Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 9: Μετασχηματισμός Fourier

Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενα Διάλεξης

1. Ορισμός του Μετασχηματισμού Fourier
2. Φυσική Σημασία του Μετασχηματισμού Fourier
3. Συνθήκες Ύπαρξης του Μετασχηματισμού Fourier
4. Σχέση Μετασχηματισμών Fourier και Laplace
5. Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier
6. Θεώρημα Parseval
7. Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Fourier

1. Ορισμός του Μετασχηματισμού Fourier

Εισαγωγή στον μετασχηματισμό Fourier

- Στην πράξη δεν υπάρχουν περιοδικά σήματα επειδή ότι δεν ικανοποιείται η προϋπόθεση της άπειρης διάρκειάς τους. Ο μετασχηματισμός Fourier αποτελεί επέκταση των σειρών Fourier σε **περιοδικά** και **μη-περιοδικά σήματα**.
- Αποδεικνύεται ότι ένα οποιοδήποτε σήμα (περιοδικό ή μη-περιοδικό) μπορεί να αναπτυχθεί στο χρονικό διάστημα $(-\infty, +\infty)$ μέσω του μετασχηματισμού Fourier ως ένας **γραμμικός συνδυασμός απείρων αρμονικών εκθετικών σημάτων**.
- Όπως και στις σειρές Fourier, τα σήματα εκφράζονται με τη βοήθεια μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων διαφόρων συχνοτήτων, όμως στον μετασχηματισμό Fourier οι συχνότητες είναι **συνεχείς** και όχι διακριτές όπως στις σειρές Fourier.

Ορισμός του Μετασχηματισμού Fourier (1/2)

Ευθύς Μετασχηματισμός Fourier (Fourier Transform, FT)

- Ορίζουμε ως **μετασχηματισμό Fourier** μίας συνάρτησης $x(t)$ τη μιγαδική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής $X(\Omega)$, που δίνεται από τη σχέση:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t} dt$$

με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα υπάρχει, δηλαδή δεν απειρίζεται.

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

- Επιτρέπει τον υπολογισμό της χρονικής συνάρτησης $x(t)$ όταν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός Fourier $X(\Omega)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t} d\Omega$$

Ορισμός του Μετασχηματισμού Fourier (2/2)

Αν αντί της κυκλικής συχνότητας Ω, χρησιμοποιήσουμε τη **γραμμική συχνότητα *f*** (όπου $f = \Omega/2\pi$), οι ορισμοί του ευθύ και του αντίστροφου Μετασχηματισμού Fourier είναι:

- Ευθύς μετασχηματισμός Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

- Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

Συμβολισμοί Μετασχηματισμού Fourier

- Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση $X(\Omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $x(t)$, χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

- Για να δηλώσουμε ότι η $x(t)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της $X(\Omega)$, χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\}$$

- Μερικές φορές χρησιμοποιείται ο ακόλουθος συμβολισμός ως συντομογραφία των δύο συμβολισμών:

Ευθύς μετασχηματισμός Fourier	$x(t) \xrightarrow{F} X(\Omega)$
Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier	$X(\Omega) \xrightarrow{F^{-1}} x(t)$

- ή απλά $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega)$

2. Φυσική Σημασία του Μετασχηματισμού Fourier

Φυσική Σημασία Μετασχηματισμού Fourier (1/3)

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι γενικά μιγαδική συνάρτηση, άρα γράφεται ως:

$$\mathrm{X}(\Omega) = R(\Omega) + jI(\Omega)$$

όπου $R(\Omega)$ το πραγματικό μέρος και $I(\Omega)$ το φανταστικό μέρος του $X(\Omega)$.

Αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση αποδεικνύεται ότι η $R(\Omega)$ είναι **άρτια** συνάρτηση, ενώ η $\mathrm{I}(\Omega)$ είναι **περιττή** συνάρτηση και δίνονται από:

$$R(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(\Omega t)\, d\omega$$

$$I(\Omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(\Omega t)\, d\omega$$

Φυσική Σημασία Μετασχηματισμού Fourier (2/3)

Ο μετασχηματισμός Fourier X(Ω) ως μιγαδική συνάρτηση, γράφεται ως:

$$X(\Omega) = |X(\Omega)| \; e^{j\varphi_X(\Omega)}$$

- όπου $|X(\Omega)|$: **φάσμα πλάτους** (amplitude spectrum)
- και $\varphi_X(\Omega)$: **φάσμα φάσης** (phase spectrum)

Το φάσμα του FT είναι **συνεχές**, σε αντίθεση με το φάσμα των σειρών Fourier, το οποίο είναι διακριτό.

Το πλάτος |X(Ω)| και η φάση $\varphi_X(\Omega)$ υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$|X(\Omega)| = \sqrt{R^2(\Omega) + I^2(\Omega)}$$

$$\varphi_X(\Omega) = \tan^{-1}\left[\frac{I(\Omega)}{R(\Omega)}\right]$$

Φυσική Σημασία Μετασχηματισμού Fourier (3/3)

- Αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση τότε η ανάπτυξη μέσω του μετασχηματισμού Fourier γίνεται στις συνιστώσες $e^{j\Omega t}$.
- Από τον τύπο του Euler $e^{j\Omega t} = \frac{1}{2}[\cos \Omega t + j \sin\Omega t]$ είναι προφανές ότι ο όρος $e^{j\Omega t}$ αναλύεται σε δύο τμήματα (διανύσματα), το $\cos\Omega t$ και το $\sin\Omega t$, τα οποία μάλιστα είναι μεταξύ τους κάθετα.
- Αποδεικνύεται ότι το σήμα $x(t)$ μπορεί να γραφεί:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) \cos\big(\Omega t + \varphi_X(\Omega)\big)\, d\Omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} X(\Omega) \cos\big(\Omega t + \varphi_X(\Omega)\big)\, d\Omega$$

- Με άλλα λόγια, ο μετασχηματισμός Fourier ενός πραγματικού σήματος ισοδυναμεί με ένα ανάπτυγμα του σήματος σε ένα άπειρο πλήθος ημιτονοειδών σημάτων.
- Κάθε μία από αυτές τις συχνότητες υπεισέρχεται στον υπολογισμό με πλάτος $\frac{1}{\pi}X(\Omega)\, d\Omega$ και φάση $\varphi_X(\Omega)$.

Φάσμα Μετασχηματισμού Fourier

- Ο μετασχηματισμός Fourier αναλύει ένα (περιοδικό ή μη περιοδικό) σήμα $x(t)$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ σε ένα **συνεχές φάσμα περιοδικών εκθετικών σημάτων**. Με τον τρόπο αυτό αναδεικνύεται το **φασματικό περιεχόμενο** των σημάτων.
- Το φασματικό περιεχόμενο στο απειροστό διάστημα συχνοτήτων $[\Omega, \Omega + d\Omega]$ είναι $X(\Omega)$ και έχει έχει «πλάτος»:

$$dE = \frac{1}{2\pi} X(\Omega)\, d\Omega$$

- Επομένως, ο μετασχηματισμός Fourier δεν είναι ένα φάσμα πλάτους αλλά η **φασματική πυκνότητα πλάτους**. Δηλαδή το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier περιγράφει το συχνοτικό περιεχόμενο ενός σήματος και μας δίνει πληροφορίες για τα σχετικά μεγέθη των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων που συγκροτούν το συνεχές σήμα $x(t)$ που μελετάμε.
- Η **φάση** του μετασχηματισμού Fourier δεν δίνει πληροφορίες για τα μέτρα των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, αλλά για τις μεταξύ τους σχετικές φάσεις.
- Η φάση έχει **μεγάλη επίδραση** στα χαρακτηριστικά του σήματος στο πεδίο του χρόνου και όπως μπορεί να αποδειχθεί δύο σήματα με μετασχηματισμούς Fourier που έχουν το ίδιο ακριβώς μέτρο αλλά διαφορετική φάση, είναι πολύ διαφορετικά μεταξύ τους.
- Γενικά, οι συναρτήσεις $|X(\Omega)|$ και $\varphi_X(\Omega)$ περιγράφουν πλήρως την επίδραση ενός Γραμμικού και Χρονικά Αμετάβλητου (ΓΧΑ) συστήματος συνεχούς χρόνου επάνω στο σήμα εισόδου που εισέρχεται σε αυτό.

3. Συνθήκες Ύπαρξης του Μετασχηματισμού Fourier

Συνθήκες Ύπαρξης του Μετασχηματισμού Fourier

Τα ολοκληρώματα ορισμού του ευθύ και του αντίστροφου FT δεν υπάρχουν πάντα.

Οι ικανές συνθήκες για να υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος είναι οι συνθήκες Dirichlet.

- **Ικανή Συνθήκη 1**. Η συνάρτηση $x(t)$ να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή να ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < +\infty$$

  ή με άλλα λόγια, το σήμα $x(t)$ να είναι χρονικώς πεπερασμένο δηλ. να είναι σήμα ενέργειας. Η συνθήκη αυτή είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία.

- **Ικανή Συνθήκη 2**. Η συνάρτηση $x(t)$ να είναι συνεχής ή να περιέχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών, καθεμιά από τις οποίες να είναι πεπερασμένου ύψους.

- **Ικανή Συνθήκη 3**. Η συνάρτηση $x(t)$ να είναι φραγμένης κύμανσης, δηλαδή να μπορεί να παρασταθεί με καμπύλη πεπερασμένου μήκους σε οποιοδήποτε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

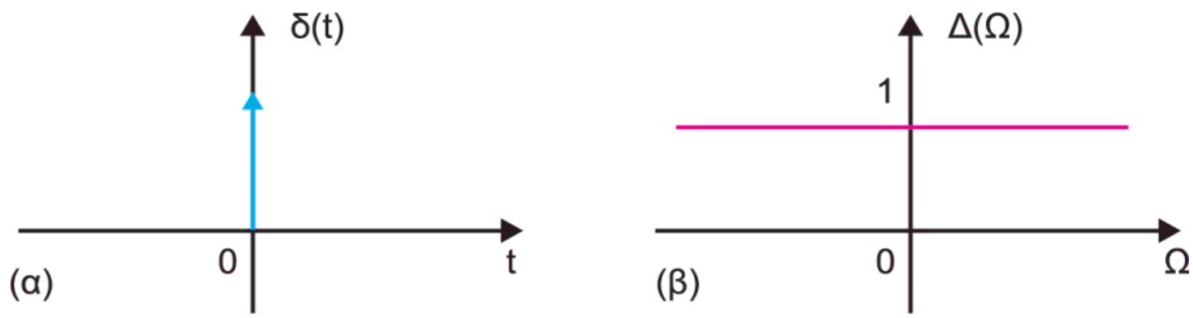
Άσκηση 1

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier (FT) του κρουστικού παλμού $\delta(t)$.

