Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
Λυμένα Παραδείγματα – Φυλλάδιο 2

Διδάσκων: Μιχάλης Παρασκευάς

ΣΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

- Στοιχειώδη Σήματα Συνεχούς Χρόνου

1. Στοιχειώδη Σήματα Συνεχούς Χρόνου

📖 Παράδειγμα 1 (*)

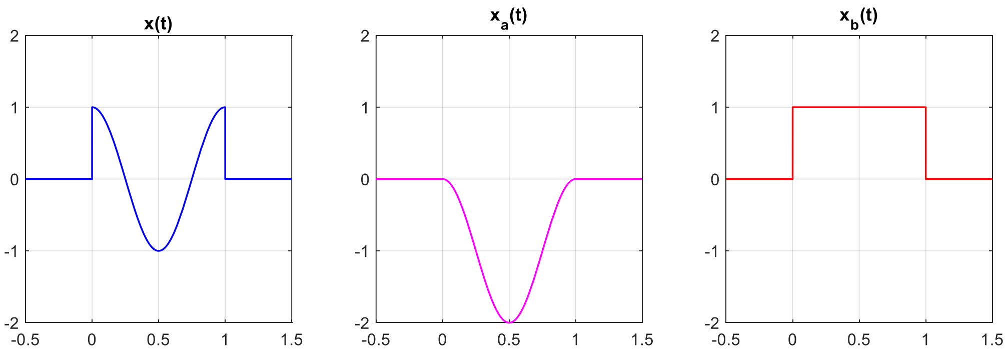
Δίνεται το ασυνεχές σήμα $x(t) = cos(2\pi t)[u(t) - u(t-1)]$. (α) Να αναπαρασταθεί ως άθροισμα συνεχών σημάτων και μοναδιαίων βηματικών συναρτήσεων. (β) Να βρεθεί η παράγωγός του.

Απάντηση: (α) Το δοθέν σήμα είναι μία περίοδος του $\cos(2\pi t)$ από το 0 μέχρι το 1 και μηδέν οπουδήποτε αλλού. Έχει ασυνέχειες στις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 1$.

Αν απαλείψουμε τον παλμό $u(t) - u(t-1)$ από το σήμα $x(t)$, τότε λαμβάνουμε ένα συνεχές σήμα, αλλά για να αντισταθμίσουμε την απαλοιφή πρέπει να εισάγουμε έναν μοναδιαίο παλμό μεταξύ των $t = 0$ και $t = 1$. Οπότε έχουμε:

$$x(t) = (cos(2\pi t) - 1)[u(t) - u(t-1)] + [u(t) - u(t-1)] = x_a(t) + x_b(t) \qquad (1)$$

όπου: $x_a(t) = (cos(2\pi t) - 1)[u(t) - u(t-1)]$ και $x_b(t) = u(t) - u(t-1)$. Ο όρος $x_a(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση ενώ ο όρος $x_b(t)$ είναι ασυνεχής συνάρτηση. Η γραφική παράσταση των κυματομορφών δείχνεται στο σχήμα.



Κυματομορφές σημάτων: (α) $x_a(t)$, (β) $x_b(t)$, (γ) $x(t) = x_a(t) + x_b(t)$

(β) Επειδή $du(t)/dt = \delta(t)$, η παράγωγος του δοθέντος σήματος (1) είναι:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2\pi \sin(2\pi t)[u(t) - u(t-1)] + (cos(2\pi t) - 1)[\delta(t) - \delta(t-1)] + \delta(t) - \delta(t-1) = -2\pi \sin(2\pi t)[u(t) - u(t-1)] + \delta(t) - \delta(t-1)$$

📖 Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί η τιμή καθενός από τα παρακάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int_{-\infty}^{\infty}(t-1)^2\,\delta(t-1)\,dt$ (β) $\int_{-\infty}^{\infty}t^2\,\delta'(t-1)\,dt$

(γ) $\int_{-\infty}^{\infty}\cos(2\pi t)\,\delta(t-1)dt$ (δ) $\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-2t}+\sin(10\pi t))\,\delta'(t)\,dt$

Απάντηση: Κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της συνάρτησης Δέλτα, λαμβάνουμε:

