Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 5: Μέθοδοι Υπολογισμού του Συνελικτικού Ολοκληρώματος

Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Αναλυτικός υπολογισμός του συνελικτικού ολοκληρώματος
- Γραφικός υπολογισμός του συνελικτικού ολοκληρώματος
- Συνελίξεις γνωστών σημάτων συνεχούς χρόνου
- Βηματική απόκριση συστήματος
- Απόκριση συστήματος σε εκθετική μιγαδική είσοδο
- Συνδεσμολογίες ΓΧΑ συστημάτων

1. Αναλυτικός Υπολογισμός του Συνελικτικού Ολοκληρώματος

Αναλυτικός Υπολογισμός

- Ο αναλυτικός υπολογισμός χρησιμοποιείται όταν οι συναρτήσεις $x(t)$ και $h(t)$ μπορούν να παρασταθούν από απλές αναλυτικές εκφράσεις.

- Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται όταν οι συναρτήσεις $x(t)$ και $h(t)$ είναι ασυνεχείς ή διαθέτουν διαφορετική αναλυτική παράσταση για διάφορα διαστήματα χρόνου.

- Αν δοθούν δύο συναρτήσεις $x(\tau)$ και $h(t-\tau)$ που ορίζονται αντίστοιχα στα διαστήματα $\{L_1, U_1\}$ και $\{L_2, U_2\}$, εκλέγουμε σαν κάτω όριο ολοκλήρωσης το $max(L_1, L_2)$ και σαν άνω όριο ολοκλήρωσης το $max(U_1, U_2)$.

- Τα όρια L_1 και U_1 της συνάρτησης $x(\tau)$ δεν μεταβάλλονται, ενώ αντίθετα τα όρια της συνάρτησης $h(t-\tau)$ μεταβάλλονται καθώς μεταβάλλεται το t.

- Η γραφική απεικόνιση των συναρτήσεων βοηθά στην εύρεση των σωστών ορίων ολοκλήρωσης.

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος **μέσης τιμής**:

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

<u>Απάντηση</u>: Η κρουστική απόκριση του συστήματος μέσης τιμής $h(t)$ είναι ίση με την έξοδο του συστήματος όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί η συνάρτηση $\delta(t)$, δηλαδή:

$$h(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} du(\tau) = \frac{1}{T} u(t)\Big|_{t-T}^{t} = \frac{1}{T}[u(t) - u(t-T)]$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι:

$$\delta(\tau) = \frac{du(\tau)}{d\tau}$$

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκρισή του συστήματος που ονομάζεται **ολοκληρωτής** και περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου:

$$y(t) = \boldsymbol{S}[\, x(t)] = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

<u>Απάντηση</u>:

Η κρουστική απόκρισή του ολοκληρωτή είναι ίση με την έξοδό του όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί η συνάρτηση $\delta(t)$ και ισχύει:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = u(t)$$

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 8\frac{dy(t)}{dt} + 15y(t) = 15x(t) - 2\frac{dx(t)}{dt}$$

<u>Απάντηση</u>: Επειδή η τάξη N του αριστερού μέλους (έξοδος και παράγωγοι της εξόδου) είναι μεγαλύτερη από την τάξη M του δεξιού μέλους (είσοδος και παράγωγοι της εισόδου), προκύπτει ότι η κρουστική απόκριση αποτελείται μόνο από εκθετικούς όρους, δηλαδή δεν περιέχει τη συνάρτηση Δέλτα ή/και παραγώγους αυτής.

Θεωρώντας ότι το σύστημα είναι σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας και θέτοντας στην είσοδο τη συνάρτηση Δέλτα, δηλ. $x(t) = \delta(t)$, η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} + 8\frac{dh(t)}{dt} + 15h(t) = 15\delta(t) - 2\frac{d\delta(t)}{dt}$$

Η ομογενής εξίσωση είναι:

$$\frac{d^2h_o(t)}{dt^2} + 8\frac{dh_o(t)}{dt} + 15h_o(t) = 0$$

και οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$h_o(0^+) = 0 \text{ και } \frac{dh_o(0^+)}{dt} = \frac{1}{\alpha_2} = 1$$

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\lambda^2 + 8\lambda + 15 = (\lambda + 3)(\lambda + 5) = 0$$

Οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι $\lambda_1 = -3$ και $\lambda_2 = -5$ και η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι:

$$h_o(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-5t}, \qquad \text{για } t > 0$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές c_1, c_2 από τις αρχικές συνθήκες και έχουμε:

$$h_o(0^+) = c_1 e^{-3.0} + c_2 e^{-5.0} = c_1 + c_2 = 0$$

$$\frac{dh_o(0^+)}{dt} = \left(-3c_1 e^{-3t} - 5c_2 e^{-5t}\right)\Big|_{t=0} = -3c_1 - 5c_2 = \frac{1}{\alpha_N} = 1$$

Επιλύουμε το σύστημα εξισώσεων και βρίσκουμε: $c_1 = 1/2,\ \ c_2 = -1/2$.
Επομένως, η ομογενής λύση της κρουστικής απόκρισης είναι:

$$h_o(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-3t} - e^{-5t}\right) u(t)$$

Όπου α_N είναι ο συντελεστής του όρου μέγιστης τάξης της διαφορικής εξίσωσης.

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Η συνολική κρουστική απόκριση είναι:

$$h(t) = 15h_o(t) - 2\frac{dh_o(t)}{dt}$$

Για διευκόλυνση των πράξεων θα υπολογίσουμε χωριστά την παράγωγο $dh_o(t)/dt$. Είναι:

$$\frac{dh_o(t)}{dt} = \left[\frac{1}{2}(e^{-3t} - e^{-5t})\,u(t)\right]' = \frac{1}{2}[(e^{-3t} - e^{-5t})'u(t) + (e^{-3t} - e^{-5t})u'(t)]$$
$$= \frac{1}{2}[(-3e^{-3t} + 5e^{-5t})\,u(t) + (e^{-3t} - e^{-5t})\delta(t)] = \frac{1}{2}(-3e^{-3t} + 5e^{-5t})\,u(t)$$

Επομένως, η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(t) = 15h_o(t) - 2\frac{dh_o(t)}{dt} = \frac{15}{2}(e^{-3t} - e^{-5t})\,u(t) - 2\frac{1}{2}(-3e^{-3t} + 5e^{-5t})\,u(t)$$
$$= \frac{1}{2}(21e^{-3t} - 25e^{-5t})\,u(t)$$

Αξιοποιήσαμε την ιδιότητα $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(0)$ και ότι ισχύει $\delta(t) = du(t)/dt$.

