Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 3: Εισαγωγή στα Συστήματα Συνεχούς Χρόνου

Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

Περιεχόμενα Διάλεξης

1. Ορισμός και Κατηγορίες Συστημάτων
   – Συστήματα Συνεχούς Χρόνου
   – Συστήματα Διακριτού Χρόνου
2. Συνδεσμολογίες Συστημάτων Συνεχούς Χρόνου
3. Είδη Συστημάτων
   – Γραμμικά και Μη-Γραμμικά Συστήματα
   – Αιτιατά και Μη-Αιτιατά Συστήματα
   – Στατικά και Δυναμικά Συστήματα
   – Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα
   – Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα

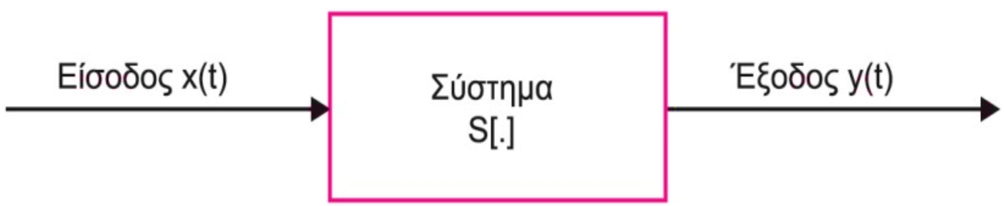
1. Ορισμός και Κατηγορίες Συστημάτων

Ορισμός Συστήματος

Σύστημα είναι κάθε οντότητα που επενεργεί σε κάποιο σήμα $x(t)$ και ως από-τέλεσμα παράγει ένα (νέο) σήμα $y(t)$.

Από μαθηματική άποψη ένα σύστημα θεωρείται ως ένας μετασχηματισμός $\boldsymbol{S}[.]$ που μετασχηματίζει ένα σήμα $x(t)$ σε ένα άλλο σήμα $y(t)$, σύμφωνα με τη σχέση $y(t) = \boldsymbol{S}[x(t)]$.

Η προσέγγιση αυτή ονομάζεται **σχέση εισόδου – εξόδου** και περιγράφει ένα σύστημα στο πεδίο του χρόνου (time domain) με βάση την είσοδο και την έξοδό του, αγνοώντας πλήρως την εσωτερική δομή και περιγραφή του συστήματος.



Σχηματική περιγραφή συστήματος

Το σήμα $x(t)$ που διεγείρει το σύστημα λέγεται **είσοδος** του συστήματος, ενώ το αποτέλεσμα της διαδικασίας διέγερσης, δηλαδή το σήμα $y(t)$ λέγεται **έξοδος** του συστήματος.

Κατηγορίες Συστημάτων (1/3)

(Α) Ανάλογα με το **πλήθος των εισόδων – εξόδων**:

- Συστήματα **μιας εισόδου - μιας εξόδου** (SISO – Single Input, Single Output). Παραδείγματα απλών συστημάτων μιας εισόδου - μιας εξόδου είναι ο βαθμωτός πολλαπλασιαστής $y(t) = \alpha\, x(t)$ και το σύστημα καθυστέρησης $y(t) = x(t - t_0)$.

- Συστήματα με **πολλές εισόδους και μία έξοδο** (MISO – Multiple Input, Single Output). Παράδειγμα τέτοιων συστημάτων είναι ο αθροιστής δύο ή περισσοτέρων σημάτων $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ και ο πολλαπλασιαστής
$$y(t) = x_1(t)\, x_2(t).$$

- Συστήματα με **μία είσοδο και πολλές εξόδους** (SIMO – Single Input, Multiple Output).

- Συστήματα με **πολλές εισόδους και πολλές εξόδους** (MIMO – Multiple Input, Multiple Output).

Κατηγορίες Συστημάτων (2/3)

(Α) Ανάλογα με τη **φύση των εισόδων – εξόδων**:

- Συστήματα **συνεχούς χρόνου** ή **αναλογικά συστήματα**, όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι αναλογικά σήματα.

  Όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι σήματα διακριτού χρόνου, τότε τα συστήματα χαρακτηρίζονται ως συστήματα **διακριτού χρόνου**.

- **Αιτιοκρατικά συστήματα**, όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι απλά αιτιοκρατικά σήματα.

  Όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι στοχαστικά σήματα, τα συστήματα χαρακτηρίζονται ως **στοχαστικά συστήματα**.

Κατηγορίες Συστημάτων (3/3)

- **Σύστημα συνεχούς χρόνου** (ΣΣΧ) (continuous time system) είναι κάθε οντότητα που ενεργεί σε ένα σήμα εισόδου **συνεχούς χρόνου** $x(t)$ και το μετασχηματίζει στο σήμα εξόδου **συνεχούς χρόνου**:

$$y(t) \ = \ S[x(t)]$$

- **Σύστημα διακριτού χρόνου** (ΣΔΧ) (discrete time system) είναι κάθε οντότητα που ενεργεί σε ένα σήμα εισόδου $\{x(n)\}$ **διακριτού χρόνου** και το μετασχηματίζει στο σήμα εξόδου $\{y(n)\}$ **διακριτού χρόνου:**

$$\{y(n)\} \ = \ T[\{x(n)\}]$$

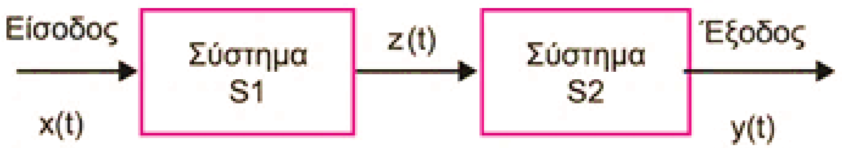
2. Συνδεσμολογίες Συστημάτων Συνεχούς Χρόνου

Συνδέσεις Συστημάτων (1/2)

Ένα σύστημα μπορεί να αναλυθεί σε απλούστερα συστήματα τα οποία διασυνδέονται μεταξύ τους με διάφορους τρόπους.

