Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

# Σήματα και Συστήματα

## Διάλεξη 2: Στοιχειώδη Σήματα Συνεχούς Χρόνου

Μιχάλης Παρασκευάς
Καθηγητής

# Περιεχόμενα Διάλεξης

1. Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση
2. Κρουστική Συνάρτηση ή Συνάρτηση Δέλτα
3. Αναπαράσταση Σημάτων με τη Συνάρτηση Δέλτα
4. Μοναδιαία Κλίση (Ράμπα)
5. Εκθετικά Σήματα (Πραγματικά και Μιγαδικά)
6. Ημιτονοειδή Σήματα
7. Παλμοί (Τετραγωνικός και Τριγωνικός)
8. Συνάρτηση Δειγματοληψίας
9. Συρμός κρουστικών συναρτήσεων (σήμα Comb)

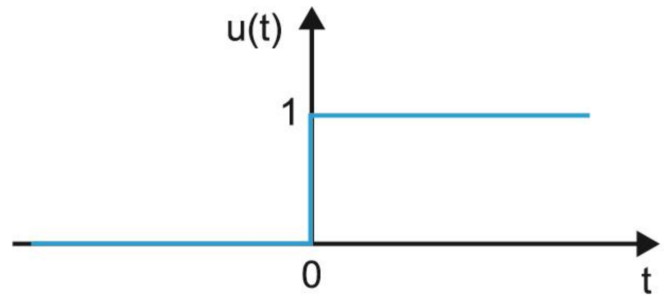
# 1. Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση

# Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση (1/2)

Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος ή **μοναδιαία βηματική συνάρτηση** συνεχούς χρόνου ή συνάρτηση του Heaviside, ορίζεται από τη σχέση:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση $u(t)$ είναι **ασυνεχής**, εφόσον δεν ορίζεται στο $t = 0$.

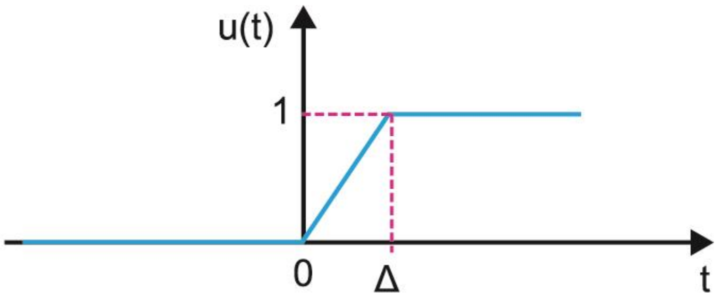



Συνάρτηση μοναδιαίου βήματος $u(t)$ (Heaviside)

# Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση (2/2)

Εναλλακτικά, η μοναδιαία βηματική συνάρτηση μπορεί να οριστεί ως το όριο μίας ακολουθίας συναρτήσεων $u_n(t)$, δηλαδή ως $u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t)$, όπου:

$$u_\Delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/\Delta, & 0 \leq t \leq \Delta \\ 1, & t \geq \Delta \end{cases}$$




Η συνεχής προσέγγιση της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος

# Ιδιότητες της Μοναδιαίας Βηματικής Συνάρτησης

Οι πιο σημαντικές ιδιότητες της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης είναι:

(α) Η πράξη της **κλιμάκωσης**:

$$\mathrm{A}\,u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \mathrm{A}, & t > 0 \end{cases}$$

(β) Η πράξη της **χρονικής μετατόπισης** κατά μία ποσότητα χρόνου $t_0$:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases}$$

# Ιδιότητες της Μοναδιαίας Βηματικής Συνάρτησης

(γ) Η πράξη της **αλλαγής μεταβλητής**:

$$u(-t) = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ 1, & t < 0 \end{cases}$$

(δ) Αν προσθέσουμε τις $u(t)$ και $u(-t)$, βρίσκουμε :

$$u(t) - u(-t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} = sgn(t)$$

η οποία ονομάζεται **συνάρτηση προσήμου**, επειδή επιστρέφει τις τιμές $+1$, $0$ και $-1$, αν η τιμή του $t$ είναι θετική, μηδενική ή αρνητική, αντίστοιχα.

# Σχόλια για τη Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση

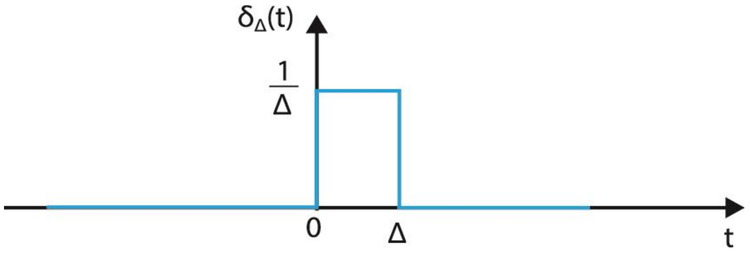
- Σήματα με σημεία **ασυνέχειας** μπορούν να αναπαρασταθούν από το άθροισμα ενός συνεχούς σήματος και σημάτων μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης στα σημεία ασυνέχειας. Αυτό διευκολύνει τον υπολογισμό των παραγώγων τέτοιων σημάτων.
- Η μοναδιαία βηματική συνάρτηση είναι χρήσιμη στην επεξεργασία σημάτων επειδή πολλαπλασιαζόμενη με οποιοδήποτε σήμα αποκόπτει (μηδενίζει) το τμήμα του σήματος για αρνητικές τιμές του χρόνου, ενώ δεν επηρεάζει (επειδή πολλαπλασιάζει επί 1) το τμήμα του σήματος για θετικές τιμές του χρόνου.
- Το αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής είναι να προκύπτει ένα σήμα που ορίζεται μόνο για $t>0$ που όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα αναφέρεται ως **αιτιατό σήμα**. Τα αιτιατά σήματα χρησιμοποιούνται κατά κόρο στις πρακτικές εφαρμογές.
- Η αφαίρεση δύο βηματικών συναρτήσεων με την μία να είναι χρονικά μετατοπισμένη σε σχέση με την άλλη, παράγει έναν τετραγωνικό παλμό, ο οποίος έχει διάρκεια τη διαφορά της χρονικής μετατόπισης μεταξύ των συναρτήσεων.

# 2. Κρουστική Συνάρτηση ή Συνάρτηση Δέλτα (Dirac)

# Κρουστική Συνάρτηση (1/3)

Η παράγωγος της συνάρτησης $u_{\Delta}(t)$ είναι:

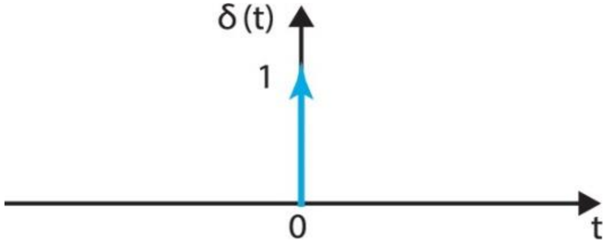
$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/\Delta, & 0 \le t \le \Delta \\ 0, & t \ge \Delta \end{cases}$$




Όταν $\Delta \to 0$ η χρονική διάρκεια του παλμού ελαττώνεται και αυξάνεται το ύψος του, το εμβαδόν όμως παραμένει **σταθερό** και ίσο με τη μονάδα.

Αν πάρουμε το όριο της $\delta_\Delta(t)$ όταν $\Delta \to 0$ τότε ορίζουμε τη **συνάρτηση Δέλτα** ή **συνάρτηση Dirac** ή **κρουστική συνάρτηση** $\delta(t)$ από τη σχέση:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$



# Κρουστική Συνάρτηση (2/3)

Η $\delta(t)$ δεν είναι συνάρτηση υπό την αυστηρή μαθηματική έννοια, διότι δεν ορίζεται για $t = 0$.

Εναλλακτικά, μελετούμε τη συνάρτηση $\delta(t)$ ως έναν **τελεστή** (κατανομή) που επενεργεί σε άλλες συναρτήσεις οι οποίες είναι ομαλές στο σημείο 0 και τις οποίες ονομάζουμε **συναρτήσεις δοκιμής**.

Έτσι, μπορούμε να εκφράσουμε (όχι να ορίσουμε) τη συνάρτηση $\delta(t)$ ως:

$$\delta(t) = 0 \;\; \text{για} \;\; t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(0)$$

όπου $\varphi(t)$ είναι μία συνάρτηση δοκιμής.

# Κρουστική Συνάρτηση (3/3)

Ο προηγούμενος ορισμός μπορεί να γενικευθεί ώστε να περιγράψει την χρονικά μετατοπισμένη συνάρτηση $\delta(t-t_0)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\,\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\,\varphi(t_0)\,dt = \varphi(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\,dt = \varphi(t_0)$$

Η παραπάνω σχέση περιγράφει το μαθηματικό μοντέλο της διαδικασίας της **δειγματοληψίας**, η οποία αποτελεί το πρώτο από τα τρία στάδια μετατροπής ενός σήματος από αναλογική σε ψηφιακή μορφή.

Για $\varphi(t) = 1$ έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = 1$$

Η συνάρτηση $\delta(t)$ είναι πολύ σημαντική, επειδή ενώ η χρονική της διάρκεια τείνει στο **μηδέν**, το εμβαδόν της παραμένει ίσο με τη **μονάδα**.

# Ιδιότητες Κρουστικής Συνάρτησης (1/3)

- $\delta(t) = \delta(-t)$
- $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$
- $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$
- $\varphi(t)\, \delta(t - t_0) = \varphi(t_0)\, \delta(t - t_0)$
- $\delta(\alpha t) = \frac{1}{|a|}\, \delta(t)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at)\, \varphi(t)\, dt = \frac{1}{|a|} \varphi(0)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\, \varphi(t)\, dt = -\varphi'(0)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\, dt = 0$

Η συνάρτηση Δέλτα μπορεί να παραχθεί όχι μόνο από την παράγωγο του τετραγωνικού παλμού, αλλά από την παράγωγο παλμού οποιουδήποτε σχήματος, με την προϋπόθεση το εμβαδό του παλμού να παραμένει σταθερό και ίσο με την μονάδα όταν η διάρκεια του παλμού τείνει στο μηδέν.