(α) $$\int_{-\infty}^{\infty}(t-1)^2\,\delta(t-1)\,dt=(t-1)^2|_{t=1}=0$$

(β) $$\int_{-\infty}^{\infty}t^2\,\delta'(t-1)\,dt=(-1)^1\left.\frac{d(t^2)}{dt}\right|_{t=1}=-2t|_{t=1}=-2$$

(γ) $$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(2\pi t)\,\delta(t-2)dt=\cos(2\pi t)\,|_{t=2}=1$$

(δ) $$\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-2t}+\sin(2\pi t))\,\delta'^{(t)}dt$$

$$=\left.\frac{d(e^{-2t}+\sin(2\pi t))}{dt}\right|_{t=0}$$

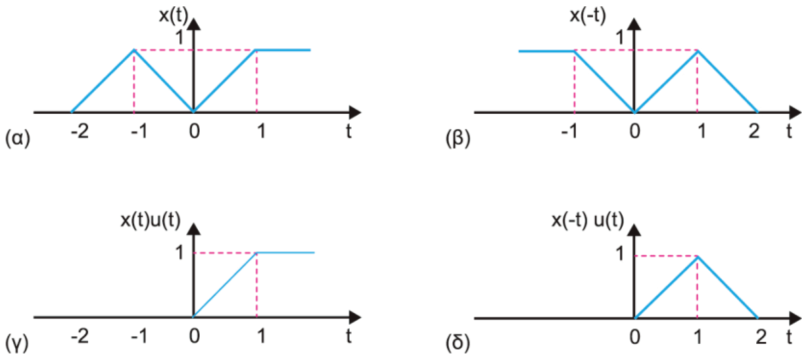
$$=2e^{-2t}-2\pi\cos(2\pi t)\,|_{t=0}$$

$$=2-2\pi$$

📖 Παράδειγμα 3

Να σχεδιαστούν τα σήματα $x_1(t)=x(t)u(t)$ και $x_2(t)=x(-t)u(t)$, όταν το $x(t)$ δίνεται από τη σχέση $x(t)=r(t+2)-2r(t+1)+2r(t)-r(t-1)$.

Απάντηση:



(α) Αρχικό σήμα $x(t)$, (β) Ανάκλαση $x(-t)$, (γ) Σήμα $x_1(t)$, (δ) Σήμα $x_2(t)$

Στο σχήμα (α) απεικονίζεται το σήμα $x(t)$ και στο (β) η ανάκλασή του $x(-t)$. Το $x_1(t)=x(t)u(t)$ είναι το αιτιατό τμήμα του σήματος $x(t)$ και δείχνεται στο σχήμα (γ), ενώ το $x_2(t)=x(-t)u(t)$ είναι το αιτιατό τμήμα του σήματος $x(-t)$ και απεικονίζεται στο σχήμα (δ). Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι αν και το σήμα $x(t)$ είναι μηαιτιατό, εντούτοις τα σήματα $x_1(t)$και $x_2(t)$ είναι αιτιατά. Αυτό σημαίνει ότι ένα μη αιτιατό σήμα $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο αιτιατών σημάτων με τη βοήθεια της σχέσης $x(t)=x_1(t)+x_2(-t)$. Στην περίπτωση αυτή το σήμα $x(t)$ ισούται με το άθροισμα του σήματος $x_1(t)$ και της ανάκλασης $x_2(-t)$ του σήματος $x_2(t)$.

📖 **Παράδειγμα 4 (*)**

Δίνονται τα σήματα $x_1(t) = rect\left(\frac{t}{2}\right)$, $x_2(t) = rect\left(\frac{t}{4}\right)$ και $x_3(t) = tri(t)$. Να υπολογιστούν και να απεικονιστούν τα σήματα:

(α) $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$
(β) $w(t) = x_1(t) + x_3(t)$
(γ) $z(t) = x_2(t) - x_1(t) - x_3(t)$

Απάντηση: (α) Αρχικά θα υπολογίσουμε τα σήματα $x(t), y(t)$και $z(t)$ με αναλυτικό υπολογισμό και κατόπιν θα χρησιμοποιήσουμε το Octave.

