίσεις $h_5(t), h_6(t)$ σε παράλληλη σύνδεση, και
- στο κάτω τμήμα που αποτελείται από τα συστήματα με επιμέρους αποκρίσεις $h_3(t), h_7(t), h_8(t)$ σε σειριακή σύνδεση.

Ο επάνω κλάδος του αριστερού τμήματος που αποτελείται από τα συστήματα με αποκρίσεις $h_1(t), h_2(t)$ απλοποιείται σε:

$$h_{12}(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

Αντίστοιχα και ο κάτω κλάδος του αριστερού τμήματος απλοποιείται σε:

$$h_{34}(t) = h_3(t) * h_4(t)$$

Επομένως, όλο το αριστερό τμήμα απλοποιείται σε:

$$h_{1234}(t) = h_{12}(t) + h_{34}(t) = h_1(t) * h_2(t) + h_3(t) * h_4(t)$$

Αντίστοιχα, το δεξί τμήμα απλοποιείται σε:

$$h_{56}(t) = h_5(t) + h_6(t)$$

Τα δύο τμήματα (αριστερό και δεξί) είναι συνδεδεμένα σε σειρά, άρα απλοποιούνται σε μία ισοδύναμη κρουστική απόκριση:

$$h_A(t) = h_{1234}(t) * h_{56}(t) = [h_1(t) * h_2(t) + h_3(t) * h_4(t)] * [h_5(t) + h_6(t)]$$

Το κάτω τμήμα απλοποιείται σε μία ισοδύναμη κρουστική απόκριση:

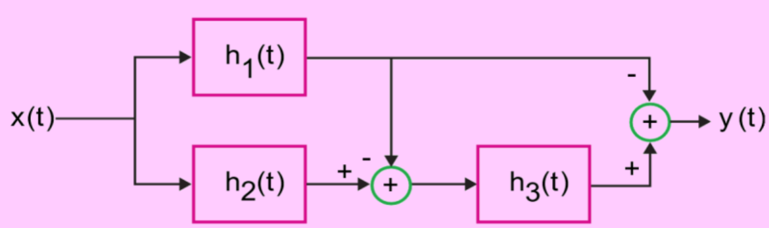
$$h_B(t) = h_3(t) * h_7(t) * h_8(t)$$

Το επάνω και το κάτω τμήμα, με κρουστικές αποκρίσεις $h_A(t)$ και $h_B(t)$, αντίστοιχα, είναι συνδεδεμένα παράλληλα, καθώς οι έξοδοί τους αθροίζονται. Επομένως η συνολική ισοδύναμη κρουστική απόκριση είναι το άθροισμα των $h_A(t)$ και $h_B(t)$, δηλαδή:

$$\begin{aligned} h_{eq}(t) = h_A(t) + h_B(t) *&= [h_1(t) * h_2(t) + h_3(t) * h_4(t)] * [h_5(t) + h_6(t)] + [h_3(t) * h_7(t) * h_8(t)] \\ &= [h_1(t) * h_2(t)] * [h_5(t) + h_6(t)] + [h_3(t) * h_4(t)] * [h_5(t) + h_6(t)] \\ &+ [h_3(t) * h_7(t) * h_8(t)] \\ &= h_1(t) * h_2(t) * h_5(t) + h_1(t) * h_2(t) * h_6(t) + h_3(t) * h_4(t) * h_5(t) + h_3(t) * h_4(t) \\ &* h_6(t) + h_3(t) * h_7(t) * h_8(t) \end{aligned}$$

📖 Παράδειγμα 5 (*)

Να υπολογιστεί η ισοδύναμη κρουστική απόκριση της παρακάτω συνδεσμολογίας ΓΧΑ συστημάτων με επιμέρους κρουστικές αποκρίσεις $h_1(t) = u(t-2)$, $h_2(t) = u(t)$ και $h_3(t) = \delta(t-2)$.



Απάντηση: Τα συστήματα με κρουστικές αποκρίσεις $h_1(t), h_2(t)$ είναι παράλληλα συνδεδεμένα, άρα απλοποιούνται σε:

$$h_{12}(t) = h_2(t) - h_1(t) = u(t) - u(t-2)$$

Το σύστημα με κρουστική απόκριση $h_3(t)$ είναι σε σειρά συνδεδεμένο με τα συστήματα $h_1(t), h_2(t)$, άρα απλοποιούνται σε:

$$h_{123}(t) = h_{12}(t) * h_3(t) = [u(t) - u(t-2)] * \delta(t-2) = u(t-2) - u(t-4)$$

Η ισοδύναμη κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος είναι:

$$h_{eq}(t) = h_{123}(t) - h_1(t) = u(t-2) - u(t-4) - u(t-2) = -u(t-4)$$

<u>Σημείωση</u>: Παραδείγματα που σημειώνονται με αστερίσκο (*), υπάρχουν και στις διαφάνειες των διαλέξεων θεωρίας.