Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 7: Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace – Ο αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενα Διάλεξης

1. Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace
2. Συμμετρίες του μετασχηματισμού Laplace
3. Θεωρήματα Συνέλιξης στο Χρόνο και στη Συχνότητα
4. Θεωρήματα Αρχικής και Τελικής Τιμής
5. Υπολογισμός αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace
   - Μέθοδος αναπτύγματος σε απλά κλάσματα
   - Μέθοδος Heaviside
   - Όροι με εκθετική καθυστέρηση

1. Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace

1. Γραμμικότητα
2. Μετατόπιση στο Χρόνο
3. Μετατόπιση στη Μιγαδική Συχνότητα
4. Κλιμάκωση στο Χρόνο και στη Μιγαδική Συχνότητα
5. Μιγαδική Συζυγία
6. Παραγώγιση
7. Ολοκλήρωση
8. Παραγώγιση στη Μιγαδική Συχνότητα
9. Ολοκλήρωση στη Μιγαδική Συχνότητα

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace (1/6)

1. Γραμμικότητα

Εάν $x_1(t) \xrightarrow{L} X_1(s)$ με περιοχή σύγκλισης (ΠΣ) R_1 και $x_2(t) \xrightarrow{L} X_2(s)$ με ΠΣ R_2 τότε για κάθε α_1, α_2 ισχύει:

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \xrightarrow{L} a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s) \quad \text{με ΠΣ } R' = R_1 \cap R_2$$

2. Μετατόπιση στο Χρόνο

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R τότε για κάθε t_0 ισχύει:

$$x(t - t_0) \xrightarrow{L} e^{-st_0} X(s) \quad \text{με την ίδια ΠΣ } R' = R$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace (2/6)

3. Μετατόπιση στη Μιγαδική Συχνότητα

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R, τότε για κάθε s_0 ισχύει:

$$x(t)\, e^{s_0 t} \xrightarrow{L} X(s - s_0) \text{ με ΠΣ } \; R' = R + Re\{s_0\}$$

4. Κλιμάκωση στο Χρόνο και στη Μιγαδική Συχνότητα

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R, τότε για κάθε $b > 0$ ισχύει:

$$x(bt) \xrightarrow{L} \frac{1}{|b|} X\left(\frac{s}{b}\right) \text{ με ΠΣ } \; R' = R/b$$

Για $b = -1$ έχουμε αντιστροφή (ανάκλαση) το σήματος και ο μετασχηματισμός Laplace είναι:

$$x(-t) \xrightarrow{L} X(-s) \quad \text{ με ΠΣ } \; R' = -R$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace (3/6)

5. Μιγαδική Συζυγία

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R, τότε για τη συζυγή συνάρτηση $x^*(t)$ θα ισχύει:

$$x^*(t) \xrightarrow{L} X^*(s^*) \text{ με την ίδια ΠΣ } R$$

Από την ιδιότητα αυτή προκύπτει ότι ένα πραγματικό σήμα θα έχει
είτε πραγματικούς πόλους και μηδενικά είτε συζυγείς μιγαδικούς πόλους
και μηδενικά.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace (4/6)

6. Παραγώγιση

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R και το σήμα $x(t)$ είναι τμηματικά συνεχής συνάρτηση με τμηματικά συνεχή παράγωγο σε κάθε διάστημα $0 \leq t \leq T$, τότε:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{L} sX(s) - x(0^-) \text{ με την ίδια ΠΣ } R' = R$$

Για τη n-στη παράγωγο του σήματος $x(t)$ η ιδιότητα επεκτείνεται σε:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{L} s^n X(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \left.\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right|_{t=0^-} \quad \text{με την ίδια ΠΣ } R' = R$$

Όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, η ιδιότητα της παραγώγισης είναι ίδια για τον μονόπλευρο και τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό Laplace και συγκεκριμένα είναι:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{L} s^n X(s) \quad \text{με την ίδια ΠΣ } R' = R$$

Η εφαρμογή των ιδιοτήτων παραγώγισης και γραμμικότητας μετατρέπει μία διαφορική εξίσωση σε απλό πολυώνυμο, γεγονός που διευκολύνει την επίλυσή της.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace (5/6)

7. Ολοκλήρωση

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ τότε:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)\, d\tau \qquad \text{με ΠΣ } \; R' = R \cap \{Re\{s\} > 0\}$$

Όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, η ιδιότητα της ολοκλήρωσης είναι ίδια για τον μονόπλευρο και τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό Laplace.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace (6/6)

8. Παραγώγιση στη Μιγαδική Συχνότητα

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R, και το σήμα $x(t)$ είναι τμηματικά συνεχής συνάρτηση με τμηματικά συνεχή παράγωγο σε κάθε διάστημα $0 \leq t \leq T$, τότε:

$$-t\,x(t) \xrightarrow{L} \frac{dX(s)}{ds} \qquad \text{με ΠΣ } R' = R$$

Επεκτείνοντας σε πολλαπλή παράγωγο, έχουμε:

$$(-t)^n\,x(t) \xrightarrow{L} \frac{d^nX(s)}{ds^n} \qquad \text{με ΠΣ } R' = R$$

9. Ολοκλήρωση στη Μιγαδική Συχνότητα

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ τότε:

$$\frac{1}{t}x(t) \xrightarrow{L} \int_0^{\infty} X(u)du \qquad \text{με ΠΣ } R' = R$$

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί ο μετ. Laplace του σήματος $x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$.