# Ιδιότητες Κρουστικής Συνάρτησης (2/3)

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = 1$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} A\, \delta(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A\, \delta(t - t_0)\, dt = A$

- $\varphi(t)\, \delta'(t) = -\varphi'(0)\, \delta(t) + \ \varphi(0)\, \delta'(t)$

- $\int_{t_1}^{t_2} \delta(t - t_0)\, \varphi(t)\, dt = \begin{cases} \varphi(t_0), & \quad t_1 < t_0 < t_2 \\ 0, & t_0 < t_1, \quad t_0 > t_2 \end{cases}$

- $\int_{t_1}^{t_2} \delta(\tau - t)\delta(t - t_0)\, dt = \delta(t - t_0),\ t_1 < t_0 < t_2$

# Ιδιότητες Κρουστικής Συνάρτησης (3/3)

Η παράγωγος της συνάρτησης Δέλτα είναι μία ψευδο-συνάρτηση, η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $A\,\delta'(t-t_0)=0, \quad t\neq t_0$
- $t\,\delta'(t)=-\delta(t)$
- $\delta'(-t)=-\delta'(t)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} A\,\delta'(t-t_0)\,dt=0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)A\,\delta'(t-t_0)\,dt=-A\,x'(t_0)$
- $\delta'(t)*x(t)=x'(t)$
- $x(t)*\delta'(t-t_0)=-x'(t_0)\,\delta(t-t_0)$

Ο αστερίσκος (*) υποδηλώνει την πράξη της συνέλιξης, που θα μελετήσουμε σε επόμενη διάλεξη.

# Σχόλια για την Κρουστική Συνάρτηση (1/2)

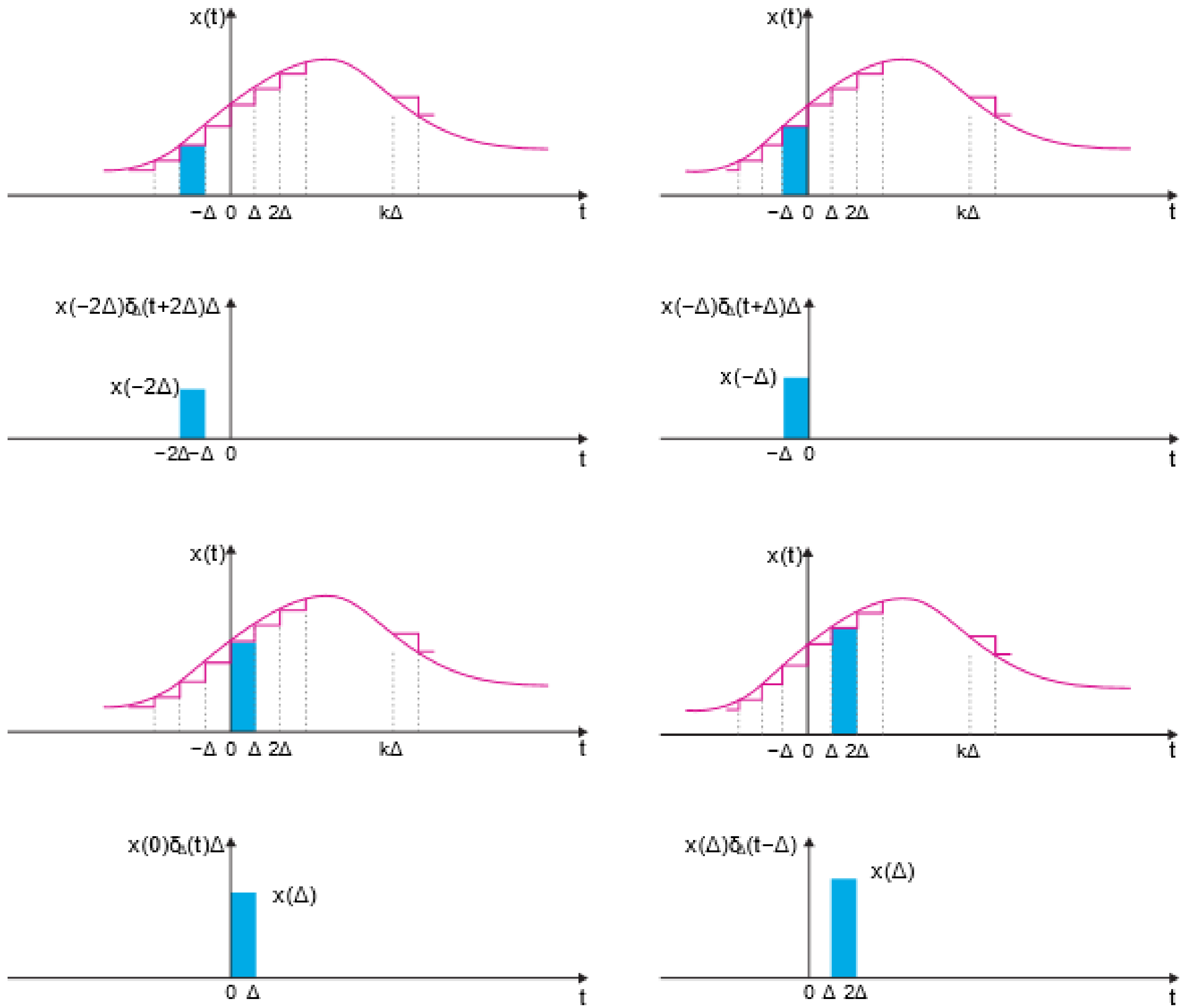
- Ο πολλαπλασιασμός μίας συνάρτησης φ(t) (συνεχής στο t=0) με τη συνάρτηση Δέλτα δίνει την ίδια τη συνάρτηση Δέλτα με πλάτος την τιμή της συνάρτησης φ(t) στη χρονική στιγμή που ορίζεται η συνάρτηση Δέλτα, δηλαδή στο t=0.
- Αν η συνάρτηση Δέλτα μετατοπιστεί στη χρονική στιγμή $t_0$ και πολλαπλασιαστεί με τη συνάρτηση φ(t) τότε το αποτέλεσμα είναι η συνάρτηση Δέλτα με πλάτος $φ(t_0)$. Άρα, πολλαπλασιάζοντας μια συνεχή συνάρτηση φ(t) με τη συνάρτηση Δέλτα και με χρονικά μετατοπισμένες εκδοχές της, λαμβάνουμε δείγματα της συνάρτησης φ(t).
- Ενώ η χρονική διάρκεια της κρουστικής συνάρτησης δ(t) τείνει στο μηδέν, το εμβαδόν της παραμένει πάντα ίσο με την μονάδα. Το αποτέλεσμα αυτό είναι εξαιρετικά σημαντικό καθώς διαφοροποιεί τη συνάρτηση Δέλτα από οποιονδήποτε άλλο παλμό (τετραγωνικής ή άλλης μορφής) με οσοδήποτε μικρή χρονική διάρκεια αυτός έχει.

# Σχόλια για την Κρουστική Συνάρτηση (2/2)

- Ένας παλμός πολύ μικρής διάρκειας και σταθερού πλάτους έχει μικρό εμβαδό, οπότε εφαρμοζόμενος στην είσοδο ενός συστήματος η επίδρασή του μπορεί να είναι αμελητέα. Αντίθετα, η συνάρτηση Δέλτα έχει πάντα εμβαδό ένα, άρα εφαρμοζόμενη στην είσοδο ενός συστήματος προκαλεί πάντα μια μη αμελητέα επίδραση στο σύστημα.
- Η συνάρτηση Δέλτα περιέχει άπειρες απλές συχνότητες, όλες με πλάτος ένα. Το γεγονός αυτό μας βοηθάει στη μελέτη των συστημάτων συνεχούς χρόνου στο πεδίο της συχνότητας.

# 3. Αναπαράσταση Σημάτων με τη Συνάρτηση Δέλτα

# Αναπαράσταση Σημάτων με τη Συνάρτηση Δέλτα



# Αναπαράσταση Σημάτων με τη Συνάρτηση Δέλτα

Κάθε σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός χρονικώς μετατοπισμένων συναρτήσεων $\delta_\Delta(t)$.

<u>Απόδειξη</u>:

- Γνωρίζουμε ότι $\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$, όπου $\delta_\Delta(t)$ είναι η παράγωγος του τετραγωνικού παλμού $u_\Delta(t)$. Δηλαδή: $\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt} = \begin{cases} 1/\Delta, & 0 \le t < \Delta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

- Επειδή $y(t) = x(t)\ \delta_\Delta(t)$ το σήμα $y(t)$ θα είναι παντού μηδέν εκτός από την χρονική περιοχή $0 \le t < \Delta$. Αν το χρονικό εύρος Δ του παλμού είναι πάρα πολύ μικρό, τότε η τιμή του $y(t)$ στην περιοχή $0 \le t < \Delta$ παραμένει προσεγγιστικά σταθερή και ίση με $y(0)$. Έτσι, γράφουμε $x(t)\ \delta_\Delta(t) \approx x(0)\ \delta_\Delta(t)$, η οποία υπολογισμένη στο όριο όταν $\Delta \to 0$, είναι η γνωστή ιδιότητα $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$. Στη γενική μορφή γράφεται $x(t)\ \delta(t - t_0) = x(t_0)\ \delta(t - t_0)$.

