Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 11: Μελέτη ΓΧΑ Συστημάτων με τον Μετασχηματισμό Laplace

Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενα Διάλεξης

1. Επίλυση Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων με τον μετασχηματισμό Laplace
2. Συνάρτηση Μεταφοράς συστήματος
3. Μελέτη Ευστάθειας και Αιτιότητας συστημάτων στο πεδίο Συχνότητας
4. Συνδεσμολογίες συστημάτων στο πεδίο Συχνότητας
5. Βηματική απόκριση ΓΧΑ Συστήματος
6. Περιγραφή συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης

1. Επίλυση Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων με τον Μετασχηματισμό Laplace

Επίλυση Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων με τον Μετασχηματισμό Laplace (1/3)

Υπολογισμός απόκρισης ευσταθούς και αιτιατού ΓΧΑ, ανεξάρτητα αν βρίσκεται ή όχι σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας. Το σύστημα περιγράφεται από τη ΓΔΕΣΣ:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}, \qquad N > M$$

όπου $x(t)$ και $y(t)$ είναι η είσοδος και έξοδος του συστήματος, και οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$y(0), \left.\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right|_{t=0} \text{ για } k = 1 \ldots N-1$$

Ο συμβολισμός $y^{(k)}(t)$ και αναφέρεται στην $k-$στη παράγωγο του σήματος $y(t)$. Η υπόθεση:

$$\left[\sum_{n=0}^{N} a_n s^n\right] Y(s) = \left[\sum_{m=0}^{M} b_m s^m\right] X(s) + \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \left.\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right|_{t=0-}\right)$$

όπου $Y(s) = L\{y(t)\}$, $X(s) = L\{x(t)\}$.

Επίλυση Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων με τον Μετασχηματισμό Laplace (2/3)

Κάνουμε τις ακόλουθες αντικαταστάσεις:

$$A(s) = \sum_{n=0}^{N} a_n s^n, \qquad a_N = 1$$

$$B(s) = \sum_{m=0}^{M} b_m s^m$$

$$I(s) = \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \left. \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right|_{t=0-} \right), \qquad a_N = 1$$

και η προηγούμενη σχέση γράφεται ως μια πολυωνυμική σχέση:

$$A(s)\, Y(s) = B(s)\, X(s) + I(s)$$

Λύνουμε ως προς $Y(s)$ και βρίσκουμε:

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} X(s) + \frac{1}{A(s)} I(s)$$

Θέτοντας στην παραπάνω σχέση:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad \text{και} \quad H_1(s) = \frac{1}{A(s)}$$

Επίλυση Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων με τον Μετασχηματισμό Laplace (3/3)

λαμβάνουμε:

$$Y(s) = H(s)\,X(s) + H_1(s)\,I(s)$$

Εφαρμόζοντας αντίστροφο μετ. Laplace στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε τη συνολική έξοδο $y(t)$:

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t)$$

όπου:

- $y_{zs}(t) = L\{H(s)X(s)\}$ είναι η **απόκριση μηδενικής κατάστασης**, και
- $y_{zi}(t) = L\{H(s)I(s)\}$ είναι η **απόκριση μηδενικής εισόδου**

Τα παραπάνω, με χρήση ολοκληρωμάτων συνέλιξης γράφονται:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_0^t i(\tau)h_1(t-\tau)d\tau$$

όπου $h(t) = L^{-1}\{H(s)\}$ και $h_1(t) = L^{-1}\{H_1(s)\}$ και

$$i(t) = L^{-1}\{I(s)\} = \sum_{n=1}^{N} a_k \left(\sum_{k=0}^{n-1} \delta^{(n-1-k)}(t) \left.\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right|_{t=0-} \right)$$

Το $\delta^{(i)}(t)$ περιγράφει την $i-$στη παράγωγο της κρουστικής συνάρτησης. Ισχύει $\delta^{(0)}(t) = \delta(t)$.

Άσκηση 1

Να επιλυθεί η ακόλουθη γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (ΓΔΕΣΣ):

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \equiv u(t)$$

με αρχική συνθήκη $y(0^-) = 0$.

Απάντηση: Για την επίλυση της ΓΔΕΣΣ εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία:

Βήμα 1: Υπολογίζουμε τον LT των δύο μελών της διαφορικής εξίσωσης:

$$s\,Y(s) - y(0^-) + a\,Y(s) = L\{u(t)\} \Rightarrow$$

$$s\,Y(s) + a\,Y(s) = \frac{1}{s}, \qquad Re\{s\} > 0$$

Βήμα 2: Λύνουμε ως προς $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+a)}$$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

Βήμα 3: Υπολογίζουμε τον αντίστροφο LT, αναλύοντας τη συνάρτηση $Y(s)$ σε άθροισμα ρητών κλασμάτων:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+a)} = \frac{1}{as} - \frac{1}{a(s+a)}$$

Επομένως, επειδή η περιοχή σύγκλισης είναι δεξιάς πλευράς, βρίσκουμε ότι η βηματική απόκριση δίνεται από τη σχέση:

$$s(t) \equiv y(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right) u(t)$$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

Σημείωση:

Αν στο σήμα εισόδου δεν υπάρχει η κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$ τότε οι αρχικές συνθήκες εκατέρωθεν του μηδενός είναι ίσες, δηλαδή ισχύει $y(0^-) = y(0^+) = y(0)$. Στην περίπτωση αυτή είτε μας δοθεί ως αρχική συνθήκη το $y(0)$ είτε το $y(0^+)$ είναι το ίδιο, καθώς και τα δύο είναι ταυτόσημα με το $y(0^-)$.

Αντίθετα, αν το δεξί μέλος περιέχει την συνάρτηση $\delta(t)$ τότε θα πρέπει να μας δοθεί η αρχική συνθήκη $y(0^-)$ και όχι τα $y(0)$ ή $y(0^+)$ επειδή η παρουσία της $\delta(t)$ επιβάλλει σημαντικές μεταβολές στη χρονική στιγμή 0, δηλαδή ισχύει $y(0^-) \neq y(0^+)$.