2. Γραφικός Υπολογισμός του Συνελικτικού Ολοκληρώματος

Γραφικός Υπολογισμός

Για να υπολογίσουμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με τη βοήθεια της συνέλιξης $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- **Ανάκλαση της $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\tau})$**. Αντιστρέφουμε την κρουστική απόκριση $h(\tau)$ και παράγουμε την $h(-\tau)$.
- **Χρονική μετατόπιση της $\boldsymbol{h}(-\boldsymbol{\tau})$ κατά $\boldsymbol{t}$**. Μετατοπίζουμε την $h(-\tau)$ κατά t και έτσι προσδιορίζουμε την $h(t-\tau)$.
- **Πολλαπλασιασμός της $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{\tau})$ με την είσοδο $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\tau})$** ώστε να υπολογίσουμε το γινόμενο $x(\tau)\, h(t-\tau)$.
- **Ολοκλήρωση** ή Εμβαδομέτρηση. Ολοκληρώνουμε το γινόμενο αυτό (ή υπολογίζουμε το εμβαδό του σήματος που δημιουργείται από τη γραφική παράσταση του γινομένου και του άξονα του χρόνου). Το αποτέλεσμα είναι ίσο με την έξοδο του συστήματος $y(t)$ κατά τη χρονική στιγμή t, δηλ. κατά την ποσότητα της μετατόπισης στο βήμα 2.
- **Επανάληψη**. Τα βήματα αυτά επαναλαμβάνονται για τις διάφορες τιμές του χρόνου t, δηλ. $-\infty < t < +\infty$.

Γραφικός Υπολογισμός

Λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας της συνέλιξης, η σχέση:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

μπορεί να γραφεί:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

Επομένως, στην επαναληπτική διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω οι συναρτήσεις $x(t)$ και $h(t)$ μπορούν να αλλάξουν θέση αμοιβαία.

Στάδια Γραφικού Υπολογισμού

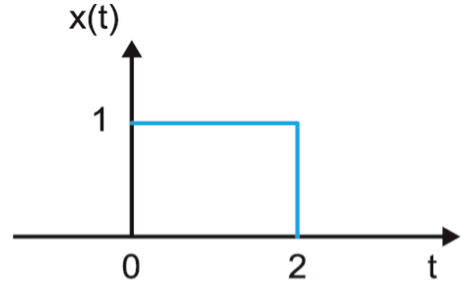
Στη γραφική μέθοδο υπολογισμού της συνέλιξης, διακρίνουμε 4 στάδια κατά τα οποία ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας $x(t)$ διέρχεται από ένα σύστημα με κρουστική απόκριση πεπερασμένης διάρκειας $h(t)$. Είναι:

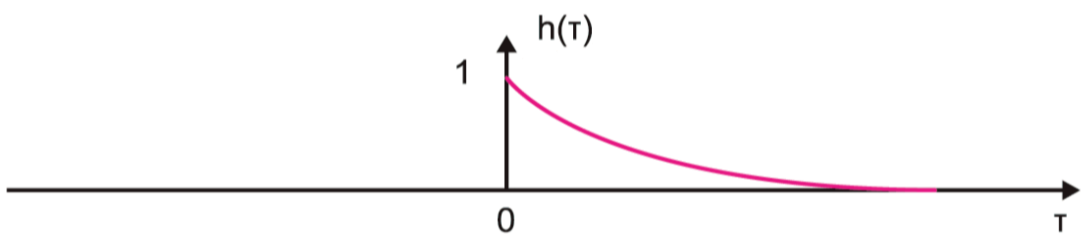
- **Στάδιο μηδενικής επικάλυψης**: Είναι τα διαστήματα χρόνου στα οποία δεν υπάρχει επικάλυψη μεταξύ των σημάτων. Ως εκ τούτου το γινόμενο των σημάτων είναι μηδέν, άρα το αποτέλεσμα είναι μηδενικό.
- **Στάδιο εισόδου**: το σήμα εισόδου $x(t)$ εισέρχεται αρχικά στο γράφημα της ανάκλασης $h(-t)$ της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Ο υπολογισμός του συνελικτικού ολοκληρώματος στο διάστημα αυτό δίνει μια συνάρτηση η οποία περιγράφει την έξοδο του συστήματος $y(t)$ για όλα τα t που βρίσκονται στο διάστημα αυτό.
- **Στάδιο πλήρους επικάλυψης**: το σήμα $x(t)$ ολισθαίνει καθώς βρίσκεται ολόκληρο μέσα στο γράφημα της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ του συστήματος. Ομοίως με το προηγούμενο στάδιο ο υπολογισμός του συνελικτικού ολοκληρώματος θα δώσει μια συνάρτηση που περιγράφει την έξοδο $y(t)$ του συστήματος για το διάστημα αυτό.
- **Στάδιο εξόδου:** Ομοίως υπολογίζουμε το συνελικτικό ολοκλήρωμα για το διάστημα στο οποίο το σήμα $x(t)$ εξέρχεται από το γράφημα της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ του συστήματος μέχρι τη χρονική στιγμή που δεν υπάρχει καθόλου επικάλυψη.

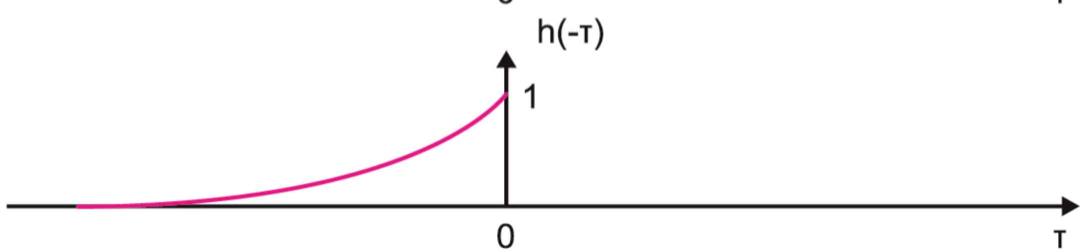
Άσκηση 4

Η κρουστική απόκριση ενός συστήματος δίνεται από τη σχέση: $h(t) = e^{-t}u(t)$. Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος, όταν η είσοδός του είναι το σήμα $x(t) = u(t) - u(t-2)$.

Απάντηση: Σχεδιάζουμε τα σήματα $x(t), h(\tau), h(-\tau)$.

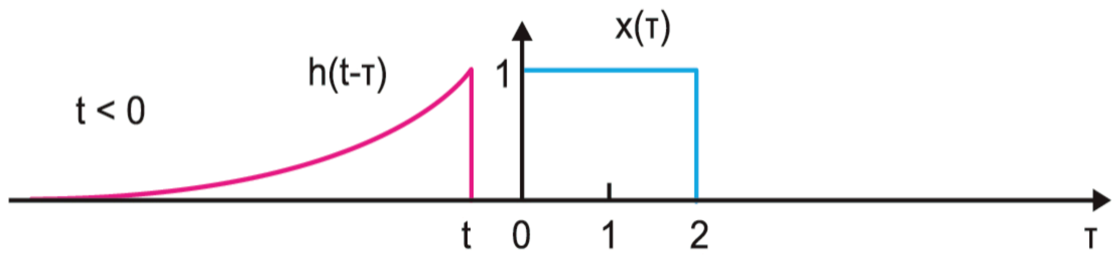






Άσκηση 4 (συνέχεια)

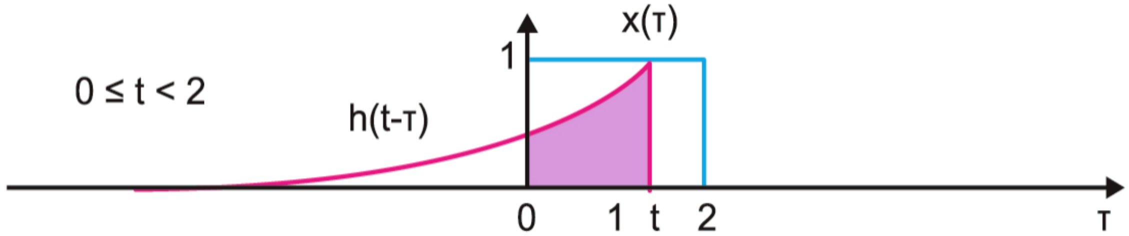
Σχεδιάζουμε τα σήματα $x(\tau)$ και $h(-\tau)$ για $t < 0$.



