Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
Λυμένα Παραδείγματα – Φυλλάδιο 4

Διδάσκων: Μιχάλης Παρασκευάς

ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

- Περιγραφή των Γραμμικών και Χρονικά Αμετάβλητων (ΓΧΑ) Συστημάτων:
    - Με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις
    - Με το ολοκλήρωμα της συνέλιξης
- Η Κρουστική Απόκριση των ΓΧΑ Συστημάτων
- Το Ολοκλήρωμα της Συνέλιξης σε ΓΧΑ Συστήματα
- Ιδιότητες της Συνέλιξης
- Συνδεσμολογίες συστημάτων

1. Εύρεση απόκρισης μηδενικής κατάστασης και μηδενικής εισόδου

📖 Παράδειγμα 1 (*)

Να υπολογιστεί: (α) η απόκριση μηδενικής εισόδου και (β) η απόκριση μηδενικής κατάστασης του συστήματος με ΓΕΔΣΣ:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 8\frac{dy(t)}{dt} + 15y(t) = 6x(t)$$

με αρχικές συνθήκες: $y(0) = 2$ και $\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$ και είσοδο $x(t) = e^{-2t}u(t)$.

Απάντηση: **(α) Υπολογισμός της απόκρισης μηδενικής εισόδου:** Η ομογενής εξίσωση είναι:

$$\lambda^2 + 8\lambda + 15 = (\lambda + 3)(\lambda + 5) = 0$$

Οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι $\lambda_1 = -3$ και $\lambda_2 = -5$ και η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι:

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-5t}, \quad \text{για } t > 0$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές c_1, c_2 από τις αρχικές συνθήκες και έχουμε:

$$y_{zi}(0) = c_1 e^{-3.0} + c_2 e^{-5.0} = c_1 + c_2 = 2$$

$$\left.\frac{dy_{zi}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\left(-3c_1 e^{-3t} - 5c_2 e^{-5t}\right)\right|_{t=0} = -3c_1 - 5c_2 = 0$$

Επιλύουμε το σύστημα και βρίσκουμε: $c_1 = 5, \ c_2 = -3$. Επομένως, η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι:

$$y_{zi}(t) = \left(5e^{-2t} - 3e^{-5t}\right) u(t)$$

(β) Υπολογισμός της απόκρισης μηδενικής κατάστασης: Επειδή η είσοδος είναι εκθετική συνάρτηση $x(t) = e^{-2t}u(t)$ θεωρούμε ως μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης το σήμα Ae^{-2t} που έχει μορφή ίδια με της εισόδου. Η αντικατάσταση της μερικής λύσης και των παραγώγων της στη ΓΕΔΣΣ δίνει:

$$(-2)(-2)Ae^{-2t} \; + \; 8A(-2)e^{-2t} + 15Ae^{-2t} = 6e^{-2t} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A = 2$$

Άρα η μερική λύση είναι $2e^{-2t}$.
Η απόκριση μηδενικής κατάστασης θα περιέχει τους ιδιορυθμούς του συστήματος και τη μερική λύση:

$$y_{zs}(t) = \mathrm{C}_1 e^{-3t} + \mathrm{C}_2 e^{-5t} + 2e^{-2t}$$

Θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τους συντελεστές C_1, C_2. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες, οι οποίες στην περίπτωση της μηδενικής κατάστασης είναι μηδενικές εξ ορισμού. Έχουμε:

$$y_{zs}(0) = C_1 e^{-3.0} + C_2 e^{-5.0} + 2e^{-2.0} = C_1 + C_2 + 2 = 0$$

$$\left.\frac{dy_{zi}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left(-3C_1 e^{-3t} - 5C_2 e^{-5t} - 4e^{-2t}\right)\Big|_{t=0} = -3C_1 - 5C_2 - 4 = 0$$

Επιλύουμε το σύστημα και βρίσκουμε: $C_1 = -3$, $C_2 = 1$. Επομένως, η απόκριση μηδενικής κατάστασης είναι:

$$y_{zs}(t) = (-3e^{-3t} + e^{-5t} + 2e^{-2t})\, u(t)$$

2. Υπολογισμός Κρουστικής Απόκριση από Διαφορική Εξίσωση

📖 Παράδειγμα 2 (*)

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 8\frac{dy(t)}{dt} + 15y(t) = 15x(t) - 2\frac{dx(t)}{dt}$$

Απάντηση: Επειδή η τάξη N του αριστερού μέλους (έξοδος και παράγωγοι της εξόδου) είναι μεγαλύτερη από την τάξη M του δεξιού μέλους (είσοδος και παράγωγοι της εισόδου), προκύπτει ότι η κρουστική απόκριση αποτελείται μόνο από εκθετικούς όρους, δηλαδή δεν περιέχει τη συνάρτηση Δέλτα ή/και παραγώγους αυτής.