# Αναπαράσταση Σημάτων με τη Συνάρτηση Δέλτα

- Έτσι, ο πολλαπλασιασμός ενός σήματος $x(t)$ με μία χρονικά μετατοπισμένη συνάρτηση $\delta_{\Delta}(t)$ αποκόπτει ένα τμήμα (εύρους Δ) του σήματος. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το συνολικό σήμα $x(t)$ προέρχεται από τη συνένωση άπειρων τέτοιων στοιχειωδών σημάτων, που σε μαθηματική μορφή γράφεται

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta)\,\delta_{\Delta}(t - n\Delta)\Delta$$

- Όταν η διάρκεια $\Delta \to 0$ τότε το $\tilde{x}(t)$ προσεγγίζει το $x(t)$ από τη σχέση:

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \tilde{x}(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta)\,\delta_{\Delta}(t - n\Delta)\Delta$$

- Θέτοντας $\tau = n\Delta$, το παραπάνω άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)\,d\tau$$

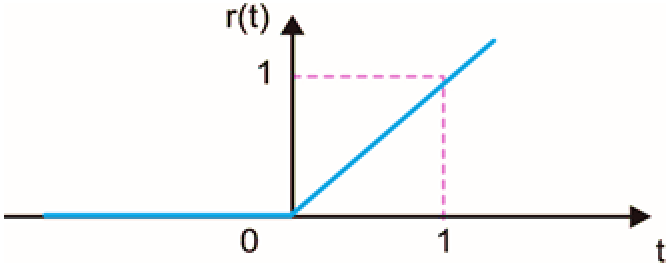
- Η σχέση αυτή είναι εξόχως σημαντική στη μελέτη σημάτων και συστημάτων συνεχούς χρόνου και περιγράφει ένα οποιοδήποτε σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ με τη βοήθεια της συνάρτησης Δέλτα $\delta(t - \tau)$. Η πράξη μεταξύ των σημάτων $x(t)$ και $\delta(t)$ ονομάζεται **συνέλιξη**.

# 4. Συνάρτηση Μοναδιαίας Κλίσης (Ράμπα)

# Συνάρτηση Μοναδιαίας Κλίσης

Η συνάρτηση **μοναδιαίας κλίσης** συνεχούς χρόνου, ορίζεται από τη σχέση:

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases} \quad \text{η} \quad r(t) = t\,u(t)$$




Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[t\,u(t)] = u(t)$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) d(\tau)$$

$$\delta(t) = \frac{d''r(t)}{dt''}$$

# 5. Εκθετικά Σήματα

# Εκθετικά Σήματα

Γενικός ορισμός εκθετικού σήματος:

$$x(t) = A\beta^{st}$$

όπου:

- Το $A$ ονομάζεται **πλάτος** του σήματος
- Το $\beta$ είναι κάποιος πραγματικός αριθμός, με συνηθέστερη τιμή $\beta = e = 2{,}171828$.
- Το $s$ μπορεί να παίρνει πραγματικές (θετικές ή αρνητικές) ή μιγαδικές τιμές και καθορίζει σε σημαντικό βαθμό τη συμπεριφορά του σήματος.

Ακολουθεί ανάλυση με βάση τις διαφορετικές τιμές του $s$.

# Πραγματικά Εκθετικά Σήματα (1/2)

**(α) s αρνητικός**

Αν $s = -1/T,$ το σήμα γράφεται $x(t) = Ae^{-t/T}$.

Το Τ ονομάζεται **σταθερά χρόνου** και περιγράφει την ταχύτητα με την οποία ελαττώνεται το σήμα.

- Για $t = T$ έχουμε: $x(T) = A\, e^{-1} = 0{,}368\, A$
- Για $t = 5T$ έχουμε: $x(T) = A\, e^{-5} = 0{,}0067\, A$

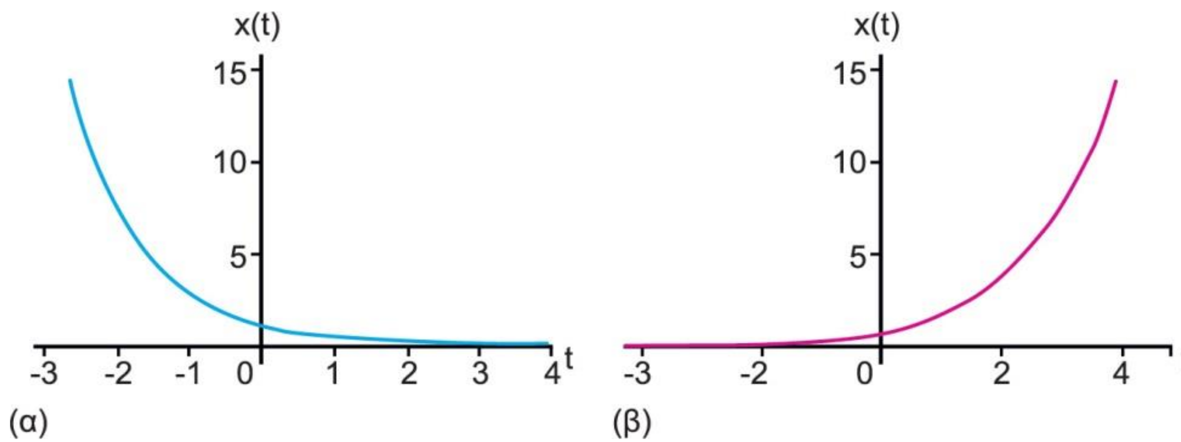
Παρατηρούμε ότι μετά από την πάροδο **πέντε (5) μονάδων χρόνου**, το εκθετικό σήμα λαμβάνει μία **αμελητέα τιμή** σε σχέση με το πλάτος του.

# Πραγματικά Εκθετικά Σήματα (2/2)

**(β) s θετικός**

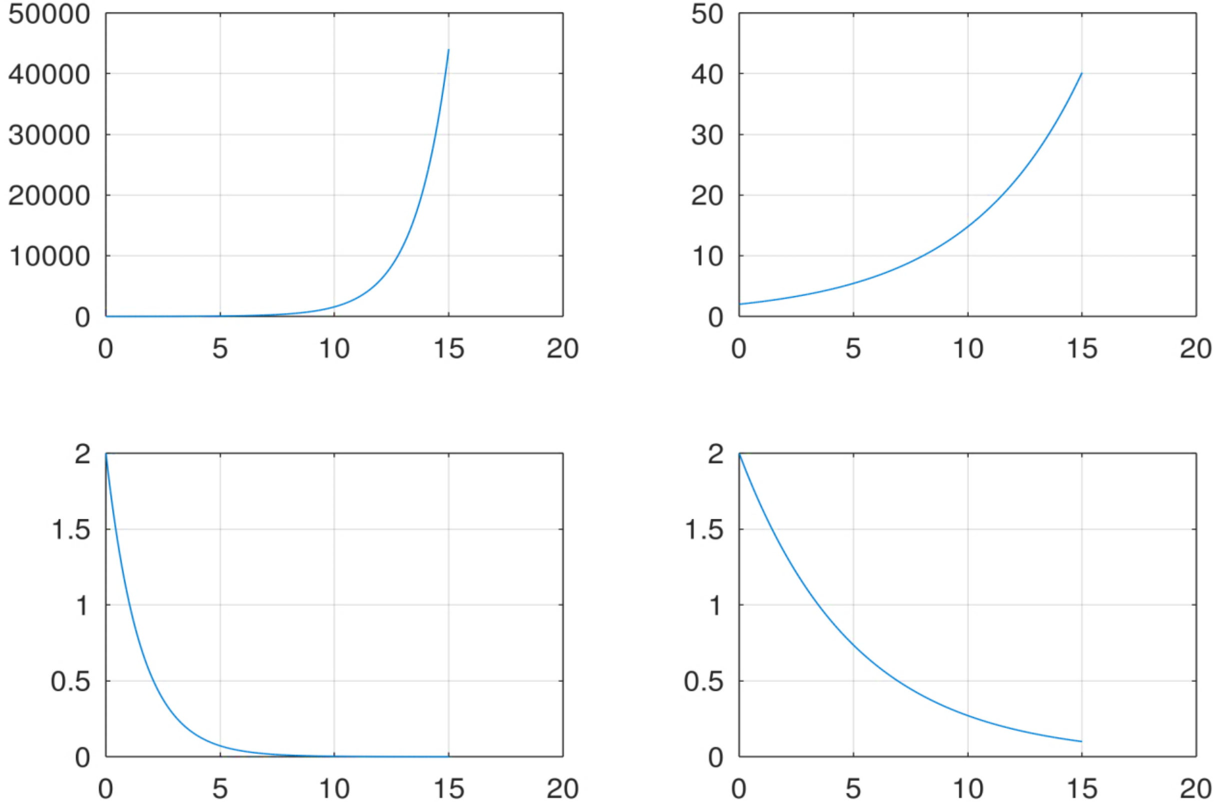
Αν $s = 1/T$, το σήμα γράφεται $x(t) = Ae^{t/T}$.

Τα συμπεράσματα είναι ανάλογα με την προηγούμενη περίπτωση.




Εκθετικό σήμα για $s = -1/T$ Εκθετικό σήμα για $s = 1/T$

# Παράδειγμα Εκθετικού Σήματος




Το σήμα $x(t) \ = 2\, e^{-t/T}$

Επάνω για θετικό εκθέτη (T=-1,5 και T=-5)

Κάτω για αρνητικό εκθέτη (T=1,5 και T=5)

# Σχέσεις του Euler

Στην ανάλυση των μιγαδικών συναρτήσεων χρησιμοποιείται συχνά η σχέση του **Euler**, δηλαδή:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + jsin(\theta)$$

Θέτοντας στην παραπάνω σχέση $\varphi = -\varphi$ έχουμε:

$$e^{-j\theta} = \cos(\theta) - jsin(\theta)$$

Προσθαφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, αποκτούμε τις αντίστροφες σχέσεις του Euler που εκφράζουν τις συναρτήσεις συνημιτόνου και ημιτόνου σε ισοδύναμες μιγαδικές μορφές:

$$cos\theta = \frac{1}{2}\left[e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right]$$

$$j\ sin\theta = \frac{1}{2}\left[e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right]$$

# Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα

Αν $s = j\Omega_0$ το σήμα γράφεται $x(t) = A\, e^{j\Omega_0 t},$ όπου το $j = \sqrt{-1}$ είναι η φανταστική μονάδα.