Παρατηρούμε ότι ισχύει $h(t-\tau)\,x(\tau) = 0$ για κάθε $t < 0$. Επομένως, η έξοδος του συστήματος είναι: $\boldsymbol{y(t) = 0}$ όταν $t < 0$.

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Η κατοπτρική μορφή της αντεστραμμένης κρουστικής απόκρισης $h(t-\tau)$, η οποία έχει μετατοπιστεί κατά $0 \leq t \leq 2$, δείχνεται στο σχήμα:



Η έξοδος του συστήματος είναι:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)dt$$

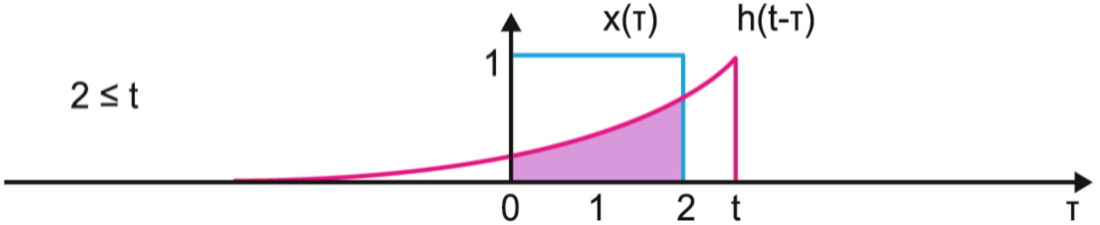
και επειδή, όταν $\tau < 0$ είναι $x(\tau) = 0$, ενώ όταν $\tau > t$ είναι $h(t-\tau) = 0$, τα όρια του ολοκληρώματος γίνονται:

$$y(t) = \int_{0}^{t} h(t-\tau)dt = \int_{0}^{t} 1.\, e^{-(t-\tau)}d\tau = e^{\tau - t}\Big|_{0}^{t} = \mathbf{1} - \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{t}}, \qquad 0 \leq t \leq 2$$

που είναι ίσο με το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου σχήματος.

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Όταν $t > 2$, με τη βοήθεια του σχήματος:



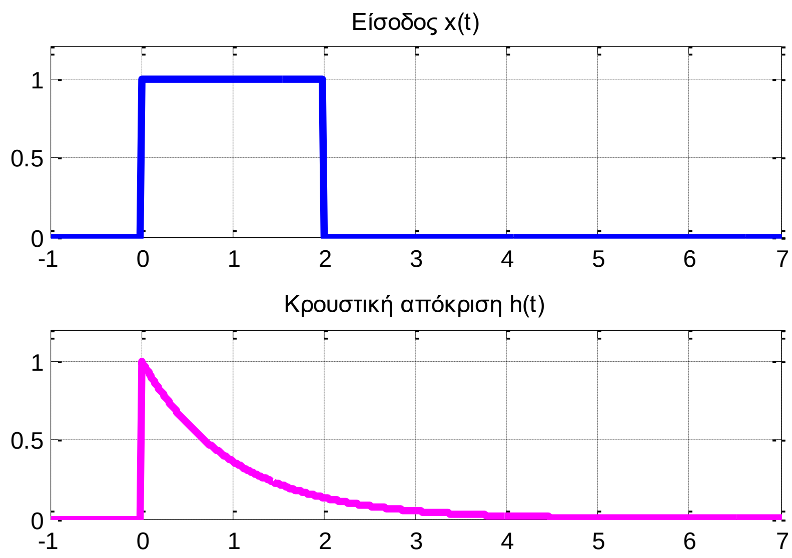
βρίσκουμε:

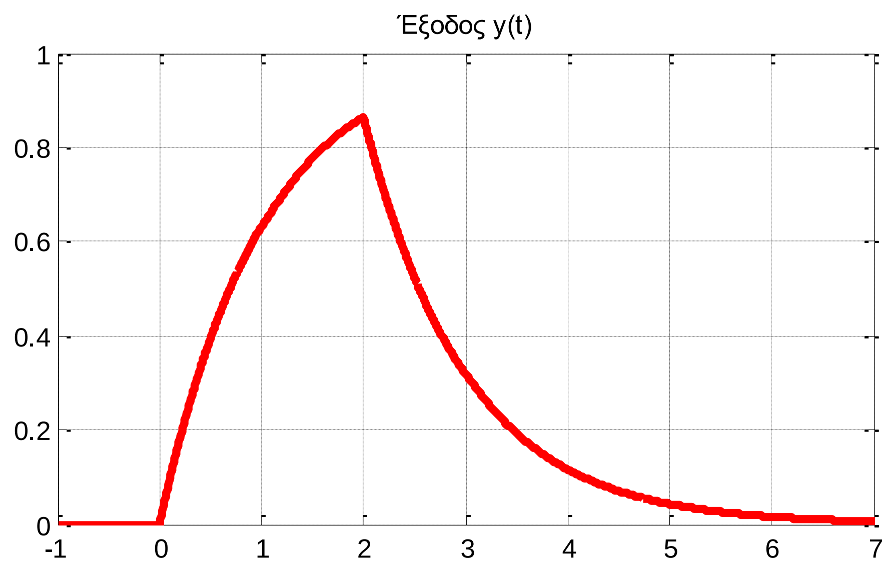
$$y(t) = \int_0^2 1.\, e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{\tau - t}\Big|_0^2 = e^{2-t} - e^{-t} = \boldsymbol{\left(e^2 - 1\right)e^{-t}}, \qquad t \geq 2$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Επομένως, η έξοδος $y(t)$ του συστήματος είναι:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-t}, & 0 \le t < 2 \\ (e^2 - 1)e^{-t}, & t \ge 2 \end{cases}$$





