ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΣΑΒΒΑΣ ΓΚΙΤΖΕΝΗΣ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

HEALLINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Λογισμός συναρτήσεων μιας μεταβλητής

Συγγραφή

Σταύρος Τουμπής, Σάββας Γκιτζένης

Κριτικός Αναγνώστης

Δημήτριος Χελιώτης

Γλωσσική Επιμέλεια

Θεόφιλος Τραμπούλης

ISBN: 978-960-603-183-0

ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 157 80 Ζωγράφου
http://www.kallipos.gr

Ο 1ος συγγραφέας αφιερώνει το παρόν βιβλίο
στην αδελφή του 2ου συγγραφέα.

Ο 2ος συγγραφέας αφιερώνει το παρόν βιβλίο
στη σύζυγο του 1ου συγγραφέα.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Ύλη Το βιβλίο αυτό αποτελεί μια εισαγωγή στον Απειροστικό Λογισμό συναρτήσεων μιας μεταβλητής, σε επίπεδο κατάλληλο για πρωτοετείς φοιτητές. Το βιβλίο αποτελεί μετεξέλιξη των σημειώσεων από τις παραδόσεις ενός μαθήματος Λογισμού που πραγματοποιείται τα τελευταία χρόνια από τον πρώτο συγγραφέα στο πρώτο εξάμηνο του προγράμματος σπουδών του Τμήματος Πληροφορικής του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Η ύλη αποτελείται από τρία μέρη:

1. Στο πρώτο μέρος (Κεφάλαια 1 και 2) γίνεται μια σύντομη επανάληψη βασικών εννοιών γνωστών από το Λύκειο, οι οποίες αφορούν τους πραγματικούς αριθμούς και τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής. Σημαντικό ποσοστό της ύλης αυτού του μέρους είναι γνωστό από το Λύκειο, υπάρχουν όμως και κάποια καινούργια στοιχεία. Ιδιαιτέρως, εισάγεται η βασική έννοια του supremum και παρουσιάζονται οι πραγματικοί αριθμοί αξιωματικά. Στόχος αυτού του μέρους είναι να δημιουργηθεί η βάση πάνω στην οποία θα χτίσουμε τη θεωρία στη συνέχεια.

2. Στο δεύτερο μέρος (Κεφάλαια 3 έως 9, εκτός του 6) παρουσιάζεται η κεντρική θεωρία του Λογισμού, δηλαδή τα όρια (Κεφάλαιο 3), η συνέχεια (Κεφάλαιο 4), η παράγωγος (Κεφάλαιο 5), το ολοκλήρωμα (Κεφάλαιο 7), και η σχέση μεταξύ ολοκληρώματος και παραγώγου, δηλαδή τα Θεμελιώδη Θεωρήματα του Λογισμού (Κεφάλαιο 8). Η ύλη είναι γνωστή σε μεγάλο βαθμό ήδη από το Λύκειο. Τα νέα στοιχεία σε σχέση με το Λύκειο είναι ότι παρουσιάζουμε εκτενώς τους ορισμούς των διάφορων ορίων και τη χρήση τους, τις αποδείξεις σχεδόν όλων των θεωρημάτων και τον ορισμό του ολοκληρώματος. Ουσιαστικά, στόχος αυτού του μέρους είναι η *εμβάθυνση* των γνώσεων των φοιτητών.

3. Το τρίτο μέρος (Κεφάλαιο 6 και τα Κεφάλαια 9 έως 12) παρουσιάζει μερικές βασικές εφαρμογές του δευτέρου μέρους. Στο Κεφάλαιο 6, εφαρμογές των παραγώγων, στο Κεφάλαιο 9, εφαρμογές του ολοκληρώματος, στο Κεφάλαιο 10 κάνουμε μια μικρή εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις, στο Κεφάλαιο 11 κάνουμε λόγο για το πολυώνυμο Taylor, και τέλος στο Κεφάλαιο 12 εισάγουμε στοιχεία από τη θεωρία των σειρών. Η ύλη αυτού του μέρους είναι, σε μεγάλο βαθμό, νέα για τους φοιτητές και, για αυτό, το βάρος δίνεται στην κατανόησή της και όχι τόσο σε αυστηρές αποδείξεις. Σε αυτό το μέρος στόχος είναι η *διεύρυνση* των γνώσεων των φοιτητών.

Σε όλη την ανάπτυξη της ύλης, λαμβάνονται υπόψη οι γνώσεις που έχουν οι φοιτητές από το Λύκειο. Γι' αυτόν το λόγο, ορισμένες έννοιες θεωρούνται γνωστές και δεν εισάγονται, για παράδειγμα οι πράξεις μεταξύ συναρτήσεων και ο ορισμός των πολυωνύμων, ενώ άλλες έννοιες, για παράδειγμα οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, εισάγονται αρκετά συνοπτικά.