Απάντηση: Από τον ορισμό του FT έχουμε:

$$\Delta(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\Omega t} dt = e^{0} = 1\measuredangle 0^{o}$$

Χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα ολίσθησης της $\delta(t)$: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$



Στο φάσμα Δ(Ω) υπάρχουν άπειρες συχνότητες με μοναδιαίο πλάτος και μηδενική φάση. Αυτό εξηγεί την σπουδαία αξία της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ στην ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων.

Άσκηση 2

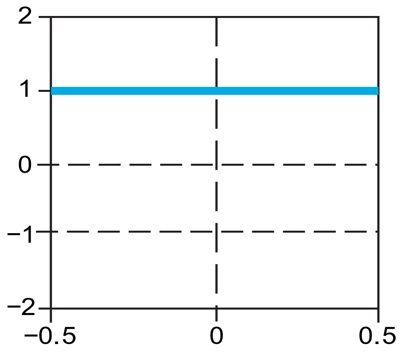
Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier των σημάτων:

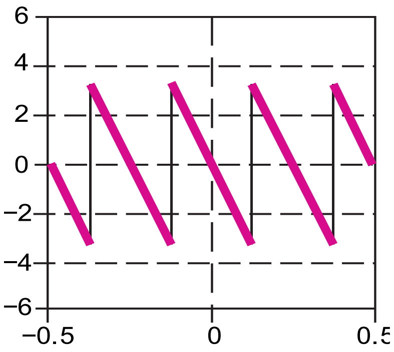
(α) $x(t) = \delta(t - t_0)$ (β) $x_2(t) = \delta(t + \alpha) + \delta(t - \alpha)$

<u>Απάντηση</u>: (α) Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier έχουμε:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\Omega t} dt = e^{-j\Omega t}\Big|_{t=t_0} = e^{-j\Omega t_0} = 1\measuredangle - \Omega t_0$$

Το πλάτος παραμένει μοναδιαίο, όπως για $x(t) = \delta(t)$. Η φάση είναι πλέον γραμμική ως προς τη συχνότητα με κλίση $-t_0$. Επομένως, μια χρονική μετατόπιση του $\delta(t)$ διατηρεί αναλλοίωτο το πλάτος του μετασχηματισμού, αλλά μεταβάλλει γραμμικά τη φάση.





Αυτό ισχύει για όλα τα σήματα και είναι μία βασική ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier, η ιδιότητα της **μετατόπισης στο χρόνο**.

Άσκηση 2 (συνέχεια)

(β) Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier έχουμε:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+\alpha)e^{-j\Omega t}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\alpha)e^{-j\Omega t}dt$$

$$= e^{-j\Omega t}\Big|_{t=-\alpha} + e^{-j\Omega t}\Big|_{t=\alpha} = e^{j\alpha\Omega} + e^{-j\alpha\Omega} = 2\cos(\alpha\Omega)$$

Παρατηρούμε ότι το πλάτος του μετασχηματισμού Fourier δύο συμμετρικών (στο χρόνο) κρουστικών συναρτήσεων είναι ένα συνημίτονο με συχνότητα $\alpha\Omega$ που καθορίζεται από τη χρονική θέση α των δύο κρουστικών συναρτήσεων. Η συνάρτηση Fourier είναι πραγματική, οπότε η φάση της είναι μηδενική.

Άσκηση 3

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $x(t) = A\, e^{-\alpha t} u(t)$ και να σχεδιαστούν τα φάσματα πλάτους και φάσης.

<u>Απάντηση</u>: (α) Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier θα έχουμε:

$$H(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t}\, dt = A \int_{0}^{+\infty} e^{-at}\, e^{-j\Omega t}\, dt = A \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\Omega)t}\, dt =$$

$$= -\frac{A}{a+j\Omega} e^{-(a+j\Omega)t} \Bigg|_{0}^{+\infty} = -\frac{A}{a+j\Omega}\left[\lim_{t\to\infty} e^{-(a+j\Omega)t} - e^{0}\right]$$

$$= -\frac{A}{a+j\Omega}\left[\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\Omega t} - 1\right] = -\frac{A}{a+j\Omega}[0-1] = \frac{A}{a+j\Omega}$$

Αποδεικνύεται ότι $\lim\limits_{t\to\infty} e^{(c+jd)t} = \lim\limits_{t\to\infty} e^{ct} e^{jdt} = \begin{cases} 0, & c < 0 \\ \infty, & d > 0 \end{cases}$

Άσκηση 3 (συνέχεια)

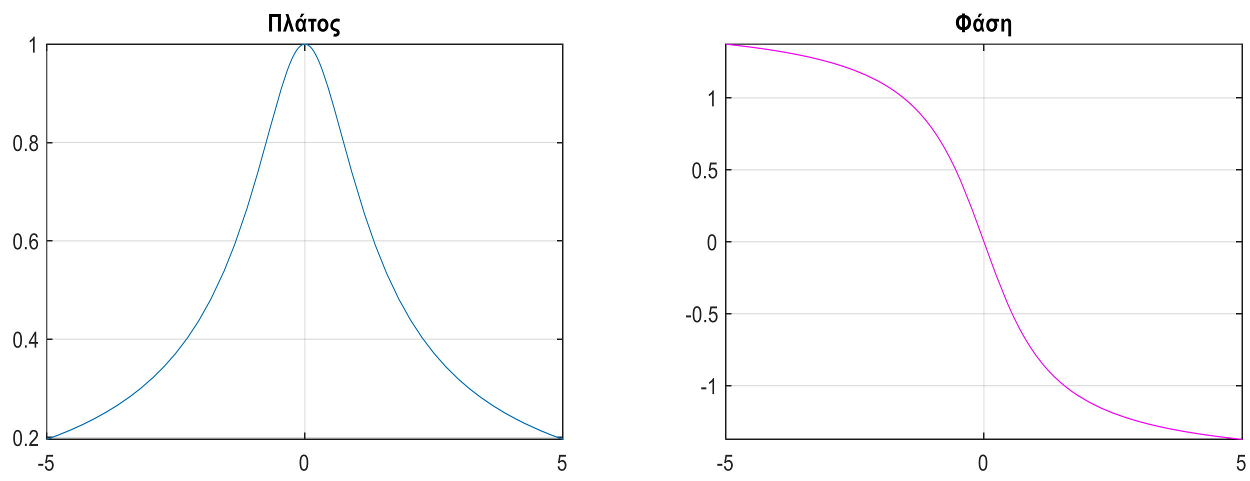
(β) Για να υπολογίσουμε το πλάτος και τη φάση της μιγαδικής συνάρτησης $X(\Omega)$ πρέπει να τη γράψουμε σε καρτεσιανή μορφή. Γι' αυτό πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή $\alpha - j\Omega$ του παρονομαστή, οπότε έχουμε:

$$X(\Omega) = \frac{A}{\alpha + j\Omega} = \frac{A}{\alpha + j\Omega} . \frac{\alpha - j\Omega}{\alpha - j\Omega} = \frac{A\alpha - jA\Omega}{\alpha^2 + \Omega^2} = \frac{A\alpha}{\alpha^2 + \Omega^2} - j\frac{A\Omega}{\alpha^2 + \Omega^2}$$

Επομένως:

$$|X(\Omega)| = \frac{|A|}{|a + j\Omega|} = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + \Omega^2}}$$

$$\measuredangle X(\Omega) = \measuredangle X(A) - \measuredangle X(a + j\Omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)$$



Φάσμα πλάτους $|X(\Omega)|$ και Φάσμα φάσης $\measuredangle X(\Omega)$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του μοναδιαίου τετραγωνικού παλμού $\Pi_{T/2}(t)$ διάρκειας T, δηλαδή:

$$x(t) \equiv \Pi_{T/2}(t) \equiv A\, rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A, & |t| \leq T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$

<u>Απάντηση</u>: Επειδή το σήμα είναι μηδέν για $t < -T/2$ και $t > T/2$, ο μετασχηματισμός Fourier είναι:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt = A \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\Omega t} dt = \frac{A}{-j\Omega} e^{-j\Omega t} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{A}{-j\Omega}\left[e^{-j\Omega T/2} - e^{-j\Omega(-T/2)}\right]$$

$$= \frac{A}{j\Omega}\left[e^{j\Omega T/2} - e^{-j\Omega T/2}\right] = \frac{2A}{\Omega} sin(\Omega T/2) = AT\,\frac{sin(\Omega T/2)}{\Omega T/2}$$

Στην επίλυση χρησιμοποιήθηκαν οι γνωστές σχέσεις του Euler, δηλ.:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + jsin\theta \ \text{ και } \ e^{-j\theta} = \cos\theta - jsin\theta$$