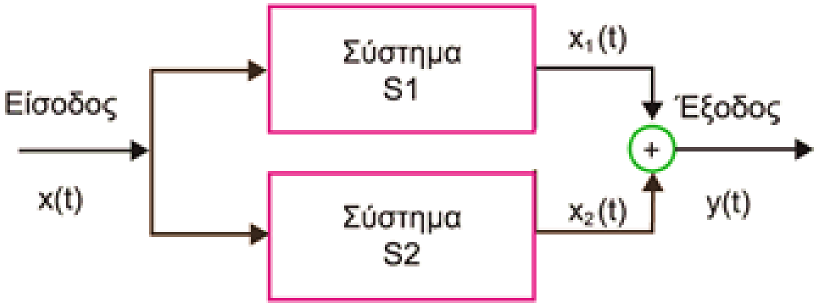
Οι βασικότερες συνδέσεις μεταξύ συστημάτων είναι η **σειριακή**, η **παράλληλη**, η **μεικτή** και η σύνδεση με **ανατροφοδότηση** ή **ανάδραση**.

- **Σειριακή σύνδεση συστημάτων:**



Η έξοδος είναι: $y(t) = S2[\,S1[x(t)]\,]$

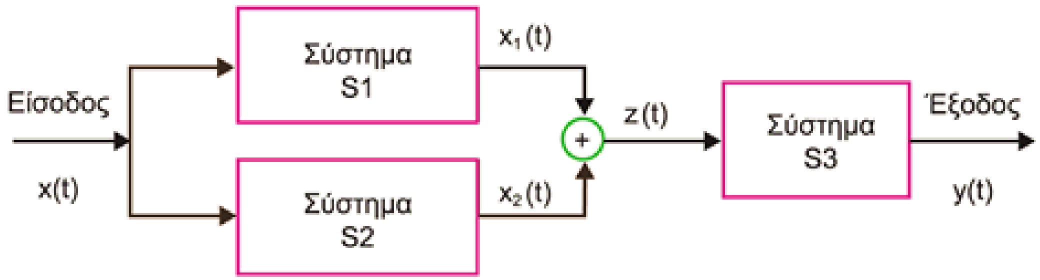
- **Παράλληλη σύνδεση συστημάτων:**



Η έξοδος είναι: $y(t) = S1[x(t)] + S2[x(t)]$

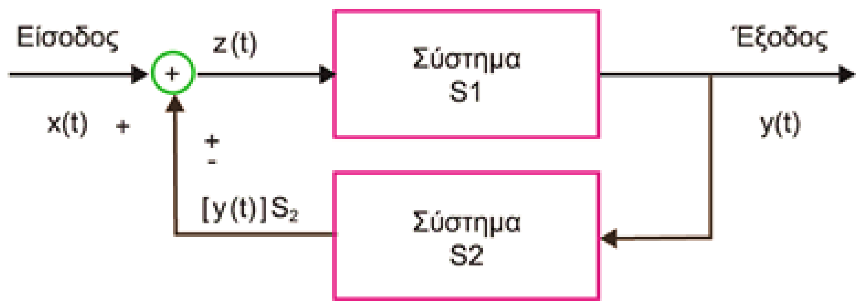
Συνδέσεις Συστημάτων (2/2)

- **Μεικτή σύνδεση συστημάτων:**



Η έξοδος είναι: $y(t) = \ S3[\ S1[x(t)] + S2[x(t)]]$

- **Σύνδεση συστημάτων με ανάδραση:**



Η έξοδος είναι: $y(t) = S1[x(t) \pm S2[y(t)]]$

3. Είδη Συστημάτων Συνεχούς Χρόνου

Είδη Συστημάτων

Ένα σύστημα βρίσκεται σε **κατάσταση ηρεμίας** τη χρονική στιγμή t_0, εάν δεν έχει υποστεί διέγερση από κάποιο σήμα για $t < t_0$. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα δεν έχει αποθηκευμένη ενέργεια κατά τη χρονική στιγμή $t = t_0$.

Είδη συστημάτων που βρίσκονται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας:

- Γραμμικά και Μη-Γραμμικά Συστήματα
- Αιτιατά και Μη-Αιτιατά Συστήματα
- Στατικά και Δυναμικά Συστήματα
- Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα
- Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα

Γραμμικά και Μη-Γραμμικά Συστήματα (1/2)

Ένα σύστημα που βρίσκεται σε αρχική ηρεμία ονομάζεται **γραμμικό**, όταν και μόνον όταν δοθέντων δύο σημάτων εισόδου $x_1(t)$ και $x_2(t)$, ισχύει η σχέση:

$$S[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1S[x_1(t)] + a_2S[x_2(t)]$$

Δηλαδή, η απόκριση του συστήματος σε είσοδο που είναι ο γραμμικός συνδυασμός δύο σημάτων, ισούται με τον αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των αποκρίσεων του συστήματος σε καθένα από τα σήματα αυτά.