Η ύλη που καλύπτεται είναι αρκετά ευρεία, επομένως το βιβλίο είναι ιδανικό για φοιτητές τμημάτων θετικών επιστημών που συνήθως καλύπτουν το Λογισμό σε ένα μάθημα, για παράδειγμα τμημάτων Πληροφορικής, Βιολογίας, Χημείας, κτλ. Οι φοιτητές σε τμήματα Μαθηματικών και Φυσικής και πολυτεχνικών σχολών ενδέχεται να βρουν την κάλυψη της ύλης πολύ συνοπτική για τις ανάγκες τους, οπωσδήποτε όμως μπορούν να χρησιμοποιήσουν το βιβλίο.

Μέρος της ύλης που παρουσιάζεται είναι απαραίτητο να γίνει σε οποιοδήποτε μάθημα Λογισμού. Πολλά όμως κομμάτια της, όπως οι τεχνικές της αριθμητικής ανάλυσης, ο ορισμός των κυρτών συναρτήσεων, κάποια είδη διαφορικών εξισώσεων κ.ά., είναι κάπως πιο προχωρημένα, και όχι τόσο απαραίτητα, αλλά επιλέχθηκαν να παρουσιαστούν γιατί εκθέτουν τους φοιτητές σε ιδέες που, για το μαθηματικό μας αισθητήριο, είναι όμορφες και χρήσιμες.

Επιπλέον, δεν αντισταθήκαμε στον πειρασμό να παρουσιάσουμε και ορισμένα κομμάτια της ύλης που είναι αρκετά προχωρημένα για πρωτοετείς φοιτητές, όπως για παράδειγμα τη χρήση αξιωμάτων του πεδίου και της διάταξης για την απόδειξη διαφόρων ιδιοτήτων των αριθμών (αναγκαστικά στην αρχή του βιβλίου). Σε ορισμένες από αυτές τις περιπτώσεις, η παρουσίαση είναι αρκετά συνοπτική και αφήνει αρκετά σημεία αδιευκρίνιστα. Επομένως, πολύ δύσκολα ένας φοιτητής θα καταφέρει να διαβάσει το βιβλίο από την αρχή έως το τέλος χωρίς σε πολλά σημεία να δυσκολευτεί (ελπίζουμε όμως χωρίς να απογοητευτεί). Το βιβλίο αυτό θα εκνεύριζε μάλλον σοβαρά σε αυτά τα σημεία τους νεότερους εαυτούς μας. Όμως, κάθε εκπαιδευτικό βιβλίο είναι αναγκαστικά ένα παράθυρο σε μια περιοχή της επιστήμης, και τα πιο ενδιαφέροντα παράθυρα είναι εκείνα με απεριόριστη θέα. Μοιραία, τα μακρινά αντικείμενα δεν θα φαίνονται τόσο καλά, και οι φοιτητές πρέπει να κάνουν υπομονή μέχρι να ανοίξουν το επόμενο παράθυρο, χωρίς να σπαταλήσουν περισσότερο χρόνο σε αυτό από όσο οι ίδιοι αισθάνονται ότι είναι απαραίτητος.

Οργάνωση Κάθε κεφάλαιο αποτελείται από 4-6 παραγράφους. Στο τέλος τους ακολουθούν ορισμένες ασκήσεις. Η επίλυση των ασκήσεων βοηθά στην εμπέδωση της ύλης, επομένως παροτρύνουμε το φοιτητή να λύσει όσες περισσότερες ασκήσεις μπορεί. Ορισμένες ασκήσεις είναι στενά συνδεδεμένες με ορισμένα σημεία του κυρίως κείμενο, όπως λόγου χάρη όταν ζητείται να συμπληρωθεί μια απόδειξη που δεν παρουσιάστηκε πλήρως. Τέλος, πολλές από τις ασκήσεις χρησιμοποιούνται στην ανάπτυξη της θεωρίας αργότερα. Σε ορισμένες ασκήσεις, ο φοιτητής πρέπει να απαντήσει αν μια δοσμένη πρόταση είναι σωστή ή λάθος, αιτιολογώντας, βέβαια, την απάντησή του. Αυτές οι ασκήσεις σημαίνονται στην αρχή τους με τη συντομογραφία Σ/Λ, και είναι διατυπωμένες ως μια πρόταση, που μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής. Στην επίλυση των ασκήσεων, οι φοιτητές δεν πρέπει να χρησιμοποιήσουν κομμάτια της ύλης που δεν έχουν παρουσιαστεί μέχρι το σημείο που εμφανίζεται η άσκηση.

Ορισμένες ασκήσεις είναι της μορφής Σωστό/Λάθος. Για αυτές, είτε πρέπει να αποδειχθεί ότι είναι σωστές, είτε να αποδειχθεί ότι είναι λάθος, ενδεχομένως βρίσκοντας ένα αντιπαράδειγμα. Αυτές οι ασκήσεις σημειώνονται με ένα «Σ/Λ» στην αρχή της εκφώνησης.

Ορισμένες ασκήσεις έχουν αυξημένο βαθμό δυσκολίας. Αυτές σημαίνονται με ένας έως τρεις αστερίσκους ($\star$), ως εξής:

1. Κανένας αστερίσκος: η άσκηση είναι βατή. Αν έχετε καταλάβει καλά τα αντίστοιχα σημεία της ύλης, θα τη λύσετε χωρίς ιδιαίτερο πρόβλημα.