<u>Απάντηση</u>: Γνωρίζουμε ότι ο LT του $e^{-at}\,u(t)$ είναι $1/(s+a)$ με περιοχή σύγκλισης $Re(s) > -a$. Επομένως για κάθε επιμέρους τμήμα του $x(t)$, ο LT είναι:

$$e^{-t}\,u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+1}, \qquad Re(s) > -1$$

και:

$$e^{-2t}\,u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+2}, \qquad Re(s) > -2$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της γραμμικότητας, έχουμε:

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+3}{s^2+3s+2}$$

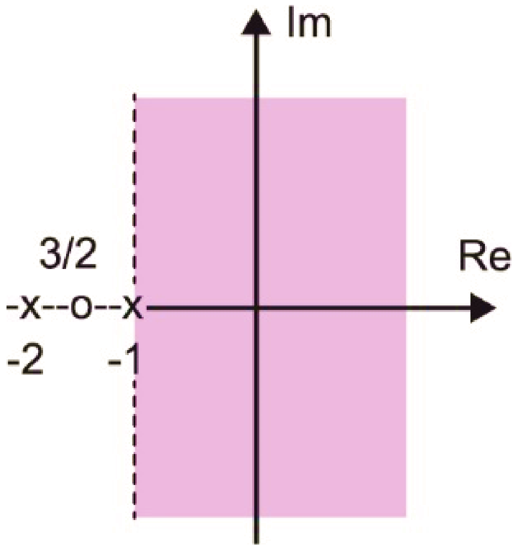
Περιοχή σύγκλισης είναι η τομή των περιοχών σύγκλισης, δηλ. $Re(s) > -1$.

Άσκηση 1 (συνέχεια)

Από την (κλασματική) μορφή του μετασχηματισμού Laplace, παρατηρούμε ότι υπάρχουν:

- ένα μηδενικό στη θέση $Re(s) = -3/2$
- δύο πόλοι στις θέσεις $Re(s) = -1$ και $Re(s) = -2$

Εφόσον οι πόλοι του μετασχηματισμού βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, το σύστημα είναι **ευσταθές**.



Άσκηση 2

Να υπολογιστεί ο ML του $x(t) = [1 - (1 - t)e^{-3t}]\, u(t)$

<u>Απάντηση</u>: Η δοθείσα συνάρτηση αναλύεται στο άθροισμα $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$, όπου:

$$x_1(t) = u(t)$$

$$x_2(t) = -e^{-3t}u(t)$$

$$x_3(t) = te^{-3t}u(t)$$

Οι μετασχηματισμοί Laplace των παραπάνω συναρτήσεων, είναι:

$$X_1(s) = \frac{1}{s}, \qquad Re(s) > 0$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+3}, \qquad Re(s) > -3$$

$$X_3(s) = \frac{1}{(s+3)^2}, \qquad Re(s) > -3$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας βρίσκουμε ότι ο LT, είναι:

$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+3} + \frac{1}{(s+3)^2} = \frac{4s+9}{s(s+3)^2}$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι η τομή των τριών επιμέρους περιοχών σύγκλισης, άρα $Re(s) > 0$.

Από τη λύση που βρήκαμε συμπεραίνουμε ότι η δοθείσα συνάρτηση $x(t)$ έχει:

- Ένα μηδενικό στη θέση $s = -9/4$
- Έναν απλό πόλο στη θέση $s = 0$
- Έναν διπλό πόλο στη θέση $s = -3$

Αφού οι πόλοι της συνάρτησης σήματος βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο (και στο μηδέν), συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση περιγράφει ένα **ευσταθές σύστημα**.

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t) = t\cos(\Omega t)$

Απάντηση: Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της παραγώγισης στη μιγαδική συχνότητα του ML, δηλαδή

$$-t\,x(t) \xrightarrow{L} \frac{dX(s)}{ds}$$

θα έχουμε:

$$L\{t\cos(\Omega t)\} = -\frac{d}{ds}\big\{L\{\cos(\Omega t)\}\big\}$$

Από τον πίνακα γνωστών LT διαπιστώνουμε ότι $cos(\Omega t) \xrightarrow{L} s/(s^2+\Omega^2)$ και επομένως θα έχουμε:

$$t\cos(\Omega t) \xrightarrow{L} -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+\Omega^2}\right) = \frac{s^2-\Omega^2}{(s^2+\Omega^2)^2}$$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta\,(t - nt_0)$$

<u>Απάντηση</u>: Από την ιδιότητα μετατόπισης στο χρόνο του μετασχηματισμού Laplace ισχύει:

$$x(t - nt_0) \xrightarrow{L} e^{-nst_0} X(s)$$

Γνωρίζουμε ότι $\delta(t) \xrightarrow{L} 1$ και περιοχή σύγκλισης όλο το μιγαδικό επίπεδο συχνοτήτων. Επομένως:

$$\delta(t - nt_0) \xrightarrow{L} e^{-st_0} X(s) = e^{-st_0}$$

και περιοχή σύγκλισης η ίδια, δηλαδή όλο το μιγαδικό επίπεδο.

Επειδή ο μετασχηματισμός Laplace είναι γραμμικός, ισχύει:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta\,(t - nt_0) \xrightarrow{L} 1 + e^{-st_0} + e^{-2st_0} + \cdots + e^{-nst_0} \Rightarrow X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nst_0}$$

2. Συμμετρίες του Μετασχηματισμού Laplace

Συμμετρίες του Μετασχηματισμού Laplace

1. Συμμετρία μεταξύ παραγώγισης και ολοκλήρωσης

2. Συμμετρία μεταξύ χρονικής και συχνοτικής μετατόπισης

3. Συμμετρία μεταξύ χρονικής συστολής/διαστολής και ανάκλασης

Συμμετρία μεταξύ παραγώγισης και ολοκλήρωσης

Για ένα αιτιατό σήμα $x(t)$ για το οποίο $x(0^-) = 0$ και ο μετ. Laplace είναι $x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(\mathrm{s})$, ισχύουν τα ακόλουθα ζεύγη:

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{L}{\longleftrightarrow} s\,X(\mathrm{s})$$

$$t\,x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} -\frac{dX(\mathrm{s})}{ds}$$

Παρατηρούμε ότι πολλαπλασιάζοντας επί s μια συνάρτηση $X(\mathrm{s})$ στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας, αυτό είναι ισοδύναμο με την εύρεση της πρώτης παραγώγου στο πεδίο του χρόνου, ενώ πολλαπλασιάζοντας τη συνάρτηση χρόνου $x(t)$ επί t αυτό είναι ισοδύναμο με την παραγώγιση του $-X(\mathrm{s})$.