Αυτή είναι η **αρχή της υπέρθεσης** (επαλληλίας - superposition) και επεκτείνεται για οποιοδήποτε πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό σημάτων:

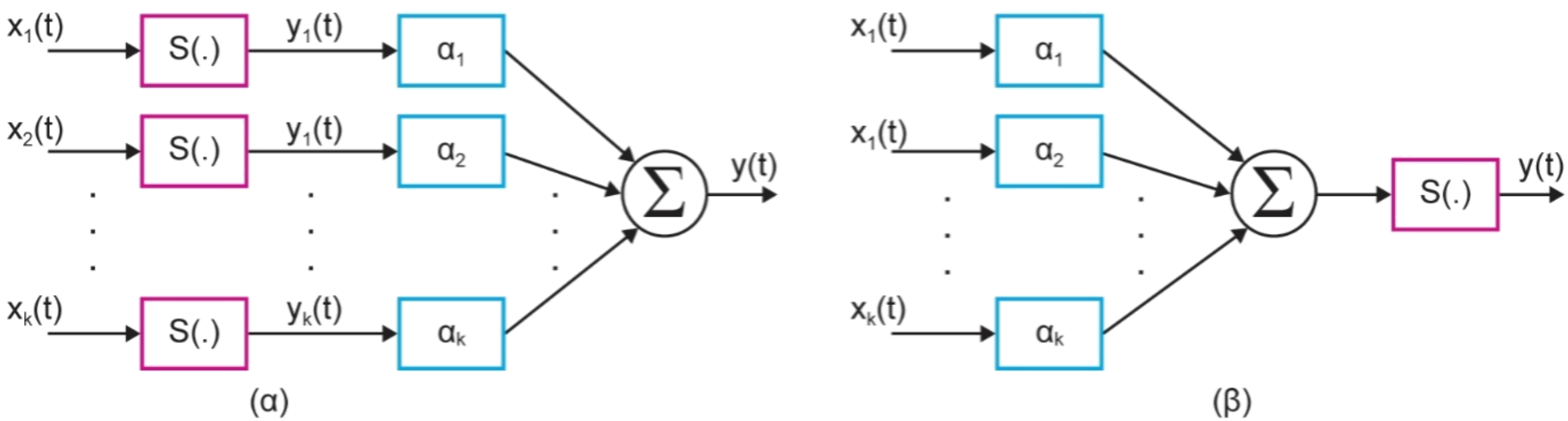
$$x_1(t) \xrightarrow{S} y_k(t), \qquad k = 1,2, \dots, M$$

τότε για βαθμωτά a_k, $k = 1,2, \dots, M$, έχουμε:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k x_k(t) \xrightarrow{S} y(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k\, y_k(t)$$

Γραμμικά και Μη-Γραμμικά Συστήματα (2/2)

- Σύμφωνα με το σχήμα ένα σύστημα είναι γραμμικό όταν η έξοδός του για είσοδο γραμμικό συνδυασμό εισόδων (συνδυασμένη είσοδος) ισούται με τον γραμμικό συνδυασμό των επιμέρους εξόδων (συνδυασμένη έξοδος).



Άσκηση 1

Να ελέγξετε αν ισχύει η ιδιότητα της γραμμικότητας στο σύστημα με σχέση εισόδου - εξόδου $y(t) = sin\{x(t)\}$.

Απάντηση: Αν το σήμα $x_1(t)$ είναι η είσοδος του συστήματος, τότε η έξοδος του είναι $y_1(t) = sin\{x_1(t)\}$. Αν η είσοδός είναι το σήμα $x_2(t)$, η έξοδος είναι $y_2(t) = sin\{x_2(t)\}$.

Αν στην είσοδο του συστήματος θέσουμε τον γραμμικό συνδυασμό $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$, τότε η έξοδος $y(t)$ είναι:

$$y(t) = sin\big(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\big) \neq sin\big(a_1x_1(t)\big) + sin\big(a_2x_2(t)\big) = y'(t)$$

Όπου $y'(t)$ είναι ο γραμμικός συνδυασμός των εξόδων $y_1(t)$ και $y_2(t)$, δηλαδή:

$$y'(t) = \alpha_1y_1(t) + \alpha_2y_2(t)$$

Επειδή ισχύει $y(t) \neq y'(t)$, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα δεν είναι γραμμικό.

Άσκηση 2

Να ελέγξετε ως προς τη γραμμικότητα το σύστημα με σχέση εισόδου – εξόδου:

$$y(t) = \frac{x(t)}{1 + x(t-1)}$$

<u>Απάντηση</u>: Για τις εισόδους $x_1(t)$ και $x_2(t)$, οι έξοδοι $y_1(t)$ και $y_2(t)$ είναι:

$$y_1(t) = \frac{x_1(t)}{1+x_1(t-1)} \text{ και } y_2(t) = \frac{x_2(t)}{1+x_2(t-1)}$$

Θέτοντας ως είσοδο τον γραμμικό συνδυασμό $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$, η έξοδος $y(t)$ είναι:

$$y(t) = \frac{x(t)}{1 + x(t-1)} = \frac{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)}{1 + \alpha_1 x_1(t-1) + \alpha_2 x_2(t-1)}$$

Ο γραμμικός συνδυασμός $y'(t)$ των εξόδων $y_1(t)$ και $y_2(t)$ είναι:

$$y'(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \ = \alpha_1 \frac{x_1(t)}{1 + x_1(t-1)} + \alpha_2 \frac{x_2(t)}{1 + x_2(t-1)}$$

Παρατηρούμε ότι $y(t) \neq y'(t)$. Άρα το δοθέν σύστημα δεν είναι γραμμικό.

Αιτιατά και Μη-Αιτιατά Συστήματα (1/2)

- Ένα σύστημα είναι **αιτιατό** (causal) όταν η **παρούσα τιμή της εξόδου** του **δεν εξαρτάται** από **μελλοντικές τιμές της εισόδου**.
- Δηλαδή, για κάθε σήμα εισόδου $x(t)$ η αντίστοιχη έξοδος $y(t)$ εξαρτάται μόνο από την παρούσα ή/και τις προηγούμενες τιμές της εισόδου.
- Αντίστροφα, αν η έξοδος $y(t_0)$ τη χρονική στιγμή t_0 **εξαρτάται** από μεταγενέστερες τιμές του σήματος εισόδου $x(t)$, δηλ. για $t \geq t_0$, τότε το σύστημα είναι **μη-αιτιατό**.
- Με άλλα λόγια, ένα σύστημα είναι αιτιατό αν οι μεταβολές στην έξοδο (αποτέλεσμα) του συστήματος, ποτέ **δεν προηγούνται** των μεταβολών που επιτελούνται στην είσοδο του συστήματος (αιτία).
- Όλα τα φυσικά παθητικά συστήματα έχουν την ιδιότητα της **αιτιότητας**.