Αντικαθιστώντας $\Omega = 2\pi f$ εκφράζουμε το αποτέλεσμα στη γραμμική συχνότητα f:

$$X(f) = \frac{A}{\pi f}\sin(\pi f T)$$

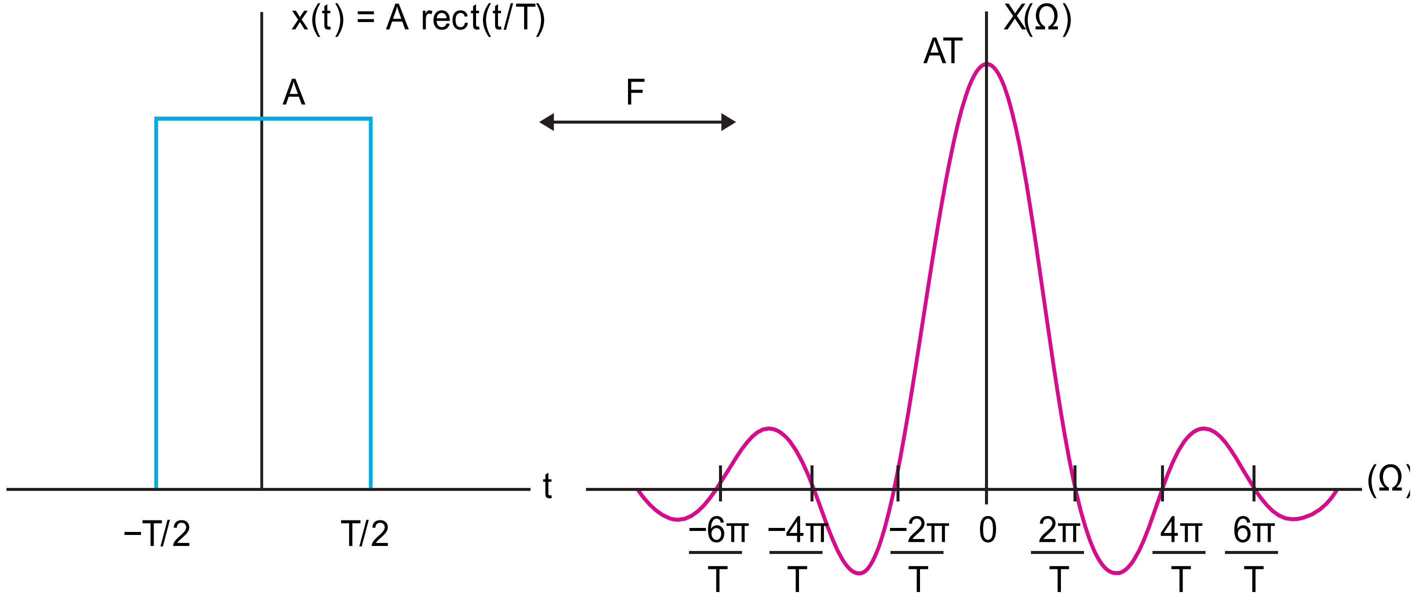
Άσκηση 4 (συνέχεια)

Μια πιο απλοποιημένη μορφή είναι:

$$X(\Omega) = AT\, sinc\left(\frac{\Omega T}{2\pi}\right)$$

$$X(f) = AT\, sinc(fT)$$

όπου $sinc(x)$είναι η κανονικοποιημένη συνάρτηση δειγματοληψίας.



Ο τετραγωνικός παλμός διάρκειας 2T και ο μετασχηματισμός Fourier του.

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Παρατηρήσεις:

1. Ο μετασχηματισμός Fourier $X(\Omega)$ γενικά είναι μία μιγαδική συνάρτηση, όμως στην περίπτωση του τετραγωνικού παλμού είναι μια πραγματική συνάρτηση.

2. Η τιμή του μετασχηματισμού Fourier στη συχνότητα μηδέν υπολογίζεται από το όριο:

$$X(0) = \lim_{\Omega \to 0} \frac{2\sin(\Omega T)}{\Omega} = \lim_{\Omega \to 0} 2\,T\cos(\Omega T) = 2T$$

3. Οι τιμές στις οποίες μηδενίζεται το $X(\Omega)$ είναι τα **φασματικά μηδενικά**, δίνονται από την εξίσωση $\sin(\Omega T) = 0$ και είναι οι συχνότητες $\Omega = k\pi/T$, όπου $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. Η γραφική παράσταση του μετασχηματισμού Fourier διέρχεται περιοδικά από το μηδέν και το ύψος των δευτερευόντων λοβών μειώνεται ασυμπτωτικά στο μηδέν.

5. Το φάσμα τείνει στο μηδέν καθώς περνάμε σε υψηλές συχνότητες, δηλαδή όταν $|\Omega| \to \infty$.

Άσκηση 5

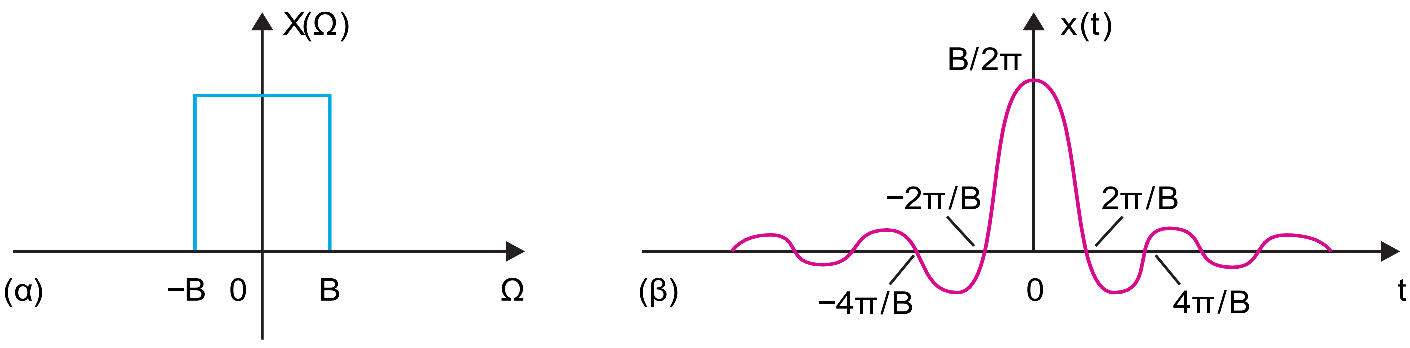
Να βρεθεί το σήμα του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier είναι ορθογώνιο παράθυρο συχνοτήτων με πλάτος B, δηλαδή ισχύει:

$$\mathrm{X}(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \mathrm{B}/2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

<u>Απάντηση</u>: Επειδή ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος είναι ίσος με μηδέν για $\Omega < -\mathrm{B}/2$ και $\Omega > \mathrm{B}/2$, το σήμα θα είναι:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-B/2}^{B/2} e^{j\Omega t}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi jt} e^{j\Omega t}\Big|_{-B/2}^{B/2} = \frac{1}{2\pi jt}\left(e^{jBt/2} - e^{-jBt/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi jt} 2j\, sin(Bt/2) = \frac{1}{\pi t} sin(Bt/2) = \frac{B}{2\pi} sinc\left(\frac{Bt}{2\pi}\right)$$



Περιγραφή του $x(t)$ στα πεδία: (α) συχνότητας και (β) χρόνου, αντίστοιχα.

Άσκηση 5 (συνέχεια)

Παρατηρήσεις:

- Όπως και στην προηγούμενη άσκηση, η λύση περιγράφεται από τη συνάρτηση δειγματοληψίας.
- Συγκρίνοντας την παρούσα και την προηγούμενη άσκηση παρατηρούμε μια μορφής **συμμετρία**, δηλ. ο μετασχηματισμός Fourier του ορθογώνιου παλμού (στο χρόνο) είναι η συνάρτηση δειγματοληψίας (στη συχνότητα) και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του ορθογώνιου παλμού (στη συχνότητα) είναι πάλι η συνάρτηση δειγματοληψίας (στο χρόνο).
- Θα επιβεβαιώσουμε αυτή την παρατήρηση με την ιδιότητα της συμμετρίας του μετασχηματισμού Fourier.

Άσκηση 6

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = cos(\Omega_0 t)$.

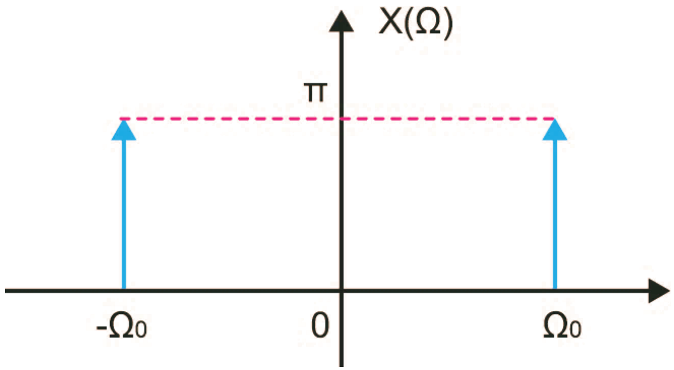
<u>Απάντηση</u>: Από τη σχέση Euler έχουμε $x(t) = \frac{1}{2}\ e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2}\ e^{-j\Omega_0 t}$. Επίσης ισχύει:

$$e^{j\Omega_0 t} \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\ \delta(\Omega - \Omega_0)$$

Επομένως:

$$F\{x(t)\} = F\left\{\frac{1}{2}\ e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2}\ e^{-j\Omega_0 t}\right\} = \frac{1}{2}F\{e^{j\Omega_0 t}\} + \frac{1}{2}\ F\{e^{-j\Omega_0 t}\}$$

$$= \frac{1}{2}2\pi\ \delta(\Omega - \Omega_0) + \frac{1}{2}2\pi\ \delta(\Omega + \Omega_0) = \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$$



Φάσμα πλάτους του $x(t) = cos(\Omega_0 t)$. Το φάσμα φάσης είναι μηδενικό.

Άσκηση 7

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = e^{-\alpha t}\, cos(\Omega_0 t)\, u(t)$

<u>Απάντηση:</u> Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier και αντικαθιστώντας το συνημίτονο από τον τύπο του Euler, προκύπτει:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\Omega)t} \frac{1}{2} \left[e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\Omega)t} e^{j\Omega_0 t} dt + \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\Omega)t} e^{-j\Omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j(\Omega - \Omega_0))t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j(\Omega + \Omega_0))t} dt \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha + j(\Omega - \Omega_0)} + \frac{1}{\alpha + j(\Omega + \Omega_0)} \right] = \frac{\alpha + j\Omega}{\alpha^2 + 2j\Omega\alpha + \left(\Omega_0^2 - \Omega^2\right)}$$

4. Σχέση Μετασχηματισμών Fourier και Laplace

Σχέση Μετασχηματισμών Fourier και Laplace

Από τις σχέσεις ορισμού των δύο μετασχηματισμών διαπιστώνουμε την (σχεδόν) πλήρη ομοιότητά τους, πλην του μιγαδικού εκθέτη. Στον μετ. Fourier αυτός είναι $e^{j\Omega}$ ενώ στον μετ. Laplace είναι $e^{\sigma+j\Omega}$, δηλαδή ο Fourier δεν διαθέτει τον συντελεστή απόσβεσης (damping factor), που διαθέτει ο Laplace.