Άσκηση 2

Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την ακόλουθη ΓΔΕΣΣ, όπου $x(t)$ είναι η είσοδος και $y(t)$ είναι η έξοδος του συστήματος:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} - \frac{dy(t)}{dt} = x(t) \equiv sint$$

Αν οι αρχικές συνθήκες είναι $y(0^-) = 2,\ \ y'(0^-) = 0$ και $y''(0^-) = -1$,
να βρεθεί η έξοδος του συστήματος.

Απάντηση: Για να βρεθεί η έξοδος του συστήματος, θα πρέπει να επιλυθεί η ΓΔΕΣΣ.

Βήμα 1: Υπολογίζουμε τον LT των δύο μελών της διαφορικής εξίσωσης:

$$s^3Y(s) - s^2y(0^-) - sy'(0^-) - y''(0^-) - sY(s) + y(0^-) = L\{sint\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^3\,Y(s) - 2s^2 - 1 - s\,Y(s) + 2 = \frac{1}{s^2+1}$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

Βήμα 2: Λύνουμε ως προς $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2s^2 - 1}{s^3 - s} + \frac{1}{(s^3 - s)(s^2 + 1)} = \frac{2s^3 + s}{(s^2 + 1)(s^2 - 1)}$$

Βήμα 3: Υπολογίζουμε τον αντίστροφο LT, αναλύοντας τη συνάρτηση $Y(s)$ σε άθροισμα ρητών κλασμάτων:

$$Y(s) = \frac{3}{4}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}$$

Επομένως, η έξοδος $y(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$y(t) = \left[\frac{3}{4}\left(e^{t} + e^{-t}\right) + \frac{1}{2} cos\ t\right] u(t)$$

2. Συνάρτηση Μεταφοράς Συστήματος

Συνάρτηση Μεταφοράς Συστήματος (1/3)

Ο LT δίνει μια απλή λύση στον υπολογισμό της **συνάρτησης μεταφοράς** ενός συστήματος.

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την ΓΔΕΣΣ:

$$a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \cdots + a_0 y(t)$$
$$= b_M \frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_{M-1} \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \cdots + b_0 x(t)$$

όπου τα $\alpha_n, n = 1,2, \dots, N,\ b_m, m = 1,2, \dots, M$ είναι πραγματικές σταθερές.

Εάν υποθέσουμε ότι όλες οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, παίρνοντας τον LT των δύο μελών της προηγούμενης σχέσης, βρίσκουμε ότι:

$$H(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m s^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n s^n} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Συνάρτηση Μεταφοράς Συστήματος (2/3)

- Η εν' γένει μιγαδική συνάρτηση $H(s)$ καλείται **συνάρτηση μεταφοράς** (transfer function) του συστήματος και εξαρτάται αποκλειστικά από τις τιμές των παραμέτρων $\alpha_n, n = 1,2, \dots, N, b_m, m = 1,2, \dots, M$, δηλαδή των συντελεστών που εμφανίζονται στη διαφορική εξίσωση.

- Αποτελεί μια σχέση μεταξύ των LT εξόδου και της εισόδου του συστήματος, υπό την προϋπόθεση ότι το σύστημα βρίσκεται σε αρχική κατάσταση ηρεμίας (μηδενικές αρχικές συνθήκες).

- Η συνάρτηση μεταφοράς είναι **ανεξάρτητη** από το σήμα εισόδου που εφαρμόζεται στο σύστημα.

- Τα παραπάνω ισχύουν με την προϋπόθεση ότι το σύστημα βρίσκεται σε **αρχική κατάσταση ηρεμίας**, δηλαδή οι αρχικές συνθήκες του είναι μηδενικές.

- Αν οι αρχικές συνθήκες δεν είναι μηδέν τότε η συνάρτηση μεταφοράς δεν θα ήταν συνάρτηση μόνο των σημάτων εισόδου – εξόδου, αλλά και των εκάστοτε **αρχικών συνθηκών**.

Συνάρτηση Μεταφοράς Συστήματος (3/3)

Υπολογίζουμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος μέσω της συνέλιξης εισόδου και κρουστικής απόκρισης, δηλαδή:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

Θεωρώντας ότι το σύστημα είναι και αιτιατό [δηλ. $h(t) = 0,\ t < 0$] και από την ιδιότητα της συνέλιξης στο χρόνο του LT, έχουμε:

$$Y(s) = H(s)\, X(s), \qquad Re(s) > \sigma_0$$

ή

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

όπου $H(s) = L\{h(t)\}$. Από τη σχέση αυτή καταλήγουμε στο σημαντικό συμπέρασμα ότι η **συνάρτηση μεταφοράς** είναι ο μετ. Laplace της κρουστικής απόκρισης $h(t)$.

Η συνάρτηση $H(\Omega) = H(s)|_{s=j\Omega}$ (εάν αυτή ορίζεται) είναι η γνωστή μας **απόκριση συχνοτήτων** του συστήματος, δηλαδή περιγράφει τη συμπεριφορά του συστήματος στο πεδίο της συχνότητας. Προφανώς απαιτείται ο άξονας jΩ να περιλαμβάνεται στην περιοχή σύγκλισης της $H(s)$.

Σχολιασμός (1/2)

Αν η συνάρτηση μεταφοράς είναι ρητή συνάρτηση, τότε πρέπει υποχρεωτικά **να ισχύει $\boldsymbol{M < N}$**. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση ονομάζεται **κανονική**. Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε το σύστημα είναι BIBO **ασταθές**. Πράγματι, αν $M > N$, τότε εφαρμόζοντας πολυωνυμική διαίρεση στην $H(s)$ αυτή γράφεται:

$$H(s) = c_k s^k + c_{k-1} s^{k-1} + \cdots + c_1 s + c_0 + \frac{Q(s)}{X(s)} = R(s) + \frac{Q(s)}{X(s)}$$

όπου $R(s)$ είναι το πολυώνυμο βαθμού $\mathrm{M} - \mathrm{N}$ που δίνεται από τη σχέση:

$$R(s) = c_k s^k + c_{k-1} s^{k-1} + \cdots + c_1 s + c_0$$

Μετά την πολυωνυμική διαίρεση ο βαθμός του πολυωνύμου $Q(s)$ είναι πλέον μικρότερος από τον βαθμό του πολυωνύμου $X(s)$.