Αιτιατά και Μη-Αιτιατά Συστήματα (2/2)

- Τα αιτιατά συστήματα ικανοποιούν τη θεμελιώδη φυσική **σχέση αιτίου-αποτελέσματος**, δηλαδή το αίτιο (είσοδος) προηγείται και το αποτέλεσμα (έξοδος) έπεται. Αυτό τηρείται σε όλα τα πρακτικά συστήματα.
- Ένα μη αιτιατό σύστημα πρέπει να γνωρίζει τις μελλοντικές τιμές της εισόδου για να παράξει έξοδο. Αυτό δεν είναι εφικτό σε συστήματα πραγματικού χρόνου, άρα τα συστήματα πραγματικού χρόνου είναι πάντοτε αιτιατά.
- Αν επιτρέψουμε την είσοδο να καταγραφεί σε μία μνήμη, τότε όλες οι τιμές της εισόδου (και οι μελλοντικές) είναι διαθέσιμες ανά πάσα στιγμή. Άρα με τη χρήση μνήμης μπορούμε να υλοποιήσουμε μη αιτιατά συστήματα, όταν η επεξεργασία πραγματικού χρόνου δεν είναι αναγκαία. Τέτοιου είδους επεξεργασίες ακολουθούμε στη συμπίεση ήχου και εικόνας και επιτυγχάνουμε υψηλές τιμές συμπίεσης επειδή ο αλγόριθμος (JPEG, MP3, κλπ) «γνωρίζει» τις μελλοντικές τιμές της εισόδου.
- Μη αιτιατά συστήματα είναι ευκολότερο να υλοποιήσουμε σε συστήματα διακριτού χρόνου καθώς οι ψηφιακές μνήμες είναι εύχρηστες και φθηνές.
- Ένα ιδανικό φίλτρο (το οποίο δεν εισάγει παραμόρφωση στο σήμα) είναι πάντα μη αιτιατό άρα και μη υλοποιήσιμο σε πραγματικό χρόνο. Αντίθετα, ένα πρακτικό φίλτρο είναι αιτιατό, αλλά εισάγει πάντα ένα ποσοστό παραμόρφωσης στο σήμα εισόδου.
- Με βάση αυτή την παρατήρηση, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα μη αιτιατά συστήματα αποτελούν το άνω όριο επιδόσεων των αιτιατών συστημάτων.

Άσκηση 3

Για κάθε ένα από τα παρακάτω συστήματα, να εξετάσετε αν είναι αιτιατά ή όχι.

(α) $y(t) = x^3(t+3)$ (β) $y(t) = e^{-\alpha t}\, u(t)$

Απάντηση:

(α) Είναι μη αιτιατό, επειδή η έξοδος εξαρτάται και από μελλοντικές τιμές της εισόδου.

(β) Είναι αιτιατό, επειδή η έξοδος εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της εισόδου.

Στατικά και Δυναμικά Συστήματα (1/2)

- Ένα σύστημα καλείται **στατικό** ή **σύστημα χωρίς μνήμη**, εάν για κάθε σήμα εισόδου η αντίστοιχη έξοδος για κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από την τιμή της εισόδου την **ίδια** χρονική στιγμή και όχι από προηγούμενες ή μελλοντικές τιμές της.
- Εάν ένα σύστημα δεν είναι στατικό, τότε καλείται **δυναμικό** ή **σύστημα με μνήμη**.
- Η έξοδος ενός δυναμικού συστήματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή εξαρτάται όχι μόνο από την τιμή της εισόδου την ίδια χρονική στιγμή, αλλά επίσης και από (μερικές τουλάχιστον) προηγούμενες τιμές της εισόδου (και σε αιτιατά συστήματα και από μελλοντικές τιμές).
- Ένα σύστημα που η έξοδός του τη χρονική στιγμή t προσδιορίζεται πλήρως από τις τιμές της εισόδου στο διάστημα $t - T$ έως t (ισχύει $T \geq 0$), λέμε ότι έχει **μνήμη μήκους $\boldsymbol{T}$**.
- Εάν το T έχει μία πεπερασμένη τιμή, το σύστημα χαρακτηρίζεται ως σύστημα **πεπερασμένης μνήμης**, ενώ αν $T \rightarrow \infty$ το σύστημα είναι γνωστό ως σύστημα **άπειρης μνήμης**.
- Ένα στατικό σύστημα έχει μηδενική μνήμη ($T = 0$).

Στατικά και Δυναμικά Συστήματα (2/2)

Ένα δυναμικό σύστημα έχει την ικανότητα να αποθηκεύει ενέργεια.