Τα εκθετικά μιγαδικά σήματα δεν έχουν φυσική υπόσταση αλλά χρησιμοποιούνται στη μελέτη των σημάτων, καθώς απλουστεύουν την άλγεβρα των πράξεων.

Με βάση τις σχέσεις του Euler, έχουμε:

$$A\, cos(\Omega_0 t + \varphi) = A\, Re\{e^{j(\Omega_0 t+\varphi)}\}$$

$$A\, sin(\Omega_0 t + \varphi) = A\, Im\{e^{j(\Omega_0 t+\varphi)}\}$$

όπου $Re\{.\}$ και $Im\{.\}$ το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού, αντίστοιχα.

Επομένως, ένα σήμα **συνημιτόνου** μπορεί να θεωρηθεί ως το **πραγματικό μέρος** ενός μιγαδικού εκθετικού σήματος και ένα **ημιτονικό** ως το **φανταστικό μέρος** του.

# Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα

Ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί επίσης και ως:

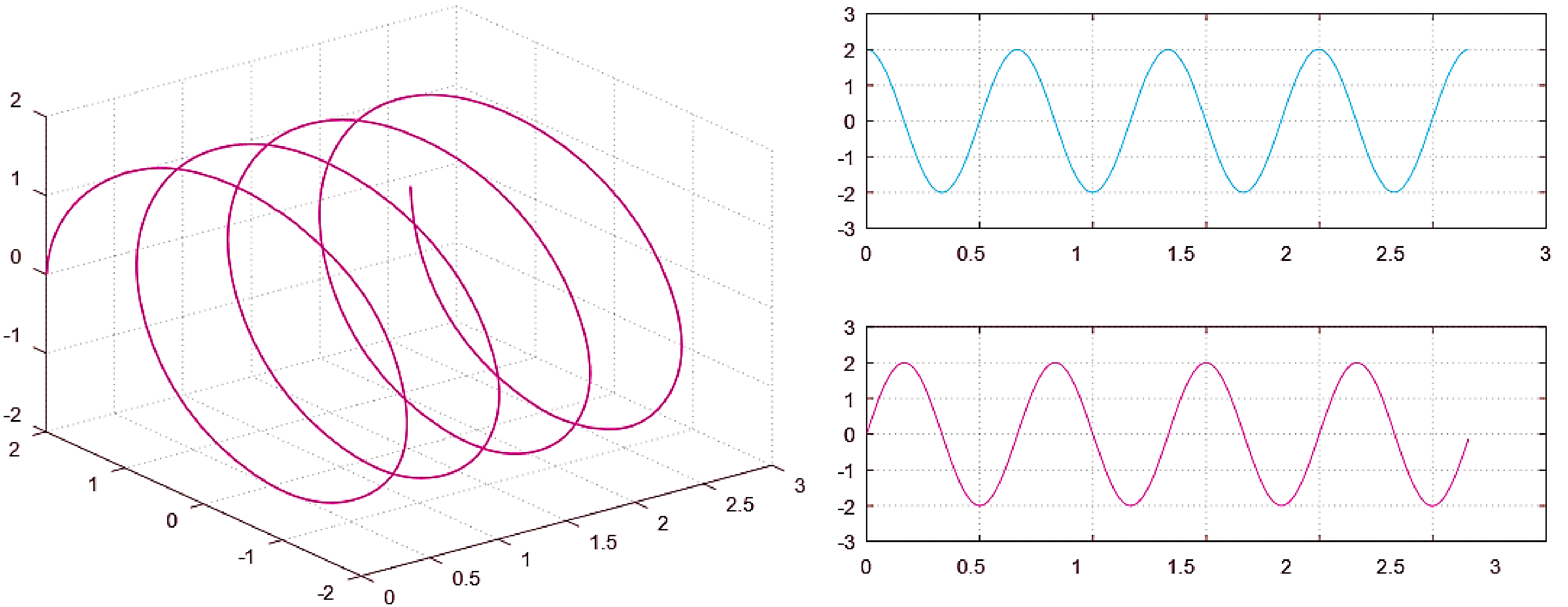
$$x(t) = A\, e^{j(\Omega_0 t+\varphi)} = X\, e^{j\Omega_0 t}$$

όπου η ποσότητα $X = A\, e^{j\varphi}$ ονομάζεται **μιγαδικό πλάτος** του σήματος.

Επειδή το σήμα μπορεί να γραφεί και ως:

$$x(t) = A\, e^{j(\Omega_0 t+\varphi)} = A\, cos\Omega_0 t + j\, A\, sin\, \Omega_0 t$$

- Συμπεραίνουμε ότι το μιγαδικό εκθετικό σήμα $x(t)$ είναι ένα **περιοδικό σήμα** με **θεμελιώδη περίοδο** $T_0 = 2\pi/\Omega_0\ (sec)$.
- Η **συχνότητα** του σήματος δίνεται από τη σχέση $f_0 = \Omega_0/2\pi\ (Hertz)$, όπου $\Omega_0$ $(rad/\mathrm{sec})$ είναι η κυκλική συχνότητα.
- Η ποσότητα $\varphi$ ονομάζεται **φάση** και είναι ένα μέτρο της σχετικής θέσης στο χρόνο για χρονικό διάστημα μίας περιόδου.

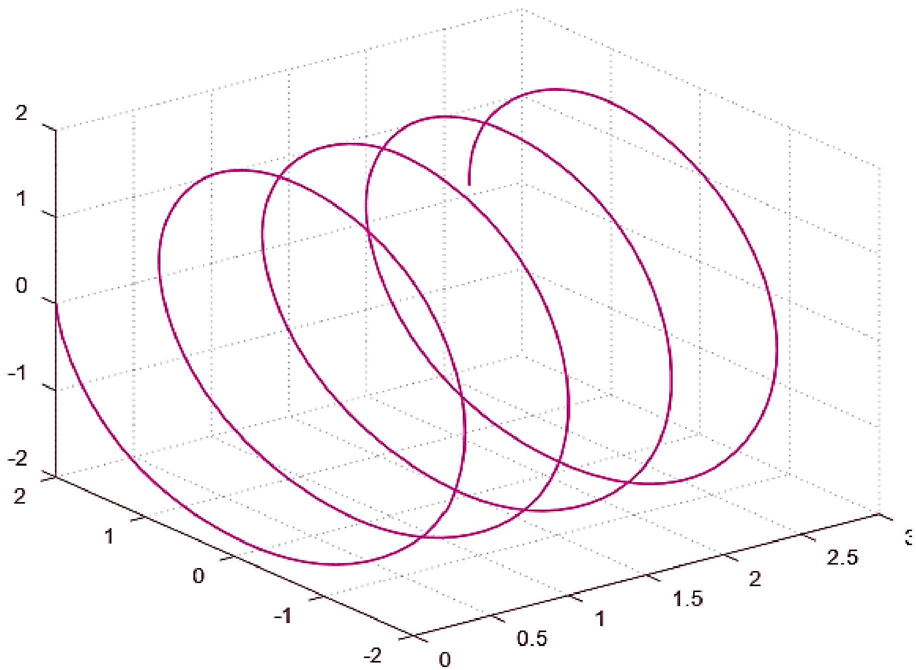


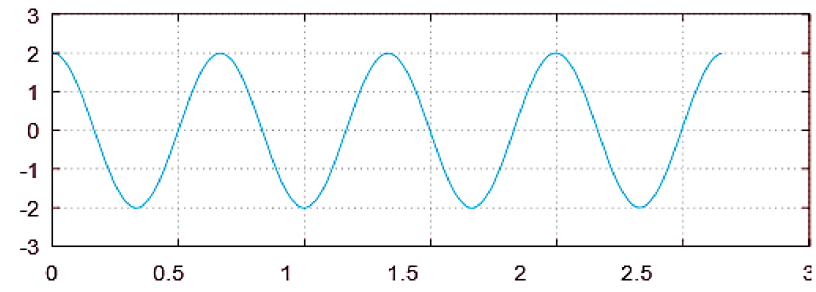

(α) Μιγαδικό εκθετικό σήμα $x(t) = 2\, e^{j3\pi t}$
(β) Πραγματικό μέρος, (γ) Φανταστικό μέρος

# Παρατηρήσεις

Από το παραπάνω διάγραμμα διαπιστώνουμε ότι:

- Το τρισδιάστατο διάγραμμα (α) είναι η απεικόνιση του μιγαδικού εκθετικού σήματος σε χώρο τριών διαστάσεων. Ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στον χρόνο.
- Οι 4 σπείρες του διαγράμματος (α) αντιστοιχούν στην απαίτηση της εκφώνησης για σχεδίαση σε χρονική διάρκεια ίση με τεσσάρων περιόδων.
- Η φορά περιστροφής του διαγράμματος (α) είναι ίδια με την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού (δεξιόστροφη).
- Η προβολή του διαγράμματος (α) σε επιμέρους άξονες παράγει τα διαγράμματα (β) και (γ). Το διάγραμμα (β) απεικονίζει την πραγματική συνιστώσα (συνάρτηση συνημίτονο), ενώ το διάγραμμα (γ) απεικονίζει τη φανταστική συνιστώσα (συνάρτηση ημίτονο). Και στα διαγράμματα αυτά είναι εμφανές ότι η χρονική διάρκεια είναι επίσης ίση με τεσσάρων περιόδων.
- Και οι δύο συνιστώσες είναι περιοδικές με την ίδια περίοδο, άρα και το άθροισμά τους, δηλαδή το μιγαδικό εκθετικό σήμα, επιβεβαιώνεται ότι είναι επίσης περιοδικό σήμα με την ίδια περίοδο.