Η διαφορά αυτή είναι σημαντική καθώς ο συντελεστής απόσβεσης (σ) καθορίζει την περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού και εξασφαλίζει τη σύγκλιση του μετασχηματισμού.

Ο μετ. Fourier μπορεί να θεωρηθεί ως μία υποπερίπτωση του Laplace για $\sigma = 0$, δηλ:

$$X(\Omega) = X(s)\Big|_{s=j\Omega}$$

Επειδή $\sigma = 0$ ισχύει μόνο επάνω στον φανταστικό άξονα $j\Omega$, η σχέση ανάμεσα στους δύο μετασχηματισμούς ισχύει μόνο αν η περιοχή σύγκλισης του μετ. Laplace περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα $j\Omega$. Μόνο τότε ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να υπολογιστεί από τον Laplace.

Η παραπάνω σχέση ισχύει για όλες τις περιπτώσεις σημάτων, δηλαδή αιτιατών, αντι-αιτιατών και μη-αιτιατών.

Σχέση Μετασχηματισμών Fourier και Laplace

Για τον υπολογισμό του μετ. Fourier ενός σήματος λαμβάνουμε υπόψη τους ακόλουθους κανόνες:

- Αν το σήμα $x(t)$ είναι φραγμένο και πεπερασμένης διάρκειας, ο μετ. Fourier συγκλίνει, άρα μπορεί να υπολογιστεί.
- Αν το σήμα $x(t)$ είναι άπειρης διάρκειας και η περιοχή σύγκλισης του μετ. Laplace περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα $j\Omega$, ο μετ. Fourier μπορεί να υπολογιστεί από την αντικατάσταση του s με $j\Omega$, δηλαδή $X(s)|_{s=j\Omega}$.
- Αν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό, ο μετ. Fourier μπορεί να υπολογιστεί από τις σειρές Fourier.
- Αν το σήμα $x(t)$ δεν είναι τίποτε από τα παραπάνω ή έχει ασυνέχειες, π.χ. $x(t) = u(t)$ ή έχει ασυνέχειες και άπειρη ενέργεια, π.χ. $x(t) = u(t)\cos(\Omega_0 t)$ ή έχει ασυνέχειες στη συχνότητα ακόμα και αν έχει πεπερασμένη ενέργεια, π.χ. $x(t) = sinc(t)$, τότε χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των σειρών Fourier.
- Στα ΓΧΑ συστήματα χρησιμοποιούμε τον μετ. Laplace όταν είναι επιθυμητή η μελέτη της μεταβατικής και της μόνιμης κατάστασης των ΓΧΑ συστημάτων, ενώ τον μετ. Fourier όταν είναι επιθυμητή η μελέτη μόνο της μόνιμης κατάστασης.

Άσκηση 8

Να ελεγχθεί αν για τα παρακάτω σήματα ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να αποκτηθεί από τον μετασχηματισμό Laplace:

(α) $x_1(t) = \delta(t)$ (β) $x_2(t) = e^{-3t}u(t)$ (γ) $x_3(t) = u(t)$

<u>Απάντηση</u>: (α) Ο μετ. Laplace είναι $X_1(s) = 1$ και περιοχή σύγκλισης είναι όλο το πεδίο s. Επειδή η περιοχή σύγκλισης του μετ. Laplace περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα $j\Omega$ προκύπτει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τον Fourier από τον Laplace. Είναι:

$$X(\Omega) = X(s)\Big|_{s=j\Omega} = 1$$

(β) Ο μετ. Laplace είναι $X_2(s) = 1/(s+3)$ και περιοχή σύγκλισης είναι $Re\{s\} > -3$. Η περιοχή σύγκλισης του μετ. Laplace περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα $j\Omega$. Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε τον Fourier από τον Laplace:

$$X(\Omega) = X(s)\Big|_{s=j\Omega} = \frac{1}{3+j\Omega}$$

(γ) Ο μετ. Laplace είναι $X_3(s) = 1/s$ και η περιοχή σύγκλισης $Re\{s\} > 0$. Επειδή ο φανταστικός άξονας $j\Omega$ δεν περιλαμβάνεται στην περιοχή σύγκλισης προκύπτει ότι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τον Fourier από τη σχέση $X(\Omega) = X(s)|_{s=j\Omega}$.

5. Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

1. Γραμμικότητα
2. Μετατόπιση στο Χρόνο
3. Μετατόπιση στη Συχνότητα
4. Αλλαγή Κλίμακας στο Χρόνο
5. Αλλαγή Κλίμακας στη Συχνότητα
6. Ανάκλαση
7. Συζυγία
8. Συμμετρία (δυϊσμός)
9. Παραγώγιση στη συχνότητα
10. Παραγώγιση στο χρόνο
11. Ολοκλήρωση στο χρόνο
12. Συνέλιξη
13. Πολλαπλασιασμός στο χρόνο
14. Άρτιο/Περιττό Μέρος Σήματος – Πραγματικό/Φανταστικό Μέρος Φάσματος
15. Φασματικές συμμετρίες
16. Εμβαδά Καμπυλών

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (1/12)

1. Γραμμικότητα

Αν $x_i(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_i(\Omega)$ και c_i αυθαίρετη (πραγματική ή μιγαδική) σταθερά και $i = 1,2, \ldots n$, τότε ισχύει:

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} c_1 X_1(\Omega) + c_2 X_2(\Omega) + \cdots + c_n X_n(\Omega)$$

Η σχέση δηλώνει ότι ο FT ενός γραμμικού συνδυασμού συναρτήσεων ισούται με τον γραμμικό συνδυασμό των αντίστοιχων επιμέρους FT για κάθε συνάρτηση.

2. Μετατόπιση στο Χρόνο

Αν$x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό t_0 ισχύει:

$$x(t - t_0) \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{-j\Omega t_0}\, X(\Omega) = \ |X(\Omega)|\, e^{j\varphi(\Omega) - \Omega t_0}$$

Η σχέση δείχνει πως αν το σήμα μετατοπιστεί στο χρόνο κατά t_0, τότε το φάσμα του πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα $e^{-j\Omega t_0}$. Έτσι το φάσμα ενός σήματος μετατοπισμένου στο χρόνο έχει το ίδιο μέτρο με το αρχικό σήμα, ενώ η φάση του αλλάζει γραμμικά.

Άσκηση 9

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα μετατόπισης στο χρόνο να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = \delta(t - t_0)$.

<u>Απάντηση</u>: Γνωρίζουμε ότι μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης Δέλτα είναι $\Delta(\Omega) = 1$. Αυτό σημαίνει ότι για να συνθέσουμε το σήμα χρειαζόμαστε ημίτονα όλων των δυνατών συχνοτήτων $(-\infty < \Omega < \infty)$ με σταθερό μοναδιαίο πλάτος και **μηδενική φάση**.

Από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης προκύπτει:

$$X(\Omega) = e^{-j\Omega t_0}\, \Delta(\Omega) = e^{-j\Omega t_0}$$

Επομένως, για να συνθέσουμε το σήμα $x(t) = \delta(t - t_0)$ χρειαζόμαστε ημίτονα όλων των δυνατών συχνοτήτων $(-\infty < \Omega < \infty)$ με σταθερό μοναδιαίο πλάτος και **γραμμική φάση**.

Καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα με την άσκηση 2 αλλά με διαφορετικό τρόπο.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (2/12)

3. Μετατόπιση στη Συχνότητα

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό Ω_0 ισχύει:

$$e^{j\Omega_0 t}\, x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(\Omega - \Omega_0)$$

Παρατηρούμε πως ο πολλαπλασιασμός ενός σήματος $x(t)$ με τον όρο $e^{j\Omega_0 t}$ μετατοπίζει το φάσμα του σήματος κατά Ω_0.

Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική για τις τηλεπικοινωνίες, επειδή ορίζει μαθηματικά τη διαδικασία της **διαμόρφωσης**.

Άσκηση 10

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $y(t) = x(t)\cos(\Omega_0 t)$.

<u>Απάντηση</u>: Χρησιμοποιώντας τη σχέση Euler, το σήμα $y(t)$ γράφεται:

$$y(t) = x(t)\cos(\Omega_0 t) = x(t)\frac{1}{2}\left[e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\, x(t)\, e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2} x(t) e^{-j\Omega_0 t}$$

Με βάση τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της ολίσθησης συχνότητας, ο FT του $y(t)$ είναι:

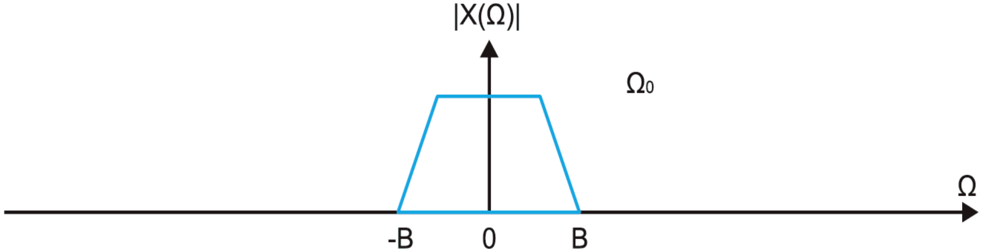
$$Y(\Omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\, x(t)\, e^{j\Omega_0 t}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} x(t) e^{-j\Omega_0 t}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[X(\Omega - \Omega_0) + X(\Omega + \Omega_0)\right]$$

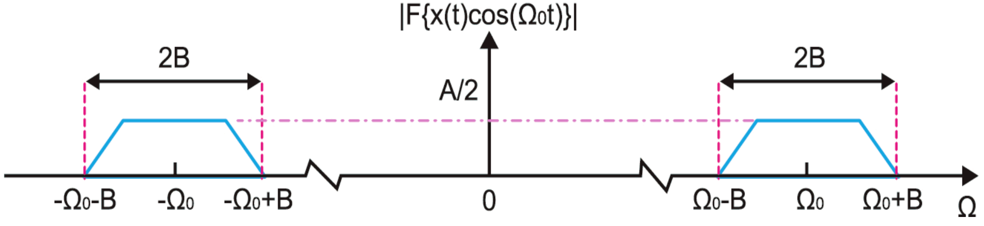
Άσκηση 10 (συνέχεια)

Παρατηρούμε ότι πολλαπλασιασμός του σήματος $x(t)$ με το $\cos(\Omega_0 t)$ δεν αλλοιώνει τη μορφή του $X(\Omega)$, απλά το φάσμα $X(\Omega)$ του σήματος **μεταφέρεται** στη περιοχή των συχνοτήτων $\pm\Omega_0$. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται **διαμόρφωση**.