2. Ένας αστερίσκος ($\star$): η άσκηση είναι σχετικά δύσκολη, και θα χρειαστεί να έχετε καταλάβει καλά τα αντίστοιχα σημεία της ύλης και να αφιερώσετε αρκετή σκέψη.

3. Δύο αστερίσκοι ($\star\star$): η άσκηση είναι αρκετά δύσκολη. Πρέπει να έχετε καταλάβει άριστα τα αντίστοιχα σημεία της ύλης και να αφιερώσετε πολλή σκέψη.

4. Τρεις αστερίσκοι ($\star\star\star$): η άσκηση είναι εξαιρετικά δύσκολη. (Λογικά) δεν θα τη λύσετε.

Ορισμένες αποδείξεις, επίσης, έχουν έναν αυξημένο βαθμό δυσκολίας. Συμβολίζονται με έναν αστερίσκο, και θα μπορούσαν να παραληφθούν σε μια πρώτη ανάγνωση.

Μια ιδιαιτερότητα του βιβλίου είναι η ύπαρξη, στο τέλος κάθε κεφαλαίου, μιας παραγράφου όπου αναφέρονται κατευθύνσεις για περαιτέρω μελέτη και πιο συγκεκριμένες βιβλιογραφικές αναφορές. Τέτοιες πληροφορίες συνήθως εμφανίζονται σε συγγράμματα που απευθύνονται σε πιο (μαθηματικά) ώριμο κοινό, αλλά πιστεύουμε ότι θα είναι ενδιαφέρουσες και εδώ.

Μορφές του βιβλίου Μια άλλη ιδιαιτερότητα του βιβλίου είναι ότι διατίθεται σε δύο μορφές: μια ως PDF, και μια ως ηλεκτρονικό βιβλίο, σε μορφή HTML5. Η ηλεκτρονική μορφή έχει ενσωματωμένα τα ακόλουθα διαδραστικά και πολυμεσικά στοιχεία:

1. Ένα μεγάλο αριθμό (περίπου 40) σύντομων κινούμενων σχημάτων (video) που δίνουν με τρόπο άμεσο ορισμένες βασικές έννοιες, όπως, λόγου χάρη, τον ορισμό του ορίου, τη δημιουργία στερεών εκ περιστροφής, τη δημιουργία καμπυλών σε παραμετρική μορφή, κτλ. Ελπίζουμε τα σχήματα αυτά να βοηθήσουν σε μια καλύτερη κατανόηση των εννοιών που παρουσιάζονται και να αποτελέσουν ερέθισμα για τη σκηνοθεσία πολλών άλλων, στη φαντασία των φοιτητών.

2. Ένα μεγάλο αριθμό διαδραστικών σχημάτων, των οποίων ορισμένες παραμέτρους μπορεί ο φοιτητής να αλλάξει και να παρατηρήσει τα αντίστοιχα αποτελέσματα. Για παράδειγμα, ο φοιτητής μπορεί να μεταβάλει την τάξη ενός πολυωνύμου Taylor, βλέποντας το αντίστοιχο πολυώνυμο που προκύπτει.

3. Λύσεις σε αρκετές ασκήσεις, οι οποίες παραμένουν κρυμμένες από το φοιτητή εκτός αν αυτός επιλέξει να τις αποκαλύψει.

Την ηλεκτρονική μορφή μπορείτε να χρησιμοποιήσετε με οποιοδήποτε πρόγραμμα περιήγησης υποστηρίζει το πρότυπο MATHML. Στην μορφή PDF τα κινούμενα σχήματα είναι προσβάσιμα μέσω συνδέσμων που παρατίθενται στο τέλος του βιβλίου και κατευθύνουν τον αναγνώστη στο Αποθετήριο «Κάλλιπος». Επίσης, οι λύσεις των ασκήσεων έχουν τοποθετηθεί στο τέλος του βιβλίου. Για διευκόλυνση των φοιτητών, στη μορφή PDF οι ασκήσεις των οποίων οι λύσεις υπάρχουν στο τέλος του βιβλίου σημειώνονται με ένα «Π» στην αρχή της εκφώνισής τους. Αν διαβάζετε τη μορφή PDF ηλεκτρονικά, μπορείτε να πατήσετε το Π και θα μεταφερθείτε στη λύση· συνιστούμε, πάντως, να διαβάζετε τη λύση μόνο αν (νομίζετε ότι) έχετε λύσει την άσκηση σωστά, ή τουλάχιστον έχετε κάνει μια σημαντική προσπάθεια να τη λύσετε.

Ευχαριστίες Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον Δημήτρη Χελιώτη για τις πολυάριθμες παρατηρήσεις του επί του συνόλου του κειμένου. Η συνδρομή του υπήρξε πολλές φορές πολύτιμη, τόσο για της εξάλειψη ασαφειών όσο και για την αισθητή βελτίωση της παρουσίασης. Θα θέλαμε επίσης να ευχαριστήσουμε τον Θεόφιλο Τραμπούλη, που έκανε τη γλωσσική επιμέλεια του κειμένου. Η συνεισφορά του στο τελικό αποτέλεσμα υπήρξε σημαντική.