(δ) Μιγαδικό εκθετικό σήμα $x(t) = 2\,e^{-j3\pi t}$

(ε) Πραγματικό μέρος, (στ) Φανταστικό μέρος

# Παρατηρήσεις

Από το παραπάνω διάγραμμα διαπιστώνουμε ότι:

- Το τρισδιάστατο διάγραμμα (δ) είναι ίδιο με το (α) με μοναδική διαφορά την φορά περιστροφής. Στην περίπτωση του σήματος η φορά περιστροφής είναι αντίθετη με την φορά των δεικτών του ρολογιού (αριστερόστροφη). Η αλλαγή αυτή οφείλεται στο αρνητικό πρόσημο στον μιγαδικό εκθέτη.
- Το διάγραμμα (ε) απεικονίζει την πραγματική συνιστώσα (συνάρτηση συνημίτονο), η οποία παραμένει με του διαγράμματος (β).
- Το διάγραμμα (στ) απεικονίζει τη φανταστική συνιστώσα (συνάρτηση ημίτονο), η οποία έχει διαφορά φάσης $\pi$ ($180^o$) σε σχέση με το διάγραμμα ($\gamma$). Και αυτή η αλλαγή οφείλεται στο αρνητικό πρόσημο στον μιγαδικό εκθέτη.

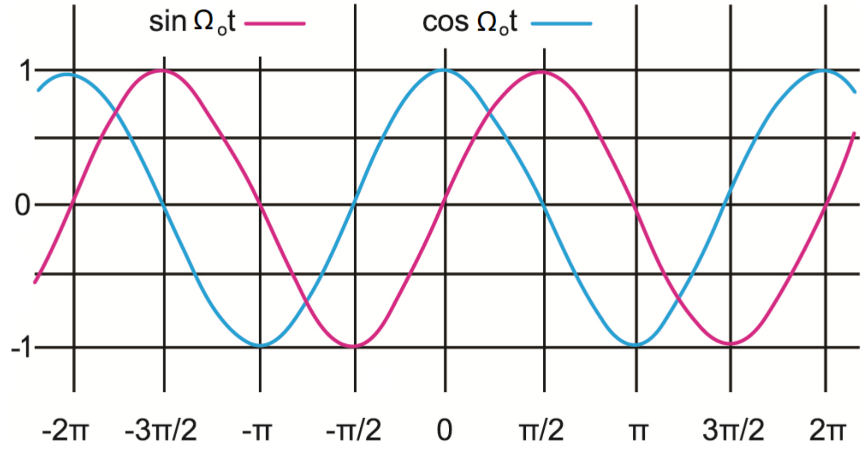
# 6. Ημιτονοειδή Σήματα

# Ημιτονοειδή Σήματα

Η γενική σχέση που περιγράφει ένα ημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου είναι:

$$x(t) = A\cos(\Omega_0 t + \theta) = A\sin(\Omega_0 t + \theta + \pi/2)$$

Οι συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου εμφανίζουν μία σταθερή διαφορά φάσης $\pi/2$ ($90^o$).




Το ημιτονοειδές σήμα είναι περιοδικό με **θεμελιώδη περίοδο** $T_0 = 2\pi/\Omega_0$ $(sec)$ και **συχνότητα** $f_0 = \Omega_0/2\pi = 1/T_0$ $(Hertz)$. Η ποσότητα $\varphi$ ονομάζεται γωνία φάσης ή απλά **φάση**.

Τα ημιτονοειδή είναι μία ιδιαίτερα χρήσιμη κατηγορία περιοδικών σημάτων, επειδή αντιστοιχούν σε πολλά σήματα του πραγματικού κόσμου, όπως τα ηχητικά κύματα, τα ηλεκτρικά ρεύματα, κλπ.

Επιπλέον, σήματα που δεν είναι ημιτονοειδή μπορούν να γραφούν ως άθροισμα ημιτονοειδών σημάτων με την **ανάλυση Fourier**.

# Διαμορφώσεις

Μπορούμε να εκφράσουμε μία ημιτονοειδή συνάρτηση από τη σχέση:

$$\boldsymbol{x(t) = A(t)\,[\,cos(\Omega(t)\,t + \theta(t))\,]}$$

στην οποία οι όροι A(t), Ω(t) και θ(t) καθορίζονται ως συνάρτηση ενός σήματος m(t), το οποίο μεταφέρει κάποια χρήσιμη πληροφορία (μήνυμα).

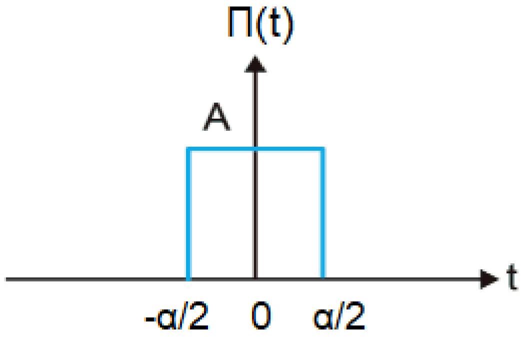
Διακρίνουμε τους ακόλουθους τύπους διαμόρφωσης (modulation), που χρησιμοποιούνται για τη μετάδοση του μηνύματος μέσα από ένα κανάλι επικοινωνίας:

- **Διαμόρφωση Πλάτους** (Amplitude Modulation – AM): Το πλάτος A(t) αλλάζει σύμφωνα με το μήνυμα m(t), ενώ η συχνότητα και η φάση δεν επηρεάζονται.
- **Διαμόρφωση Συχνότητας** (Frequency Modulation – FM): Η συχνότητα Ω(t)αλλάζει σύμφωνα με το μήνυμα m(t), ενώ το πλάτος και η φάση δεν επηρεάζονται.
- **Διαμόρφωση Φάσης** (Phase Modulation – PM): Η φάση θ(t) αλλάζει σύμφωνα με το μήνυμα m(t), ενώ το πλάτος και η συχνότητα δεν επηρεάζονται.

# 7. Τετραγωνικός Παλμός

# Τετραγωνικός Παλμός

Τετραγωνικός παλμός διάρκειας $\alpha$ και πλάτους $A$:




$$\Pi_\alpha(t-t_0) = rect\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = \begin{cases} A, & |t-t_0| < \alpha/2 \\ 0, & |t-t_0| > \alpha/2 \end{cases}$$

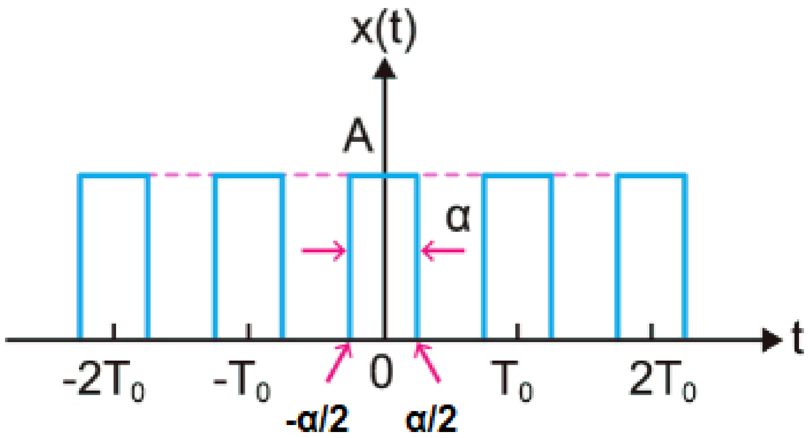
- Ο τετραγωνικός παλμός μπορεί να παραχθεί από την αφαίρεση δύο συναρτήσεων μοναδιαίου βήματος, δηλαδή από τη σχέση:

$$\Pi_\alpha(t-t_0) = rect\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = A\left[u\left(t-\left(t_0-\frac{\alpha}{2}\right)\right) - u\left(t-\left(t_0+\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right]$$

- Ο τετραγωνικός παλμός είναι ένα σήμα με άρτια συμμετρία.
- Όταν ο τετραγωνικός παλμός πολλαπλασιαστεί με ένα σήμα, τότε αποκόπτει ένα συγκεκριμένο τμήμα του σήματος. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να αποσπάσουμε ένα τμήμα του σήματος για περαιτέρω επεξεργασία.

# Συρμός Τετραγωνικών Παλμών

Επαναλαμβανόμενοι παλμοί με περίοδο $T_0$ δημιουργούν ένα συρμό παλμών, ο οποίος είναι περιοδικό σήμα με περίοδο $T_0$ και διάρκεια παλμού $\alpha$.




Ο συρμός τετραγωνικών παλμών είναι περιοδικό σήμα με περίοδο $T_0$ και διάρκεια κάθε παλμού ίση με α.

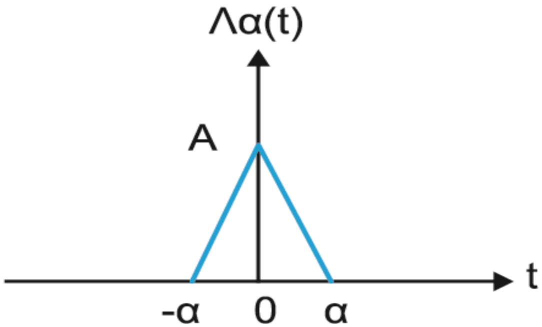
Ο συρμός τετραγωνικών παλμών έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στις ψηφιακές επικοινωνίες επειδή περιγράφει τις μεταδιδόμενες παλμοσειρές δυαδικών ψηφίων, οι οποίες περιγράφουν τα δείγματα ενός ψηφιακού σήματος.