Αν τώρα εφαρμόσουμε στην είσοδο του συστήματος μια φραγμένη συνάρτηση, έστω $x(t) = u(t)$, η οποία έχει μετ. Laplace $X(s) = 1/s$, τότε ο μετ. Laplace της εξόδου είναι:

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{H(s)}{s} = c_k s^{k-1} + c_{k-1} s^{k-2} + \cdots + c_1 + \frac{c_0}{s} + \frac{Q(s)}{sX(s)}$$

Σχολιασμός (2/2)

Επομένως, η έξοδος $y(t)$ θα δίνεται από τον αντίστροφο μετ. Laplace:

$$y(t) = c_k L^{-1}\{s^{k-1}\} + c_{k-1}L^{-1}\{s^{k-2}\} + \cdots + L^{-1}\{c_1\} + c_0 L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{Q(s)}{sX(s)}\right\}$$

Ο όρος $L^{-1}\{c_1\}$ παράγει συνάρτηση Δέλτα, αφού ισχύει:

$$L^{-1}\{c_1\} = L^{-1}\{c_1 1\} = c_1 L^{-1}\{1\} = c_1 \delta(t)$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος του συστήματος περιέχει τη συνάρτηση **Δέλτα**, άρα δεν είναι φραγμένη. Επομένως, το σύστημα είναι BIBO ασταθές.

Άρα, για να είναι το σύστημα BIBO **ευσταθές**, πρέπει $\boldsymbol{M < N}$.

3. Μελέτη Ευστάθειας και Αιτιότητας Συστημάτων στο Πεδίο Συχνότητας

Ευστάθεια ΓΧΑ Συστημάτων

Σχετικά με την **ευστάθεια** των ΓΧΑ συστημάτων ισχύουν τα ακόλουθα:

- Αν **όλοι οι πόλοι** του συστήματος έχουν **αρνητικό πραγματικό μέρος**, δηλαδή βρίσκονται όλοι στο **αριστερό ημιεπίπεδο**, τότε το σύστημα είναι **ευσταθές**.
- Αν έστω και **ένας πόλος** έχει **πραγματικό μέρος με θετική τιμή**, δηλαδή αν έστω ένας πόλος βρεθεί στο **δεξί ημιεπίπεδο** τότε το σύστημα καθίσταται **ασταθές** και η έξοδός του οδηγείται στο άπειρο.
- Αν υπάρχουν **πόλοι επάνω** στον φανταστικό άξονα το σύστημα είναι **οριακά ευσταθές**.

Αιτιότητα ΓΧΑ Συστημάτων

Για την **αιτιότητα** των ΓΧΑ συστημάτων ισχύουν τα εξής:

- Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι **αιτιατό** όταν η κρουστική του απόκριση είναι αιτιατή, δηλαδή $h(t) = 0$ για $t \leq 0$ ή αλλιώς η κρουστική απόκριση είναι σήμα **δεξιάς πλευράς**.
- Η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ είναι το **δεξί ημι-επίπεδο**, δηλαδή $\sigma \equiv Re(s) > 0$.
- Αν η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ μπορεί να γραφεί σε **ρητή μορφή**, η αιτιότητα διασφαλίζεται όταν η περιοχή σύγκλισης δίνεται από τη σχέση $\boldsymbol{\sigma > \sigma_{max}}$, όπου σ_{max} είναι το μέγιστο πραγματικό μέρος όλων των πόλων.

- Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι **αντι-αιτιατό** όταν η κρουστική του απόκριση είναι σήμα **αριστερής πλευράς**.
- Η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ είναι το **αριστερό ημι-επίπεδο**, δηλαδή $\sigma \equiv Re(s) < 0$.
- Αν η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί σε **ρητή μορφή**, η αντι-αιτιότητας ισχύει όταν η περιοχή σύγκλισης είναι $\boldsymbol{\sigma < \sigma_{min}}$, όπου σ_{min} είναι το ελάχιστο πραγματικό μέρος όλων των πόλων.

Άσκηση 3

Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει κρουστική απόκριση $h(t) = \delta(t) - 2e^{-t}\, u(t)$. Πόσες και ποιες διαφορετικές είσοδοι $x(t)$ σε αυτό το σύστημα μπορούν να παράξουν μία έξοδο $y(t) = e^{-2t}\, u(t)$;

<u>Απάντηση</u>: Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος, από τον LT της κρουστικής απόκρισης $h(t)$. Είναι:

$$H(s) = 1 - \frac{2}{s+1} = \frac{s-1}{s+1}$$

με περιοχή σύγκλισης $Re(s) > -1$.

Ο μετασχηματισμός Laplace $Y(s)$ της εξόδου $y(t) = e^{-2t}u(t)$ είναι:

$$Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

με περιοχή σύγκλισης $Re(s) > -2$.

Για να υπολογίσουμε το σήμα εισόδου $x(t)$, βρίσκουμε το $X(s)$ από τη σχέση:

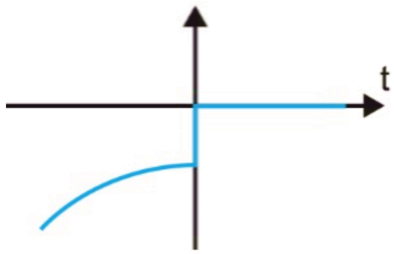
$$X(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{\frac{1}{s+2}}{\frac{s-1}{s+1}} = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)} = \frac{1}{3}\frac{1}{s+2} + \frac{2}{3}\frac{1}{s-1}$$

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Η $X(s)$ έχει δύο πραγματικούς πόλους ($s = -2$ και $s = 1$), από τη θέση των οποίων προκύπτουν οι πιθανές περιοχές σύγκλισης: $s < 1, -2 < s < 1$ και $s > 1$.