Άσκηση 5

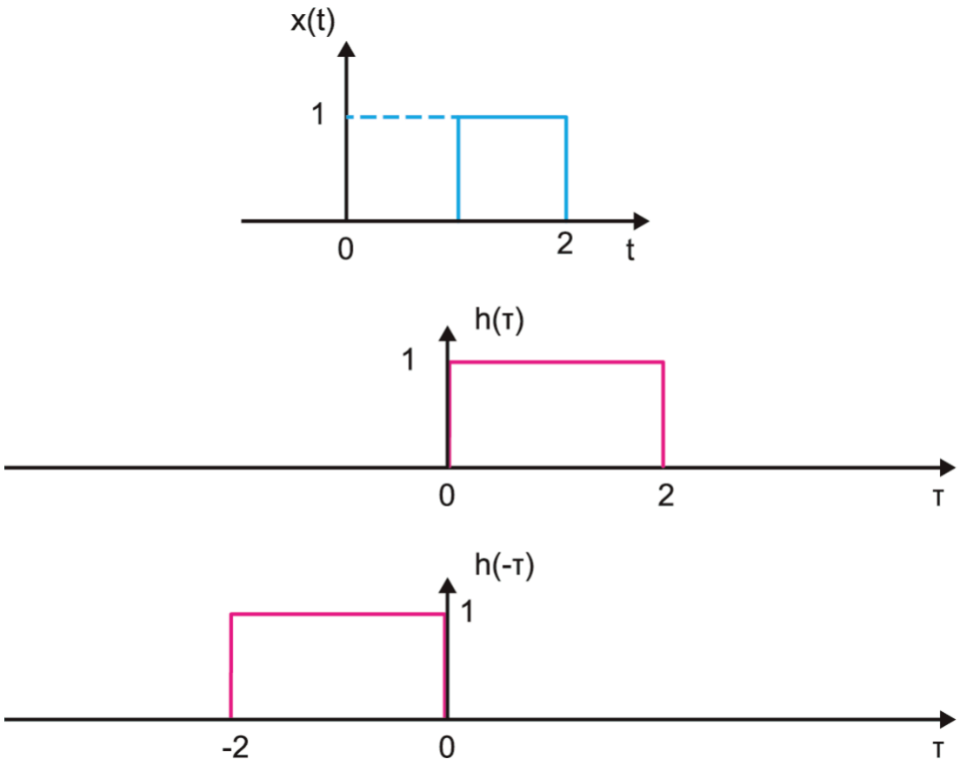
Η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι $h(t) = u(t) - u(t-2)$. Με τη βοήθεια του ολοκληρώματος της συνέλιξης να υπολογίσετε την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι $x(t) = u(t-1) - u(t-2)$.

<u>Απάντηση</u>: Ακολουθώντας ίδια διαδικασία επίλυσης με την προηγούμενη άσκηση, προσδιορίζεται η έξοδος του συστήματος, η οποία είναι:

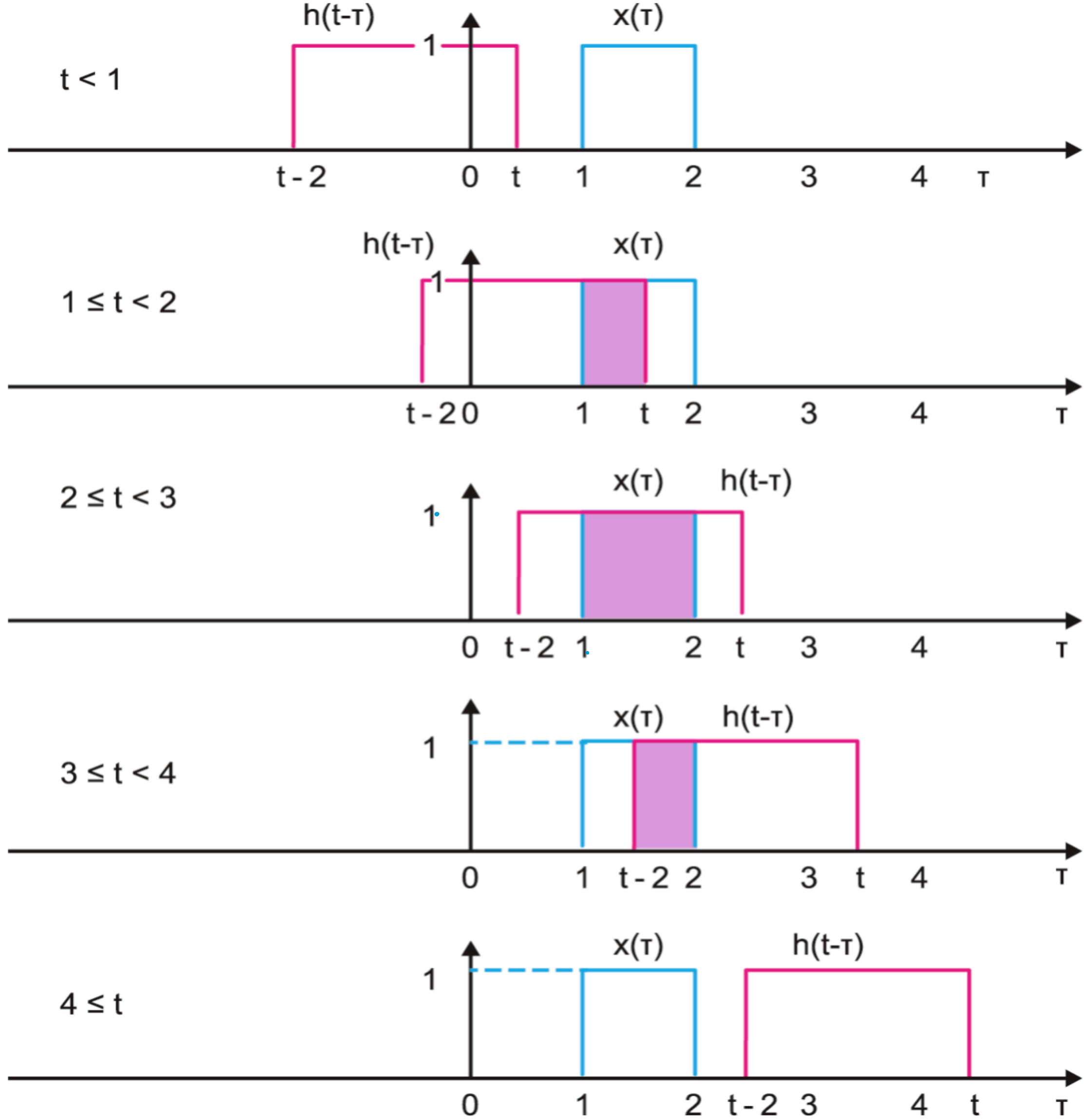
$$y(t) = \begin{cases} t-1 & \text{όταν } 1 \leq t < 2 \\ 1 & \text{όταν } 2 \leq t < 3 \\ 4-t & \text{όταν } 3 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

- Σχεδιάζουμε τα σήματα $x(t), h(\tau), h(-\tau)$.



Άσκηση 5 (συνέχεια)

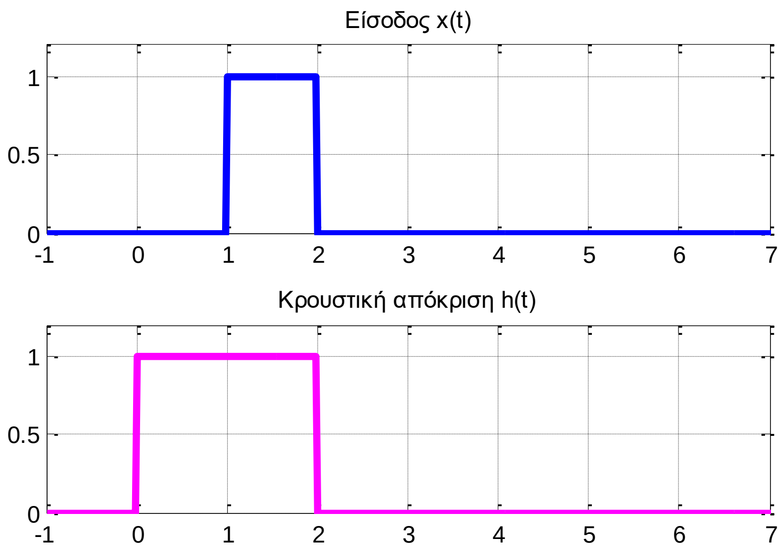


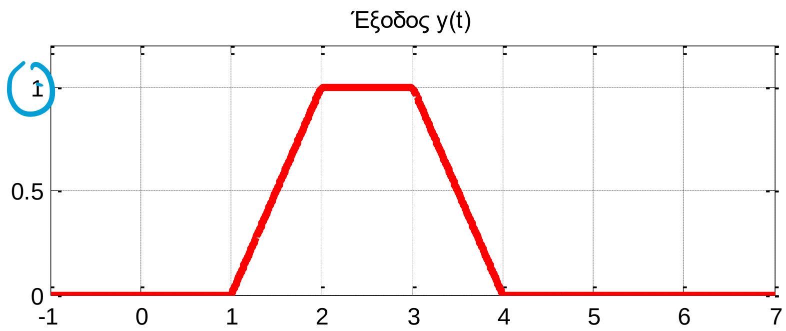
Άσκηση 5 (συνέχεια)