# 8. Τριγωνικός Παλμός

# Τριγωνικός Παλμός

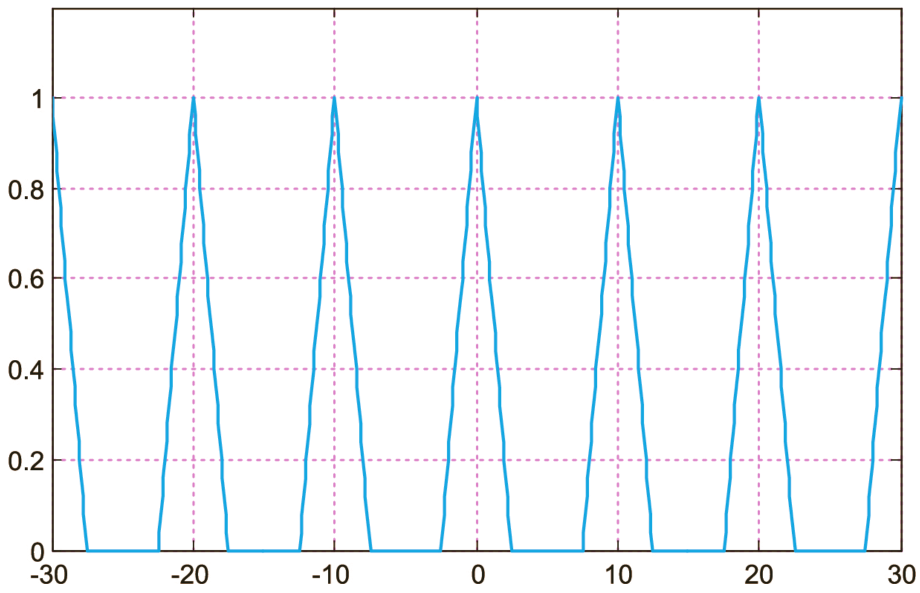
Τριγωνικός παλμός διάρκειας $2\alpha$ και πλάτους $A$:

$$tri\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = \Lambda_\alpha(t-t_0) = \begin{cases} A\left(1-\frac{|t-t_0|}{a}\right), & |t-t_0| < a \\ 0, & |t-t_0| > \alpha \end{cases}$$




- Ο τριγωνικός παλμός είναι ένα σήμα με άρτια συμμετρία.
- Προσοχή στη διάρκεια (εύρος) του τριγωνικού παλμού $\Lambda_\alpha(t)$. Είναι $2\alpha$ και όχι $\alpha$ όπως είναι στον τετραγωνικό $\Pi_\alpha(t)$.
- Όταν ο τριγωνικός παλμός πολλαπλασιαστεί με ένα σήμα, τότε αποκόπτει ένα συγκεκριμένο τμήμα του σήματος δίνοντας όμως μεγαλύτερο βάρος στις τιμές του σήματος που βρίσκονται στο κέντρο του παλμού.

# Συρμός Τριγωνικών Παλμών

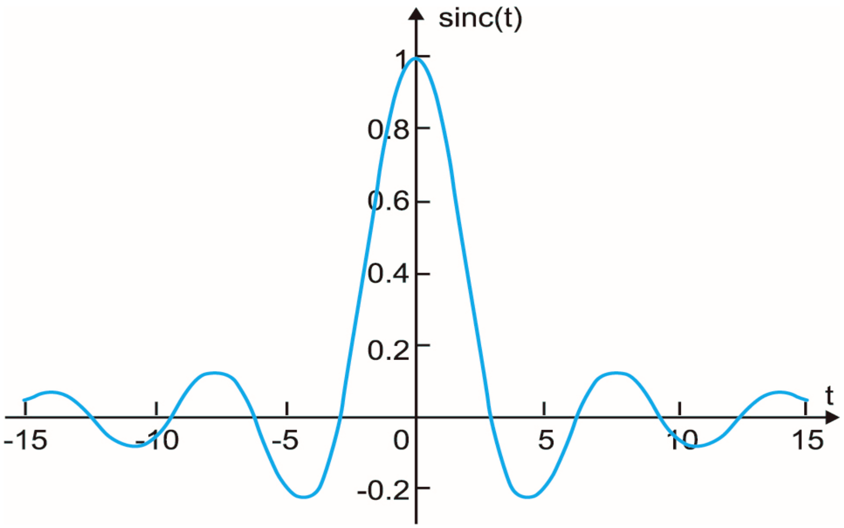



Επαναλαμβάνοντας έναν τριγωνικό παλμό μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν συρμό τριγωνικών παλμών, το οποίο είναι περιοδικό σήμα με περίοδο $T_0$ και διάρκεια κάθε παλμού ίση με $2\alpha$.

# 9. Συνάρτηση Δειγματοληψίας

# Συνάρτηση Δειγματοληψίας

Συνάρτηση δειγματοληψίας:




$$sinc(t) = \begin{cases} \sin(t)/t & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>:

- Η συνάρτηση $sinc(t)$ έχει άρτια συμμετρία.
- Διέρχεται περιοδικά από το μηδέν για $t = \pm n\pi, \quad n = 1,2 \ldots$
- Το ύψος των δευτερευόντων λοβών μειώνεται ασυμπτωτικά προς το μηδέν.
- Οι μέγιστες και οι ελάχιστες τιμές της συμβαίνουν περίπου στο μέσο των αποστάσεων μεταξύ των σημείων μηδενισμού, δηλαδή περίπου για $t = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, όπου $|sint| = 1$.

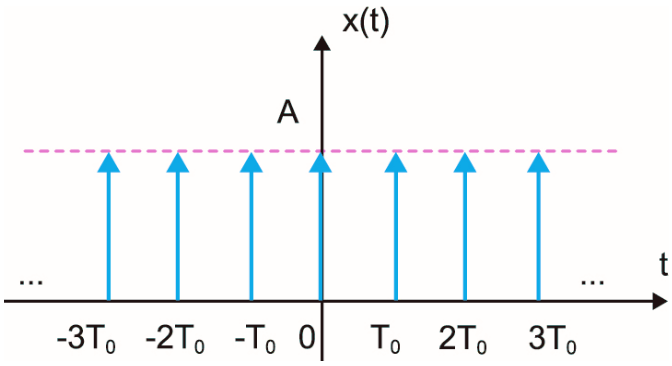
# 10. Συρμός κρουστικών συναρτήσεων (σήμα Comb)

# Συρμός κρουστικών συναρτήσεων (comb)

Αν επαναλάβουμε τη συνάρτηση $\delta(t)$ με περίοδο $T_0$, δημιουργούμε τον «συρμό κρουστικών συναρτήσεων» (συνάρτηση $comb$):

$$comb(t) = A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

Αποδεικνύεται ότι η σειρά του δεξιού μέλους, συγκλίνει. Έτσι, η συνάρτηση $comb(t)$ είναι δυνατό να οριστεί.



# Δειγματοληψία Σήματος Συνεχούς Χρόνου (1/2)

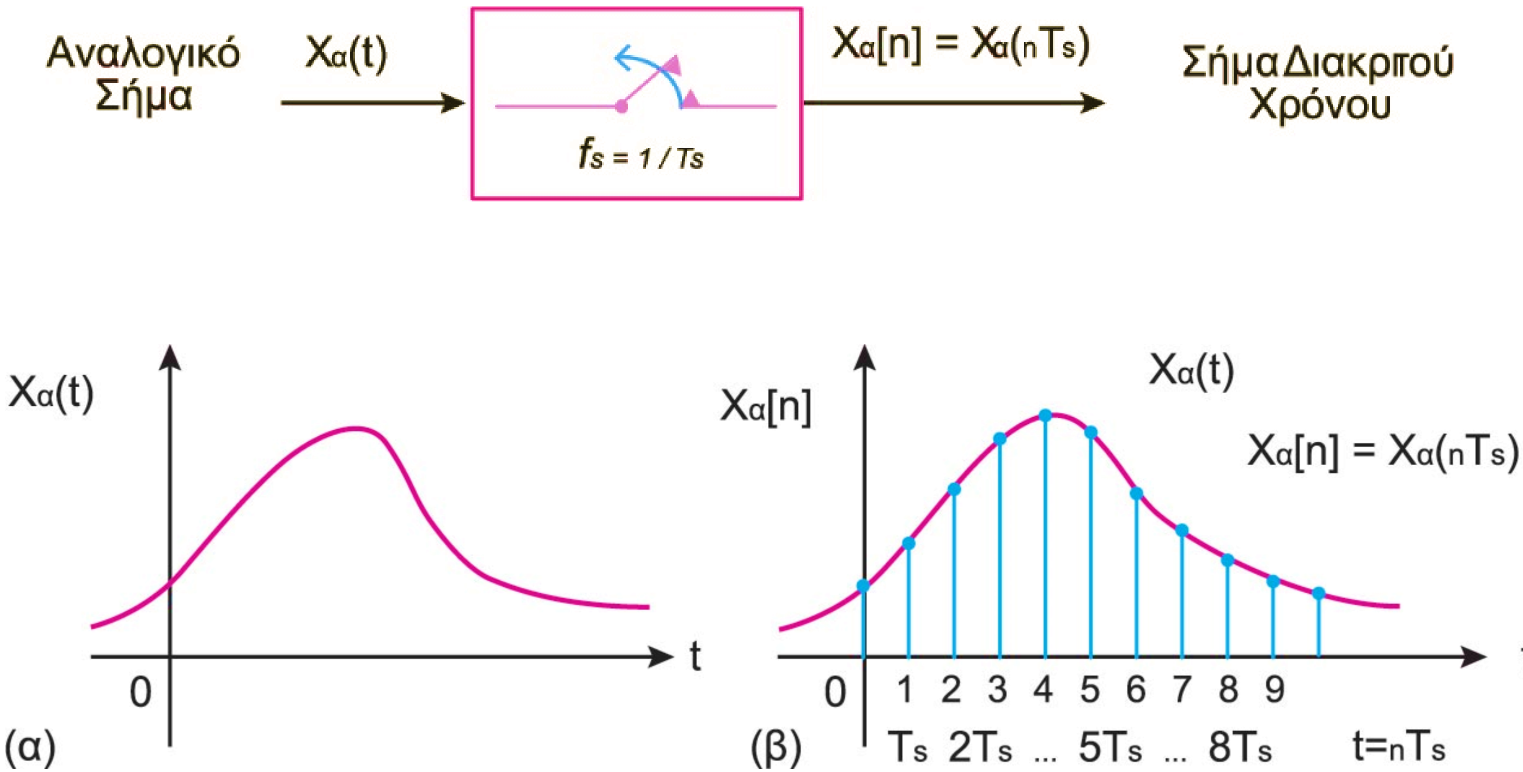
Με τη συνάρτηση $comb(t)$ υλοποιούμε τη **δειγματοληψία** ενός σήματος συνεχούς χρόνου $x(t)$ με περίοδο δειγματοληψίας $T_0$ ίση με την περίοδο της $comb(t)$.