Η συνάρτηση $rect(\quad)$ δίνεται από τη σχέση (1.88) και η tri() από τη σχέση (1.92). Επομένως, το σήμα $x_1(t)$ είναι ένας τετραγωνικός παλμός μοναδιαίου πλάτους με κέντρο το μηδέν και εύρος δύο μονάδες χρόνου:

$$x_1(t) = rect\left(\frac{t}{2}\right) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 1 \\ 0, & t < -1 \text{ ή } t > 1 \end{cases}$$

Το σήμα $x_2(t)$ είναι ένας τετραγωνικός παλμός μοναδιαίου πλάτους με κέντρο το μηδέν και εύρος τέσσερις μονάδες χρόνου:

$$x_2(t) = rect\left(\frac{t}{4}\right) = \begin{cases} 1, & -2 < t < 2 \\ 0, & t < -2 \text{ ή } t > 2 \end{cases}$$

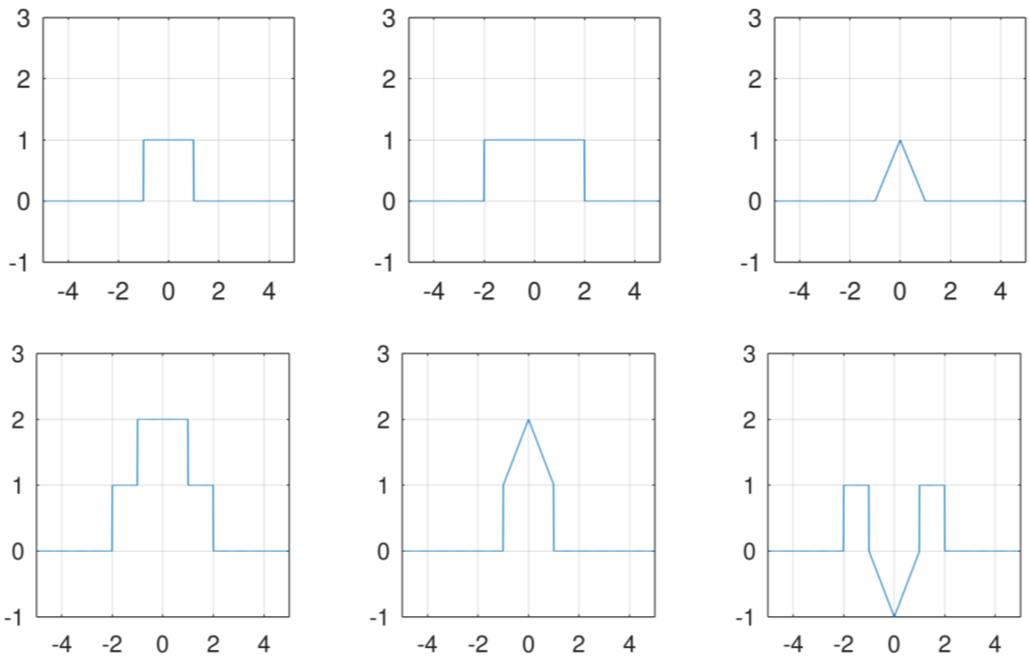
Το σήμα $x_3(t)$ είναι ένας τριγωνικός παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο το μηδέν και εύρος δύο μονάδες χρόνου:

$$x_3(t) = tri(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{1}, & |t| < 1 \\ 0, & t < -1 \text{ ή } t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 + t, & -1 < t < 0 \\ 1 - t, & 0 < t < 1 \\ 0, & t < -1 \text{ ή } t > 1 \end{cases}$$

Για να υπολογίσουμε τα σήματα $y(t), w(t)$και $z(t)$ κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα με τα σημεία ασυνέχειας των ανισοτήτων των παραπάνω σημάτων $x_1(t)$, $x_2(t)$ και $x_3(t)$. Στις τρεις τελευταίες γραμμές υπολογίζουμε τα σήματα $y(t), w(t)$και $z(t)$.