Το βιβλίο αυτό είναι υπό εξέλιξη: θα χαρούμε να λάβουμε διορθώσεις, παρατηρήσεις, και σχόλια κάθε είδους, τόσο από άλλους διδάσκοντες, όσο και από φοιτητές.

Σταύρος Τουμπής και Σάββας Γκιτζένης, 2016.

Κεφάλαιο 1

Αριθμοί

Το εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο εξυπηρετεί δύο αλληλοκαλυπτόμενους σκοπούς. Πρώτον, θυμίζει στον αναγνώστη πολλές από τις γνώσεις που είναι προαπαιτούμενες σε ένα μάθημα Λογισμού συναρτήσεων μίας μεταβλητής, ιδιαιτέρως παρουσιάζοντας το συμβολισμό και τους ορισμούς που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια· επειδή η ύλη είναι γνωστή από το Λύκειο, είμαστε αρκετά περιληπτικοί. Δεύτερον, αποτελεί σύντομη εισαγωγή στην αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών· σε αντίθεση με τη συνήθη λυκειακή προσέγγιση, ξεκινάμε από ένα ελάχιστο πλήθος ιδιοτήτων που αποδεχόμαστε αξιωματικά, και κατόπιν δείχνουμε πώς μπορούμε να αποδείξουμε, βάσει αυτών, *όλες* τις γνωστές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών· ιδιαιτέρως, εισάγουμε την έννοια του supremum, που είναι απαραίτητη σε πολλά κρίσιμα σημεία της ανάπτυξης της θεωρίας, όπως, για παράδειγμα, στην απόδειξη του Θεωρήματος του Bolzano και στον ορισμό του ολοκληρώματος.

Στην Παράγραφο 1.1 θυμίζουμε εν περιλήψει μερικούς βασικούς συμβολισμούς και ορισμούς συνόλων. Στην Παράγραφο 1.2 παρουσιάζουμε την πρώτη ομάδα αξιωμάτων των πραγματικών αριθμών, και συγκεκριμένα τα Αξιώματα Πεδίου, και στην Παράγραφο 1.3 ορισμένες από τις βασικότερες συνέπειές τους. Στην Παράγραφο 1.4 παρουσιάζουμε την δεύτερη ομάδα αξιωμάτων των πραγματικών αριθμών, τα Αξιώματα Διάταξης. Στην Παράγραφο 1.5 εξετάζουμε κάποιες βασικές έννοιες που αφορούν τα διαστήματα και τα σύνολα. Στην Παράγραφο 1.6 παρουσιάζουμε τις καινούργιες έννοιες του supremum και του infimum, και ολοκληρώνουμε με την Παράγραφο 1.7 και το τελευταίο αξίωμα των πραγματικών αριθμών που απομένει να αναφερθεί, το Αξίωμα της Πληρότητας.

1.1 Σύνολα

Συμβολίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς με $\mathbb{R}$, τους ρητούς με $\mathbb{Q}$, τους ακέραιους με $\mathbb{Z}$, και τους φυσικούς (που περιλαμβάνουν το 0) με $\mathbb{N}$. Επίσης, συμβολίζουμε τους μιγαδικούς (που θα δούμε πάντως ελάχιστα σε αυτό το βιβλίο) με $\mathbb{C}$. Συμβολίζουμε τα σύνολα που προκύπτουν από τα παραπάνω αν αφαιρέσουμε το 0 με $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{N}^*$ και $\mathbb{C}^*$ αντίστοιχα.

Ακόμα, ο συμβολισμός $\forall x \in A$ σημαίνει «για κάθε x στο σύνολο A», ενώ ο συμβολισμός $\exists x \in A$ σημαίνει ότι «υπάρχει x στο σύνολο A». Ο συμβολισμός $:$ (άνω-κάτω τελεία) σημαίνει «τέτοιο ώστε». Έτσι, για παράδειγμα, η έκφραση

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} : n > x$$

σημαίνει ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $n > x$.

Αναφέρουμε τους ακόλουθους ορισμούς από τη θεωρία συνόλων:

Ορισμός 1.1. ***(Σύνολα)***

1. *Έστω σύνολα A, B πραγματικών αριθμών. Γράφουμε $A \subseteq B$ και λέμε πως το A είναι* ***υποσύνολο*** *του B αν $\forall x \in A$ θα έχουμε και $x \in B$. Επίσης γράφουμε $A \subset B$ και λέμε πως το A είναι* ***γνήσιο υποσύνολο*** *του B αν το A είναι υποσύνολο του B και επιπλέον $\exists x \in B : x \notin A$.*

2. *Ορίζουμε το* ***συμπλήρωμα*** *ενός συνόλου A ως το σύνολο $A^c \triangleq \{x \in \mathbb{R} : x \notin A\}$.*

3. *Ορίζουμε την* ***ένωση*** *$A \cup B$ δύο συνόλων A, B ως το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία που ανήκουν σε τουλάχιστον ένα από τα A, B:*

$$A \cup B \triangleq \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ ή } x \in B\}.$$

4. *Ορίζουμε την* ***τομή*** *$A \cap B$ δύο συνόλων A, B ως το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία που ανήκουν και στα δύο A, B:*

$$A \cap B \triangleq \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ και } x \in B\}.$$

5. *Ορίζουμε τη* ***διαφορά*** *$A \setminus B$ του συνόλου B από το σύνολο A ως $A \setminus B \triangleq A \cap B^c$, δηλαδή το σύνολο που προκύπτει αν από όλα τα σημεία που ανήκουν στο A, βγάλουμε όσα τυχόν ανήκουν στο B.*

Ο συμβολισμός $x \triangleq y$ σημαίνει ότι το x ισούται με το y εξ' ορισμού. Τέλος, χάριν συντομίας, θα γράφουμε και «ανν» αντί για το «αν και μόνο αν».

