Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
Λυμένα Παραδείγματα – Φυλλάδιο 13
Διδάσκων: Μιχάλης Παρασκευάς

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ
- Ιδανικά Γραμμικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

1. Ιδανικά Γραμμικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

Παράδειγμα 1
Ένα σήμα $x(t) = e^{-2t}u(t)$ διέρχεται από ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\Omega_H = 1\, rad/sec$. Να βρεθεί ο λόγος της ενέργειας εξόδου προς την ενέργεια εισόδου (για το φίλτρο να ληφθεί $A = 1$).

Απάντηση: Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = e^{-2t}u(t)$ είναι:

$$X(\Omega) = \frac{1}{2 + j\Omega}$$

Επομένως, το φάσμα πυκνότητας ενέργειας του σήματος $x(t)$ είναι:

$$S_x(\Omega) = |X(\Omega)|^2 = \left|\frac{1}{2 + j\Omega}\right|^2 = \frac{1}{\Omega^2 + 4}$$

Επειδή το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του βαθυπερατού φίλτρου δίνεται από τη σχέση:

$$|H(\Omega)| = \begin{cases} 1\,, & |\Omega| < \Omega_H = 1 \\ 0\,, & \text{αλλού} \end{cases}$$

βρίσκουμε το φάσμα πυκνότητας ενέργειας του σήματος εξόδου, ως:

$$S_y(\Omega) = |X(\Omega)|^2\,|H(\Omega)|^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{\Omega^2 + 4}\,, & |\Omega| < 1 \\ 0\,, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η ολική ενέργεια του σήματος εξόδου $y(t)$ δίνεται από το θεώρημα Parseval:

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_y(\Omega)\, d\Omega = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{\Omega^2 + 4} d\Omega = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}(0{,}5)$$

Ομοίως, η ενέργεια του σήματος εισόδου $x(t)$ είναι:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-4t}dt = 0{,}25$$

Διαιρώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, βρίσκουμε τον ζητούμενο λόγο, ως:

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{(1/2\pi)\tan^{-1}(0.5)}{0.25} = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}(0{,}5) = 0{,}29$$

Παρατηρούμε ότι ποσοστό 71% της ενέργειας εισόδου απορροφάται από το ιδανικό φίλτρο και μόνο το 29% φθάνει στην έξοδο.

📖 Παράδειγμα 2 (*)

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου που περιγράφεται από τη σχέση:

$$x(t) = 2cos(20t) + 10sinc\left(\frac{10}{\pi}t\right) + 5sinc^2\left(\frac{5}{\pi}t\right)$$

περνάει μέσα από ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με απόκριση συχνότητας:

$$H(\Omega) = rect\left(\frac{\Omega}{32}\right)$$

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα $X(\Omega)$.
(β) Να σχεδιαστεί η απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$ και το φάσμα $X(\Omega)$.
(γ) Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους $Y(\Omega)$ της εξόδου του φίλτρου.
(δ) Να υπολογιστεί το σήμα $y(t)$ στο πεδίο του χρόνου.
(ε) Να υπολογιστεί το σήμα $y(t)$ στο πεδίο του χρόνου αν το φίλτρο έχει απόκριση συχνότητας:

$$H(\Omega) = 1 - rect\left(\frac{\Omega}{32}\right)$$

Απάντηση: (α) Θα επιλύσουμε το ερώτημα χρησιμοποιώντας γνωστούς μετασχηματισμούς Fourier. Επειδή ισχύει:

$$A\,cos(\Omega_0 t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \pi A[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$$

προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Fourier του πρώτου όρου είναι:

$$2\,cos(20t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\,[\delta(\Omega + 20) + \delta(\Omega - 20)]$$

Επειδή ισχύει:

$$\left(\frac{B}{2\pi}\right) sinc\left(\frac{Bt}{2\pi}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} rect\left(\frac{\Omega}{B}\right)$$

προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Fourier του δεύτερου όρου είναι:

$$10\,sinc\left(\frac{10}{\pi}t\right) = \pi\,\frac{20}{2\pi} sinc\left(\frac{20}{2\pi}t\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} \pi\,rect\left(\frac{\Omega}{20}\right)$$