Θεωρώντας ότι το σύστημα είναι σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας και θέτοντας στην είσοδο τη συνάρτηση Δέλτα, δηλ. $x(t) = \delta(t)$, η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} + 8\frac{dh(t)}{dt} + 15h(t) = 15\delta(t) - 2\frac{d\delta(t)}{dt}$$

Η ομογενής εξίσωση είναι:

$$\frac{d^2h_o(t)}{dt^2} + 8\frac{dh_o(t)}{dt} + 15h_o(t) = 0$$

και οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$h_o(0^+) = 0 \;\text{ και }\; \frac{dh_o(0^+)}{dt} = \frac{1}{\alpha_2} = 1$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\lambda^2 + 8\lambda + 15 = (\lambda + 3)(\lambda + 5) = 0$$

Οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι $\lambda_1 = -3$ και $\lambda_2 = -5$ και η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι:

$$h_o(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-5t}, \quad \text{για } t > 0$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές c_1, c_2 από τις αρχικές συνθήκες και έχουμε:

$$h_o(0^+) = c_1 e^{-3.0} + c_2 e^{-5.0} = c_1 + c_2 = 0$$

$$\frac{dh_o(0^+)}{dt} = \left(-3c_1 e^{-3t} - 5c_2 e^{-5t}\right)\Big|_{t=0} = -3c_1 - 5c_2 = \frac{1}{\alpha_N}[1] = 1$$

Επιλύουμε το σύστημα εξισώσεων και βρίσκουμε: $c_1 = 1/2$, $c_2 = -1/2$. Επομένως, η ομογενής λύση της κρουστικής απόκρισης είναι:

$$h_o(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-3t} - e^{-5t}\right) u(t)$$

Η συνολική κρουστική απόκριση είναι:

$$h(t) = 15h_o(t) - 2\frac{dh_o(t)}{dt}$$

Για διευκόλυνση των πράξεων θα υπολογίσουμε[2] χωριστά την παράγωγο $dh_o(t)/dt$. Είναι:

$$\begin{aligned}\frac{dh_o(t)}{dt} &= \left[\frac{1}{2}\left(e^{-3t} - e^{-5t}\right) u(t)\right]' = \frac{1}{2}\left[\left(e^{-3t} - e^{-5t}\right)' u(t) + \left(e^{-3t} - e^{-5t}\right) u'(t)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(-3e^{-3t} + 5e^{-5t}\right) u(t) + \left(e^{-3t} - e^{-5t}\right)\delta(t)\right] = \frac{1}{2}\left(-3e^{-3t} + 5e^{-5t}\right) u(t)\end{aligned}$$

Επομένως, η κρουστική απόκριση είναι:

$$\begin{aligned}h(t) = 15h_o(t) - 2\frac{dh_o(t)}{dt} &= \frac{15}{2}\left(e^{-3t} - e^{-5t}\right) u(t) - 2\frac{1}{2}\left(-3e^{-3t} + 5e^{-5t}\right) u(t) \\ &= \frac{1}{2}\left(21e^{-3t} - 25e^{-5t}\right) u(t)\end{aligned}$$

📖 Παράδειγμα 3 (*)

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση καθενός εκ των συστημάτων που περιγράφονται από τις διαφορικές εξισώσεις:

(α) $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

(β) $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

Απάντηση: (α) Επειδή $N < M$ η κρουστική απόκριση αποτελείται μόνο από εκθετικούς όρους. Θέτουμε είσοδο $x(t) = \delta(t)$ και για συνθήκες αρχικής ηρεμίας η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} + 4\frac{dh(t)}{dt} + 4h(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t)$$

[1] Όπου α_N είναι ο συντελεστής του όρου μέγιστης τάξης της διαφορικής εξίσωσης.

[2] Αξιοποιούμε την ιδιότητα $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(0)$ και ότι ισχύει $\delta(t) = du(t)/dt$.

Η ομογενής εξίσωση είναι:

$$\frac{d^2h_o(t)}{dt^2}+4\frac{dh_o(t)}{dt}+4h_o(t)=0$$

και οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$h_o(0^+)=0 \text{ και } \frac{dh_o(0^+)}{dt}=1$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2=0$$

Οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι $\lambda_1=\lambda_2=-2$ και η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι:

$$h_o(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2te^{\lambda_2 t}=(c_1+c_2t)e^{-2t}, \quad \text{για } t>0$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές c_1, c_2 από τις αρχικές συνθήκες και έχουμε:

$$h(0^+)=c_1=0$$

$$\frac{dh_o(0^+)}{dt}=\left(-2c_1e^{-2.t}+c_2e^{-2t}(1-2t)\right)\Big|_{t=0}=-2c_1+c_2=\frac{1}{\alpha_N}=1$$