Συμμετρία μεταξύ παραγώγισης και ολοκλήρωσης

Αντίστοιχα για την ολοκλήρωση, ισχύουν:

$$\int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{X(\mathrm{s})}{s}$$

$$\frac{x(t)}{t} \overset{L}{\longleftrightarrow} \int_{-\infty}^{-s} X(-\lambda)d\lambda$$

Επομένως, διαιρώντας δια s μια συνάρτηση $X(\mathrm{s})$ στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας, αυτό είναι ισοδύναμο με την ολοκλήρωση του σήματος στο πεδίο του χρόνου, ενώ διαιρώντας δια t τη συνάρτηση χρόνου $x(t)$ είναι ισοδύναμο με την ολοκλήρωση του $X(\mathrm{s})$.

Συμμετρία μεταξύ χρονικής και συχνοτικής μετατόπισης

Για ένα σήμα $x(t)$ για το οποίο $x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(\mathrm{s})$, ισχύουν τα ακόλουθα ζεύγη:

$$x(t-a)\,u(t-a) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(\mathrm{s})\,e^{-as}$$

$$x(t)\,e^{-at} \overset{L}{\longleftrightarrow} X(\mathrm{s}+\alpha)$$

Οι σχέσεις αυτές δείχνουν ότι η μετατόπιση στο ένα πεδίο (χρόνου ή συχνότητας) αντιστοιχεί με πολλαπλασιασμό στο άλλο πεδίο με έναν εκθετικό όρο και αντίστροφα.

Η συμμετρία αυτή είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace χωρίς τη χρήση του ορισμού του, η οποία (θυμίζουμε ότι) περιέχει ολοκλήρωμα.

Συμμετρία μεταξύ χρονικής συστολής/διαστολής και ανάκλασης

Για ένα σήμα $x(t)$ για το οποίο $x(t) \xleftrightarrow{L} X(\mathrm{s})$, ισχύουν τα ακόλουθα ζεύγη:

$$x(bt)\, u(t) \xleftrightarrow{L} \left(\frac{1}{|b|}\right) X\left(\frac{s}{b}\right)$$

$$\left(\frac{1}{|b|}\right)\, x\left(\frac{s}{b}\right)\, u(t) \xleftrightarrow{L} X(\alpha s)$$

Οι σχέσεις αυτές υποδεικνύουν την αντίστροφη σχέση ανάμεσα στα πεδία χρόνου και συχνότητας. Για παράδειγμα, συστολή στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε διαστολή στο πεδίο της συχνότητας και αντίστροφα. Ειδικά για $b = -1$ έχουμε τη σχέση:

$$x(-t)\, u(t) \xleftrightarrow{L} X(-s)$$

η οποία μεταφράζεται ότι αν το x(t) είναι ένα αντι-αιτιατό σήμα , ο μετασχηματισμός Laplace αυτού είναι ο Laplace του αιτιατού σήματος $x(-t)u(t)$,
με το s να αντικαθίσταται από το –s.

3. Θεωρήματα Συνέλιξης στο Χρόνο και στη Συχνότητα

Συνέλιξη στο Χρόνο

Εάν $x_1(t) \xrightarrow{L} \mathrm{X}_1(s)$ με ΠΣ R_1 και $x_2(t) \xrightarrow{L} \mathrm{X}_2(s)$ με ΠΣ R_2 τότε η συνέλιξη $x_1(t) * x_2(t)$ έχει μετασχηματισμό Laplace που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{L} \mathrm{X}_1(s)\, X_2(s) \qquad \text{με ΠΣ } R' = R_1 \cap R_2$$

Συνέλιξη στη Μιγαδική Συχνότητα

Εάν $x_1(t) \xrightarrow{L} \mathrm{X}_1(s)$ με ΠΣ R_1 και $x_2(t) \xrightarrow{L} \mathrm{X}_2(s)$ με ΠΣ R_2 τότε το γινόμενο $x_1(t)\ x_2(t)$ έχει μετασχηματισμό Laplace:

$$x_1(t)\ x_2(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{2\pi j} X_1(s) * X_2(s)$$

Αντίστροφα, μπορούμε να διατυπώσουμε την ιδιότητα:

$$X_1(s) * X_2(s) \xrightarrow{L^{-1}} 2\pi j\ [\ x_1(t)\ x_2(t)]$$

Άσκηση 5

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος που δίνεται από τη σχέση $y(t) = x(t-2) * g(3-t)$ όπου $x(t) = e^{-2t}u(t)$ και $g(t) = e^{-3t}u(t)$.

<u>Απάντηση</u>: Από την ιδιότητα της συνέλιξης του ΜL, έχουμε:

$$y(t) = x(t-2) * g(3-t) \Rightarrow L\{y(t)\} = L\{x(t-2)\}\, L\{g(3-t)\}$$

Είναι όμως:

$$X(s) = \frac{1}{s+2}, \qquad Re(s) > -2$$

$$G(s) = \frac{1}{s+3}, \qquad Re(s) > -3$$

Άρα:

$$Y(s) = L\{x(t-2)\}\, L\{g(3-t)\} = \frac{e^{-2s}}{s+2}\,\frac{e^{-3s}}{3-s} =$$

$$= -\frac{e^{-5s}}{(s+2)(s-4)}, \qquad -2 < Re(\text{s}) < 4$$

4. Θεωρήματα Αρχικής και Τελικής τιμής

Θεωρήματα Αρχικής και Τελικής Τιμής

Όταν ζητείται να υπολογιστεί η τιμή του σήματος $x(t)$ για τις περιπτώσεις $t \to 0^+$ και $t \to \infty$ χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής.

Θεώρημα Αρχικής Τιμής

Έστω το αιτιατό σήμα $x(t)$, το οποίο δεν περιέχει κρουστικές συναρτήσεις στο $t = 0$, με LT τη συνάρτηση $X(s)$ και περιοχή σύγκλισης $Re\{s\} > s_0$. Τότε ισχύει:

$$\lim_{s \to \infty} s\, X(s) = \lim_{t \to 0^+} x(t) = x(0)$$

Θεώρημα Τελική Τιμής

Έστω το αιτιατό σήμα $x(t)$ το οποίο έχει πεπερασμένη τιμή στο όριο $t \to \infty$, τότε ισχύει:

$$\lim_{s \to 0} s\, X(s) = \lim_{t \to \infty} x(t) = x(\infty)$$

Άσκηση 6

Να υπολογιστεί η τιμή του σήματος $x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-3t}sin(2t)\, u(t)$ στη θέση $t = 0$.