Φάσμα αρχικού σήματος



Φάσμα διαμορφωμένου σήματος



Κατά τη διαμόρφωση ένα σήμα $x(t)$ που μεταφέρει χρήσιμη πληροφορία πολλαπλασιάζεται με ένα σήμα απλής συχνότητας $\cos(\Omega_0 t)$, που ονομάζεται **φέρον σήμα**, με σκοπό τη μετάδοσή του μέσα από ένα κανάλι μετάδοσης.

Άσκηση 10 (συνέχεια)

<u>Παρατηρήσεις</u>:

- Ο πολλαπλασιασμός του σήματος $x(t)$ με τη ένα συνημίτονο $\cos(\Omega_0 t)$ δεν αλλοιώνει τη μορφή του $X(\Omega)$, απλά το φάσμα $X(\Omega)$ του σήματος «μεταφέρεται» στις περιοχές των συχνοτήτων $\pm\Omega_0$. Δηλαδή, το παραγόμενο σήμα $y(t)$ έχει το ίδιο φάσμα, άρα μεταφέρει την ίδια πληροφορία, αλλά είναι μετατοπισμένο σε μία συχνότητα $\pm\Omega_0$. Το γεγονός αυτό επιτρέπει την εύκολη εκπομπή του.
- Η ιδιότητα αυτή έχει μεγάλη πρακτική αξία στις τηλεπικοινωνίες και αποτελεί τη θεωρητική βάση της **διαμόρφωσης**. Κατά τη διαμόρφωση ένα σήμα $x(t)$ που μεταφέρει χρήσιμη πληροφορία, πολλαπλασιάζεται με ένα σήμα απλής συχνότητας $\cos(\Omega_0 t)$, που ονομάζεται **φέρον σήμα**, προκειμένου να μεταδοθεί μέσα από ένα κανάλι επικοινωνίας.
- Στη συγκεκριμένη περίπτωση που $y(t) = x(t)\cos(\Omega_0 t)$ έχουμε διαμόρφωση πλάτους διπλής πλευρικής ζώνης (Amplitude Modulation/Double Side Band – AM/ DSB) και είναι η απλούστερη περίπτωση διαμόρφωσης.
- Προϋπόθεση για την επιτυχία της διαμόρφωσης είναι η συχνότητα του φέροντος σήματος να είναι αρκετά μεγαλύτερη από τη μέγιστη συχνότητα του πληροφοριακού σήματος, δηλαδή να ισχύει η σχέση $\Omega_0 \gg B$.
- Εύκολα αποδεικνύεται ότι η διαμόρφωση πλάτους δεν είναι γραμμική, ούτε χρονικά αμετάβλητη. Επομένως, τα συστήματα διαμόρφωσης πλάτους δεν είναι ΓΧΑ συστήματα.

Άσκηση 11

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = cos(\Omega_0 t)\Pi_T(t)$.

<u>Απάντηση</u>: Στην άσκηση αυτή η διάρκεια του συνημιτόνου $cos(\Omega_0 t)$ δεν είναι άπειρη αλλά πεπερασμένη και ίση με τη διάρκεια $2T$ του τετραγωνικού παλμού. Πολλαπλασιάζοντας δηλαδή το συνημίτονο (αλλά και κάθε σήμα) με έναν παλμό συγκεκριμένης διάρκειας λαμβάνουμε ένα τμήμα του αρχικού σήματος $cos(\Omega_0 t)$ (διαδικασία παραθύρωσης). Θα δούμε πως η πεπερασμένη διάρκεια του σήματος επηρεάζει το φάσμα του σήματος.

Με βάση τη σχέση Euler $cos(\Omega_0 t) = \frac{1}{2}e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 t}$ το δοθέν σήμα $x(t)$ γράφεται:

$$x(t) = \Pi_T(t)\left[\frac{1}{2}e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 t}\right] = \frac{1}{2}e^{j\Omega_0 t}\Pi_T(t) + \frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 t}\Pi_T(t)$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι :

$$\Pi_T(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{2\,sin(\Omega T)}{\Omega}$$

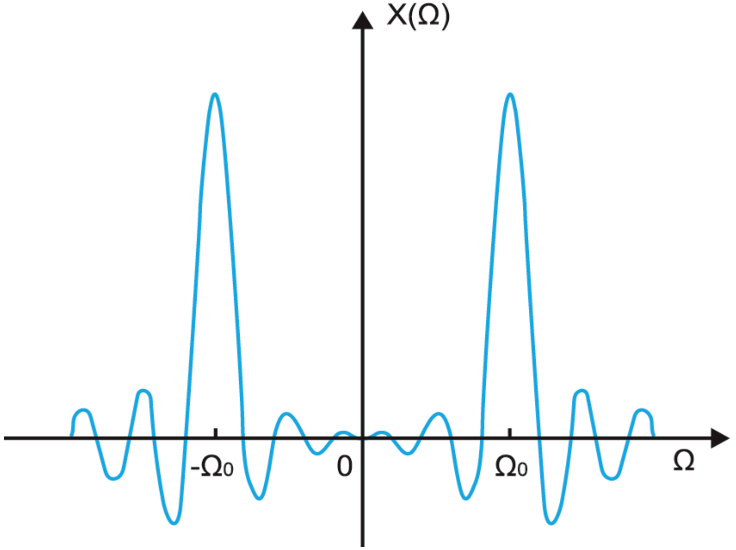
Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ολίσθησης στη συχνότητα, βρίσκουμε:

$$x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{sin(\Omega - \Omega_0)T}{(\Omega - \Omega_0)} + \frac{sin(\Omega + \Omega_0)T}{(\Omega + \Omega_0)}$$

Άσκηση 11 (συνέχεια)

<u>Παρατηρήσεις</u>:

- Ο FT αποτελείται από δύο **συναρτήσεις δειγματοληψίας**, τοποθετημένες στις συχνότητες $-\Omega_0$ και Ω_0.



- Παρατηρείται **διάχυση** του φάσματος του σήματος σε συχνότητες εκατέρωθεν της συχνότητας $\pm\Omega_0$ του συνημιτόνου.
- Το φαινόμενο αυτό είναι ανεπιθύμητο, ειδικά στην περίπτωση που θέλουμε να εντοπίσουμε την ακριβή θέση της συχνότητας περισσοτέρων του ενός συνημιτόνων.
- Η διαπίστωση ότι η παραθύρωση προκαλεί παραμόρφωση στο φάσμα είναι πολύ σημαντική, επειδή η παραθύρωση είναι μία συχνά χρησιμοποιούμενη διαδικασία στην επεξεργασία των σημάτων, προκειμένου να λάβουμε και να επεξεργαστούμε τμήματα των σημάτων.
- Η ελαχιστοποίηση της επίδρασης του παραθύρου επιτυγχάνεται με αύξηση της διάρκειας T του παραθύρου, επειδή αυτό οδηγεί στη μείωση της διάρκειας των λοβών της συνάρτησης δειγματοληψίας.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (3/12)

4. Αλλαγή Κλίμακας στο Χρόνο

Αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega)$ τότε για κάθε πραγματικό αριθμό α ($\alpha \neq 0$), ισχύει:

$$x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\Omega}{a}\right)$$

5. Αλλαγή Κλίμακας στη Συχνότητα

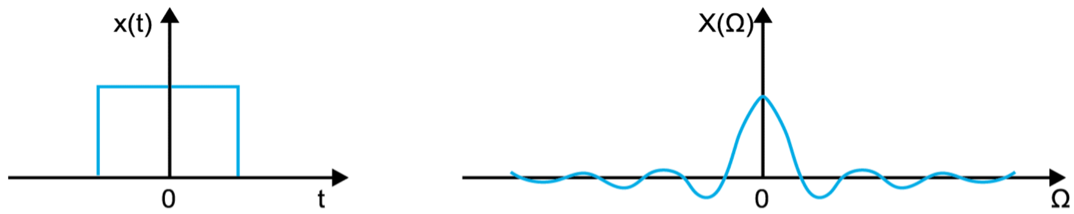
Αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega)$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό α ($\alpha \neq 0$), ισχύει:

$$\frac{1}{|a|} x\left(\frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow{F} X(a\Omega)$$

Το σπουδαίο συμπέρασμα των παραπάνω δύο ιδιοτήτων είναι ότι η αλλαγή της κλίμακας του χρόνου επηρεάζει αντιστρόφως ανάλογα την έκταση του μετασχηματισμού Fourier.

Έτσι μπορούμε να «στενεύουμε» ή να «πλατύνουμε» το φάσμα του σήματος με διεύρυνση ή στένευση του χρόνου αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη κλίμακα.

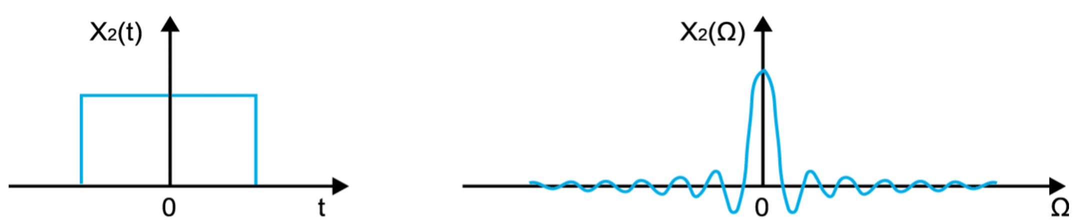
Απεικόνιση της αλλαγής κλίμακας στο χρόνο και στη συχνότητα



(α) Σήμα *x(t)* και το φάσμα του $X_1(\Omega)$

(β) Σήμα $x_1(t) = x(\alpha t)$ με α > 1 και το φάσμα του $X_1(\Omega)$

Αν $\alpha > 1$, το σήμα μεταβάλλεται πιο γρήγορα στο χρόνο, γεγονός που αντιστοιχεί σε υψηλότερες συχνότητες στο πεδίο συχνοτήτων, άρα, το φάσμα του διαστέλλεται (σχήμα β).