Η γραφική παράσταση των σημάτων εισόδου $x(t) = u(t-1) - u(t-2)$, κρουστικής απόκρισης $h(t) = u(t) - u(t-2)$ και εξόδου $y(t)$, όπου:

$$y(t) = \begin{cases} t-1 & \text{όταν } 1 \leq t < 2 \\ 1 & \text{όταν } 2 \leq t < 3 \\ 4-t & \text{όταν } 3 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

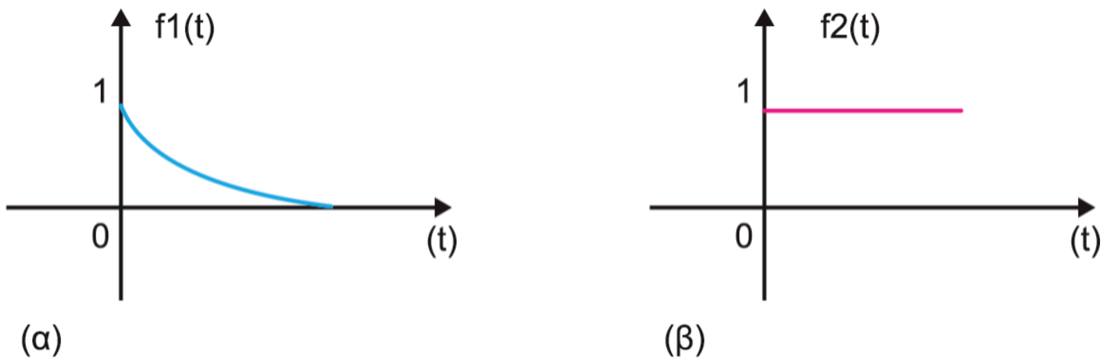
είναι:





Άσκηση 6

Χρησιμοποιώντας τη γραφική μέθοδο να υπολογισθεί το συνελικτικό ολοκλήρωμα $g(t)$ των συναρτήσεων $f_1(t)$ και $f_2(t)$, που δείχνονται στο σχήματα (α) και (β).

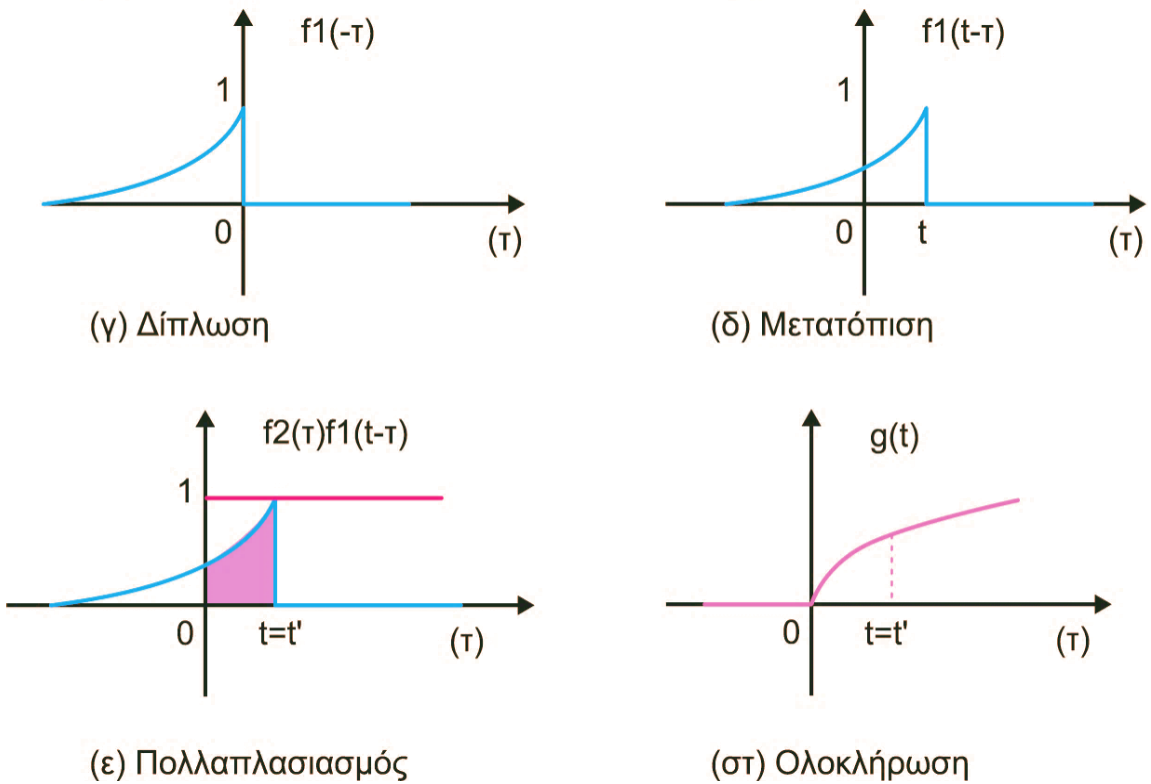


<u>Απάντηση</u>:

Η διαδικασία υπολογισμού με τη γραφική μέθοδο δείχνεται στα σχήματα (γ) έως (στ) (επόμενη διαφάνεια) και το αποτέλεσμα είναι:

$$g(t) = \ 1 - e^{-t}$$

Άσκηση 6 (συνέχεια)



Με τον αναλυτικό τρόπο υπολογισμού του συνελικτικού ολοκληρώματος, έχουμε:

$$g(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) f_1(t-\tau) dt = \int_0^t 1\, e^{-(t-\tau)} dt =$$