1.2 Αξιώματα Πεδίου

Αξιώματα Πεδίου: *Εφοδιάζουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ με δύο πράξεις, την πρόσθεση $+$ και τον πολλαπλασιασμό $\times$, για τις οποίες απαιτούμε να έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες, που καλούνται* ***Αξιώματα Πεδίου****:*

A.1 (Αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = y + x$.

A.2 (Προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης) Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x + (y + z) = (x + y) + z$.

A.3 (Ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης) Υπάρχει στοιχείο του $\mathbb{R}$, που συμβολίζουμε με το 0, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να ισχύει ότι $0 + x = x$.

A.4 (Αντίθετο στοιχείο) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει αριθμός y τέτοιος ώστε $x + y = 0$.

A.5 (Αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, $x \times y = y \times x$.

A.6 (Προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού) Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$.

A.7 (Ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού) Υπάρχει στοιχείο του $\mathbb{R}$, που συμβολίζουμε με το 1, και είναι διάφορο του 0, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να ισχύει $1 \times x = x$.

A.8 (Αντίστροφο στοιχείο) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, υπάρχει αριθμός y τέτοιος ώστε $xy = 1$.

A.9 (Επιμεριστική ιδιότητα) Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

Επομένως, τέσσερα από τα αξιώματα αφορούν ιδιότητες της πρόσθεσης, τέσσερα αφορούν ιδιότητες του πολλαπλασιασμού, και ένα συνδέει την πρόσθεση με τον πολλαπλασιασμό. Για λόγους συντομίας, στο εξής, θα γράφουμε και xy αντί για $x \times y$. Επίσης, ενίοτε θα γράφουμε και $x \cdot y$ αντί για $x \times y$.

Από τα αξιώματα αυτά εύκολα προκύπτει η ακόλουθη ιδιότητα:

Πρόταση 1.1. ***(Μοναδικότητα των ουδέτερων στοιχείων, αντίθετων, και αντίστροφων)*** *Τα ουδέτερα στοιχεία $0, 1$ της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, ο αντίθετος κάθε αριθμού, και ο αντίστροφος κάθε αριθμού διάφορου του 0 είναι μοναδικά.*

Απόδειξη: Έστω δύο οποιαδήποτε ουδέτερα στοιχεία της πρόσθεσης, 0 και $0'$. Τότε, θα έχουμε $0 + 0' = 0'$, αφού το 0 είναι ουδέτερο, και επίσης $0 + 0' = 0$, αφού το $0'$ είναι ουδέτερο. Άρα, $0 = 0'$, δηλαδή τα δύο ουδέτερα στοιχεία είναι ίσα, επομένως το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι μοναδικό.

Έστω τώρα πως υπάρχει x με δύο διακριτούς αντίθετους, έστω y_1 και y_2. Θα έχουμε $x + y_1 = 0$ και $x + y_2 = 0$, επομένως

$$\begin{aligned} x + y_1 = x + y_2 \Rightarrow y_1 + (x + y_1) = y_1 + (x + y_2) &\overset{A.2}{\Rightarrow} (y_1 + x) + y_1 = (y_2 + x) + y_2 \\ &\overset{A.4}{\Rightarrow} 0 + y_1 = 0 + y_2 \overset{A.3}{\Rightarrow} y_1 = y_2, \end{aligned}$$

επομένως φτάσαμε σε άτοπο.

Τα αντίστοιχα σκέλη για τον πολλαπλασιασμό αποδεικνύονται ανάλογα. (Δείτε την Άσκηση 1.1.)
■

Επομένως, μπορούμε να μιλάμε για *το* 0, *το* 1, *τον* αντίθετο ενός αριθμού και *τον* αντίστροφο ενός αριθμού διάφορου του 0.

Επίσης, παρατηρήστε ότι στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήσαμε, στην πρώτη συνεπαγωγή, την ιδιότητα $x = y \Rightarrow a + x = a + y$. Αυτή η ιδιότητα δεν είναι απόρροια κάποιου αξιώματος, αλλά της ίδιας της έννοιας της πράξης μεταξύ δύο αριθμών. Για τις ανάγκες αυτής της συζήτησης, μια πράξη σε ένα σύνολο είναι ένας κανόνας f που αντιστοιχεί, για οποιοδήποτε διατεταγμένο ζεύγος (x, y) στοιχείων του συνόλου, ένα συγκεκριμένο στοιχείο του συνόλου $z = f(x, y)$. Επομένως, αν έχουμε $x = y$, τότε θα πρέπει και $f(a, x) = f(a, y)$, δηλαδή $a + x = a + y$, αν η πράξη είναι η πρόσθεση πραγματικών, ή $ax = ay$, αν η πράξη είναι ο πολλαπλασιασμός πραγματικών.