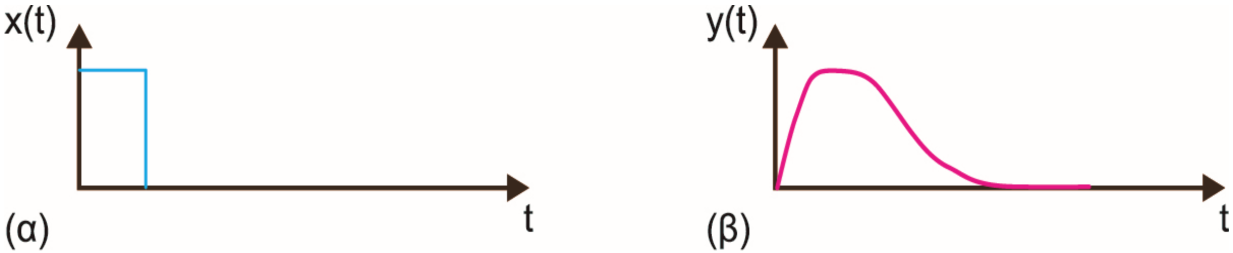
Παραδείγματα στατικών και δυναμικών συστημάτων:

- Η ωμική αντίσταση είναι **σύστημα χωρίς μνήμη**, αφού η τάση στα άκρα της $u_R(t)$ (έξοδος) σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται από το ρεύμα $i(t)$ (είσοδος), που την διαρρέει κατά την ίδια χρονική στιγμή, δηλαδή ισχύει:

$$u_R(t) \;=\; R\, i(t)$$

- Ο πυκνωτής είναι ένα **σύστημα με μνήμη**, αφού η τάση $u_c(t)$ στα άκρα του σε κάθε χρονική στιγμή είναι αποτέλεσμα όλου του ιστορικού του ρεύματος $i(t)$ που τον διαρρέει:

$$u_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau$$



Άσκηση 4

Ποια από τα συστήματα που περιγράφονται από τις παρακάτω σχέσεις εισόδου – εξόδου είναι στατικά και ποια δυναμικά;

(α) $y(t) = \alpha x(t)$

(β) $y(t) = x^2(t)$

(γ) $y(t) = x(t) + 2x(t-1)$

(δ) $y(t) = y(t-1) + x(t)$

<u>Απάντηση</u>:

(α) Είναι στατικό, επειδή η έξοδος στη χρονική στιγμή t εξαρτάται από την είσοδο μόνο στην ίδια χρονική στιγμή.

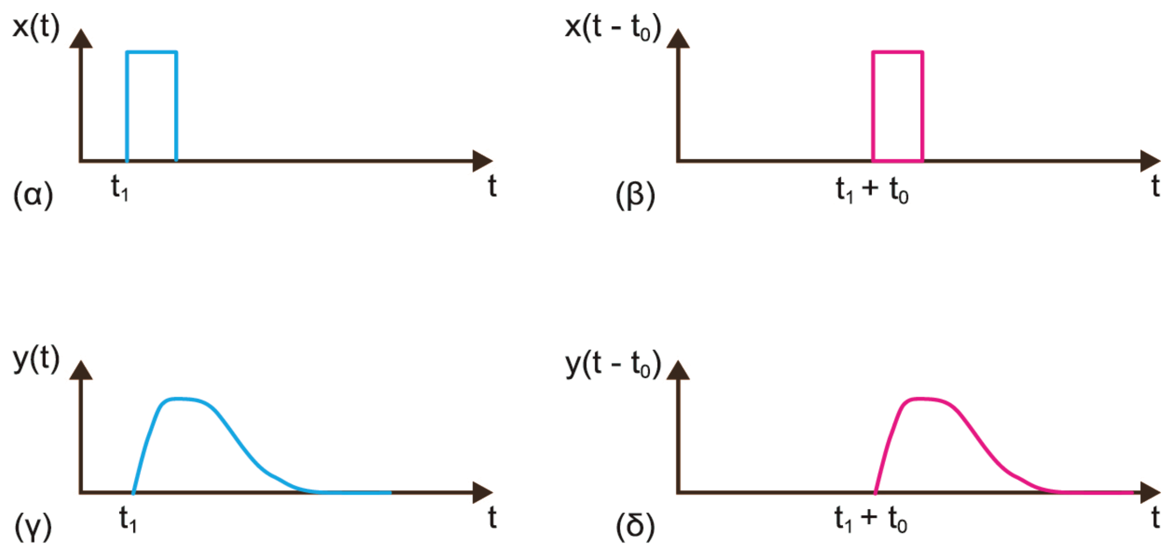
(β)Είναι στατικό (ομοίως).

(γ) Είναι δυναμικό, επειδή η έξοδος στη χρονική στιγμή t εξαρτάται από την είσοδο σε προγενέστερη χρονική στιγμή.

(δ) Είναι δυναμικό, επειδή η έξοδος στη χρονική στιγμή t εξαρτάται από την έξοδο σε προγενέστερη χρονική στιγμή, άρα και από την είσοδο σε προγενέστερη στιγμή.

Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα (1/2)

- Ένα σύστημα λέγεται **χρονικά αμετάβλητο** ή **χρονικά αναλλοίωτο**, όταν και μόνον όταν χρονικές ολισθήσεις του σήματος εισόδου μεταφράζονται σε αντίστοιχες χρονικές ολισθήσεις στο σήμα εξόδου.
- Σε ένα χρονικά αμετάβλητο σύστημα αν ένα σήμα εισόδου $x(t)$ προκαλεί έξοδο $y(t)$, τότε ένα σήμα εισόδου $x(t - t_0)$ παράγει σήμα εξόδου $y(t - t_0)$.