(γ) Σήμα $x_2(t) = x(\alpha t)$ με α < 1 και το φάσμα του $X_2(\Omega)$

Αντίθετα, όταν $0 < \alpha < 1$, το σήμα μεταβάλλεται πιο αργά στο χρόνο, γεγονός που αντιστοιχεί σε σήμα χαμηλής συχνότητας, άρα το φάσμα του συμπιέζεται (σχήμα γ).

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (4/12)

6. Ανάκλαση

Αν στην ιδιότητα αλλαγής κλίμακας στο χρόνο θέσουμε $\alpha = -1$, προκύπτει η ιδιότητα της ανάκλασης:

$$x(-t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(-\Omega)$$

7. Συζυγία

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$ τότε ισχύει:

$$x^*(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X^*(-\Omega) \text{ και } x^*(-t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X^*(\Omega)$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (5/12)

8. Συμμετρία (δυϊσμός)

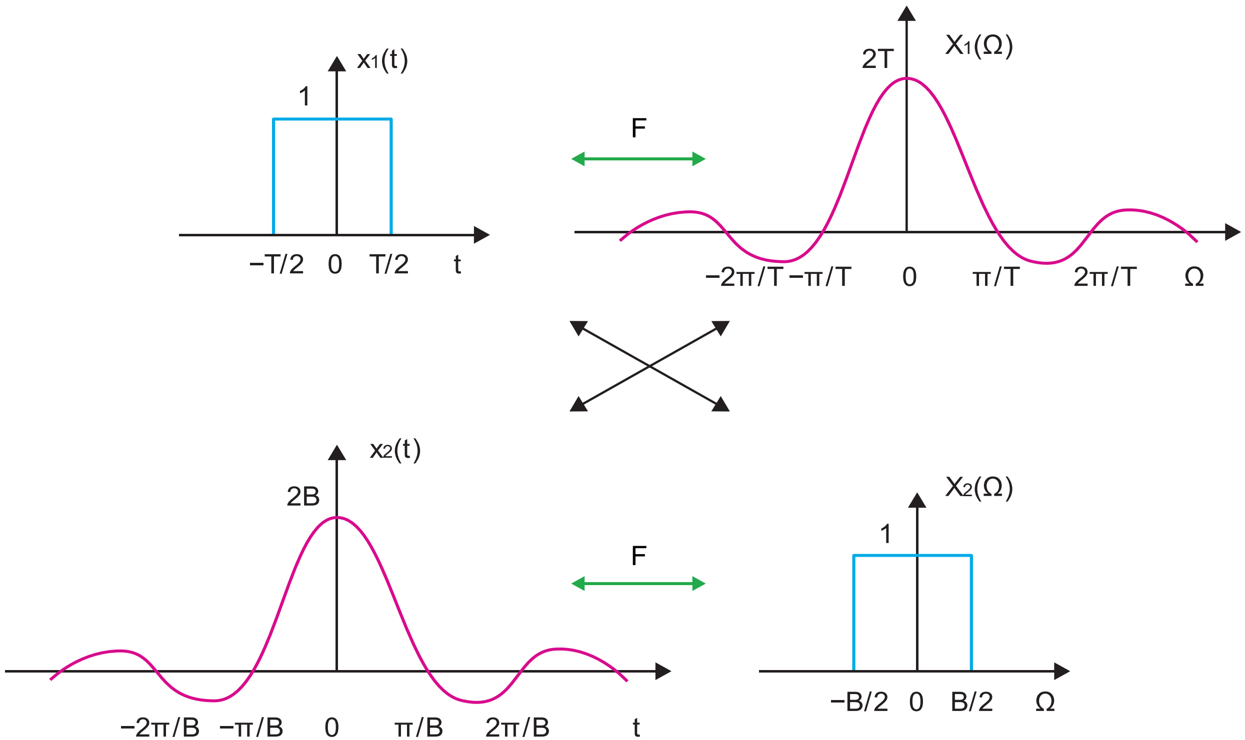
Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$, τότε το σήμα $y(t) = X(t)$ έχει FT: $Y(\Omega) = 2\pi x(-\Omega)$

- Ο συμβολισμός $X(t)$ σημαίνει ότι δημιουργούμε μία συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή t, η οποία όμως δίνεται από τη μαθηματική έκφραση της $X(\Omega)$.
- Η έκφραση $2\pi x(-\Omega)$ σημαίνει ότι έχουμε μία συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή Ω, η οποία έχει όμως τη μορφή της $x(t)$.
- Η ιδιότητα της συμμετρίας (δυϊσμού) μας επιτρέπει να υπολογίζουμε τον μετ. Fourier σημάτων για τα οποία έχουμε ήδη υπολογίσει τον Fourier του ζευγαριού τους και είναι δύσκολο να υπολογίσουμε τα ίδια απευθείας από τον ορισμό. Στην ουσία πρόκειται για μία ακόμα μέθοδο υπολογισμού του μετασχηματισμού Fourier, μαζί με τον ορισμό και τον υπολογισμό μέσω του μετασχηματισμού Laplace.
- Σύμφωνα με την ανάλυση κατά Fourier, αν ένα σήμα συνεχούς χρόνου διαθέτει κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά στο πεδίο της συχνότητας, τότε λόγω της ιδιότητας της συμμετρίας τα ίδια χαρακτηριστικά θα εμφανίζονται και στη συνάρτηση $X(\Omega)$ στο πεδίο του χρόνου.

Γραφική εξήγηση της ιδιότητας συμμετρίας

Ο μετασχηματισμός Fourier του τετραγωνικού παλμού $x(t) = \Pi_{T/2}\ (t) = rect(t/T)$ δίνεται από τη συνάρτηση δειγματοληψίας ως $X(\Omega) = Tsinc(\Omega T/2\pi)$.

Το σήμα δειγματοληψίας $x(t) = B/2\pi\ sinc(Bt/2\pi)$ έχει μετασχηματισμό Fourier έναν ορθογώνιο παλμό στο πεδίο της συχνότητας $X(\Omega) = \Pi_{B/2}\ (t) = rect(t/B)$.



Άσκηση 12

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $x(t) = 1$.

<u>Απάντηση</u>:

Γνωρίζουμε ότι $\delta(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 1$. Κάνοντας χρήση της ιδιότητας του δυϊσμού, βρίσκουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = 1$ είναι:

$$X(\omega) = 2\pi\ \delta(-\Omega) = 2\pi\ \delta(\Omega)$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (6/12)

9. Παραγώγιση στη συχνότητα

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$ τότε:

$$t\,x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} jX'(\Omega)$$

10. Παραγώγιση στο χρόνο

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$ και ο FT της παραγώγου $d^n x(t)/dt^n$ υπάρχει, τότε αυτός υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{F}{\longleftrightarrow} j\Omega X(\Omega)$$

ή γενικότερα:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \overset{F}{\longleftrightarrow} (j\Omega)^n X(\Omega)$$

και για το πεδίο συχνοτήτων:

$$(-jt)^k x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{d^k X(\Omega)}{d\Omega^k}$$

Άσκηση 13

Να υπολογιστεί η έξοδος $y(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος που βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας, περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση και δέχεται ως είσοδο $x(t) = \delta(t)$.

$$6y(t) + 5\frac{dy(t)}{dt} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} = x(t)$$

<u>Απάντηση</u>: Εφαρμόζουμε την ιδιότητα της παραγώγισης και στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης και λαμβάνουμε:

$$6Y(\Omega) + 5j\Omega\, Y(\Omega) + (j\Omega)^2 Y(\Omega) = \Delta(\Omega) \Rightarrow Y(\Omega)\left[6 + 5j\Omega + (j\Omega)^2\right] = 1 \Rightarrow Y(\Omega)$$
$$= \frac{1}{6 + 5j\Omega + (j\Omega)^2} \Rightarrow Y(\Omega) = \frac{1}{(3 + j\Omega)}\frac{1}{(2 + j\Omega)} = \cdots = -\frac{1}{3 + j\Omega} + \frac{1}{2 + j\Omega}$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier λαμβάνουμε:

$$y(t) = \left[-e^{-3t} + e^{-2t}\right] u(t)$$

Η ιδιότητα της παραγώγισης στο χρόνο είναι χρήσιμη για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν συστήματα συνεχούς χρόνου που βρίσκονται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας. Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε αντί του μετασχηματισμού Fourier χρησιμοποιούμε τον μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace.

Άσκηση 14

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης μοναδιαίου τριγωνικού παλμού διάρκειας 2T, που δίνεται από τη σχέση:

$$\Lambda_{\mathrm{T}}\,(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{\mathrm{T}}, & t < |\mathrm{T}| \\ 0, & t > |\mathrm{T}| \end{cases}$$

<u>Απάντηση</u>: Η συνάρτηση μοναδιαίου τριγωνικού παλμού μπορεί να γραφεί ως άθροισμα συναρτήσεων μοναδιαίας κλίσης (ράμπας), σύμφωνα με τη σχέση:

$$\Lambda_{\mathrm{T}}(t) = \frac{1}{T}\,[r(t+T) - 2r(t) + r(t-T)]$$

Υπολογίζουμε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της παραπάνω συνάρτησης:

$$\Lambda'_{\mathrm{T}}(t) = \frac{1}{T}[u(t+T) - 2u(t) + u(t-T)]$$

$$\Lambda''_{\mathrm{T}}(t) = \frac{1}{T}[\delta(t+T) - 2\delta(t) + \delta(t-T)]$$

Άσκηση 14 (συνέχεια)

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός Fourier της $\Lambda_{\mathrm{T}}(t)$ μπορεί να υπολογιστεί με χρήση της ιδιότητας της παραγώγισης, δηλαδή:

$$F\{\Lambda_{\mathrm{T}}(t)\} = F\left\{\frac{1}{(j\Omega)^2}\Lambda_{\mathrm{T}}(t)\right\} = F\left\{\frac{1}{(j\Omega)^2}\left[\frac{1}{T}\left[\delta(t+T) - 2\delta(t) + \delta(t-T)\right]\right]\right\}$$