Ορισμός 1.2. ***(Αφαίρεση και διαίρεση)*** *Συμβολίζουμε τον αντίθετο του x ως $-x$, και τον αντίστροφο ενός $x \neq 0$ ως x^{-1}. Ορίζουμε την* ***αφαίρεση*** *του y από το x και τη διαίρεση του x από το $y \neq 0$ ως*

$$x - y \triangleq x + (-y), \qquad x/y \triangleq xy^{-1}.$$

Θα γράφουμε επίσης και $x/y = \frac{x}{y}$. Παρατηρήστε πως, θέτοντας $x = 1$ στον ορισμό της διαίρεσης, έχουμε $1/y \triangleq y^{-1}$.

Οι πραγματικοί αριθμοί δεν είναι το μόνο σύνολο αριθμών που ικανοποιούν τα Αξιώματα Πεδίου. Άλλα γνωστά μας σύνολα που επίσης τα ικανοποιούν είναι οι ρητοί $\mathbb{Q}$ και οι μιγαδικοί $\mathbb{C}$, όχι όμως οι φυσικοί $\mathbb{N}$ και οι ακέραιοι $\mathbb{Z}$ (δείτε την Άσκηση 1.2). Υπάρχουν, επίσης, πολλά παραδείγματα συνόλων που είναι εφοδιασμένα με δύο πράξεις, που και πάλι μπορούμε να καλούμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, *που όμως είναι ορισμένες διαφορετικά από τη συνήθη πρόσθεση και τον συνήθη πολλαπλασιασμό*, έτσι ώστε και πάλι να ικανοποιούνται τα Αξιώματα Πεδίου. Όλα αυτά τα σύνολα καλούνται **πεδία** ή **σώματα**. Στα ακόλουθα παραδείγματα εξετάζουμε μια ιδιαίτερα χρήσιμη κατηγορία πεδίων.

Παράδειγμα 1.1. (Σύνολο $\mathbf{GF}(2)$) Έστω το σύνολο $\mathbf{GF}(2) = \{0, 1\}$ εφοδιασμένο με δύο πράξεις, την πρόσθεση $\oplus$ και τον πολλαπλασιασμό $\odot$ που ορίζονται ως εξής:

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 0 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0,$$
$$0 \odot 0 = 0, \quad 0 \odot 1 = 0, \quad 1 \odot 0 = 0, \quad 1 \odot 1 = 1.$$

Το σύνολο αυτό είναι πεδίο. Πράγματι, παρατηρώντας τους παραπάνω ορισμούς προκύπτει πως τα 0, 1 είναι τα ουδέτερα στοιχεία της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, ότι ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, και ότι $-0 = 0$, $-1 = 1$, $1^{-1} = 1$. Για να αποδείξουμε ότι ισχύουν οι προσεταιριστικές ιδιότητες και η επιμεριστική ιδιότητα, αρκεί να πάρουμε τα δύο μέλη κάθε ισότητας και να επιβεβαιώσουμε ότι ισχύουν για κάθε έναν από τους 8 δυνατούς συνδυασμούς. Αυτό μπορείτε να το επαληθεύσετε μόνοι σας (Άσκηση 1.3).

Σχετικά με τις παραπάνω πράξεις, παρατηρήστε πως η πρόσθεση ταυτίζεται με τη συνάρτηση XOR μεταξύ bits. Επίσης, οι δύο πράξεις καλούνται πρόσθεση modulo 2 και πολλαπλασιασμός modulo 2, διότι μπορούν να ερμηνευτούν ως εξής: εκτελούμε τη συνηθισμένη πράξη (πρόσθεση ή πολλαπλασιασμό, αντίστοιχα), και για να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα της νέας πράξης παίρνουμε το υπόλοιπο (modulo) της διαίρεσης με το 2.

Με δεδομένο ότι πρέπει τα ουδέτερα στοιχεία των δύο πράξεων να διαφέρουν, παρατηρήστε ότι δεν μπορεί να υπάρξει πεδίο με λιγότερα στοιχεία από το $\mathbf{GF}(2)$. Μπορεί μάλιστα να αποδειχτεί ότι το $\mathbf{GF}(2)$ είναι το μοναδικό πεδίο με δύο στοιχεία που υπάρχει, αλλά η απόδειξη (που, καταρχάς, περιλαμβάνει τη δευκρίνιση του τι ακριβώς σημαίνει δύο πεδία να είναι ίδια) παραλείπεται.