<u>Απάντηση</u>: Από την ιδιότητα της γραμμικότητας και τον Πίνακα 3.1, έχουμε:

$$e^{-t}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+1}, \qquad Re(s) > -1$$

$$e^{-3t}sin(2t)\, u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{2}{(s+3)^2 + 2^2}, \qquad Re(s) > -3$$

Άρα:

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+3)^2 + 2^2} = \frac{s^2 + 5s + 15}{s^3 + 4s^2 + 16s + 13}, \qquad Re(s) > -1$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα τελικής τιμής και κάνοντας χρήση (τρεις φορές) του θεωρήματος De l' Hospital έχουμε:

$$x(0^-) = \lim_{s\to\infty} s\, X(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^3 + 5s^2 + 15s}{s^3 + 4s^2 + 16s + 13} =$$
$$= \lim_{s\to\infty} \frac{3s^2 + 10s + 15}{3s^2 + 8s + 16} = \lim_{s\to\infty} \frac{6s + 10}{6s + 8} = \frac{6}{6} = 1$$

Η απάντηση συμβαδίζει με την τιμή του $x(t)$ για $t = 0$ από τη σχέση ορισμού του $x(t)$.

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων	Περιοχή Σύγκλισης
Αμφίπλευρος Μετασχηματισμός Laplace			
Γραμμικότητα	$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$	$a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s)$	υποσύνολο του $R_x \cap R_y$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0} X(s)$	R_x
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	Μετατοπισμένη R_x
Συνέλιξη	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)\, X_2(s)$	υποσύνολο του $R_x \cap R_y$
Συζυγία στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x
Αλλαγή κλίμακας χρόνου	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|} X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένη R_x
Ανάκλαση	$x(-t)$	$X(-s)$	$-R_x$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	υποσύνολο του $R_x \cap \{Re(s) > 0\}$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	υποσύνολο του R_x
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	υποσύνολο του R_x
Παραγώγιση στη συχνότητα	$-t\, x(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	R_x
Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Laplace			
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s} X(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau$	υποσύνολο του $R_x \cap \{Re(s) > 0\}$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$	υποσύνολο του R_x

5. Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Ο αντίστροφος LT χρησιμοποιείται για να «επιστρέψουμε» από το πεδίο της μιγαδικής συχνότητας s στο πεδίο του χρόνου t. Συμβολικά εκφράζεται από:

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$$

Η μαθηματική έκφραση που τον περιγράφει είναι:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\, e^{st}\, dt$$

- Το παραπάνω επικαμπύλιο ολοκλήρωμα υπολογίζεται κατά μήκος μίας ευθείας $Re\{s\} = c$ που είναι παράλληλη προς τον φανταστικό άξονα του μιγαδικού επιπέδου.

- Αποδεικνύεται ότι η σύγκλιση του ολοκληρώματος του αντίστροφου LT εξασφαλίζεται όταν η παραπάνω ευθεία περικλείει όλους τους πόλους του μετασχηματισμού, δηλαδή όταν η πραγματική τιμή της σταθεράς c είναι μεγαλύτερη από το πραγματικό μέρος όλων των πόλων της συνάρτησης $X(s)$.

Τρόποι Υπολογισμού Αντίστροφου LT

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι υπολογισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace όπως:

1) Η μέθοδος της **μιγαδικής ολοκλήρωσης**, που βασίζεται στην επίλυση του επικαμπύλιου ολοκληρώματος στο μιγαδικό επίπεδο κατά μήκος ενός κατάλληλα επιλεγμένου δρόμου.
2) Η μέθοδος του **αναπτύγματος σε δυναμοσειρά**, που χρησιμοποιείται όταν ο μετασχηματισμός Laplace μπορεί να γραφεί ως δυναμοσειρά άπειρων όρων.
3) Η μέθοδος του **αναπτύγματος σε απλά κλάσματα**, που αποτελεί την πλέον διαδεδομένη μέθοδο υπολογισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace και η οποία θα παρουσιαστεί αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.
4) Με χρήση του **θεωρήματος Heaviside**.

Μέθοδος αναπτύγματος σε απλά κλάσματα

Μέθοδος αναπτύγματος σε απλά κλάσματα (1/7)

Η μέθοδος βρίσκει εφαρμογή σε μετασχηματισμούς που μπορούν να γραφούν σε **ρητή μορφή**, δηλαδή ως $X(s) = B(s)/A(s)$.

Στηρίζεται στην ιδιότητα της γραμμικότητας του LT και στη γραφή της συνάρτησης X(s) ως έναν γραμμικό συνδυασμό στοιχειωδών LT:

$$X(s) = \alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s) + \cdots + \alpha_N\, X_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n X_n(s)$$

Οι συναρτήσεις $X_n(s), n = 1,2 \dots N$ θεωρούνται ως οι LT στοιχειωδών συναρτήσεων της μορφής $x_n(t), n = 1,2 \dots n$, οι οποίοι είναι πιθανό ότι αντιστοιχούν σε απλούς γνωστούς LT.

Αν υπολογίσουμε τις συναρτήσεις $X_n(s)$, μπορούμε να βρούμε τα $x_n(t)$ και ακολούθως το σήμα $x(t)$ από την παρακάτω σχέση:

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \cdots + \alpha_N\, x_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n(t)$$

Μέθοδος αναπτύγματος σε απλά κλάσματα (2/7)

Πολλές φορές ο ML ενός σήματος συναντάται στη μορφή ρητής συνάρτησης:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_M S^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$\alpha_n, b_m \in R$, άρα το σύστημα είναι ΓΧΑ με πραγματική κρουστική απόκριση.

Για να είναι το σύστημα πραγματοποιήσιμο πρέπει η συνάρτηση $X(s)$ να είναι εκφρασμένη σε κανονική μορφή, δηλαδή να ισχύει $M \leq N$, όπου M είναι ο βαθμός του αριθμητή $B(s)$ και N είναι ο βαθμός του παρονομαστή $A(s)$. Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός Laplace δεν περιέχει όρους της μορφής s, s^2, κλπ, άρα η συνάρτηση χρόνου δεν περιέχει κρουστικές ή ασυνεχείς συναρτήσεις.