Το σήμα συνεχούς πλάτους και διακριτού χρόνου $x_s(t)$, που προκύπτει από τη δειγματοληψία του σήματος $x(t)$ με περίοδο δειγματοληψίας $T_0$, είναι:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_0)\,\delta(t - nT_0) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$$

Οι συναρτήσεις $\delta(t - nT_0)$ επιτρέπουν την καταγραφή των τιμών του σήματος $x(t)$ κατά τις χρονικές στιγμές $nT_0$ όπου $n = -\infty, \dots, -1,0,1, \dots, \infty$, οδηγώντας έτσι στη δειγματοληψία του σήματος $x(t)$.

# Δειγματοληψία Σήματος Συνεχούς Χρόνου (2/2)

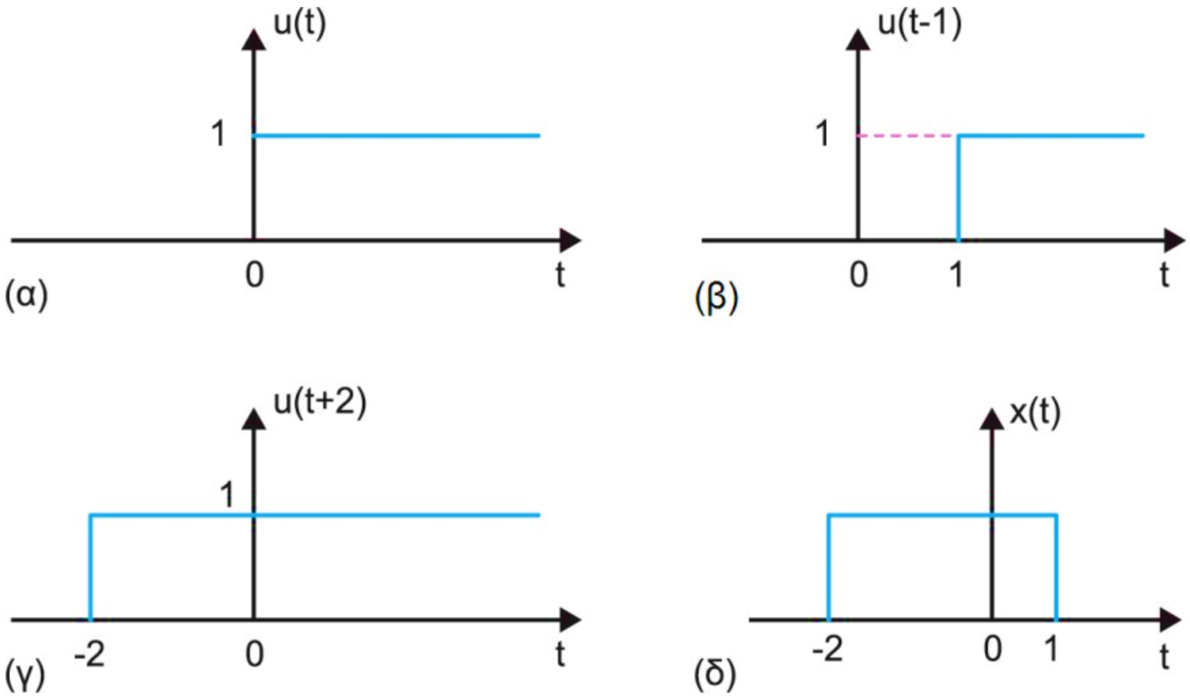



Διαδικασία δειγματοληψίας αναλογικού σήματος

# Άσκηση 1

Να σχεδιάσετε το σήμα $x(t) \ = \ u(t+2) - u(t-1)$

<u>Απάντηση</u>: Στα σχήματα (α) – (δ) απεικονίζονται τα βήματα δημιουργίας του $x(t)$ (σχήμα δ), το οποίο είναι το άθροισμα των $u(t), u(t-1)$ και $u(t+2)$ (σχήματα α, β και γ, αντίστοιχα).



# Άσκηση 2

Δίνεται το ασυνεχές σήμα $x(t) = cos(2\pi t)[u(t) - u(t-1)]$.
(α) Να αναπαρασταθεί ως άθροισμα συνεχών σημάτων και μοναδιαίων βηματικών συναρτήσεων. (β) Να βρεθεί η παράγωγός του.

<u>Απάντηση</u>: (α) Το δοθέν σήμα είναι μία περίοδος του $\cos(2\pi t)$ από το 0 μέχρι το 1 και μηδέν οπουδήποτε αλλού. Έχει ασυνέχειες στις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 1$. Αν απαλείψουμε τον παλμό $u(t) - u(t-1)$ από το σήμα $x(t)$, τότε λαμβάνουμε ένα συνεχές σήμα, αλλά για να αντισταθμίσουμε την απαλοιφή πρέπει να εισάγουμε έναν μοναδιαίο παλμό μεταξύ των $t = 0$ και $t = 1$. Οπότε έχουμε:

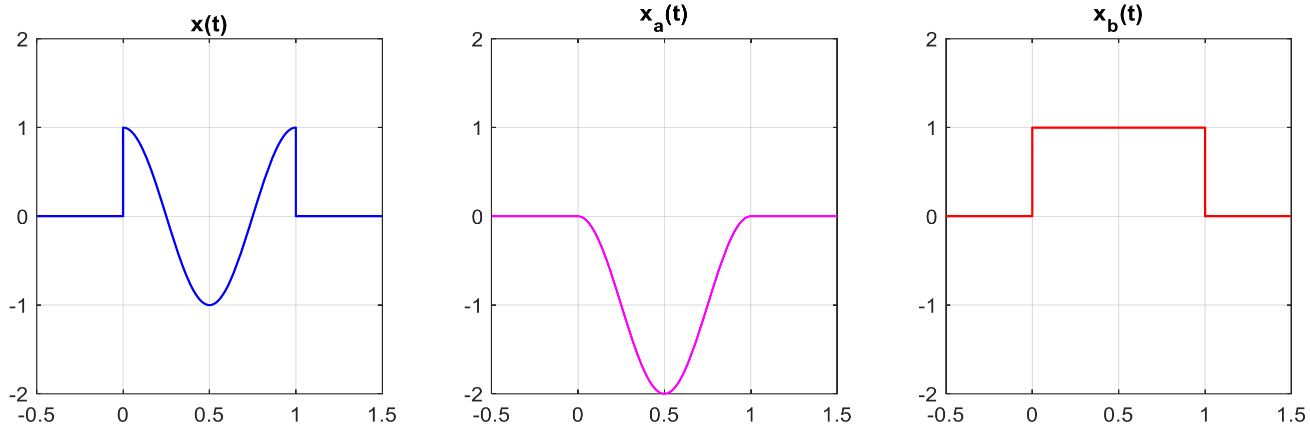
$$\begin{aligned} x(t) &= (cos(2\pi t) - 1)[u(t) - u(t-1)] + [u(t) - u(t-1)] \\ &= x_a(t) + x_b(t) \qquad\qquad (1) \end{aligned}$$

όπου: $x_a(t) = (cos(2\pi t) - 1)[u(t) - u(t-1)]$ και $x_b(t) = u(t) - u(t-1)$.

Ο όρος $x_a(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση ενώ ο όρος $x_b(t)$ είναι ασυνεχής συνάρτηση.

Η γραφική παράσταση των κυματομορφών δείχνεται στο επόμενο σχήμα.