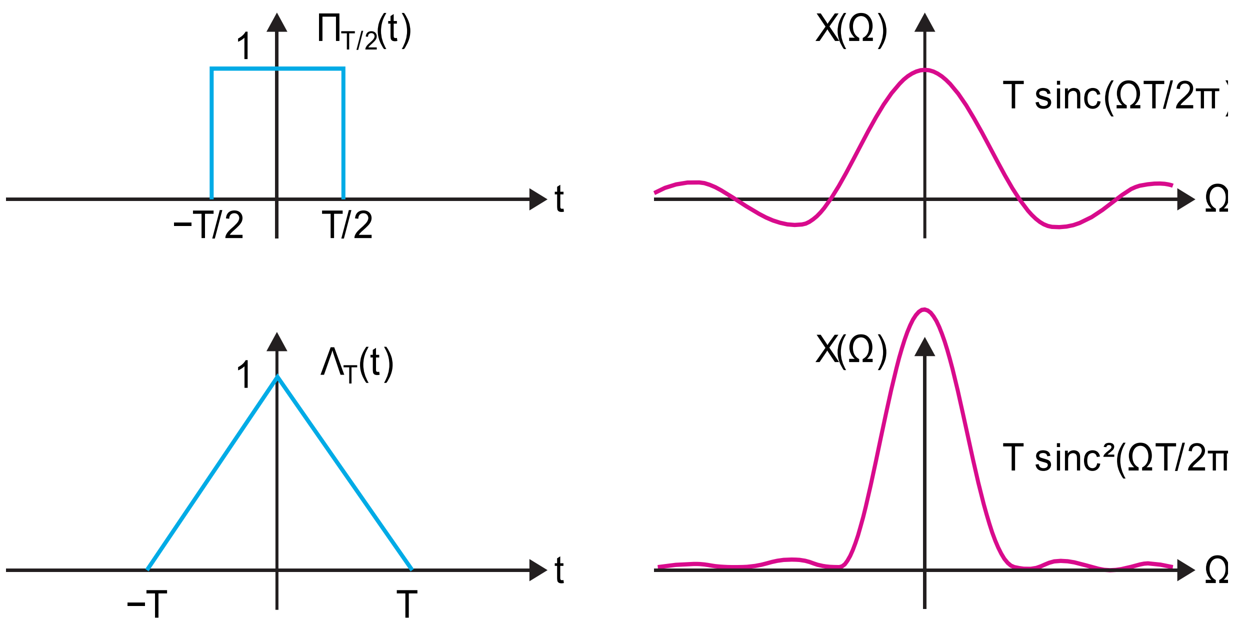
$$= \frac{1}{\Omega^2 \mathrm{T}}\left(2 - e^{j\Omega\mathrm{T}} - e^{-j\Omega\mathrm{T}}\right) = \cdots = 4\,\frac{\sin^2\left(\frac{\Omega T}{2}\right)}{\Omega^2 \mathrm{T}}$$

Θυμίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του μοναδιαίου τετραγωνικού παλμού διάρκειας 2Τ είναι:

$$\Pi_{\mathrm{T}}(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{2\sin(\Omega T)}{\Omega}$$

Άσκηση 14 (συνέχεια)

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι μετασχηματισμοί Fourier του τετραγωνικού και του τριγωνικού παλμού (παραθύρου).



(α) Σήμα και φάσμα τετραγωνικού παλμού (β) Σήμα και φάσμα τριγωνικού παλμού

Στην περίπτωση του τριγωνικού παλμού, ο κεντρικός λοβός είναι μεγαλύτερου πλάτους ενώ οι δευτερεύοντες λοβοί είναι μικρότερου πλάτους.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (7/12)

11. Ολοκλήρωση στο χρόνο

Αν $x(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$ τότε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau \stackrel{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\Omega}\, \mathrm{X}(\Omega) + \pi\, X(0)\, \delta(\Omega)$$

12. Συνέλιξη

Ο FT της συνέλιξης δύο ΓΧΑ σημάτων ισούται με το γινόμενο των επιμέρους FT των σημάτων. Συγκεκριμένα, αν $x_1(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X_1(\Omega)$ και $x_1(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X_1(\Omega)$, τότε:

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X_1(\Omega)\, X_2(\Omega)$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (8/12)

Σε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$, το οποίο διεγείρεται από είσοδο $x(t)$, η έξοδος $y(t)$ δίνεται από το ολοκλήρωμα της συνέλιξης:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$$

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$ και $h(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} H(\Omega)$, τότε από την ιδιότητα της συνέλιξης έχουμε:

$$y(t) = h(t) * x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(\Omega) = H(\Omega)\, X(\Omega)$$

Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε το φάσμα της απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος όταν γνωρίζουμε το φάσμα του σήματος εισόδου $X(\Omega)$ και το φάσμα $H(\Omega)$ της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ του συστήματος.

Επομένως, η υπολογιστικά δύσκολη σχέση της συνέλιξης μετασχηματιζόμενη κατά Fourier καταλήγει σε ένα απλό **γινόμενο** συναρτήσεων.

Επιπλέον, η ιδιότητα αυτή είναι σημαντική επειδή αποτελεί τη βάση για το σχεδιασμό ΓΧΑ συστημάτων στο πεδίο συχνοτήτων (αναλογικά φίλτρα).

Άσκηση 15

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της μοναδιαίας συνάρτησης $u(t)$.

<u>Απάντηση</u>: Η συνάρτηση $u(t)$ γράφεται ως:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\, dt$$

Γνωρίζουμε ότι $\delta(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 1$. Κάνοντας χρήση της ιδιότητας της ολοκλήρωσης, βρίσκουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του μοναδιαίου βήματος είναι:

$$u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} U(\Omega) = \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$$

Άσκηση 16

Να αποδειχθεί η ιδιότητα της συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier.

Απάντηση: Η συνέλιξη δύο γραμμικών και χρονικά αμετάβλητων (ΓΧΑ) σημάτων δίνεται από τη σχέση:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$$

Στην παραπάνω σχέση κάνοντας χρήση του ορισμού του FT, έχουμε:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1(t) * x_2\,(t)]\; e^{-j\Omega t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau \right) e^{-j\Omega t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\, \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t-\tau)\;\, e^{-j\Omega t}\, dt \right) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\, \mathrm{X}_2(\Omega)\;\, e^{-j\Omega\tau}\, d\tau = X_2(\Omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)\;\, e^{-j\Omega\tau}\, d\tau =$$

$$= X_2(\Omega)\, X_1(\Omega)$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (9/12)

13. Πολλαπλασιασμός στο χρόνο

Ανάλογη ιδιότητα ισχύει και προς την αντίστροφη κατεύθυνση, δηλαδή για τη συνέλιξη των FT $X(\Omega)$ και $Y(\Omega)$ των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$.

Συγκεκριμένα, αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$ και $y(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(\Omega)$ και $Z(\Omega) = X(\Omega) * Y(\Omega)$, τότε ισχύει:

$$x(t)\ y(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\left[X(\Omega) * Y(\Omega)\right]$$

Άσκηση 17

Να αποδειχθεί η ιδιότητα του πολλαπλασιασμού του μετασχηματισμού Fourier.

<u>Απάντηση</u>: Από τον ορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, έχουμε:

$$X(\Omega) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathrm{X}_1(\Omega) * X_2(\Omega)]\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$$

$$= 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{X}_1(\lambda)\, X_2(\Omega - \lambda) d\lambda \right) e^{j\Omega t}\, d\Omega$$

θέτουμε $\Omega - \lambda = \rho$ και αλλάζουμε τη σειρά ολοκλήρωσης, οπότε έχουμε:

$$X(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{X}_1(\lambda) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X_2(\rho)\, e^{j(\lambda+\rho)t}\, d\rho \right) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{X}_1(\lambda)\, e^{j\lambda t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X_2(\rho)\, e^{j\rho t}\, d\rho \right) d\lambda =$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_2(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega \right) = 2\pi\, x_1(t)\, x_2(t)$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (10/12)

14. Άρτιο/Περιττό Μέρος Σήματος - Πραγματικό/Φανταστικό Μέρος Φάσματος

Είναι γνωστό ότι κάθε σήμα $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ενός άρτιου $x_e(t)$ και ενός περιττού σήματος $x_o(t)$. Αν $x(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$ τότε ισχύει:

$$x_e(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} Re\{\, X(\Omega)\, \}$$

$$x_o(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} j\, Im\{\, X(\Omega)\, \}$$

Όπου η συνάρτηση $Re\{\ \}$ επιστρέφει το πραγματικό μέρος της μιγαδικής συνάρτησης Χ(Ω) και η συνάρτηση $Im\{\ \}$ το φανταστικό.

<u>Παρατηρήσεις</u>:

- Ένα άρτιας συμμετρίας σήμα συνεχούς χρόνου έχει πραγματικό μετ. Fourier. Εναλλακτικά, το πραγματικό μέρος του μετ. Fourier προέρχεται από το άρτιο μέρος του σήματος.
- Ένα περιττής συμμετρίας σήμα συνεχούς χρόνου έχει φανταστικό μετ. Fourier. Εναλλακτικά, το φανταστικό μέρος του μετ. Fourier προέρχεται από το περιττό μέρος του σήματος.

Άσκηση 18

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = e^{-a|t|}$, όπου $a > 0$.

Απάντηση: Θεωρούμε αρχικά το σήμα $g(t) = e^{-at}u(t)$. Ο FT αυτού δίνεται από:

$$G(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\, u(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}\, e^{-j\Omega t}\, dt = \frac{1}{a + j\Omega}$$

Το σήμα $g(t)$ αναλύεται σε άθροισμα άρτιας και περιττής συνιστώσας, δηλ.

$g(t) = g_e(t) + g_0(t)$. Η άρτια συνιστώσα $g_e(t)$ είναι $g_e(t) = \frac{g(t)+g(-t)}{2} = \frac{e^{-a|t|}}{2}$ και ισχύει $x(t) = 2\, g_e(t)$.