Αν $M > N$, τότε πρέπει να κάνουμε πρώτα διαίρεση μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή (long-division) και κατόπιν να εφαρμόσουμε τη μέθοδο. Στην περίπτωση αυτή (δηλαδή αν $M > N$) η συνάρτηση $X(s)$ γράφεται πρώτα στη μορφή:

$$X(s) = g_0 + g_1 s \ldots + g_k s^k + \frac{B(s)}{A(s)}$$

Μέθοδος αναπτύγματος σε απλά κλάσματα (3/7)

Αν λ_n είναι οι ρίζες της συνάρτηση $A(s)$, αυτή γράφεται ως:

$$\mathrm{A}(s) = \prod_{n=1}^{N}(s - \lambda_n)$$

Ανάλογα με τη φύση των ριζών του $A(s)$, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) Ρίζες διακριτές και πραγματικές

2) Ρίζες πολλαπλές και πραγματικές

3) Ρίζες μιγαδικές

Μέθοδος αναπτύγματος σε απλά κλάσματα (4/7)

(1) Ρίζες διακριτές και πραγματικές

Η συνάρτηση $X(s)$ γράφεται ως:

$$\mathrm{X}(s) = \frac{C_1}{s-\lambda_1} + \cdots + \frac{C_N}{s-\lambda_N}$$

Οι συντελεστές $C_1, \dots, C_N$ υπολογίζονται από τον τύπο:

$$C_n = \lim_{s \to \lambda_n} (s-\lambda_n)\, X(s)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace υπολογίζεται με τη χρήση του πίνακα γνωστών LT και των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού, οπότε το $x(t)$ είναι:

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = \left[C_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_N e^{\lambda_N t}\right] u(t)$$

Μέθοδος αναπτύγματος σε απλά κλάσματα (5/7)

(2) Ρίζες πολλαπλές και πραγματικές

Έστω ότι η λ_1 εμφανίζεται με πολλαπλότητα r και οι υπόλοιπες ρίζες είναι μοναδικές. Ο παρανομαστής παραγοντοποιείται ως:

$$\mathrm{A}(s) = (s-\lambda_1)^r \prod_{i=r+1}^{N} (s-\lambda_i)$$

και η συνάρτηση $X(s)$ γράφεται ως:

$$X(s) = \frac{C_1}{s-\lambda_1} + \frac{C_2}{(s-\lambda_1)^2} + \cdots + \frac{C_r}{(s-\lambda_1)^r} + \frac{C_{r+1}}{s-\lambda_{r+1}} + \cdots + \frac{C_N}{s-\lambda_N}$$

Οι συντελεστές $C_i, i = 1, \ldots r$ που αντιστοιχούν στην πολλαπλή ρίζα είναι:

$$C_i = \lim_{s\to\lambda_i} \frac{1}{(r-i)!} \frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}} [(s-\lambda_1)^r \, X(s)], \qquad i = 1, \ldots, r$$

Μέθοδος αναπτύγματος σε απλά κλάσματα (6/7)

Οι υπόλοιποι συντελεστές $C_i, \quad i = r + 1, \ldots, n$, υπολογίζονται όπως στην προηγούμενη περίπτωση (1).

Τέλος, έχοντας υπολογίζει όλους τους συντελεστές $C_i, i = 1, \ldots n$ βρίσκουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace από τη σχέση:

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$$

$$= \left[C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{\lambda_1 t} + C_{r+1} e^{\lambda_{r+1} t} + \cdots + C_N e^{\lambda_N t} \right] u(t)$$

Μέθοδος αναπτύγματος σε απλά κλάσματα (7/7)

(3) Ρίζες μιγαδικές

Αν το πολυώνυμο $A(s)$ έχει ένα ζεύγος μιγαδικών συζυγών ριζών, τις $\lambda_1 = \sigma + j\Omega$ και $\lambda_2 = \lambda_1^* = \sigma - j\Omega$, η συνάρτηση $X(s)$ γράφεται ως:

$$\mathrm{X}(s) = \frac{C_1}{s-\lambda_1} + \frac{C_1}{s-\lambda_1^*} + \cdots + \frac{C_N}{s-\lambda_N}$$

Οι συντελεστές $C_1, \ldots, C_N$ υπολογίζονται από τον τύπο:

$$C_n = \lim_{s \to \lambda_n} (s-\lambda_n)\, X(s)$$

Οι συντελεστές C_1 και C_2 θα είναι μιγαδικοί συζυγείς, δηλ. $C_2 = C_1^*$ και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = \left[C_1 e^{\lambda_1 t} + C_1^*\, e^{\lambda_1^*\, t} + \cdots + \sum_{i=3}^{N} C_i e^{\lambda_i t} \right] u(t)$$

Η ύπαρξη συζυγών μιγαδικών ριζών στον μετασχηματισμό Laplace ενός σήματος αντιστοιχεί στην ύπαρξη ημιτονοειδών όρων στο σήμα.

Άσκηση 7

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:

$$X(s) = \frac{3s+7}{s^2+4s+3}$$

Θεωρήστε πεδίο σύγκλισης: (α) $\sigma < -3$ και (β) $\sigma > -1$

<u>Απάντηση</u>: Παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή ως:

$$s^2+4s+3 = (s+1)(s+3)$$

Επομένως η συνάρτηση $X(s)$ γράφεται:

$$X(s) = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+3}$$

Υπολογίζουμε τις σταθερές C_1 και C_2:

$$C_1 = \lim_{s\to -1}[(s+1)X(s)] = \lim_{s\to -1}\frac{3s+7}{s+3} = 2$$

$$C_2 = \lim_{s\to -3}[(s+3)\,X(s)] = \lim_{s\to -3}\frac{3s+7}{s+1} = 1$$

Άσκηση 7 (συνέχεια)

Επομένως:

$$X(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+3}$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι το άθροισμα των αντίστροφων μετασχηματισμών κάθε επιμέρους κλάσματος.