# Άσκηση 2




Κυματομορφές σημάτων: (α) $x_a(t)$, (β) $x_b(t)$, (γ) $x(t) = x_a(t) + x_b(t)$

(β) Επειδή $du(t)/dt = \delta(t)$, η παράγωγος του δοθέντος σήματος (1) είναι:

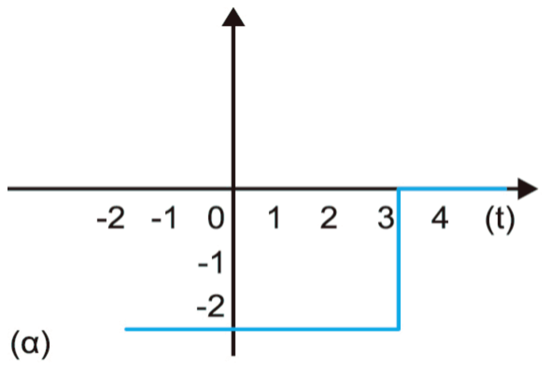
$$\frac{dx(t)}{dt} = -2\pi \sin(2\pi t)[u(t) - u(t-1)]$$

$$+(cos(2\pi t) - 1)[\delta(t) - \delta(t-1)] + \delta(t) - \delta(t-1)$$

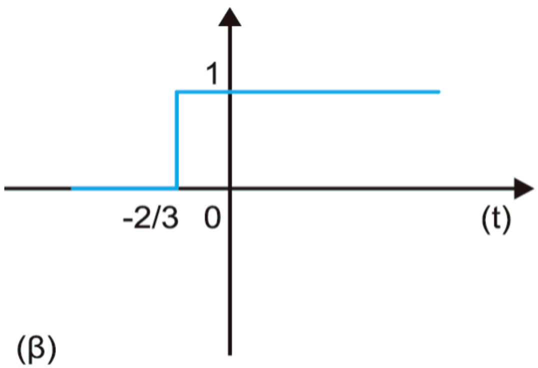
$$= -2\pi \sin(2\pi t)[u(t) - u(t-1)] + \delta(t) - \delta(t-1)$$

# Άσκηση 3

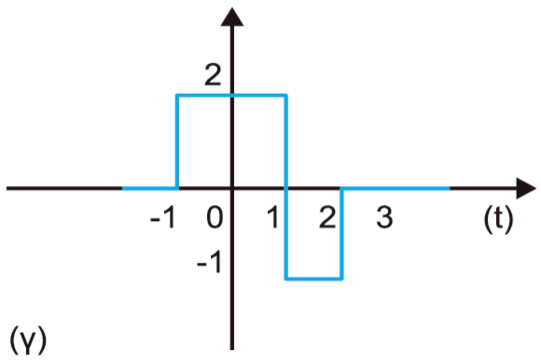
Να σχεδιάσετε τα σήματα:



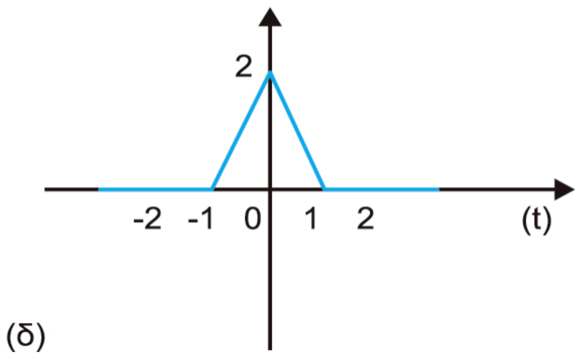

$(\alpha)\ -2u(3-t)$




$(\beta)\ u(3t+2)$




$(\gamma)\ 2u(t+1) - 3u(t-1) + u(t-2)$




$(\delta)\ 2r(t+1) - 4r(t) + 2r(t-1)$

# Άσκηση 4

Να υπολογίσετε την τιμή καθενός από τα παρακάτω ολοκληρώματα:

1) $\int_0^{+\infty}(t^2 + 3t - 1)\, \delta(t-1)\, dt$ 2) $\int_0^{+\infty}(t^2 + 3t - 1)\, \delta'(t-1)\, dt$

3) $\int_0^{+\infty}(t^2 + 3t - 1)\, \delta''(t-1)\, dt$ 4) $\int_0^{+\infty}(t^2 + 3t - 1)\delta^{(3)}(t-1)\, dt$

<u>Απάντηση</u>: Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\int_{t_1}^{t_2} \delta(\tau - t)\delta(t - t_0)\, dt = \delta(t - t_0)$, $t_1 < t_0 < t_2$, έχουμε:

1. $\int_0^{+\infty}(t^2 + 3t - 1)\delta(t-1)dt = [\, t^2 + 3t - 1\,]_{t=1} = 3$
2. $\int_0^{+\infty}(t^2 + 3t - 1)\, \delta'(t-1)\, dt = -\left[(t^2 + 3t - 1)'\,\right]_{t=1} = -5$
3. $\int_0^{+\infty}(t^2 + 3t - 1)\, \delta''(t-1)\, dt = (-1)^2 \left[(t^2 + 3t - 1)''\,\right]_{t=1} = 2$
4. $\int_0^{+\infty}(t^2 + 3t - 1)\, \delta^{(3)}(t-1)\, dt = (-1)^3 \left[(t^2 + 3t - 1)^{(3)}\right]_{t=1} = 0$

# Άσκηση 5

Να υπολογίσετε την τιμή καθενός από τα παρακάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^{+\infty} t\, u(2-t)\, u(t)\, dt$

(β) $\int_0^{+\infty} \delta\left(\frac{t}{2}-1\right)(t^2+2)\, dt$

(γ) $\int_0^{+\infty} \delta'(t-1)e^{-t}\, u(t)\, dt$

Απάντηση:

(α) $\int_0^{+\infty} t\, u(2-t)\, u(t)\, dt = \int_0^{2} t\, dt = 2$

(β) $\int_0^{+\infty} \delta\left(\frac{t}{2}-1\right)(t^2+2)\, dt$. Θέτοντας $t' = \frac{t}{2}-1$ έχουμε:

$$\int_0^{+\infty}[\delta(t')(2t'+2)^2+2]\, dt = \int_0^{+\infty} \delta(t')(4t'^2+8t'+6)\, dt = 6$$

(γ) $\int_0^{+\infty} \delta'(t-1)e^{-t}\, u(t)\, dt = [(e^{-t})']_{t=1} = e^{-1}$

# Άσκηση 6

Δίνεται το σήμα $x(t) = e^{-t}\cos(t)\,u(t)$. Να υπολογιστεί η ενέργειά του.

Απάντηση: Η ενέργεια του σήματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Ex = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2t}\cos^2(t)\,dt \leq \int_{0}^{\infty} e^{-2t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_{0}^{\infty}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to\infty} e^{-2t} - e^{0}\right) = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$$

Χρησιμοποιήσαμε την τριγωνική ανισότητα $\cos^2(t) \leq 1$.

# Άσκηση 7

Να αποδειχθεί πως το εκθετικό μιγαδικό σήμα $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$.

<u>Απάντηση</u>: Αν είναι περιοδικό το $x(t)$ θα ικανοποιεί τη σχέση $x(t+T) = x(t)$, όπου T θετικός αριθμός. Άρα:

$$e^{j\Omega_0(t+T)} = e^{j\Omega_0 t} \Rightarrow e^{j\Omega_0 t}\, e^{j\Omega_0 T} = e^{j\Omega_0 t} \Rightarrow \boldsymbol{e^{j\Omega_0 T} = 1}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Για $\boldsymbol{\Omega_0 = 0}$ έχουμε ένα σήμα σταθερών τιμών $x(t) = 1$ και επομένως είναι περιοδικό με οποιαδήποτε τιμή περιόδου.
- Για $\boldsymbol{\Omega_0 \neq 0}$ το εκθετικό μιγαδικό σήμα είναι θα περιοδικό για εκείνες τις τιμές της περιόδου $T$ που ικανοποιούν τη σχέση $\Omega_0 T = 2\pi m$. Δηλαδή:

$$T = m\frac{2\pi}{\Omega_0}\ , \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Επομένως, η θεμελιώδης περίοδος του σήματος αντιστοιχεί στην τιμή $m = 1$ και είναι η $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$.

# Άσκηση 8

Δίνονται τα σήματα $x_1(t) = rect\left(\frac{t}{2}\right)$, $x_2(t) = rect\left(\frac{t}{4}\right)$ και $x_3(t) = tri(t)$. Να υπολογιστούν και να απεικονιστούν τα σήματα:

(α) $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$

(β) $w(t) = x_1(t) + x_3(t)$

(γ) $z(t) = x_2(t) - x_1(t) - x_3(t)$

(α) Το σήμα $x_1(t)$ είναι ένας τετραγωνικός παλμός μοναδιαίου πλάτους με κέντρο το μηδέν και εύρος δύο μονάδες χρόνου:

$$x_1(t) = rect\left(\frac{t}{2}\right) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 1 \\ 0, & t < -1, t > 1 \end{cases}$$

Το σήμα $x_2(t)$ είναι ένας τετραγωνικός παλμός μοναδιαίου πλάτους με κέντρο το μηδέν και εύρος τέσσερις μονάδες χρόνου:

$$x_2(t) = rect\left(\frac{t}{4}\right) = \begin{cases} 1, & -2 < t < 2 \\ 0, & t < -2\,, t > 2 \end{cases}$$

Το σήμα $x_3(t)$ είναι ένας τριγωνικός παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο το μηδέν και εύρος δύο μονάδες χρόνου:

$$x_3(t) = tri(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{1}, & |t| < 1 \\ 0, & t < -1, t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 + t, & -1 < t < 0 \\ 1 - t, & 0 < t < 1 \\ 0, & t < -1, t > 1 \end{cases}$$

# Άσκηση 9

Για να υπολογίσουμε τα σήματα $y(t), w(t)$και $z(t)$ κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα με τα σημεία ασυνέχειας των ανισοτήτων των παραπάνω σημάτων $x_1(t)$, $x_2(t)$ και $x_3(t)$. Στις τρεις τελευταίες γραμμές υπολογίζουμε τα σήματα $y(t), w(t)$ και $z(t)$.

$-\infty \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad \infty$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1(t)$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $x_2(t)$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $x_3(t)$ | 0 | 0 | $1+t$ | $1-t$ | 0 | 0 |
| $y(t)=x_1(t)+x_2(t)$ | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 0 |
| $w(t)=x_1(t)+x_3(t)$ | 0 | 0 | $2+t$ | $2-t$ | 0 | 0 |
| $z(t)=x_2(t)-x_1(t)-x_3(t)$ | 0 | 1 | $-1-t$ | $-1+t$ | 1 | 0 |