Επιλύουμε το σύστημα και βρίσκουμε: $c_1=0, c_2=1$. Άρα η ομογενής λύση είναι:

$$h_o(t)=te^{-2t}u(t)$$

Υπολογίζουμε την κρουστική απόκριση:

$$\begin{aligned} h(t)=\frac{dh_o(t)}{dt}+h_o(t)&=\frac{d}{dt}[te^{-2t}u(t)]+te^{-2t}u(t)\\ &=\frac{dt}{dt}e^{-2t}u(t)+t\frac{d}{dt}\left(e^{-2t}u(t)\right)+te^{-2t}u(t)\\ &=e^{-2t}u(t)+t[-2e^{-2t}u(t)+e^{-2t}\delta(t)]+te^{-2t}u(t)\\ &=e^{-2t}u(t)-2te^{-2t}u(t)+te^{-2t}\delta(t)+te^{-2t}u(t)\\ &=e^{-2t}u(t)-te^{-2t}u(t)+te^{-2t}\delta(t)\\ &=(1-t)e^{-2t}u(t) \end{aligned}$$

Ισχύει $te^{-2t}\delta(t)=0$ λόγω της ιδιότητας $\varphi(t)\delta(t)=\varphi(0)\delta(t)$ της συνάρτησης Δέλτα.

(β) Επειδή $N=M$ η κρουστική απόκριση αποτελείται μόνο από εκθετικούς όρους και από μια συνάρτηση Δέλτα. Θέτουμε είσοδο $x(t)=\delta(t)$ και για συνθήκες αρχικής ηρεμίας η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2}+4\frac{dh(t)}{dt}+4h(t)=\frac{d^2\delta(t)}{dt^2}+3\frac{d\delta(t)}{dt}+\delta(t)$$

Η ομογενής εξίσωση, οι αρχικές συνθήκες, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, οι ιδιοτιμές και η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι ίδια με τα αντίστοιχα του προηγούμενου ερωτήματος. Άρα η ομογενής λύση είναι:

$$h_o(t)=te^{-2t}u(t)$$

Υπολογίζουμε την κρουστική απόκριση:

$$h(t) = \frac{d^2 h_o(t)}{dt^2} + 3\frac{dh_o(t)}{dt} + h_o(t) = \frac{d^2}{dt^2}[te^{-2t}u(t)] + 3\frac{d}{dt}[te^{-2t}u(t)] + te^{-2t}u(t) = \cdots$$

$$= 2(-2+t)e^{-2t}u(t) + 2(1-t)e^{-2t}\delta(t) + te^{-2t}\delta'(t) + (3-6t)e^{-2t}u(t)$$

$$+ 3te^{-2t}\delta(t) + te^{-2t}u(t) = -(1+3t)e^{-2t}u(t) + (2+t)e^{-2t}\delta(t) + te^{-2t}\delta'(t)$$

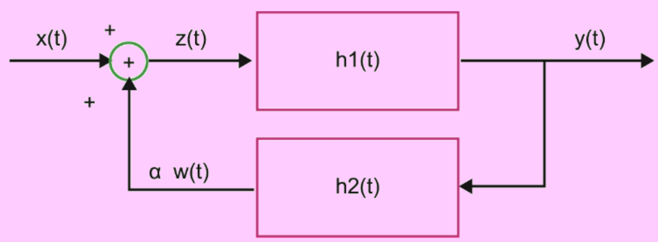
$$= -(1+3t)e^{-2t}u(t) + (2+e^{-2t})\,\delta(t)$$

Ισχύει: $t\,\delta'(t) = \delta(t)$

3. Υπολογισμός Ισοδύναμου Συστήματος

📖 Παράδειγμα 5

Η σύνδεση συστημάτων με ανάδραση δείχνεται στο επόμενο σχήμα.



Να υπολογιστεί η ισοδύναμη κρουστική απόκριση.

Απάντηση: Για τον υπολογισμό της κρουστικής απόκρισης του συνολικού συστήματος παρατηρούμε ότι η έξοδος του αθροιστή δίνεται από τη σχέση:

$$z(t) = x(t) + y(t) * h_2(t) \qquad (1)$$

Η έξοδος του δεύτερου συστήματος υπολογίζεται από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση:

$$y(t) = z(t) * h_1(t) \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1) στη (2) και με βάση την επιμεριστική και την αντιμεταθετική ιδιότητα της συνέλιξης, λαμβάνουμε:

$$y(t) = [x(t) + y(t) * h_2(t)] * h_1(t) = x(t) * h_1(t) + y(t) * h_2(t) * h_1(t)$$

$$\Rightarrow y(t)\,[1 - h_1(t) * h_2(t)] = x(t) * h_1(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{h_1(t)}{1 - h_1(t) * h_2(t)} * x(t)$$

Επομένως, για το συνολικό σύστημα, η ισοδύναμη κρουστική απόκριση είναι:

$$h_{eq}(t) = \frac{h_1(t)}{1 - h_1(t) * h_2(t)}$$

Σημείωση: Παραδείγματα που σημειώνονται με αστερίσκο (*), υπάρχουν και στις διαφάνειες των διαλέξεων θεωρίας.