- Για $\mathrm{Re}(s) < -2$, αμφότεροι οι όροι είναι αριστερής πλευράς:

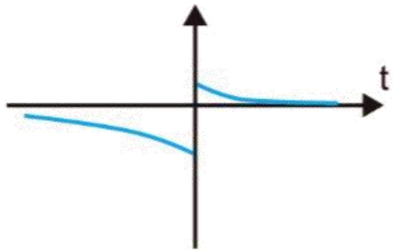
$$x_1(t) = -\frac{1}{3}\, e^{-2t}u(-t) - \frac{2}{3}\, e^{t}u(-t)$$



(α)

- Για $-2 < Re(s) < 1$, ο πρώτος όρος είναι δεξιάς πλευράς και ο δεύτερος είναι αριστερής πλευράς:

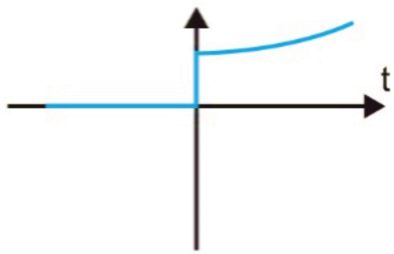
$$x_2(t) = \frac{1}{3}\, e^{-2t}u(t) - \frac{2}{3}\, e^{t}u(-t)$$



(β)

- Για $\mathrm{Re}(s) > 1$, αμφότεροι οι όροι είναι δεξιάς πλευράς:

$$x_3(t) = \frac{1}{3}\, e^{-2t}u(t) + \frac{2}{3}\, e^{t}u(t)$$



(γ)

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Για να καθορίσουμε ποια από τα παραπάνω σήματα θα μπορούσε να είχε παράγει την δοθείσα έξοδο, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τις περιοχές σύγκλισης. Το σύστημα $H(s)$ συγκλίνει για $Re(s) > -1$.

- Αφού η συνάρτηση $X_1(s)$ συγκλίνει μόνο για $Re(s) < -1$, δεν υπάρχει κοινή επικαλυπτόμενη περιοχή σύγκλισης, άρα αποκλείεται το σήμα $x_1(t)$ από τις πιθανές λύσεις.

- Η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης $X_2(s)$ είναι $-2 < Re(s) < -1$, η οποία τέμνεται με την περιοχή σύγκλισης της $H(s)$. Για το λόγο αυτό, το σήμα $x_2(t)$ μπορεί να είναι είσοδος.

- Τέλος, η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης $X_3(s)$ είναι $Re(s) > 1$, η οποία επίσης τέμνεται με την περιοχή σύγκλισης της $H(s)$. Για το λόγο αυτό, και το σήμα $x_3(t)$ μπορεί να είναι είσοδος.

- Επομένως, αποδεκτές είσοδοι είναι τα σήματα $x_2(t)$ και $x_3(t)$.

Άσκηση 4

Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος, το οποίο για είσοδο $x(t) = e^{-t}u(t)$ παράγει την έξοδο $y(t) = 10e^{-t}\cos(4t)\,u(t)$.

<u>Απάντηση</u>: Ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος εισόδου είναι:

$$X(s) = \frac{1}{s+1}$$

Επειδή είναι γνωστό ότι :

$$e^{-at}\cos(\Omega t)\,u(t) \xrightarrow{L} \frac{s+a}{(s+a)^2+\Omega^2}$$

και για τιμές $\alpha = -1$ και $\Omega = 4$, προκύπτει ότι:

$$Y(s) = \frac{10(s+1)}{(s+1)^2+16}$$

Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ είναι:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{10(s+1)^2}{(s+1)^2+16} = 10\frac{s^2+2s+1}{s^2+2s+17}$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Η συνάρτηση $H(s)$ διαθέτει ένα διπλό μηδενικό στη θέση $s = -1$ και δύο απλούς μιγαδικούς συζυγείς πόλους στις θέσεις $s_1 = -1 + 4i$ και $s_2 = -1 - 4i$.

Η κρουστική απόκριση $h(t)$ μπορεί να υπολογιστεί από τον αντίστροφο LT της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$, ως εξής:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{10(s+1)^2}{(s+1)^2 + 16} = 10 - 40\frac{4}{(s+1)^2 + 4^2}$$

Προκύπτει ότι:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = 10L^{-1}\{1\} - 40L^{-1}\left\{\frac{4}{(s+1)^2 + 4^2}\right\}$$
$$= 10\delta(t) - 40e^{-4t}\sin(4t)\,u(t)$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Για την εξαγωγή της τελευταίας σχέσης χρησιμοποιήσαμε τους αντίστροφους LT:

$$1 \xrightarrow{L^{-1}} \delta(t)$$

$$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \Omega^2} \xrightarrow{L^{-1}} e^{-at}\sin(\Omega t)\,u(t)$$

Άσκηση 5

Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς και την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$$

Απάντηση: Υπολογίζουμε τον LT και των δύο μελών της διαφορικής εξίσωσης και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της παραγώγισης στη μιγαδική συχνότητα, δηλαδή:

$$L\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + 5L\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 6L\{y(t)\} = L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + 4L\{x(t)\} \Rightarrow$$

$$s^2\, Y(s) + 5s\, Y(s) + 6\, Y(s) = s\, X(s) + 4\, X(s) \Rightarrow$$

$$Y(s)\left[s^2 + 5s + 6\right] = X(s)\,(s+4) \Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+4}{s^2+5s+6} = \frac{s+4}{(s+2)(s+3)}$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

Παρατηρούμε πως η συνάρτηση $H(s)$ διαθέτει ένα μηδενικό στη θέση $s = -4$ και δύο απλούς πραγματικούς πόλους στις θέσεις $\mathrm{s}_1 = -2$ και $\mathrm{s}_2 = -3$. Επειδή οι πόλοι βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο, το σύστημα είναι ευσταθές.

Η κρουστική απόκριση θα προσδιοριστεί από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $H(s)$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα βρίσκουμε:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s+4}{(s+2)(s+3)}\right\} = 2e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t) \Rightarrow$$

$$h(t) = \left(2e^{-2t} - e^{-3t}\right)u(t)$$

Άσκηση 6

Δίνεται ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-2t}u(t)$, το οποίο δέχεται ως είσοδο το σήμα $x(t) = e^{-t}u(t)$.