Παράδειγμα 1.2. ($\mathbf{GF}(5)$) Έστω το σύνολο $\mathbf{GF}(5) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, για το οποίο έχουμε ορίσει δύο πράξεις ως εξής:

1. Την πρόσθεση modulo 5, που τη συμβολίζουμε με $\oplus$, και σύμφωνα με την οποία το $x \oplus y$ ισούται με το υπόλοιπο της διαίρεσης του $x + y$ με το 5. Ισοδύναμα,

   $$x \oplus y = x + y - 5k,$$

   όπου k είναι ο *μοναδικός* (σκεφτείτε γιατί) ακέραιος για τον οποίο $0 \le x + y - 5k \le 4$, και προφανώς $k \in \{0, 1\}$.

2. Τον πολλαπλασιασμό modulo 5, που τον συμβολίζουμε με $\odot$, και σύμφωνα με τον οποίο το $x \odot y$ ισούται με το υπόλοιπο της διαίρεσης του xy με το 5. Ισοδύναμα,

   $$x \odot y = xy - 5k,$$

   όπου k είναι ο (και πάλι) μοναδικός ακέραιος για τον οποίο $0 \le xy - 5k \le 4$, και προφανώς $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Το σύνολο $\mathbf{GF}(5)$, εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις, ικανοποιεί τα Αξιώματα Πεδίου. Θα δείξουμε μέρος της απόδειξης. Η πλήρης απόδειξη ζητείται στην Άσκηση 1.4.

Η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης προκύπτει παρατηρώντας ότι:

$$\begin{aligned} x \oplus (y \oplus z) &= x + (y + z - 5k_1) - 5k_2 = x + y + z - 5(k_1 + k_2), \\ (x \oplus y) \oplus z &= (x + y - 5k_3) + z - 5k_4 = x + y + z - 5(k_3 + k_4). \end{aligned}$$

Στα παραπάνω, οι ακέραιοι $k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4$ είναι τέτοιοι ώστε το αντίστοιχο άθροισμα να είναι πάντοτε ανάμεσα στο 0 και το 4. Παρατηρήστε τώρα ότι υπάρχει μόνο ένας k τέτοιος ώστε το $x + y + z - 5k$ να είναι ανάμεσα στο 0 και το 4. Άρα $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$, και τελικά

$$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z.$$

Η προσεταιριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό, η αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης και η επιμεριστική ιδιότητα προκύπτουν ανάλογα.

Σχετικά με την ύπαρξη ουδετέρων, είναι προφανές ότι το 0 είναι και πάλι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.

Σχετικά με την ύπαρξη αντίθετων, είναι προφανές ότι

$$0+0=0,\;\; 1+4=0,\;\; 2+3=0,$$

άρα υπάρχει αντίθετος για κάθε στοιχείο στο $\mathbf{GF}(5)$.

Σχετικά με τους αντίστροφους, με λίγες δοκιμές βρίσκουμε ότι

$$1\odot 1=1,\;\; 2\odot 3=1,\;\; 4\odot 4=1,$$

άρα όλοι οι αριθμοί εκτός του 0 έχουν αντίστροφο, αφού $1^{-1}=1$, $2^{-1}=3$, $4^{-1}=4$.

Πράγματι, λοιπόν, το $\mathbf{GF}(5)$ είναι πεδίο. Αν, αντί να χρησιμοποιούσαμε το 5, χρησιμοποιούσαμε το 6, θα ήταν το προκύπτον σύνολο πεδίο; Δείτε σχετικά την Άσκηση 1.5. Γενικώς, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το σύνολο $\{0,1,\cdots,q-1\}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού modulo q, είναι πεδίο αν και μόνο αν το q είναι πρώτος αριθμός. Η απόδειξη παραλείπεται.

Τα παραπάνω πεδία είναι χαρακτηριστικά παραδείγματα πεδίων με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, γνωστά και ως Πεδία Galois (Galois Fields), προς τιμήν του μαθηματικού Évariste Galois (1811-1832), που πρώτος τα μελέτησε (γι' αυτό και οι συμβολισμοί $\mathbf{GF}(q)$ που χρησιμοποιήσαμε). Τα εν λόγω πεδία έχουν πολλές πρακτικές εφαρμογές, ιδιαιτέρως σε τεχνολογίες ανάκτησης σφαλμάτων. Χρησιμοποιούνται, για παράδειγμα, στην επιδιόρθωση σφαλμάτων κατά την ανάγνωση οπτικών δίσκων, και στην ανάκτηση δεδομένων όταν ένα μέσο αποθήκευσης παθαίνει βλάβη. Μπορείτε να δείτε ένα (υποτυπώδες) παράδειγμα στην Άσκηση 1.6.

Ασκήσεις

1.1. (Μοναδικότητα ουδέτερου στοιχειού πολλαπλασιασμού και αντίστροφου) Γράψτε αναλυτικά την απόδειξη της Πρότασης 1.1 για το σκέλος του πολλαπλασιασμού.

1.2. (Αξιώματα πεδίου στα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$) Προσδιορίστε ποια από τα Αξιώματα Πεδίου ισχύουν στους φυσικούς $\mathbb{N}$ και τους ακέραιους $\mathbb{Z}$.

1.3. (Απόδειξη ιδιοτήτων για το $\mathbf{GF}(2)$) Αποδείξτε ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbf{GF}(2)$, όπως έχουν οριστεί στο Παράδειγμα 1.1, ικανοποιούν τις προσεταιριστικές ιδιότητες Α.2 και Α.6 και την επιμεριστική ιδιότητα Α.9, εξετάζοντας περιπτώσεις.