Στο σημείο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την πληροφορία της περιοχής σύγκλισης, αφού αυτή μας διατίθεται:

(α) Για περιοχή σύγκλισης $\sigma < -3$ το σήμα είναι αριστερής πλευράς και δεδομένου ότι οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = -3$, η περιοχή σύγκλισης μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$R_x = \{\sigma < -3\} = \{\sigma < -1\} \cap \{\sigma < -3\}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι το άθροισμα των αντίστροφων μετασχηματισμών κάθε επιμέρους κλάσματος και καθώς και οι δύο επιμέρους περιοχές σύγκλισης είναι αριστερής πλευράς, προκύπτει:

$$x(t) = -2e^{-t}u(-t) - e^{-3t}u(-t) = -[2e^{-t}+e^{-3t}]\, u(-t)$$

Άσκηση 7 (συνέχεια)

(β) Για περιοχή σύγκλισης $\sigma > -1$ το σήμα είναι δεξιάς πλευράς και δεδομένης της θέσης των πόλων η περιοχή σύγκλισης γράφεται:

$$R_x = \{\sigma > -1\} = \{\sigma > -1\} \cap \{\sigma > -3\}$$

Καθώς και οι δύο επιμέρους περιοχές σύγκλισης είναι δεξιάς πλευράς, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace στην περίπτωση αυτή είναι:

$$x(t) = 2e^{-t}u(t) + e^{-3t}u(t) = [2e^{-t}+e^{-3t}]\, u(t)$$

Παρατηρούμε ότι η πληροφορία της περιοχής σύγκλισης είναι απαραίτητη για να καθορίσουμε αν οι επιμέρους συνιστώσες του σήματος είναι αριστερής ή δεξιάς πλευράς.

Άσκηση 7 (συνέχεια)

Για να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα αξιοποιούμε το θεώρημα αρχικής τιμής:

$$\lim_{s\to\infty} s\,X(s) = x(0^+)$$

Ας δοκιμάσουμε για την περίπτωση (β). Το αριστερό μέλος είναι:

$$\lim_{s\to\infty} s\,X(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{3s^2+7s}{s^2+4s+3} = \lim_{s\to\infty} \frac{3+7/s}{1+4/s+3/s^2} = 3$$

και το δεξί μέλος είναι:

$$x(0^+) = [2e^{-t}+e^{-3t}]\,u(t) = 3$$

Επομένως, το αποτέλεσμα είναι ορθό.

Άσκηση 7 (συνέχεια)

Εναλλακτικοί τρόποι υπολογισμού των συντελεστών C_1 και C_2:

(α) Υπολογίζουμε το $X(s)$ για δύο διαφορετικές τιμές του s, π.χ. $s = 0$ και $s = 1$:

$$s = 0 \qquad X(0) = C_1 + \frac{1}{3} C_2$$

$$s = 1 \qquad X(1) = \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{4} C_2$$

Αποκτούμε έτσι ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους C_1 και C_2. Εφαρμόζουμε την μέθοδο Cramer και βρίσκουμε $C_1 = 2$ και $C_2 = 1$.

Άσκηση 7 (συνέχεια)

(β) Κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα και βρίσκουμε:

$$X(s) = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+3} = \frac{s(C_1 + C_2) + 3C_1 + C_2}{s^2 + 4s + 3} \equiv \frac{3s + 7}{s^2 + 4s + 3}$$

Εφόσον τα τελευταία δύο κλάσματα είναι ίσα και έχουν τον ίδιο παρονομαστή, συμπεραίνουμε ότι και οι αριθμητές είναι μεταξύ τους ίσοι, δηλαδή:

$$s(C_1 + C_2) + 3C_1 + C_2 = 3s + 7$$

Επομένως ισχύει $C_1 + C_2 = 3$ και $C_2 = 1$.

Άσκηση 8

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:

$$X(s) = \frac{s}{(s+1)^3\,(s+2)}$$

<u>Απάντηση</u>: Ο παρανομαστής έχει μία πραγματική τριπλή ρίζα την $\lambda_1 = -1$ και μία απλή, την $\lambda_2 = -2$. Έτσι, η συνάρτηση $X(s)$ μπορεί να γραφεί ως:

$$X(s) = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{(s+1)^2} + \frac{C_3}{(s+1)^3} + \frac{C_4}{s+2}$$

Υπολογίζουμε τις σταθερές C_1, C_2, C_3 και C_4:

$$C_1 = \lim_{s\to-1} \frac{1}{(3-1)!}\,\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 X(s)\right] = \lim_{s\to-1} \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{s}{s+2}\right] = -2$$

Άσκηση 8 (συνέχεια)

$$C_2 = \lim_{s\to -1} \frac{1}{(3-2)!} \frac{d}{ds}[(s+1)^3 X(s)] = 2$$

$$C_3 = \lim_{s\to -1}[(s+1)^3 X(s)] = -1$$

$$C_4 = \lim_{s\to -2}[(s+2)\, X(s)] = 2$$

Επομένως:

$$X(s) = -\frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{2}{s+2}$$

Επειδή η περιοχή σύγκλισης είναι δεξιάς πλευράς και γράφεται:

$$R_x = \{\sigma > -1\} = \{\sigma > -2\} \cap \{\sigma > -1\}$$

προκύπτει ότι όλες οι συνιστώσες του σήματος είναι δεξιάς πλευράς.
Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι το άθροισμα των αντίστροφων μετασχηματισμών κάθε επιμέρους κλάσματος, δηλ. είναι:

$$x(t) = [-2e^{-t} + 2\, t\, e^{-t} - \frac{t^2}{2} e^{-t} + 2e^{-2t}]\, u(t)$$

Άσκηση 8 (συνέχεια)

Επαλήθευση επίλυσης με το θεώρημα αρχικής τιμής:

$$\lim_{s\to\infty} s\,X(s) = x(0^+)$$

Το αριστερό μέλος είναι:

$$\lim_{s\to\infty} s\,X(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{s^4 + 5s^3 + 9s^2 + 7s + 2}$$
$$= \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s^2 + 5s + 9 + 7/s + 2/s^2} = 0$$

και το δεξί μέλος είναι:

$$x(0^+) = \lim_{t\to 0^+} [-2e^{-t} + 2\,t\,e^{-t} - \frac{t^2}{2} e^{-t} + 2e^{-2t}]\,u(t) = 0$$

Επομένως, η επίλυση είναι ορθή.