(α) Να προσδιοριστούν οι LT $H(s)$ και $X(s)$.

(β) Να προσδιοριστεί ο LT $Y(s)$ της εξόδου $y(t)$.

(γ) Να προσδιοριστεί η έξοδος $y(t)$ με χρήση του αντίστροφου LT του $Y(s)$.

(δ) Να προσδιοριστεί η έξοδος $y(t)$ με χρήση της συνέλιξης $y(t) = h(t) * x(t)$ επαληθεύοντας έτσι το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος.

<u>Απάντηση</u>:

(α) Από τον ορισμό του LT, έχουμε:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+2)t} u(t)\, dt = \left[\frac{e^{-(s+2)t}}{-(s+2)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+2}$$

Άσκηση 6 (συνέχεια)

και:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+1)t}\, u(t) dt = \left[\frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+1}$$

με περιοχές σύγκλισης $Re(s) > -2$ και $Re(s) > -1$ αντίστοιχα.

(β) Η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης με το σήμα εισόδου, δηλ. $y(t) = h(t) * x(t)$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα της συνέλιξης του LT, έχουμε:

$$Y(s) = H(s)\, X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

με περιοχή σύγκλισης $\mathrm{R(s)} > -1$, που είναι η τομή των περιοχών σύγκλισης των μετασχηματισμών $H(s)$ και $X(s)$.

Άσκηση 6 (συνέχεια)

(γ) Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ανάλυσης της συνάρτησης $Y(s)$ σε άθροισμα ρητών κλασμάτων, έχουμε:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

και ο αντίστροφος LT είναι το άθροισμα των αντίστροφων LT κάθε επιμέρους κλάσματος, δηλ.:

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) = \left[e^{-t} - e^{-2t}\right]u(t)$$

(δ) Χρησιμοποιώντας τη σχέση της συνέλιξης, έχουμε:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-\tau)}\, u(t-\tau)\, e^{-t}\, u(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t e^{-2t}\, e^{2\tau} e^{-\tau} d\tau = e^{-2t} \int_0^t e^{\tau} d\tau = e^{-2t} [e^{\tau}] \begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} = e^{-2t}\left(e^t - 1\right)$$

$$= \left(e^{-t} - e^{-2t}\right) u(t)$$

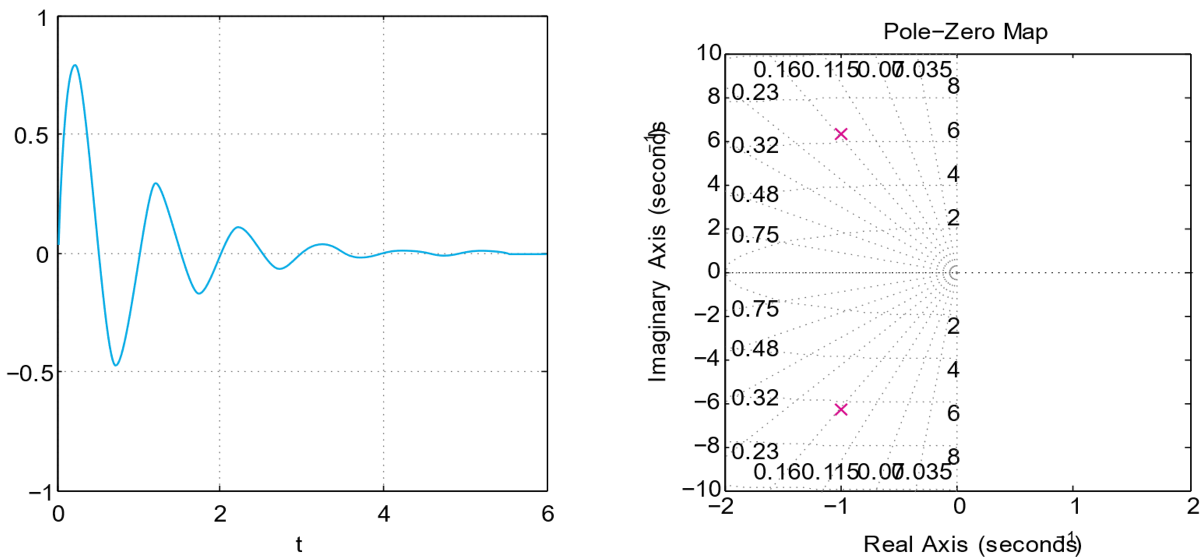
δηλ. καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με το ερώτημα (γ).

Άσκηση 7

Να μελετήσετε την ευστάθεια ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t) = \ e^{-at}\ sin(2\pi t)\ u(t)$ για διάφορες τιμές του συντελεστή α.

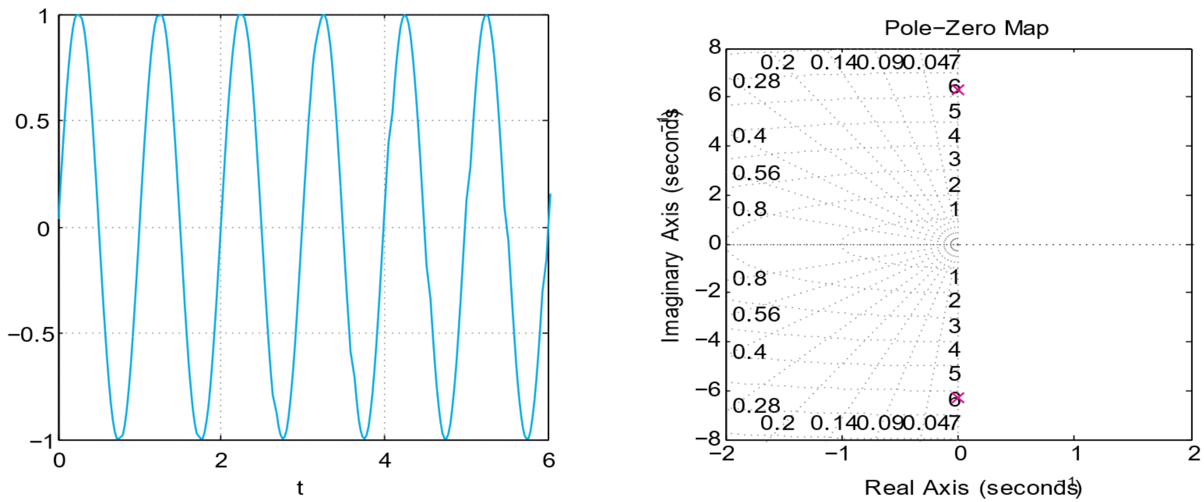
<u>Απάντηση</u>: Η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ σε ρητή μορφή είναι:

$$H(s) = \frac{2\,\pi}{(s\ +\ 1)^2 +\ 4\,\pi^2} = \frac{2\,\pi}{s^2\ + 2s + (1 +\ 4\,\pi^2)}$$