-∞ -2 -1 0 1 2 ∞

$x_1(t)$	0	0	1	1	0	0
$x_2(t)$	0	1	1	1	1	0
$x_3(t)$	0	0	1+t	1-t	0	0
$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$	0	1	2	2	1	0
$w(t) = x_1(t) + x_3(t)$	0	0	2+t	2-t	0	0
$z(t) = x_2(t) - x_1(t) - x_3(t)$	0	1	-1-t	-1+t	1	0



Κυματομορφές σημάτων: (α) $x_1(t)$, (β) $x_2(t)$, (γ) $x_3(t)$,
(δ) $y(t)$, (ε) $w(t)$ και (στ) $z(t)$.

🕮 Παράδειγμα 5

Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το σήμα:

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{10}\right) + 3rect\left(\frac{t+1}{2}\right) + 2tri(t)$$

<u>Απάντηση</u>: Για τη δοθείσα εκφώνηση, έχουμε :

$$rect\left(\frac{t}{10}\right) = \begin{cases} 1, & -5 < t < 5 \\ 0, & t < -5 \text{ ή } t > 5 \end{cases}$$

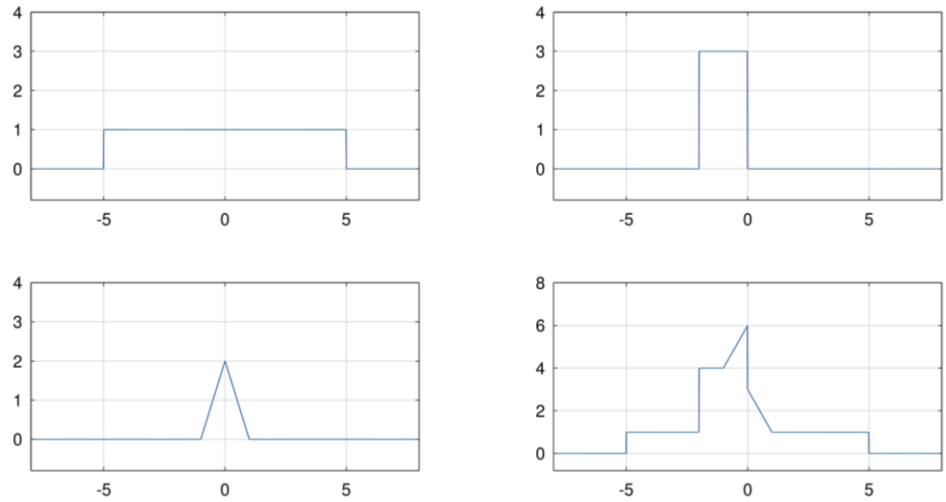
$$3\,rect\left(\frac{t+1}{2}\right) = \begin{cases} 3, & -1 < t+1 < 1 \\ 0, & t+1 < -1 \text{ ή } t+1 > 1 \end{cases} = \begin{cases} 3, & -2 < t < 0 \\ 0, & t < -2 \text{ ή } t > 0 \end{cases}$$

$$2\,tri(t) = \begin{cases} 2\left(1 - \frac{|t|}{1}\right), & |t| < 1 \\ 0, & t < -1 \text{ ή } t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 2(1+t), & -1 < t < 0 \\ 2(1-t), & 0 < t < 1 \\ 0, & t < -1 \text{ ή } t > 1 \end{cases}$$

Για να υπολογίσουμε το σήμα $x(t)$ κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα με τα σημεία ασυνέχειας των ανισοτήτων. Στην τελευταία γραμμή υπολογίζεται το άθροισμα όλων των παραπάνω γραμμών, δηλαδή το σήμα $x(t)$.

-∞ -5 -2 -1 0 1 2 5 ∞

$rect\left(\frac{t}{10}\right)$	0	1	1	1	1	1	1	0
$3\,rect\left(\frac{t+1}{2}\right)$	0	0	3	3	0	0	0	0
$2\,tri(t)$	0	0	0	2+2t	2-2t	0	0	0
Σύνολο	0	0	4	6+2t	3-2t	1	1	0



Σήματα: (α) $rect\left(\frac{t}{10}\right)$, (β) $3rect\left(\frac{t+1}{2}\right)$, (γ) $2tri(t)$, (δ) $x(t)$

<u>Σημείωση</u>: Παραδείγματα που σημειώνονται με αστερίσκο (*), υπάρχουν και στις διαφάνειες των διαλέξεων θεωρίας.