Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

# ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
# Λυμένα Παραδείγματα – Φυλλάδιο 10
**Διδάσκων: Μιχάλης Παρασκευάς**

**ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤ/ΣΜΟΣ FOURIER – ΜΕΤ/ΣΜΟΣ FOURIER ΣΗΜΑΤΩΝ ΙΣΧΥΟΣ**

- Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος
- Συσχετίσεις (αυτοσυσχέτιση, ετεροσυσχέτιση)
- Φασματικές Πυκνότητες

## 1. Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier

**📖 Παράδειγμα 1**
Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης:

$$X(\Omega) = [\delta(\Omega - 2) + \delta(\Omega + 2)] + 3j[\delta(\Omega - 1) + \delta(\Omega + 1)]$$

Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι μετασχηματισμοί Fourier:

$$\cos(\alpha t) \xleftrightarrow{F} \pi[\delta(\Omega - \alpha) + \delta(\Omega + \alpha)]$$
$$\sin(\beta t) \xleftrightarrow{F} -\pi j[\delta(\Omega - \beta) + \delta(\Omega + \beta)]$$

Επομένως για $\alpha = 2$ και $\beta = 1$ έχουμε:

$$x(t) = F^{-1}\{\pi[\delta(\Omega - 2) + \delta(\Omega + 2] + 3\pi j[\delta(\Omega - 1) + \delta(\Omega + 1)]\}$$
$$= \frac{1}{\pi}\cos(2t) - \frac{3}{\pi}\sin(t)$$

**📖 Παράδειγμα 2**
Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης:

$$X(\Omega) = \frac{4 + 10j\Omega}{-\Omega^2 + 6j\Omega + 8}$$

Απάντηση: Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή, χωρίζουμε το κλάσμα σε δύο επιμέρους κλάσματα και εφαρμόζουμε την μέθοδο επίλυσης του προηγούμενου παραδείγματος, οπότε έχουμε:

$$X(\Omega) = \frac{4 + 10j\Omega}{(2 + j\Omega)(4 + j\Omega)} = -\frac{8}{2 + j\Omega} + \frac{18}{4 + j\Omega}$$

Επειδή ισχύει:

$$Ae^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{A}{a + j\Omega}$$

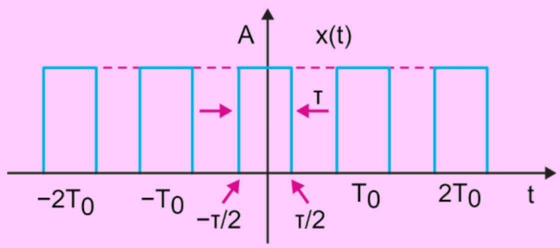
βρίσκουμε:

$$x(t) = F^{-1}\{X(\Omega)\} = F^{-1}\left\{-\frac{8}{2+j\Omega}\right\} + F^{-1}\left\{\frac{18}{4+j\Omega}\right\}$$
$$= -8\,e^{-2t}u(t) + 18\,e^{-4t}u(t)$$
$$= [18\,e^{-4t} - 8\,e^{-2t}]\,u(t)$$

## 2. Μετασχηματισμός Fourier σημάτων Ισχύος

**📖 Παράδειγμα 3 (*)**

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του περιοδικού τετραγωνικού σήματος $x(t)$ με διάρκεια παλμού $\tau$ και περίοδο $T_0$:




Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι ο περιοδικό τετραγωνικό σήμα αναπτύσσεται στη σειρά Fourier:

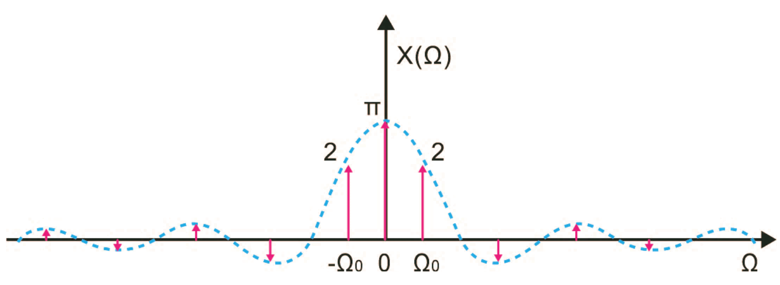
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\, e^{jk\Omega_0 t}$$

όπου:

$$X_k = \frac{\tau\Omega_0}{2\pi} sinc\left(\frac{k\Omega_0 t}{2}\right)$$

Λόγω γραμμικότητας του μετασχηματισμού Fourier και αφού $e^{j\Omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$, ο μετασχηματισμός Fourier του περιοδικού σήματος είναι:

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_k\, \delta(\Omega - k\Omega_0)$$




Το φάσμα του περιοδικού τετραγωνικού σήματος.