Τέλος, επειδή ισχύει:

$$\left(\frac{B}{2\pi}\right) sinc^2\left(\frac{Bt}{2\pi}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} tri\left(\frac{\Omega}{B}\right)$$

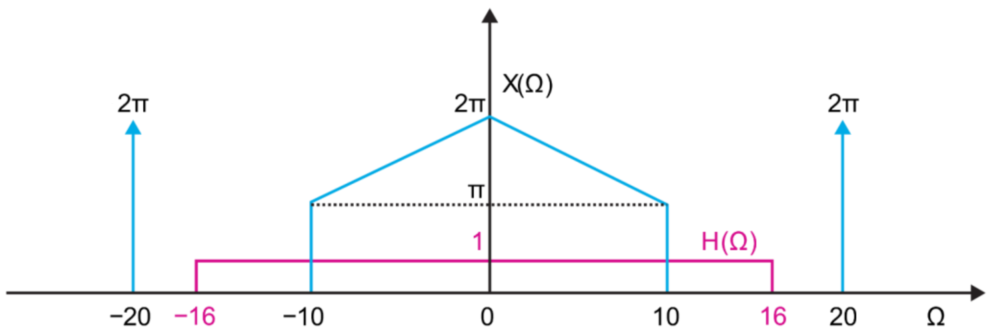
προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Fourier του τρίτου όρου είναι:

$$5sinc^2\left(\frac{5}{\pi}t\right) = \pi\left(\frac{10}{2\pi}\right)sinc^2\left(\frac{10t}{2\pi}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} \pi\, tri\left(\frac{\Omega}{10}\right)$$

Λόγω της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Fourier αθροίζουμε τα επιμέρους αποτελέσματα και βρίσκουμε ότι το συνολικό φάσμα $X(\Omega)$ είναι:

$$X(\Omega) = 2\pi\,[\delta(\Omega+20) + \delta(\Omega-20)] + \pi\, rect\left(\frac{\Omega}{20}\right) + \pi\, tri\left(\frac{\Omega}{10}\right)$$

(β) Το βαθυπερατό φίλτρο έχει συχνότητα αποκοπής $\Omega_H = 16\ (rad/sec)$ και μοναδιαίο κέρδος. Η γραφική παράσταση των φασμάτων $X(\Omega)$ και $H(\Omega)$ είναι:



Φάσματα $X(\Omega)$ και $H(\Omega)$

(γ) Το φάσμα της εξόδου δίνεται από τη σχέση:

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$$

Με βάση το προηγούμενο σχήμα προκύπτει:

$$Y(\Omega) = \pi\, rect\left(\frac{\Omega}{20}\right) + \pi\, tri\left(\frac{\Omega}{10}\right)$$

(δ) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, και επειδή το (βαθυπερατό) φίλτρο επιτρέπει τη διέλευση των συχνοτήτων του σήματος εισόδου που βρίσκονται στη ζώνη διέλευσης και αποκόπτει τις συχνότητες που βρίσκονται στη ζώνη αποκοπής, προκύπτει ότι η συχνότητα που οφείλεται στον όρο $2cos(20t)$ αποκόπτεται και το σήμα $y(t)$ στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$y(t) = 10sinc\left(\frac{10}{\pi}t\right) + 5sinc^2\left(\frac{5}{\pi}t\right)$$

(ε) Στην περίπτωση αυτή το φίλτρο είναι υψιπερατό και έχει συχνότητα αποκοπής $\Omega_L = 16\ (rad/sec)$ και επιτρέπει μόνο τη διέλευση της συχνότητας 20 rad/sec. Επομένως, το σήμα $y(t)$ στο πεδίο του χρόνου, είναι:

$$y(t) = 2cos(20t)$$

<u>Σημείωση</u>: Παραδείγματα που σημειώνονται με αστερίσκο (*), υπάρχουν και στις διαφάνειες των διαλέξεων θεωρίας.