- Για να ελέγξουμε αν ένα σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο, υπολογίζουμε την έξοδο $y(t)$ για είσοδο $x(t)$. Αν ισχύει $y(t) \ = \ y(t - t_0)$ για κάθε είσοδο $x(t)$ και κάθε ολίσθηση t_0 τότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα (2/2)

- Αν και πολύ συχνά συμβαίνει τα συστήματα να είναι χρονικά μεταβαλλόμενα, εντούτοις μπορούμε να τα προσεγγίσουμε ως χρονικά αμετάβλητα εφόσον τα μελετήσουμε σε μία βραχεία χρονική περιοχή στην οποία παρουσιάζουν χρονικά αμετάβλητη συμπεριφορά.
- Για παράδειγμα, στη σύνθεση φωνής το ανθρώπινο φωνητικό σύστημα αν και παρουσιάζει διαρκή μεταβολή στο σχήμα των επιμέρους τμημάτων του (λάρυγγας, γλωττίδα, γλώσσα, χείλη, ρινική κοιλότητα, μύτη, κλπ), εντούτοις προσεγγίζεται ικανοποιητικά ως ένα χρονικά αμετάβλητο σύστημα για βραχεία χρονικά διαστήματα διάρκειας περί τα 20 msec.
- Στα συστήματα παραγωγής συνθετικής φωνής ένα χαμηλής τάξης γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα οδηγείται από διαφορετική είσοδο ανάλογα με το αν μοντελοποιεί άηχους ή ηχηρούς ήχους, δηλαδή σύμφωνα ή φωνήεντα αντίστοιχα. Για την μοντελοποίηση ενός ηχηρού ήχου το σύστημα δέχεται ως είσοδο μία παλμοσειρά, ενώ για την μοντελοποίηση ενός άηχου ήχου δέχεται ως είσοδο ένα σήμα θορύβου. Η χαμηλή τάξη του συστήματος, ειδικά κατά τις προηγούμενες δεκαετίες, ήταν σημαντικό πλεονέκτημα για την επεξεργασία φωνής σε πραγματικό χρόνο.

Άσκηση 5

Ελέγξτε αν το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου $y(t) = t\, x(t)$ είναι χρονικά αμετάβλητο ή μεταβαλλόμενο.

Απάντηση: Στο δοθέν σύστημα θέτουμε ως είσοδο το σήμα $x(t - t_0)$ όπου t_0 μία τυχαία τιμή χρονικής ολίσθησης και λαμβάνουμε ως έξοδο $y(t) = t\, x(t - t_0)$.

Παρατηρούμε ότι η έξοδος αυτή δεν ταυτίζεται με την μετατοπισμένη κατά t_0 έξοδο, δηλ. την $y(t - t_0) = (t - t_0)\, x(t - t_0)$.

Επομένως, το σύστημα είναι χρονικά μεταβαλλόμενο.

Άσκηση 6

Ελέγξτε αν το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου $y(t) = cos[\ x(t)\ ]$ είναι χρονικά αμετάβλητο ή μεταβαλλόμενο.

<u>Απάντηση</u>: Στο δοθέν σύστημα θέτουμε ως είσοδο το σήμα $x(t - t_0)$ όπου t_0 μία τυχαία τιμή χρονικής ολίσθησης και έχουμε ως έξοδο $y(t) = cos[\ x(t - t_0)\ ]$.

Παρατηρούμε ότι η έξοδος αυτή ταυτίζεται με την μετατοπισμένη κατά t_0 έξοδο, δηλ. την $y(t - t_0) = cos[\ x(t - t_0)\ ]$.

Επομένως, το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Άσκηση 7

Ελέγξτε αν το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου $y(t) = x(t)\ sin(t)$ είναι χρονικά αμετάβλητο ή μεταβαλλόμενο.

<u>Απάντηση</u>: Στο δοθέν σύστημα για είσοδο το σήμα $x(t - t_0)$ (t_0 μία τυχαία τιμή χρονικής ολίσθησης), η έξοδος είναι $y(t) = x(t - t_0)\ \sin(t)$.

Παρατηρούμε ότι η έξοδος αυτή δεν ταυτίζεται με την μετατοπισμένη κατά t_0 έξοδο, δηλ. την $y(t - t_0) = x(t - t_0)\ sin(t - t_0)$.

Επομένως το σύστημα είναι χρονικά μεταβαλλόμενο.

Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα (1/4)

- Ένα σύστημα διαθέτει ευστάθεια **Φραγμένης Εισόδου - Φραγμένης Εξόδου** και ονομάζεται **BIBO ευσταθές** (BIBO – bounded input bounded output) όταν και μόνον όταν για κάθε φραγμένη είσοδο η έξοδός του παραμένει φραγμένη.
- Ένα σύστημα είναι BIBO ευσταθές όταν για κάθε θετικό αριθμό $M_1 < \infty$ για τον οποίο ισχύει $|x(t)| \leq M_1$, υπάρχει (θετικός) αριθμός $M_2 < \infty$ για τον οποίο να ισχύει $|y(t)| \leq M_2$.
- Η έννοια αυτή της ευστάθειας ενός συστήματος ταυτίζεται με την απαίτηση τα σήματα εισόδου και εξόδου να παραμένουν πεπερασμένα (φραγμένα) σε πλάτος.

Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα (2/4)

Η ευστάθεια ενός γραμμικού συστήματος μπορεί να μελετηθεί όταν είναι γνωστή η εσωτερική δομή του συστήματος, η οποία (όπως θα δούμε στην επόμενη διάλεξη) περιγράφεται από τη γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Οι θέσεις των ριζών *λi, i=1,2,…N* του **χαρακτηριστικού πολυωνύμου** στο μιγαδικό επίπεδο συχνοτήτων προσδιορίζουν την ευστάθεια του συστήματος.

Αυτό συμβαίνει επειδή κάθε ρίζα *λi* του χαρακτηριστικού πολυωνύμου εκφράζει την ταλάντωση του όρου $e^{\lambda_i t}$.

- Για $t \rightarrow \infty$ η ταλάντωση τείνει στο μηδέν όταν το πραγματικό μέρος της ρίζας είναι μικρότερο του μηδενός, δηλαδή Re{λi}<0.
- Αντίθετα, τείνει στο άπειρο όταν το πραγματικό μέρος της ρίζας είναι μεγαλύτερο του μηδενός, δηλαδή Re{λi}>0.

Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα (3/4)

Η μελέτη της ευστάθειας ενός συστήματος μέσω των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ονομάζεται ασυμπτωτική ευστάθεια ή ευστάθεια μηδενικής εισόδου επειδή βασίζεται αποκλειστικά στις μη μηδενικές αρχικές συνθήκες που περιγράφουν το σύστημα και χωρίς να διαβιβάσουμε σε αυτό κάποια είσοδο.

Ως προς την **ασυμπτωτική ευστάθεια** διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Όταν όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (ενδεχομένως κάποιες να έχουν πολλαπλότητα $p>1$) διαθέτουν αρνητικά πραγματικά μέρη, δηλαδή είναι $Re\{\lambda i\}<0, i=1,2,\ldots N$, τότε το σύστημα είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές**.
- Όταν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο διαθέτει ρίζες πολλαπλότητας $p>1$, μερικές από τις οποίες βρίσκονται επάνω στον φανταστικό άξονα, τότε το σύστημα είναι πάλι **ασυμπτωτικά ασταθές**.
- Αν έστω μία ρίζα διαθέτει θετικό πραγματικό μέρος $Re\{\lambda i\}>0$, τότε το σύστημα είναι **ασυμπτωτικά ασταθές**.
- Αν όλες οι ρίζες είναι επάνω στον φανταστικό άξονα, τότε το σύστημα είναι **οριακά ευσταθές**.

Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα (4/4)

- Η ευστάθεια είναι ένα ιδιαίτερα σημαντικό χαρακτηριστικό για τα πρακτικά συστήματα. Ασταθή συστήματα αποφεύγονται σε πρακτικές εφαρμογές επειδή οδηγούν την έξοδο στο άπειρο.
- Η μελέτη της BIBO ευστάθειας ενός συστήματος ταυτίζεται με την απαίτηση τα σήματα εισόδου και εξόδου να παραμένουν πεπερασμένα (φραγμένα) σε όλη τη διάρκειά τους.
- Για να εκτιμήσουμε ένα σύστημα ως προς την ευστάθειά του χρειάζεται να γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος, η οποία πρέπει να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη για να είναι το σύστημα BIBO ευσταθές.
- Αν και ορίζουμε την ευστάθεια με βάση την είσοδο και την έξοδο του συστήματος, εντούτοις η ευστάθεια είναι ένα εγγενές χαρακτηριστικό του συστήματος και είναι ανεξάρτητη από την είσοδο και την έξοδο. Η μελέτη της ασυμπτωτικής ευστάθειας ή ευστάθειας μηδενικής εισόδου, σχετίζεται με την εσωτερική δομή του συστήματος και βασίζεται αποκλειστικά στις μη μηδενικές αρχικές συνθήκες που το περιγράφουν και χωρίς να διαβιβάσουμε κάποια είσοδο στο σύστημα.
- Αποδεικνύεται ότι ένα ασυμπτωματικά ευσταθές σύστημα είναι και ευσταθές κατά BIBO. Ένα οριακά ευσταθές ή ασταθές σύστημα είναι ασταθές κατά BIBO.
- Ο μετασχηματισμός Laplace προσφέρει έναν εύκολο τρόπο μελέτης της ευστάθειας των συστημάτων.

Άσκηση 8

Να ελέγξετε αν το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου είναι BIBO ευσταθές ή όχι:

$$y(t) = x(t)\ sin(\omega t)$$

<u>Απάντηση</u>: Από τη σχέση ορισμού του συστήματος και λαμβάνοντας υπόψη ότι $|\sin \omega t| \leq 1$, έχουμε:

$$|y(t)| = |x(t)\ sin(\omega t)| = |x(t)\ ||sin(\omega t)| \leq |x(t)|$$

Η παραπάνω σχέση περιγράφει ότι αν η είσοδος $x(t)$ είναι φραγμένη, τότε και η έξοδος $y(t)$ θα είναι επίσης φραγμένη.

Επομένως το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

Άσκηση 9

Να ελέγξετε αν το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου είναι BIBO ευσταθές ή όχι:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

<u>Απάντηση</u>: Ας θεωρήσουμε ότι ως είσοδο $x(t)$ στο σύστημα δίνουμε μια φραγμένη συνάρτηση, δηλαδή ότι ισχύει: $|x(t)| \leq a$. Η έξοδος $y(t)$ υπολογίζεται ως:

$$|y(t)| = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \leq \int_{-\infty}^{t} \alpha\, d\tau = \alpha \int_{-\infty}^{t} d\tau = \infty$$

Επομένως, η έξοδος δεν είναι φραγμένη, άρα το σύστημα είναι ασταθές.

Άσκηση 10

Να ελέγξετε ως προς την ασυμπτωτική ευστάθεια το σύστημα:

$$(\alpha)\quad \frac{d^3y(t)}{dt^3} + 4\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{dx(t)}{dt} - 2x(t)$$

<u>Απάντηση</u>: Θέτουμε την είσοδο $x(t)$ και τις παραγώγους της ίσες με μηδέν και προκύπτει η ομογενής λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 4\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 0$$

από την οποία λαμβάνουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4 \Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0$$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι:

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = -1 + j, \qquad \lambda_3 = -1 - j$$

Επειδή όλες οι ρίζες έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος το σύστημα
είναι ασυμπτωματικά ευσταθές.

Ασκήσεις Επανάληψης

Άσκηση 11

Να εξετάσετε αν το σύστημα που περιγράφεται από την παρακάτω σχέση και ονομάζεται διαφοριστής, είναι γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο και αιτιατό.

$$y(t) = \boldsymbol{S}[\, x(t)] = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

<u>Απάντηση</u>: (α) Έλεγχος για την γραμμικότητα: Αν το σήμα $x_1(t)$ είναι η είσοδος του ολοκληρωτή, τότε η έξοδος του είναι το $\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\, d\tau$, ενώ αν η είσοδος είναι $x_2(t)$ τότε η έξοδος είναι το $\int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)\, d\tau$.