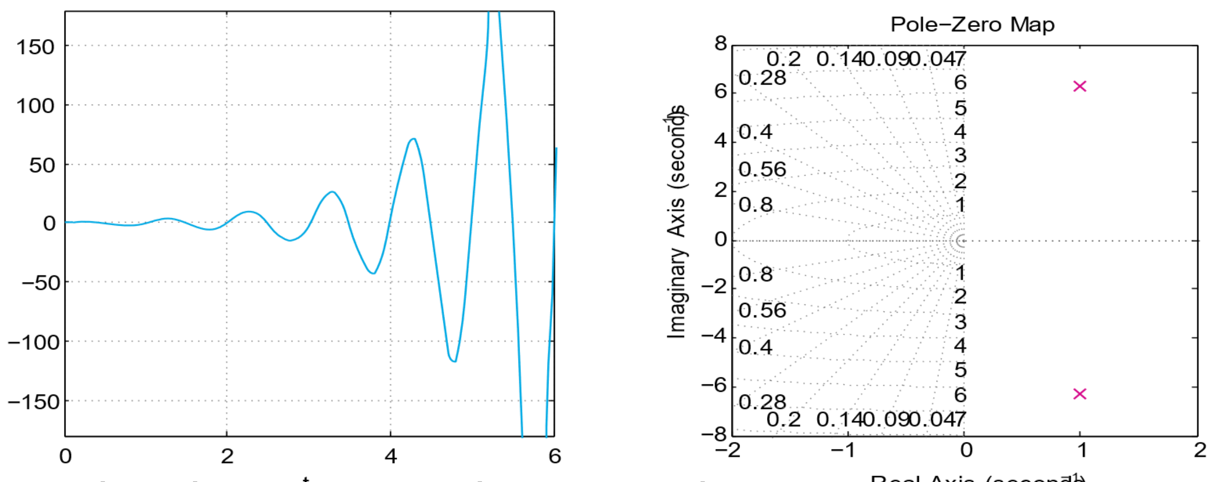


(α) Κρουστική απόκριση, (β) Διάγραμμα πόλων – μηδενικών, για α=*1*.

Άσκηση 7 (συνέχεια)



(α) Κρουστική απόκριση, (β) Διάγραμμα πόλων – μηδενικών, για $\alpha=0$.

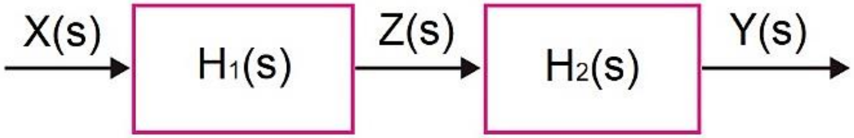


(α) Κρουστική απόκριση, (β) Διάγραμμα πόλων – μηδενικών, για $\alpha=-1$.

4. Συνδεσμολογίες Συστημάτων στο Πεδίο Συχνότητας

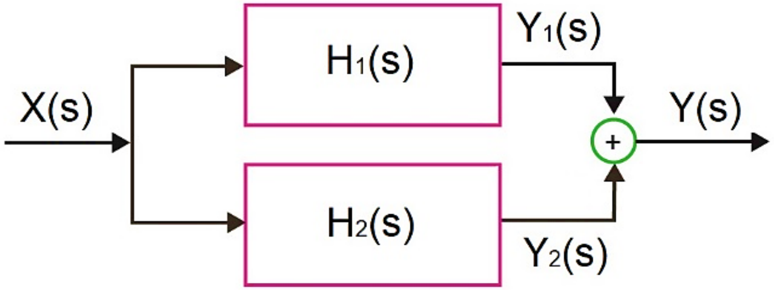
Συνδεσμολογίες Συστημάτων

Σειριακή Σύνδεση: Δύο ΓΧΑ συστήματα είναι συνδεδεμένα σειριακά όταν η έξοδος του πρώτου γίνεται είσοδος στο δεύτερο.



- Ισοδύναμη κρουστική απόκριση: $h_{eq}(t) = h_1(t) * h_2(t)$
- Ισοδύναμη συνάρτηση μεταφοράς: $H_{eq}(s) = H_1(s)H_2(s) = H_2(s)H_1(s)$

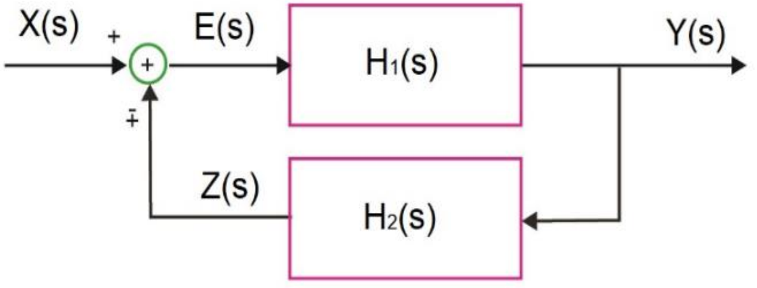
Παράλληλη Σύνδεση: Δύο ΓΧΑ συστήματα είναι συνδεδεμένα παράλληλα όταν έχουν κοινή είσοδο και οι έξοδοί τους αθροίζονται σε έναν κοινό κόμβο.