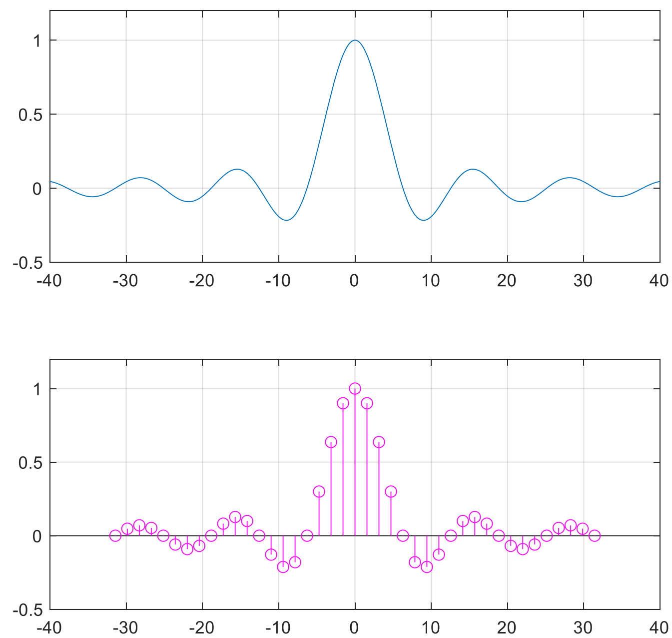
**Σχόλια:**

- Ο μετασχηματισμός Fourier του περιοδικού συρμού τετραγωνικών παλμών με περίοδο στο χρόνο $T_0$, είναι ένας συρμός περιοδικών κρουστικών συναρτήσεων με περίοδο στη συχνότητα $\Omega_0 = 2\pi/T_0$, οι οποίες είναι σταθμισμένες (πολλαπλασιασμένες) με τους συντελεστές $X_n$ της εκθετικής σειράς Fourier.

- Εναλλακτικά, ο μετασχηματισμός Fourier του περιοδικού συρμού τετραγωνικών παλμών προκύπτει από τη δειγματοληψία στη συχνότητα με περίοδο δειγματοληψίας $\Omega_0 = 2\pi/T_0$, του μετασχηματισμού Fourier του αποκομμένου σήματος.
- Η περίοδος $\Omega_0 = 2\pi/T_0$ των κρουστικών συναρτήσεων στη συχνότητα καθορίζεται από την περίοδο $T_0$ του περιοδικού σήματος.
- Η περιβάλλουσα του φάσματος περιοδικού σήματος ταυτίζεται με το φάσμα του αποκομμένου σήματος (περιοδικό σήμα μίας περιόδου).

(α)

(β)




(α) Μετασχηματισμός Fourier «αποκομμένης» συνάρτησης $x_T(t)$

(β) Μετασχηματισμός Fourier περιοδικού σήματος $x(t)$

## 3. Συσχετίσεις (αυτοσυσχέτιση, ετεροσυσχέτιση)

**Παράδειγμα 4**

Να υπολογιστεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και η φασματική πυκνότητα ενέργειας του τετραγωνικού παλμού πλάτους $A$ και διάρκειας $T$:

$$x(t) = A\, rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

Απάντηση: Το δοθέν σήμα είναι σήμα ενέργειας. Θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t+\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A\, rect\left(\frac{t}{T}\right) A\, rect\left(\frac{t+\tau}{T}\right) dt$$

Λόγω της συμμετρίας του τετραγωνικού παλμού, η αυτοσυσχέτιση ταυτίζεται με τη συνέλιξη, η οποία γνωρίζουμε ότι είναι ο τριγωνικός παλμός. Ας υπολογίσουμε αναλυτικά την αυτοσυσχέτιση.