Αν στην είσοδο του συστήματος τεθεί ο γραμμικός συνδυασμός $\alpha_1\, x_1(t) + \alpha_2\, x_2(t)$, τότε η έξοδος είναι:

$$\int_{-\infty}^{t} [\alpha_1\, x_1(t) + \alpha_2\, x_2(t)] d\tau = \alpha_1 \int_{-\infty}^{t} x_1(t)\, d\tau + \alpha_2 \int_{-\infty}^{t} x_2(t)\, d\tau$$

Προφανώς, το σύστημα είναι **γραμμικό**.

Άσκηση 11 (συνέχεια)

(β) Έλεγχος για τη χρονική μεταβλητότητα: Αν το σήμα $x(t)$ είναι η είσοδος του ολοκληρωτή, τότε η έξοδός του είναι:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

Ομοίως, βρίσκουμε (χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $\tau = \xi - t_0$) πως η απόκρισή του στο σήμα $x(t - t_0)$ είναι:

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\xi - t_0)\, d\xi = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)\, d\tau = y(t - t_0)$$

Επομένως το σύστημα είναι **χρονικά αμετάβλητο**.

(γ) Έλεγχος για την αιτιότητα: Ο ολοκληρωτής είναι **αιτιατό** σύστημα αφού η έξοδός του εξαρτάται μόνο από την παρούσα και από προηγούμενες τιμές της εισόδου του.

Άσκηση 12

Το σύστημα το οποίο περιγράφεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου $y(t) = |x(t)|$ αναφέρεται ως σύστημα πλήρους ανόρθωσης. Να εξετάσετε αν το σύστημα είναι γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο και αιτιατό.

<u>Απάντηση</u>: Αν το σήμα $x_1(t)$ είναι η είσοδος του συστήματος, τότε η έξοδος του είναι $y_1(t) = |x_1(t)|$, ενώ για είσοδο $x_2(t)$ η έξοδος είναι $y_2(t) = |x_2(t)|$. Αν η είσοδος του συστήματος είναι ο γραμμικός συνδυασμός $ax_1(t) + bx_2(t)$, τότε η έξοδος είναι $|ax_1(t) + bx_2(t)| \neq ay_1(t) + by_2(t)$. Επομένως το σύστημα **δεν είναι γραμμικό**.

Το σύστημα είναι **χρονικά αναλλοίωτο**, αφού ισχύει $y(t) = |x(t)|$και $y(t - t_0) = |x(t - t_0)|$.

Το σύστημα είναι επίσης **αιτιατό**, αφού η έξοδός του εξαρτάται μόνο από την παρούσα τιμή της εισόδου του.

Άσκηση 13

Να ελεγχθεί ως προς τη γραμμικότητα το σύστημα με σχέση εισόδου – εξόδου:

$$\frac{dy(t)}{dt} - 3y(t) = x(t)$$

<u>Απάντηση</u>: Για εισόδους $x_1(t)$ και $x_2(t)$ παράγονται οι έξοδοι $y_1(t)$ και $y_2(t)$ και ικανοποιούνται οι ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} - 3y_1(t) = x_1(t) \qquad \text{και} \qquad \frac{dy_2(t)}{dt} - 3y_2(t) = x_2(t)$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη διαφορική εξίσωση με μία σταθερή α_1 και τη δεύτερη με μια σταθερή α_2 και λαμβάνουμε:

$$\alpha_1 \frac{dy_1(t)}{dt} - 3\alpha_1 y_1(t) = \alpha_1 x_1(t) \Rightarrow \frac{d[\alpha_1 y_1(t)]}{dt} - 3\alpha_1 y_1(t) = \alpha_1 x_1(t)$$

και

$$\alpha_2 \frac{dy_2(t)}{dt} - 3\alpha_2 y_2(t) = \alpha_2 x_2(t) \Rightarrow \frac{d[\alpha_2 y_2(t)]}{dt} - 3\alpha_2 y_2(t) = \alpha_2 x_2(t)$$

Άσκηση 13 (συνέχεια)

Προσθέτοντας κατά μέλος τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε:

$$\frac{d[\alpha_1 y_1(t)]}{dt} + \frac{d[\alpha_2 y_2(t)]}{dt} - 3\alpha_1 y_1(t) - 3\alpha_2 y_2(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

Επομένως:

$$\frac{d[\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)]}{dt} - 3\big(\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)\big) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

Θέτοντας $x(t)$ τη συνδυασμένη είσοδο των $x_1(t)$ και $x_2(t)$:

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

και $y(t)$ τη συνδυασμένη έξοδο των $y_1(t)$ και $y_2(t)$:

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις, η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\frac{dy(t)}{dt} - 3y(t) = x(t)$$

Επομένως, η διαφορική εξίσωση ικανοποιείται από τη συνδυασμένη είσοδο $x(t)$ και τη συνδυασμένη έξοδο $y(t)$. Άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

Άσκηση 13 (συνέχεια)

Εύκολα μπορεί κανείς να επεκτείνει το παραπάνω αποτέλεσμα για διαφορική εξίσωση N-οστού βαθμού, δηλαδή να αποδείξει ότι είναι γραμμικό σύστημα με διαφορική εξίσωση:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Οι συντελεστές a_k και b_k μπορούν να είναι σταθεροί αριθμοί ή μεταβαλλόμενες ποσότητες.

Ανάλογη απόδειξη ισχύει και ως προς τη χρονική αμεταβλητότητα συστημάτων που περιγράφονται από ΓΔΕΣΣ.

Επομένως, συστήματα που περιγράφονται από Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις με Σταθερούς Συντελεστές (ΓΔΕΣΣ) είναι **γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα** (ΓΧΑ) συστήματα.