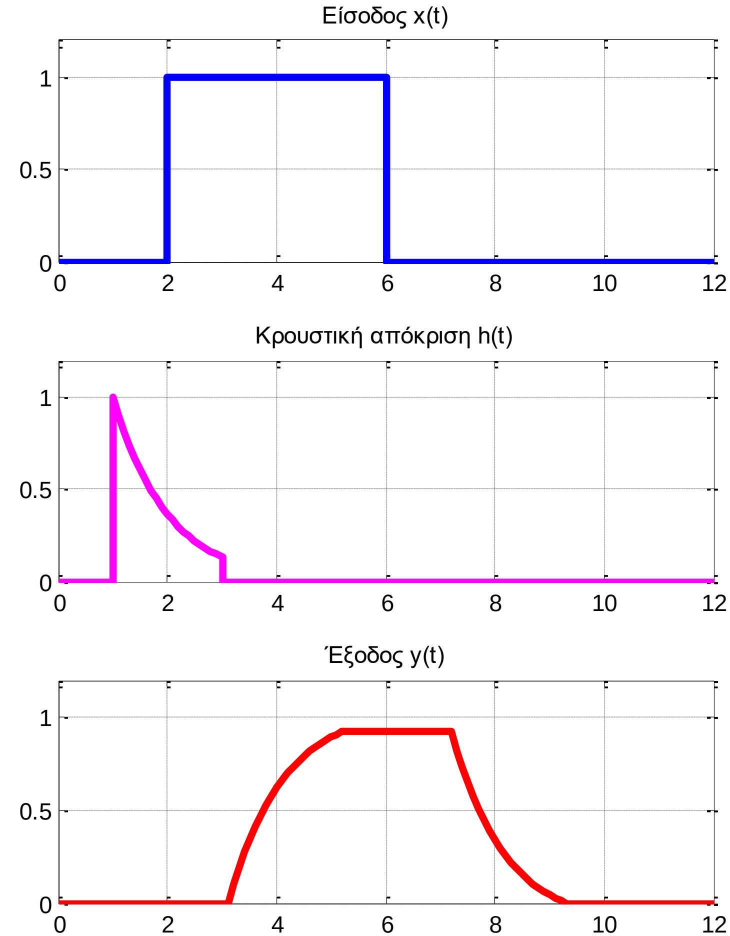
$$e^{-t}\left(\left[e^{\tau}\right]_0^t\right) = e^{-t}\left[e^t - 1\right] = 1 - e^{-t}$$

Άσκηση 7

Να υπολογιστεί στο Matlab η συνέλιξη των σημάτων $x(t) = u(t-2) - u(t-6)$ και $h(t) = e^{-(t-1)}[u(t-1) - u(t-3)]$.

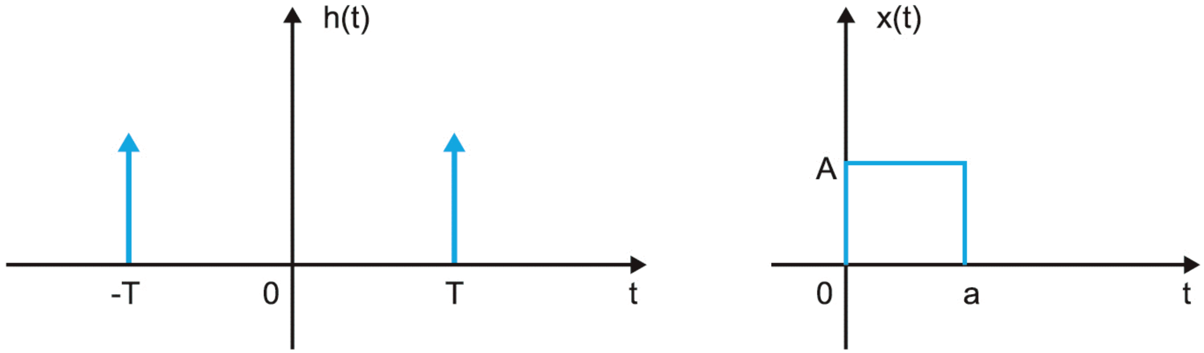
<u>Απάντηση</u>:

```
Step = 0.1;
% Δημιουργία σηματων h(t) και x(t)
th = 1 : Step : 3;
h = exp(-1*(th0-1)) .* ones(1,length(th0));
tx = 2 : Step : 6;
x = ones(1, length(tx0));
% Υπολογισμός συνέλιξης
y = conv(x, h) .* Step;
% Καθορισμός κλίμακας χρόνου της εξόδου
ty = min(tx) + min(th) : Step : max(tx) + max(th);
% Σχεδιασμός αποτελέσματος (συνέλιξης)
subplot(311); plot(tx,x, 'b', 'lineWidth',3);
grid on; title('Είσοδος x(t)');
subplot(312); plot(th,h, 'm', 'lineWidth',3);
grid on; title('Κρουστική απόκριση h(t)');
subplot(313); plot(ty,y, 'r', 'lineWidth',3);
grid on; title('Έξοδος y(t)');
```



Άσκηση 8

Να βρεθεί η συνέλιξη των συναρτήσεων του σχήματος:



<u>Απάντηση</u>: Από το σχήμα προκύπτει ότι η συνάρτηση $h(t)$ γράφεται ως $h(t) = \delta(t-T) + \delta(t+T)$. Άρα η συνέλιξη των δύο σημάτων είναι:

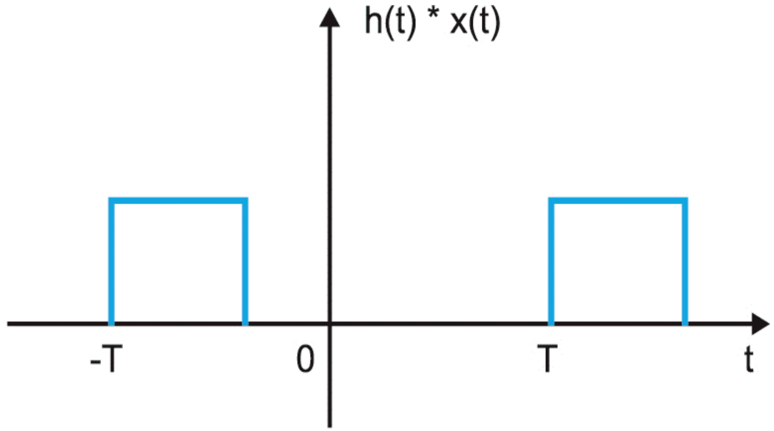
$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(\tau - T) + \delta(\tau + T)]\, x(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - T)\, x(t-\tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau + T)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$$= x(t-T) + x(t+T)$$

Άσκηση 8 (συνέχεια)

Το αποτέλεσμα, δηλαδή η συνέλιξη των $x(t)$ και $h(t)$ δείχνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παρατηρούμε ότι με τη συνέλιξη οποιασδήποτε συνάρτησης και κρουστικής συνάρτησης $\delta(t)$, επανασχηματίζεται η αρχική συνάρτηση, η θέση της όμως καθορίζεται από την τετμημένη της κρουστικής συνάρτησης.

Συνελίξεις γνωστών σημάτων συνεχούς χρόνου

$x(t)$	$y(t)$	$z(t) = x(t) * y(t)$
$e^{at}\, u(t)$	$e^{\beta t}\, u(t)$	$\dfrac{e^{at} - e^{\beta t}}{a - \beta} u(t), \qquad a \neq \beta$
$t\, e^{at}\, u(t)$	$e^{\beta t}\, u(t)$	$\dfrac{e^{\beta t} - e^{at} + (a - \beta) t e^{at}}{(a - \beta)^2} u(t)$
$t^M\, e^{at}\, u(t)$	$t^N e^{at}\, u(t)$	$\dfrac{M!\, N!}{(N + M + 1)!}\, t^{M+N+1}\, e^{at}\, u(t)$
$t^M\, u(t)$	$t^N\, u(t)$	$\dfrac{M!\, N!}{(N + M + 1)!}\, t^{M+N+1}\, u(t)$
$t^N\, u(t)$	$e^{at}\, u(t)$	$\dfrac{N!\, e^{at}}{a^{N+1}} u(t) - \sum_{k=0}^{N} \dfrac{N!\, t^{N-k}}{a^{k+1}(N - k)!} u(t)$
$e^{at} u(t)$	$e^{\beta t} u(-t)$	$\dfrac{e^{at} u(t) + e^{\beta t} u(-t)}{\beta - \alpha}$
$e^{at} u(t)$	$e^{\beta t} u(-t)$	$\dfrac{e^{at} u(t) + e^{\beta t} u(-t)}{\beta - \alpha}$