- Ισοδύναμη κρουστική απόκριση: $h_{eq}(t) = h_1(t) + h_2(t)$
- Ισοδύναμη συνάρτηση μεταφοράς: $H_{eq}(s) = H_1(s) + H_2(s) = H_2(s) + H_1(s)$

Συνδεσμολογίες Συστημάτων

Σύνδεση με Ανάδραση: Δύο ΓΧΑ συστήματα είναι συνδεδεμένα με ανάδραση όταν η έξοδος του πρώτου τροφοδοτείται στο δεύτερο και η έξοδος αυτού ανατροφοδοτείται στο πρώτο προστιθέμενη (θετική ανάδραση) ή αφαιρούμενη (αρνητική ανάδραση) από το σήμα εισόδου.



- Ισοδύναμη κρουστική απόκριση:

$$h_{eq}(t) = \frac{h_1(t)}{1 \pm h_1(t) * h_2(t)}$$

- Ισοδύναμη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H_{eq}(s) = \frac{H_1(s)}{1 \pm H_1(s)H_2(s)}$$

Το σήμα $e(t)$ ονομάζεται σήμα σφάλματος και δίνεται από τις σχέσεις:

- Αρνητική ανάδραση: $e(t) = x(t) - h_2(t) * y(t)$
- Θετική ανάδραση: $e(t) = x(t) + h_2(t) * y(t)$

5. Βηματική Απόκριση Συστήματος

Βηματική Απόκριση ΓΧΑ Συστήματος (1/2)

Η βηματική απόκριση ενός συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$, είναι η έξοδός του όταν στην είσοδο εφαρμόζεται η μοναδιαία βηματική συνάρτηση $u(t)$.

Ας εκφράσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του ΓΧΑ συστήματος ως άθροισμα απλών κλασμάτων, όπου:

$$H(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{C_N}{s - p_n} = \sum_{k=1}^{N} \frac{C_k}{s - p_k}$$

Εφόσον η είσοδος είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση $x(t) = u(t)$, ο μετ/σμός Laplace της εισόδου είναι $X(s) = 1/s$. Επομένως ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου σε μορφή μερικών κλασμάτων δίνεται από τη σχέση:

$$Y(s) = X(s)\, H(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{N} \frac{C_k}{s - p_k} = \frac{A}{s} + \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{N} \frac{C_k}{s - p_k}$$

Βηματική Απόκριση ΓΧΑ Συστήματος (2/2)

Εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, έχουμε:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{N}\frac{C_k}{s-p_k}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{A}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{N}\frac{C_k}{s-p_k}\right\}$$

$$= A\,u(t) + \sum_{k=1}^{N} C_k\, e^{jp_k t} = y_{tr}(t) + y_{ss}(t)$$

Όπου $y_{tr}(t)$ και $y_{ss}(t)$ είναι η **απόκριση μεταβατικής κατάστασης** και η **απόκριση μόνιμης κατάστασης**, αντίστοιχα, οι οποίες εκφράζονται από τις σχέσεις:

$$y_{tr}(t) = \sum_{k=1}^{N} C_k\, e^{jp_k t}$$

$$y_{ss}(t) = A\,u(t)$$

Με χρήση του θεωρήματος αρχικής τιμής, αποδεικνύεται ότι η απόκριση μόνιμης κατάστασης είναι ίση με την τιμή της συνάρτησης μεταφοράς υπολογισμένης στη συχνότητα $s = 0$, δηλαδή ισχύει: $y_{ss}(t) = H(0)$.

Άσκηση 8

Να υπολογιστούν και να απεικονιστούν η κρουστική και η βηματική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(S) = \frac{s+2}{s^2+3s+3}$$

<u>Απάντηση</u>: Ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου για βηματική είσοδο είναι:

$$Y(s) = X(s)\,H(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+1} + \frac{C_3}{s+3} = \cdots$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$

Επομένως η βηματική απόκριση είναι:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \frac{2}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{6}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}\right]u(t)$$

Άσκηση 8 (συνέχεια)

Άρα η απόκριση μεταβατικής κατάστασης είναι:

$$y_{ts}(t) = -\left[\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t}\right]u(t)$$

και η απόκριση μόνιμης κατάστασης είναι:

$$y_{ss}(t) = \frac{2}{3}u(t)$$

Η απόκριση μόνιμης κατάστασης μπορεί να υπολογιστεί απευθείας:

$$y_{ss}(t) = \lim_{s\to 0}[H(s)] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{s+2}{s^2+3s+3}\right] = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}u(t)$$

Για τον υπολογισμό της κρουστικής απόκρισης λαμβάνουμε υπόψη μας ότι αυτή ισούται με την πρώτη παράγωγο της βηματικής απόκρισης, δηλαδή:

$$h(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \left(\frac{1}{2}\ e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t) + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\ e^{-t} - \frac{1}{6}\ e^{-3t}\right)\delta(t)$$

5. Περιγραφή Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης

Περιγραφή Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης

Η μελέτη των συστημάτων μέσω της συνάρτησης μεταφοράς (εξωτερική αναπαράσταση συστήματος) δεν περιλαμβάνει την επίδραση των αρχικών συνθηκών.

Επίσης μπορεί να παραλείψει ορισμένους από τους τρόπους λειτουργίας του συστήματος όταν συμβαίνουν ακυρώσεις πόλων με μηδενικά.

Αντίθετα, η περιγραφή των συστημάτων στο **χώρο κατάστασης** μέσω της άμεσης σύνδεσης με τη διαφορική εξίσωση του συστήματος:

- δεν επηρεάζεται από ακυρώσεις πόλων με μηδενικά,
- παρέχει μια πληρέστερη αναπαράσταση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος,
- επιτρέπει την εύκολη επέκταση της μελέτης σε συστήματα με πολλαπλές εισόδους και πολλαπλές εξόδους.