Ο παλμός $A\,rect\left(\frac{t+\tau}{T}\right)$ λαμβάνει θέσεις στον άξονα του χρόνου οι οποίες καθορίζονται από την τιμή της υστέρησης $\tau$. Προφανώς το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι μηδενικό στις περιπτώσεις που οι δύο παλμοί δεν επικαλύπτονται. Με βάση το επόμενο σχήμα (α) αυτό συμβαίνει όταν:

$$-\tau + \frac{T}{2} < -\frac{T}{2} \Rightarrow -\tau < -T \Rightarrow \tau > T$$

και με βάση το σχήμα (β) όταν:

$$-\tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \Rightarrow -\tau > T \Rightarrow \tau < -T$$

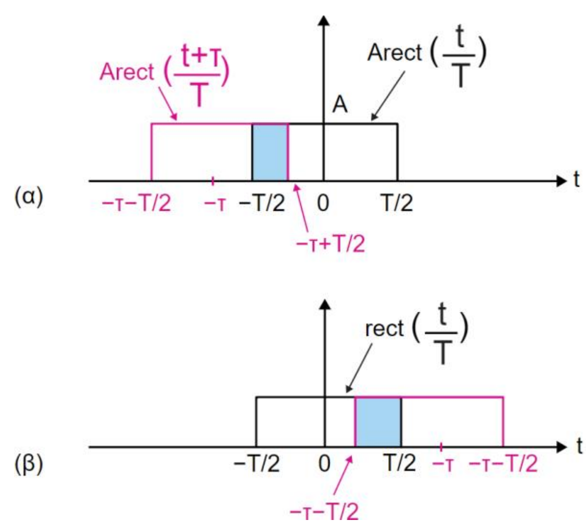
Επομένως για τιμές της υστέρησης που ικανοποιούν τις σχέσεις $\tau > T$ και $\tau < -T$ η αυτοσυσχέτιση είναι μηδέν. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις τιμής της υστέρησης $\tau$ που προκαλούν επικάλυψη των τετραγωνικών παλμών, οπότε παράγεται μη-μηδενικό αποτέλεσμα.

Η πρώτη περίπτωση φαίνεται στο σχήμα (α) και περιγράφεται από την ανισότητα:

$$-\frac{T}{2} < -\tau + \frac{T}{2} < \frac{T}{2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow 0 < \tau < T$$

Στην περίπτωση αυτή η τιμή του ολοκληρώματος της αυτοσυσχέτισης υπολογίζεται σε:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-T/2}^{-\tau+T/2} A^2 dt = A^2 t|_{-T/2}^{-\tau+T/2} = \cdots = A^2(T-\tau)$$




Υπολογισμός αυτοσυσχέτισης για υστέρηση: (α) $0 < \tau < T$, (β) $-T < \tau < 0$.

Η δεύτερη περίπτωση υστέρησης $\tau$ που δίνει μη-μηδενικό αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα (β) και περιγράφεται από την ανισότητα:

$$-\frac{T}{2} < -\tau - \frac{T}{2} < \frac{T}{2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow -T < \tau < 0$$

Στην περίπτωση αυτή η τιμή του ολοκληρώματος της αυτοσυσχέτισης υπολογίζεται σε:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\tau-T/2}^{T/2} A^2 dt = A^2 t|_{-\tau-T/2}^{T/2} = \cdots = A^2(T+\tau)$$

Συνοψίζουμε το αποτέλεσμα στην επόμενη σχέση:

$$R_{xx}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > T \text{ και } \tau < -T \\ A^2(T+\tau), & -T < \tau < 0 \\ A^2(T-\tau), & 0 < \tau < T \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα είναι ο τριγωνικός παλμός με κέντρο το μηδέν, διάρκεια $2T$ και μέγιστο πλάτους $A^2$. Η φασματική πυκνότητα ενέργειας δίνεται από τη σχέση:

$$S_x(\Omega) = |X(\Omega)|^2$$

Επειδή ο μετασχηματισμός Fourier του τετραγωνικού παλμού $A\, rect(t/T)$ είναι:

$$X(\Omega) = AT\; sinc\left(\frac{\Omega T}{2\pi}\right)$$

Επομένως, η φασματική πυκνότητα ενέργειας είναι:

$$S_x(\Omega) = |X(\Omega)|^2 = A^2 T^2\; sinc^2\left(\frac{\Omega T}{2\pi}\right)$$

**📖 Παράδειγμα 5**

Να υπολογιστεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος $x(t) = A\cos(\Omega_0 t + \theta)$

Απάντηση: Επειδή το δοθέν σήμα είναι περιοδικό, θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης από τη σχέση:

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, x(t+\tau)\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} A\cos(\Omega_0 t + \theta)\, A\cos(\Omega_0(t+\tau) + \theta)\, dt \\ &= \frac{A^2}{T_0}\int_{T_0} \frac{1}{2}[\cos(\Omega_0 t + \theta + \Omega_0(t+\tau) + \theta) + \cos(\Omega_0 t + \theta - \Omega_0(t+\tau) - \theta)]\, dt \\ &= \frac{A^2}{2T_0}\int_{T_0} [\cos(2\Omega_0 t + 2\theta + \Omega_0\tau) + \cos(\Omega_0\tau)]\, dt \\ &= \frac{A^2}{2T_0}\int_{T_0} \cos(2\Omega_0 t + \Omega_0\tau + 2\theta)\, dt + \frac{A^2}{2T_0}\cos(\Omega_0\tau)\int_{T_0} dt = \\ &= \frac{A^2}{2T_0}\int_{T_0} \cos(2\Omega_0 t + \Omega_0\tau + 2\theta)\, dt + \frac{A^2}{2}\cos(\Omega_0\tau) \end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα ισούται με μηδέν, επειδή είναι ολοκλήρωμα συνημιτόνου σε μια περίοδο. Επομένως η αυτοσυσχέτιση είναι:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\Omega_0\tau)$$

**Σχόλιο:** Από την επίλυση παρατηρούμε ότι:

- το αποτέλεσμα λαμβάνει μέγιστη τιμή ένα (1) για υστέρηση $\tau = kT_0$ και ελάχιστη τιμή μηδέν (0) για υστέρηση $\tau = kT_0/2, k \in Z$.
- στην αυτοσυσχέτιση δεν εμφανίζεται ο όρος της φάσης ($\theta$).

## 4. Φασματικές Πυκνότητες

**Παράδειγμα 6**
Να υπολογιστεί η ενέργεια της ζώνης αρμονικών $\Omega_1 = 0$ ως $\Omega_2 = 20\pi$ του σήματος $x(t) = e^{-t}u(t)$, καθώς επίσης και το ποσοστό της ενέργειας σε αυτή τη ζώνη συχνοτήτων ως προς τη συνολική ενέργεια του σήματος.

Απάντηση: Ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$ είναι $X(\Omega) = 1/(1 + j\Omega)$. Επομένως η φασματική πυκνότητα ενέργειας είναι:

$$S_x(\Omega) = |X(\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\Omega^2}$$

Η ενέργεια στην περιοχή συχνοτήτων $[0, 20\pi]$ δίνεται από τη σχέση:

$$E_x(0, 20\pi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{20\pi} \frac{1}{1+\Omega^2}\, d\omega = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}(\Omega)\Big|_0^{62,8} = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}(62,8) \approx \frac{1}{2,1} Joules$$

Η συνολική ενέργεια του σήματος μπορεί να υπολογιστεί στο πεδίο του χρόνου ή της συχνότητας και αντίστοιχα είναι:

$$E_x = \int_0^{+\infty} (e^{-t})^2\, dt = \frac{1}{2} \qquad \text{ή} \qquad E_x = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\Omega^2}\, d\Omega = \frac{1}{2}$$

Επομένως το ποσοστό της ενέργειας στο διάστημα συχνοτήτων (0, 20π) σε σχέση με τη συνολική ενέργεια, είναι περίπου 95% (=2/2,1).

**Παράδειγμα 7**
Δίνεται το σήμα $x(t) = u(t)$. Να δειχθεί ότι είναι σήμα ισχύος και κατόπιν να υπολογιστούν η ισχύς, η μέση χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και η φασματική πυκνότητα ισχύος.

Απάντηση: Η ενέργεια του σήματος είναι:

$$E_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} |u(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{T} 1\, dt = \lim_{T\to\infty} T = \infty$$

και η ισχύς του είναι:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |u(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_0^{T} 1\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

άρα είναι σήμα ισχύος. Επομένως θα υπολογίσουμε τη μέση συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)u(t-\tau)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{\tau}^{T} 1\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} (T-\tau) = \frac{1}{2}$$

Επειδή η φασματική πυκνότητα ισχύος του σήματος είναι ο μετασχηματισμός Fourier της μέσης χρονικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, έχουμε:

$$S_x(\Omega) = \mathcal{F}\,\{R_x(\tau)\} = \pi\, \delta(\Omega)$$

Σημείωση: Παραδείγματα που σημειώνονται με αστερίσκο (*), υπάρχουν και στις διαφάνειες των διαλέξεων θεωρίας.