3. Βηματική Απόκριση ΓΧΑ Συστήματος

Βηματική Απόκριση

- Βηματική απόκριση = Έξοδος για είσοδο την μοναδιαία βηματική συνάρτηση $u(t)$
- Η βηματική εκφράζει την ακαριαία εφαρμογή μιας σταθερής διέγερσης στην είσοδο του συστήματος.
- Με την εφαρμογή της εισόδου το σύστημα θα προσπαθήσει να μεταβάλλει την απόκρισή του, αλλά αυτό δεν μπορεί να γίνει ακαριαία.
- Υπολογίζουμε την βηματική απόκριση $s(t)$, από τη σχέση:

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) d\tau$$

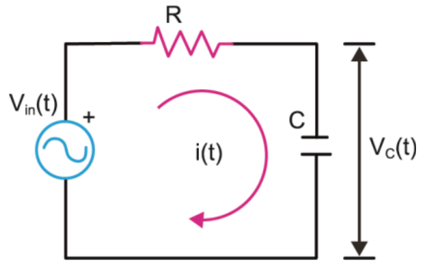
- Αν το σύστημα είναι αιτιατό τότε το κάτω όριο του ολοκληρώματος είναι το μηδέν.
- Επομένως, η βηματική απόκριση είναι το ολοκλήρωμα της κρουστικής απόκρισης.
- Η πρώτη παράγωγος της βηματικής απόκρισης δίνει την κρουστική απόκριση:

$$\frac{ds(t)}{dt} = h(t)$$

- Από τις σχέσεις μπορούμε να υπολογίζουμε τη βηματική απόκριση ως προς την κρουστική απόκριση και αντίστροφα.

Άσκηση 9

Δίνεται το ΓΧΑ RC κύκλωμα με $R = 10\Omega$ και $C = 1F$. Να υπολογιστεί η βηματική απόκριση του συστήματος έξοδος, δηλαδή η τάση στα άκρα του πυκνωτή $v_c(t)$, θεωρώντας ως είσοδο την τάση της πηγής $v_{in}(t)$. Θεωρήστε $v_c(0) = 0$.



Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα είναι:

$$RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_{in}(t)$$

και η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}\,u(t)$$

Με εφαρμογή των τιμών $R = 10\Omega$ και $C = 1F$ προκύπτει η κρουστική απόκριση:

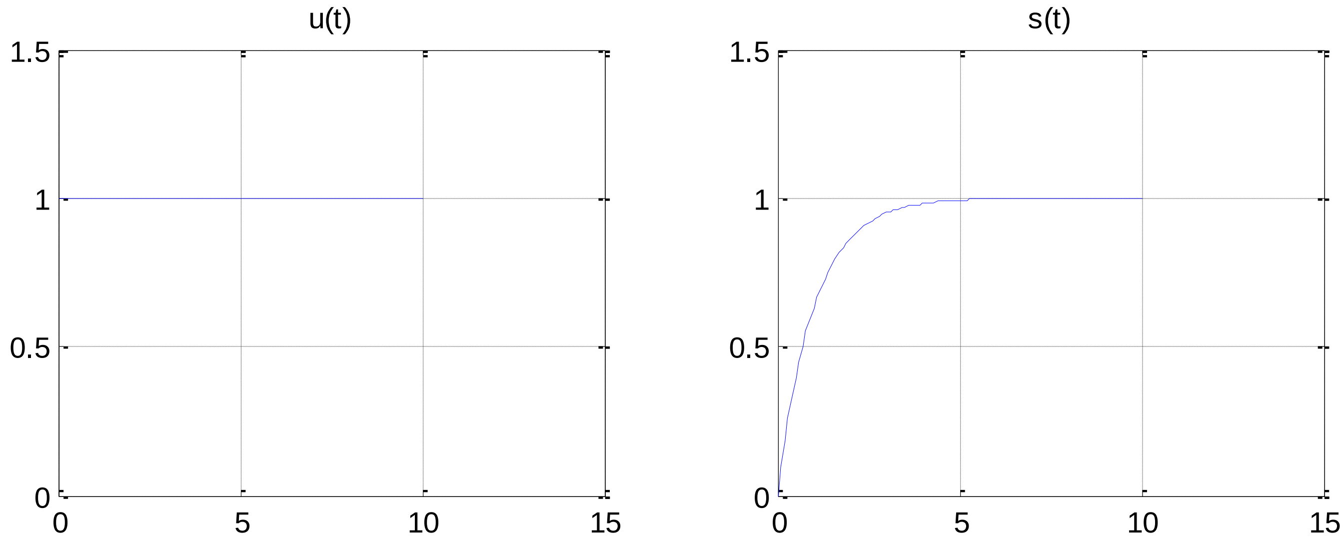
$$h(t) = 0.1\,e^{-0.1t}\,u(t)$$

Η βηματική απόκριση υπολογίζεται από την ολοκλήρωση της κρουστικής απόκρισης:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} 0.1\,e^{-0.1t}\,u(t)d\tau = 0.1\int_{0}^{t} e^{-0.1t}d\tau = -e^{-0.1t}\Big|_{0}^{t} = -(e^{-0.1t} - 1)$$
$$= 1 - e^{-0.1t}, \qquad \text{για } t > 0$$

Άσκηση 9 (συνέχεια)

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται η βηματική είσοδος και η βηματική απόκριση του κυκλώματος RC.



4. Απόκριση ΓΧΑ Συστήματος σε Εκθετική Μιγαδική Είσοδο

Απόκριση σε Μιγαδική Εκθετική Είσοδο

Όταν ένα ευσταθές ΓΧΑ σύστημα διεγερθεί με μία μιγαδική εκθετική είσοδο (ή συνδυασμό ημιτόνων και συνημιτόνων) συγκεκριμένης συχνότητας, της μορφής:

$$x(t) = Ae^{j(\Omega_0 t+\varphi_0)}, \qquad \text{όπου } A > 0 \text{ και } \varphi_0 \in (-\pi, \pi]$$

τότε η έξοδος υπολογίζεται από τη συνέλιξη:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\, h(t)\, d\tau = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\Omega_0(t-\tau)+\varphi_0)}\, h(t)\, d\tau$$

$$= Ae^{j\Omega_0 t}e^{j\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\Omega_0\tau}\, h(\tau)\, d\tau$$

Θέτουμε το ολοκλήρωμα ίσο με:

$$H(\Omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\Omega_0\tau}\, h(\tau)\, d\tau$$

οπότε η έξοδος $y(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$y(t) = Ae^{j(\Omega_0 t+\varphi_0)}\, H(\Omega_0) = x(t)\, H(\Omega_0)$$