Περιγραφή Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης

Η περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης βασίζεται στη μελέτη της εσωτερικής δομής του συστήματος και παρέχει εξαγωγή συμπερασμάτων που αφορούν την ευστάθειά του, μέσω ενός ζεύγους εξισώσεων οι οποίες είναι γνωστές ως **δυναμικές εξισώσεις**:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}w(t)$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t), \qquad t > 0$$

Η πρώτη ονομάζεται **εξίσωση κατάστασης** και η δεύτερη ονομάζεται **εξίσωση εξόδου**.

Αποσκοπούμε στην εύρεση της πλήρους λύσης $y(t), t > 0$.

Περιγραφή Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης

Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace καθεμίας από τις δυναμικές εξισώσεις και έχουμε:

$$s\boldsymbol{I}\boldsymbol{X}(s) - x(0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{b}W(s) \Rightarrow (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s) = x(0) + \boldsymbol{b}W(s)$$

$$Y(s) = c^T\boldsymbol{X}(s)$$

Λύνοντας ως προς $X(s)$ στην πρώτη εξίσωση, έχουμε:

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}[x(0) + \boldsymbol{b}W(s)]$$

Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση και έχουμε:

$$Y(s) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{c}^T(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}[x(0) + \boldsymbol{b}W(s)]$$

Για να βρούμε την έξοδο $y(t)$ πρέπει να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $Y(s)$. Μια έκφραση του αντίστροφου $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ είναι:

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{I}s^{-1} + \boldsymbol{A}s^{-2} + \boldsymbol{A}^2s^{-3} + \cdots$$

Επίσης ισχύει η σχέση:

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}s^{-1} + \boldsymbol{A}^2s^{-2} + \cdots - \boldsymbol{A}s^{-1} - \boldsymbol{A}^2s^{-2} - \boldsymbol{A}^3s^{-3} - \cdots = \boldsymbol{I}$$

Περιγραφή Συστημάτων στο Χώρο Κατάστασης

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace κάθε όρου της μορφής $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ δίνει:

$$L^{-1}\{(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\} = \left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{A}^2\frac{t^2}{2!} + \boldsymbol{A}^3\frac{t^3}{3!} + \cdots\right]u(t) = e^{\boldsymbol{A}t}u(t)$$

Ο αντίστροφος Laplace της Y(s) μπορεί να βρεθεί από την παραπάνω σχέση και το γεγονός ότι ο αντίστροφος Laplace του γινομένου δύο συναρτήσεων είναι το συνελικτικό ολοκλήρωμα:

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{c}^T \int_0^{\tau} e^{\boldsymbol{A}(t-t)}\boldsymbol{b}\, w(\tau)\, d\tau, \qquad t \geq 0$$

Θεωρώντας ως είσοδο τη συνάρτηση Δέλτα, η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος είναι η απόκριση για $w(t) = \delta(t)$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες:

$$h(t) = \boldsymbol{c}^T \int_0^{\tau} e^{\boldsymbol{A}(t-t)}\boldsymbol{b}\, \delta(\tau)\, d\tau = \boldsymbol{c}^T e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{b}$$

Άσκηση 9

Δίνεται ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τις δυναμικές (κατάστασης και εξόδου) εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x_1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} w(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθεί η απόκριση μηδενικής εισόδου αν οι αρχικές συνθήκες είναι $x_1(0) = 1$ και $x_2(0) = 0$.

(β) Να βρεθεί η απόκριση μηδενικής κατάστασης για βηματική είσοδο, $w(t) = u(t)$.

(γ) Να βρεθεί η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος.

Απάντηση: Ο μετασχηματισμός Laplace της εξίσωσης κατάστασης, θεωρώντας μη-μηδενικές αρχικές συνθήκες είναι:

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 8 & s+6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) + 8W(s) \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

Άσκηση 9 (συνέχεια)

Ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου $Y(s)$ υποδεικνύει ότι πρέπει να υπολογιστεί το $X_1(s)$ από την εξίσωση κατάστασης. Είναι:

$$Y(s) = X_1(s) = \frac{\det\begin{bmatrix} x_1(0) & -1 \\ x_2(0) + 8W(s) & s+6 \end{bmatrix}}{s(s+6)+8}$$

$$= \frac{x_1(0)(s+6) + x_2(0) + 8W(s)}{s^2+6s+8}$$

$$= \frac{s+6}{s^2+6s+8} + \frac{8}{s(s^2+6s+8)}$$

Στην παραπάνω επίλυση θέσαμε τις αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1$ και $x_2(0) = 0$ και $W(s) = 1/s$ επειδή η είσοδος είναι η βηματική συνάρτηση $u(t)$.

Άσκηση 9 (συνέχεια)

(α) Το πρώτο κλάσμα είναι ο μετασχηματισμός Laplace της απόκρισης μηδενικής εισόδου:

$$Y_{zi}(s) = \frac{s+6}{s^2+6s+8} = \frac{s+6}{(s+2)(s+4)} = \cdots = \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+4}$$

Επομένως, η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι:

$$y_{zi}(t) = \left[2e^{-2t} - e^{-4t}\right] u(t)$$

(β) Το δεύτερο κλάσμα είναι ο μετασχηματισμός Laplace της απόκρισης μηδενικής κατάστασης:

$$Y_{zs}(s) = \frac{8}{s(s^2+6s+8)} = \frac{8}{s(s+2)(s+4)} = \cdots = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+4}$$

Επομένως, η απόκριση μηδενικής κατάστασης είναι:

$$y_{zs}(t) = \left[1 - 2e^{-2t} + e^{-4t}\right] u(t)$$

Η συνολική απόκριση είναι:

$$y(t) = y_{zi(t)} + y_{zs(t)} = \left[2e^{-2t} - e^{-4t}\right] u(t) + \left[1 - 2e^{-2t} + e^{-4t}\right] u(t) = u(t)$$

Άσκηση 9 (συνέχεια)

(γ) Για να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση, θέτουμε $W(s) = 1$, μηδενικές αρχικές συνθήκες και $Y(s) = H(s)$ και έχουμε:

$$H(s) = \frac{8}{s^2 + 6s + 8} = \cdots = \frac{4}{s+2} - \frac{4}{s+4}$$

Επομένως, η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(t) = \left[4e^{-2t} - 4e^{-4t}\right] u(t)$$