Άσκηση 9

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση $h(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς:

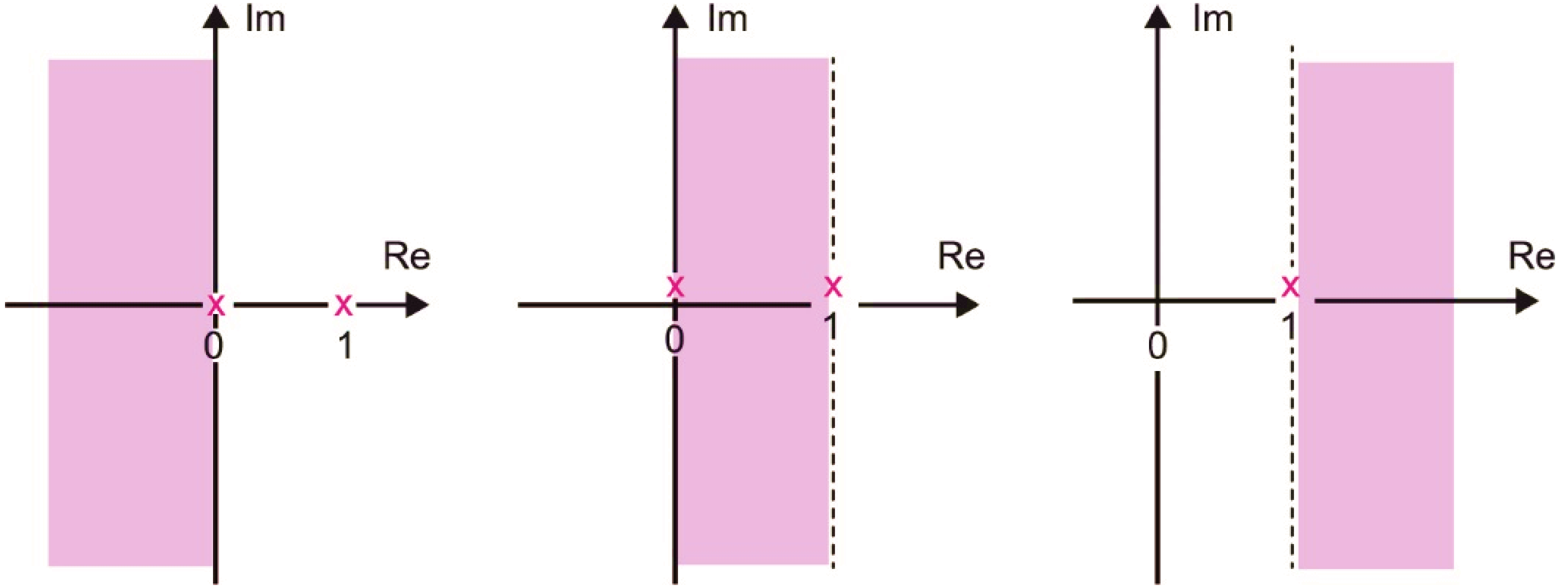
$$H(s) = \frac{1}{s^2(s-1)}$$

Απάντηση: Η $h(t)$ προκύπτει με αντίστροφο ML στην $H(s)$. Γράφουμε την $H(s)$ σε μορφή αθροίσματος ρητών συναρτήσεων:

$$H(s) = \frac{1}{s^2(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}$$

Διαπιστώνουμε ότι η $H(s)$ έχει έναν διπλό πόλο στο $s = 0$ και έναν απλό πόλο στο $s = 1$. Επειδή δεν μας έχει δοθεί μία συγκεκριμένη περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού θα αξιοποιήσουμε την πληροφορία των πόλων, οι οποίοι διαιρούν το μιγαδικό επίπεδο σε τρείς πιθανές περιοχές σύγκλισης, τις: (α) $s < 0$, (β) $0 < s < 1$ και (γ) $s > 1$, οι οποίες απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα.

Άσκηση 9 (συνέχεια)



(α) $Re(s) < 0$ (β) $0 < Re(s) < 1$ (γ) $Re(s) > 1$

Οι πιθανές περιοχές σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$: (α) οριακά ευσταθές, (β) και (γ) αιτιατό σύστημα.

Άσκηση 9 (συνέχεια)

(α) Για $s < 0$ όλοι οι όροι είναι αριστερής πλευράς (left-sided), άρα:

$$h(t) = -e^t u(-t) + u(-t) + t\, u(-t)$$

(β) Για $0 < s < 1$, ο εκθετικός όρος είναι αριστερής πλευράς (left-sided), και οι υπόλοιποι είναι δεξιάς πλευράς (right-sided), άρα:

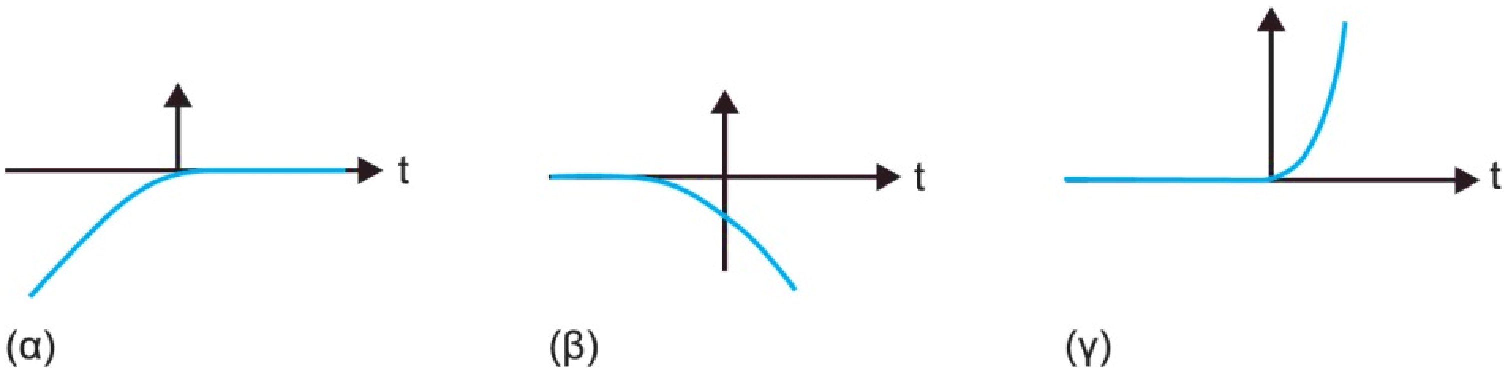
$$h(t) = -e^t u(-t) - u(t) - t\, u(t)$$

(γ) Για $s > 1$ όλοι οι όροι είναι δεξιάς πλευράς (right-sided), άρα:

$$h(t) = e^t u(t) - u(t) - t\, u(t)$$

Άσκηση 9 (συνέχεια)

Απεικονίζουμε τις παραπάνω περιπτώσεις κρουστικής απόκρισης στα σχήματα (α), (β) και (γ).



Παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι ευσταθές μόνο στην περίπτωση (α).

Μέθοδος Heaviside

Μέθοδος Heaviside

Αν ο μετασχηματισμός Laplace είναι εκφρασμένος σε ρητή μορφή:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

και ο βαθμός N του πολυωνύμου $A(s)$ είναι μεγαλύτερος $(N > M)$ από τον βαθμό M του πολυωνύμου $B(s)$ και το πολυώνυμο $A(s)$ διαθέτει N διακριτές ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$, αποδεικνύεται ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{B(\lambda_n)}{A'(\lambda_n)} e^{\lambda_n t}$$

Άσκηση 10

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:

$$X(s) = \frac{s-3}{s^2+4s+3}$$

με περιοχή σύγκλισης $\sigma > -1$.

Απάντηση: Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο $A(s)$ του παρονομαστή και βρίσκουμε τις ρίζες $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = -3$.

Η παράγωγος του παρονομαστή είναι $A'(s) = 2s + 4$. Από το θεώρημα Heaviside βρίσκουμε:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{2} \frac{B(\lambda_i)}{A'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t} = \frac{B(-1)}{A'(-1)} e^{-t} + \frac{B(-3)}{A'(-3)} e^{-3t} = -2e^{-t} + 3e^{-3t}$$

Από την περιοχή σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι το σήμα είναι δεξιάς πλευράς. Άρα τελικά:

$$x(t) = [-2e^{-t} + 3e^{-3t}]u(t)$$

Όροι με Εκθετική Καθυστέρηση

Όροι με Εκθετική Καθυστέρηση

Η μεθοδολογία επίλυσης των περιπτώσεων που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια βασίζονται στην ιδιότητα μετατόπισης στο χρόνο του μετασχηματισμού Laplace, η οποία αναφέρει ότι εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(\mathrm{s})$ με ΠΣ R τότε για κάθε t_0 ισχύει:

$$x(t-t_0) \xrightarrow{L} e^{-st_0}X(s) \quad \text{με την ίδια ΠΣ } R' = R$$

(α) Εκθετικά στον αριθμητή: Αν ο μετασχηματισμός Laplace περιέχει στον αριθμητή όρους $e^{\alpha s}$ τότε μετατρέπουμε τη ρητή συνάρτηση στην παρακάτω μορφή:

$$X(s) = \frac{B(s)(1-e^{\alpha s})}{A(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} - e^{\alpha s}\frac{B(s)}{A(s)}$$

και εφαρμόζουμε την μέθοδο απλών κλασμάτων ή Heaviside για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace $x_1(t)$ του πρώτου κλάσματος. Ο μετασχηματισμός Laplace του δεύτερου κλάσματος, με βάση την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο θα είναι $x_2(t) = x_1(t-a)$. Λόγω γραμμικότητας, ο συνολικός αντίστροφος μετασχηματισμός της συνάρτησης $X(s)$ θα είναι $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

Όροι με Εκθετική Καθυστέρηση

(β) Εκθετικά στον παρονομαστή: Χρησιμοποιούμε τις άπειρες σειρές:

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{a_i} = \frac{1}{1-e^{a}} \quad \text{και} \quad \sum_{i=0}^{\infty} (-e^{-as})^{i} = \frac{1}{1+e^{-as}}$$

και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Δοθέντος του μετασχηματισμού:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)(1-e^{as})} = \frac{B(s)}{A(s)} + \frac{B(s)e^{-as}}{A(s)} + \frac{B(s)e^{-2as}}{A(s)} + \cdots$$

αν $f(t)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός του $B(s)/A(s)$, τότε:

$$x(t) = f(t) + f(t-\alpha) + f(t-2\alpha) + \cdots$$

(β) Δοθέντος του μετασχηματισμού:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)(1+e^{as})} = \frac{B(s)}{A(s)} - \frac{B(s)e^{-as}}{A(s)} + \frac{B(s)e^{-2as}}{A(s)} + \cdots$$

αν $f(t)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός του $B(s)/A(s)$, τότε:

$$x(t) = f(t) - f(t-\alpha) + f(t-2\alpha) + \cdots$$

Άσκηση 11

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:

$$X(s) = \frac{1 - e^{2s}}{s^2 + 2s + 2}$$

με περιοχή σύγκλισης $\sigma > -1$.

<u>Απάντηση</u>: Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο $A(s)$ του παρονομαστή και βρίσκουμε τις ρίζες $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = -2$. Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση $X(s)$ ως εξής:

$$X(s) = \frac{1 - e^{2s}}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} - \frac{e^{2s}}{(s+1)(s+2)}$$

Από την περιοχή σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι το σήμα είναι δεξιάς πλευράς. Άρα το πρώτο κλάσμα έχει αντίστροφο Laplace:

$$x_1(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$$

Το δεύτερο κλάσμα έχει αντίστροφο Laplace:

$$x_2(t) = x_1(t-2) = \left[e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}\right]u(t-2)$$

Επομένως, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $X(s)$ είναι:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t) + \left[e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}\right]u(t-2)$$