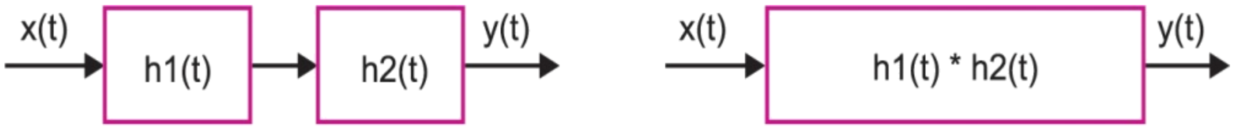
Απόκριση σε Μιγαδική Εκθετική Είσοδο

- Όταν ένα ευσταθές ΓΧΑ σύστημα διεγερθεί με μία μιγαδική εκθετική είσοδο συχνότητας Ω_0, τότε παράγει μία έξοδο που είναι το γινόμενο της εισόδου $x(t)$ με μια μιγαδική σταθερή $H(\Omega_0)$, η οποία εκφράζει την απόκριση του συστήματος στη συχνότητα Ω_0 του σήματος εισόδου.
- Η διαπίστωση αυτή είναι σημαντική για τη θεμελίωση της ανάλυσης σημάτων και συστημάτων στο πεδίο της συχνότητας.
- Η σταθερή $H(\Omega_0)$ είναι η τιμή της απόκρισης συχνότητας $H(\Omega)$ στη συχνότητα Ω_0. Θα εισάγουμε αργότερα τις έννοιες της **απόκρισης συχνότητας** και της **συνάρτησης μεταφοράς**.
- Επειδή το σύστημα είναι ΓΧΑ η ιδιότητα αυτή μπορεί να επεκταθεί σε οποιοδήποτε πλήθος μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων αθροίζονται και αποτελούν το σήμα εισόδου.
- Αν οι μιγαδικές συναρτήσεις είναι συζυγείς, τότε το σήμα x(t) είναι ένα πραγματικό σήμα. Αυτό συμβαίνει στα ημιτονοειδή σήματα, τα οποία λόγω της σχέσης Euler γράφονται σαν άθροισμα συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων.

5. Συνδεσμολογίες ΓΧΑ Συστημάτων

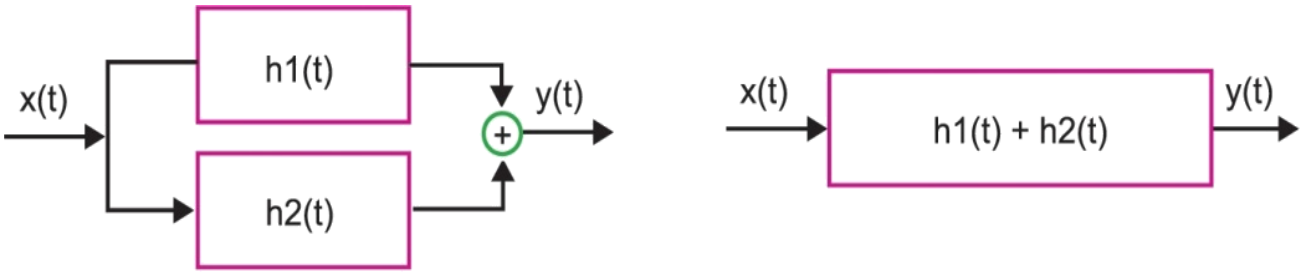
Συνδεσμολογίες ΓΧΑ Συστημάτων

Σειριακή σύνδεση ΓΧΑ συστημάτων



$$h_{eq}(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

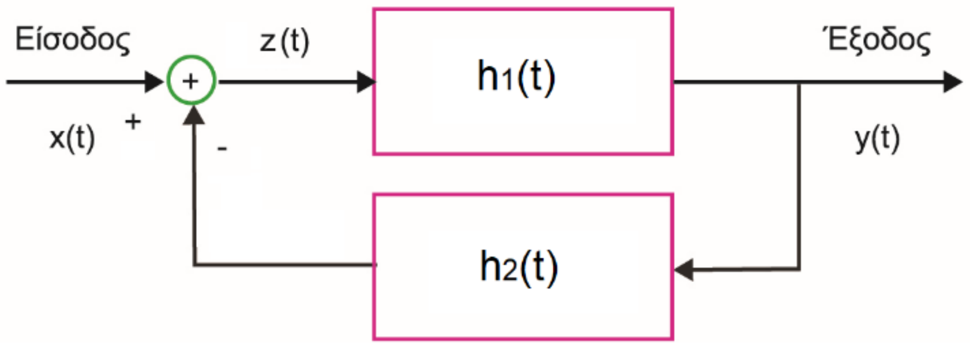
Παράλληλη σύνδεση ΓΧΑ συστημάτων



$$h_{eq}(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

Συνδεσμολογίες ΓΧΑ Συστημάτων

Σύνδεση ΓΧΑ με ανάδραση συστημάτων

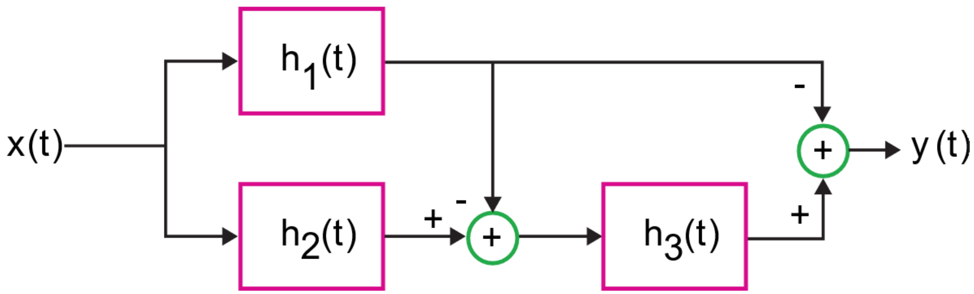


$$h_{eq}(t) = \frac{h_1(t)}{1 + h_1(t) * h_2(t)}$$

Η συνδεσμολογία με ανατροφοδότηση (ανάδραση) ονομάζεται και συνδεσμολογία **κλειστού βρόχου** (closed loop). Αν $h_2(t) = 0$ τότε η συνδεσμολογία ονομάζεται **ανοικτού βρόχου** (open loop) και η ισοδύναμη κρουστική απόκρισή της είναι $h_{eq}(t) = h_1(t)$.

Άσκηση 10

Να υπολογιστεί η ισοδύναμη κρουστική απόκριση της παρακάτω συνδεσμολογίας ΓΧΑ συστημάτων με επιμέρους κρουστικές αποκρίσεις $h_1(t) = u(t-2)$, $h_2(t) = u(t)$ και $h_3(t) = \delta(t-2)$.



<u>Απάντηση</u>: Τα συστήματα με κρουστικές αποκρίσεις $h_1(t), h_2(t)$ είναι παράλληλα συνδεδεμένα, άρα απλοποιούνται σε:

$$h_{12}(t) = h_2(t) - h_1(t) = u(t) - u(t-2)$$

Το σύστημα με κρουστική απόκριση $h_3(t)$ είναι σε σειρά συνδεδεμένο με τα συστήματα $h_1(t), h_2(t)$, άρα απλοποιούνται σε:

$$h_{123}(t) = h_{12}(t) * h_3(t) = [u(t) - u(t-2)] * \delta(t-2) = u(t-2) - u(t-4)$$

Η ισοδύναμη κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος είναι:

$$h_{eq}(t) = h_{123}(t) - h_1(t) = u(t-2) - u(t-4) - u(t-2) = -u(t-4)$$