Ο FT του $g_e(t)$ βρίσκεται από την τελευταία ιδιότητα του μετασχηματισμού, δηλ. $F\{g_e(t)\} = R_e[G(\Omega)]$. Άρα:

$$G_e(\Omega) = R_e[G(\Omega)] = \frac{a}{a^2 + \Omega^2}$$

Τέλος, κάνοντας χρήση της ιδιότητας της γραμμικότητας του FT, βρίσκουμε:

$$X(\Omega) = 2\, G_e(\Omega) = \frac{2\, a}{a^2 + \Omega^2}$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (11/12)

15. Φασματικές Συμμετρίες

Αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό, περιοδικό ή απεριοδικό, το **πλάτος** $|X(\Omega)|$ και το **πραγματικό μέρος** $Re\{X(\Omega)\}$ είναι **άρτιες** συναρτήσεις της συχνότητας Ω, ενώ η **φάση** $\measuredangle X(\Omega)$ και το **φανταστικό μέρος** $Im\{X(\Omega)\}$ είναι **περιττές** συναρτήσεις:

$$|X(\Omega)| = |X(-\Omega)|$$

$$Re\{X(\Omega)\} = Re\{X(-\Omega)\}$$

$$\measuredangle X(\Omega) = -\measuredangle X(-\Omega)$$

$$Im\{X(\Omega)\} = -Im\{X(-\Omega)\}$$

Παρατηρήσεις:

- Σε ένα πραγματικό σήμα, το φάσμα πλάτους και το πραγματικό μέρος του μετ. Fourier είναι άρτιες συναρτήσεις.
- Σε ένα πραγματικό σήμα, το φάσμα φάσης και το φανταστικό μέρος του μετ. Fourier είναι περιττές συναρτήσεις.
- Οι παραπάνω συμμετρίες δεν ισχύουν αν το σήμα είναι μιγαδικό.
- Έχουμε εξηγήσει ότι στην πράξη δεν υπάρχουν οι αρνητικές συχνότητες, αλλά μόνο οι θετικές. Ωστόσο, χρειαζόμαστε την έννοια των αρνητικών συχνοτήτων προκειμένου να δημιουργήσουμε πραγματικά σήματα.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (12/12)

15. Εμβαδά Καμπυλών

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$ τότε από τις σχέσεις ορισμού του ευθύ και του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Το εμβαδό της κυματομορφής του σήματος $x(t)$ είναι ίσο με την τιμή του μετασχηματισμού $X(\Omega)$ για τη συχνότητα $\Omega = 0$, δηλαδή:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt$$

(β) Το εμβαδό της καμπύλης του μετασχηματισμού $X(\Omega)$ είναι ίσο με την τιμή του σήματος $x(t)$ για $t = 0$ πολλαπλασιασμένη επί $1/2\pi$, δηλαδή:

$$x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)\, d\Omega$$

6. Θεώρημα Parseval

Θεώρημα Parseval (1/2)

- Το θεώρημα εκφράζει τη **διατήρηση της ενέργειας στο πεδίο των συχνοτήτων**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

- Η ολική ενέργεια ενός σήματος μπορεί να υπολογιστεί ισοδύναμα είτε στο πεδίο του χρόνου είτε στο πεδίο της συχνότητας.

- Στο πεδίο του χρόνου υπολογίζουμε την ενέργεια ανά μονάδα χρονικού διαστήματος $|x(t)|^2$ και στη συνέχεια ολοκληρώνουμε για όλη τη διάρκεια του σήματος.

- Στο πεδίο της συχνότητας υπολογίζουμε την ενέργεια ανά μονάδα κυκλικής συχνότητας $|X(\Omega)|^2/2\pi$ και κατόπιν ολοκληρώνουμε για όλες τις συχνότητες.

Θεώρημα Parseval (2/2)

- Η συνάρτηση $S_x(\Omega) = |X(\Omega)|^2$ ονομάζεται **φασματική πυκνότητα ενέργειας** (energy density spectrum) του σήματος $x(t)$ και εκφράζει την **ενέργεια ανά εύρος ζώνης ενός rad** του σήματος για διάφορες συχνότητες.

- Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την ενέργεια που συνεισφέρουν οι συχνότητες από f_1 έως f_2 αρκεί να ολοκληρώσουμε την $|X(\Omega)|^2$ μεταξύ αυτών των δύο συχνοτήτων, δηλαδή:

$$E_{12} = \frac{1}{2\pi} \int_{f_1}^{f_2} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

Άσκηση 19

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = e^{-a|t|}$, όπου $a > 0$.

<u>Απάντηση</u>: Θεωρούμε αρχικά το σήμα $g(t) = e^{-at}u(t)$. Ο FT αυτού δίνεται από:

$$G(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\, u(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}\, e^{-j\Omega t}\, dt = \frac{1}{a + j\Omega}$$

Το σήμα $g(t)$ αναλύεται σε άθροισμα άρτιας και περιττής συνιστώσας, δηλ.

$g(t) = g_e(t) + g_0(t)$. Η άρτια συνιστώσα $g_e(t)$ είναι $g_e(t) = \frac{g(t)+g(-t)}{2} = \frac{e^{-a|t|}}{2}$ και ισχύει $x(t) = 2\, g_e(t)$.

Ο FT του $g_e(t)$ βρίσκεται από την τελευταία ιδιότητα του μετασχηματισμού, δηλ. $F\{g_e(t)\} = R_e[G(\Omega)]$. Άρα:

$$G_e(\Omega) = R_e[G(\Omega)] = \frac{a}{a^2 + \Omega^2}$$

Τέλος, κάνοντας χρήση της ιδιότητας της γραμμικότητας του FT, βρίσκουμε:

$$X(\Omega) = 2\, G_e(\Omega) = \frac{2\, a}{a^2 + \Omega^2}$$

7. Σύνοψη Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Σύνοψη Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier (1/3)

Ιδιότητα	Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
Γραμμικότητα	$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$	$a_1 X_1(\Omega) + a_2 X_2(\Omega)$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x(t - t_0)$	$e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j\Omega t_0} x(t)$	$X(\Omega - \Omega_0)$
Συμμετρία: Αν $x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(\Omega)$	$y(t) = X(t)$	$Y(\Omega) = 2\pi x(-\Omega)$
Πολλαπλασιασμός (Διαμόρφωση)	$x_1(t) x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}[X_1(\Omega) * X_2(\Omega)]$
Συνέλιξη	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\Omega)\, X_2(\Omega)$

Σύνοψη Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier (2/3)

Ιδιότητα	Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
Αλλαγή κλίμακας χρόνου	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{\Omega}{a}\right)$
Ανάκλαση	$x(-t)$	$X(-\Omega)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(\Omega)\delta(\Omega)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\Omega X(\Omega)$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$tx(t)$	$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$	$X(\Omega) \in R$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$	$X(\Omega) \in I$

Σύνοψη Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier (3/3)

Ιδιότητα	Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
Άρτιο μέρος σήματος Πραγματικό μέρος φάσματος	$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x^*(-t)]$	$Re\{X(\Omega)\}$
Περιττό μέρος σήματος Φανταστικό μέρος φάσματος	$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x^*(-t)]$	$jIm\{X(\Omega)\}$
Συζυγία στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-\Omega)$
Συζυγία στη συχνότητα	$x^*(-t)$	$X^*(\Omega)$
Συζυγής συμμετρία	$x^*(t)$	$X^*(-\Omega)$
Θεώρημα Parseval	$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert X(\Omega)\rvert^2 d\Omega$	

8. Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχηματισμών Fourier

Μετασχηματισμοί Fourier Βασικών Συναρτήσεων

Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
$\delta(t)$	$\mathbf{1}$
1	$2\pi\delta(\Omega)$
A	$2\pi A\delta(\Omega)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)$
$\lvert t\rvert$	$-\frac{2}{\Omega^2}$
$sgn(t)$	$\frac{2}{j\Omega}$
$A\,\delta(t\pm t_0)$	$A\,e^{\pm j\Omega t_0}$
$e^{\pm j\Omega_0 t}$	$2\pi\delta(\Omega\mp\Omega_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta(\Omega-k\Omega_0)$

Μετασχηματισμοί Fourier Βασικών Συναρτήσεων

Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
$cos(\Omega_0 t)$	$\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)]$
$sin(\Omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\,[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)]$
$cos(\Omega_0 t)\,u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)]+\frac{j\Omega}{\Omega_0^2-\Omega^2}$
$sin(\Omega_0 t)\,u(t)$	$\frac{\pi}{2j}\,[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)]+\frac{\Omega}{\Omega_0^2-\Omega^2}$
$e^{-at}cos(\Omega_0 t)u(t), \qquad Re(a)>0$	$\frac{\alpha+j\Omega}{(\alpha+j\Omega)^2+\Omega_0^2}$
$e^{-at}sin(\Omega_0 t)u(t), \qquad Re(a)>0$	$\frac{\Omega_0}{(\alpha+j\Omega)^2+\Omega_0^2}$
$\Pi_{T/2}(t)\equiv rect\left(\frac{t}{T}\right)=\begin{cases}1, & \lvert t\rvert<T/2\\ 0, & \lvert t\rvert>T/2\end{cases}$	$T\,sinc\left(\frac{\Omega T}{2\pi}\right)$

Μετασχηματισμοί Fourier Βασικών Συναρτήσεων

Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
$\frac{B}{2\pi} sinc\left(\frac{Bt}{2\pi}\right)$	$\Pi_{B/2}(t) \equiv rect\left(\frac{\Omega}{B}\right)$
$\Lambda_T(t) = tri\left(\frac{t}{T}\right)$	$T sinc^2\left(\frac{\Omega T}{2\pi}\right)$
$\frac{B}{2\pi} sinc^2\left(\frac{Bt}{2\pi}\right)$	$\Lambda_B(\Omega) = tri\left(\frac{\Omega}{B}\right)$
$e^{-at}u(t), \qquad Re(a) > 0$	$\frac{1}{\alpha + j\Omega}$
$e^{-at}u(-t), \qquad Re(a) > 0$	$\frac{1}{\alpha - j\Omega}$
$te^{-at}u(t), \qquad Re(a) > 0$	$\frac{1}{(\alpha + j\Omega)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}u(t), \qquad Re(a) > 0$	$\frac{1}{(\alpha + j\Omega)^n}$
$e^{-a\|t\|}u(t), \qquad Re(a) > 0$	$\frac{2a}{\alpha^2 + \Omega^2}$