1.4. [$\star$] (Απόδειξη ιδιοτήτων για το $\mathbf{GF}(5)$) Αποδείξτε ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbf{GF}(5)$, όπως έχουν οριστεί στο Παράδειγμα 1.2, ικανοποιούν τα Αξιώματα Πεδίου.

1.5. [Π] (Ένα σύνολο που δεν είναι πεδίο) Έστω το σύνολο των αριθμών $\{0,1,2,3,4,5\}$ για τους οποίους ορίζουμε $\oplus$ την πρόσθεση modulo 6 και $\odot$ τον πολλαπλασιασμό modulo 6. Δηλαδή, για να υπολογίσουμε την πρόσθεση (πολλαπλασιασμό) modulo 6 δύο στοιχείων προσθέτουμε (πολλαπλασιάζουμε) τα στοιχεία μεταξύ τους και κατόπιν λαμβάνουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης με το 6. Είναι αυτό το σύνολο, εφοδιασμένο με αυτές τις πράξεις, πεδίο; Γιατί;

1.6. [$\star$] (Πρόσθεση αρχείων) Δίνονται δύο σκληροί δίσκοι, έστω A και B, με χωρητικότητα 1 TB ο καθένας, εντελώς γεμάτοι με δεδομένα που δεν μπορούν να συμπιεστούν. Σας δίνεται και ένας τρίτος δίσκος, έστω C, κενός, της ίδιας χωρητικότητας. Πώς μπορείτε να τον χρησιμοποιήσετε ώστε να μην χάσετε καθόλου δεδομένα των A, B, σε περίπτωση που χαθεί ένας (οποιοσδήποτε) από τους τρεις; Χρησιμοποιήστε πρόσθεση modulo 2 μεταξύ αντίστοιχων bits των δίσκων A και B.

1.3 Συνέπειες των Αξιωμάτων Πεδίου

Τα Αξιώματα Πεδίου έχουν μια σπουδαία ιδιότητα: ξεκινώντας από αυτά, μπορούμε να αποδείξουμε όλες τις γνωστές μας ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, για παράδειγμα όλες τις γνωστές μας ταυτότητες, όπως την $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Παρατηρήστε πως, αφού βασιζόμαστε μόνο στα Αξιώματα Πεδίου, ό,τι αποδείξουμε βασιζόμενοι σε αυτά ισχύει όχι μόνο για τους πραγματικούς, αλλά και για όλα τα άλλα πεδία, π.χ. τους ρητούς, τους μιγαδικούς, το $\mathbf{GF}(5)$, κτλ.

Σε αυτή την παράγραφο στόχος μας δεν είναι να κάνουμε μια εκτενή παρουσίαση αυτής της διαδικασίας, θα δείξουμε όμως περιληπτικά μέρος της. Παρατηρήστε ότι, στα ακόλουθα, σε κάθε συνεπαγωγή θα χρησιμοποιούμε είτε κάποιο Αξίωμα Πεδίου, είτε κάποια ιδιότητα που έχει ήδη αποδειχθεί. Όταν επιλύετε ασκήσεις με το ίδιο αντικείμενο, δεν πρέπει να ξεφεύγετε από αυτή τη γενική αρχή. Όπως θα δείτε, αυτό είναι εν γένει δύσκολο γιατί θέλει ένα είδος επιλεκτικής αμνησίας. Όσοι βρίσκουν αυτή τη διαδικασία εύκολη, έχουν ταλέντο στα μαθηματικά (ή στην πολιτική!)

Πρόταση 1.2. ***(Ιδιότητες που απορρέουν από τα Αξιώματα Πεδίου)*** *Τα παρακάτω ισχύουν για κάθε $a, x, y \in \mathbb{R}$:*

1. $a + x = a + y \Rightarrow x = y$. *Μπορούμε, δηλαδή, να απαλείψουμε ένα κοινό όρο a από τα δύο μέλη μιας ισότητας.*
2. *Αν $a \neq 0$, τότε $ax = ay \Rightarrow x = y$. Μπορούμε, δηλαδή, να απαλείψουμε ένα κοινό συντελεστή $a \neq 0$ από τα δύο μέλη μιας ισότητας.*
3. $-(-x) = x$.
4. $(x^{-1})^{-1} = x$.
5. $-(x + y) = (-x) + (-y)$.
6. $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.
7. $0x = 0$.
8. $x(-y) = -(xy)$.
9. $(-1)x = -x$.
10. $(-x)(-y) = xy$.

Απόδειξη:

1. Έχουμε
$$a + x = a + y \Rightarrow (-a) + (a + x) = (-a) + (a + y)$$
$$\overset{A.2}{\Rightarrow} ((-a) + a) + x = ((-a) + a) + y \overset{A.4}{\Rightarrow} 0 + x = 0 + y \overset{A.3}{\Rightarrow} x = y.$$
2. Προκύπτει ανάλογα με το προηγούμενο σκέλος.
3. Η ιδιότητα προκύπτει άμεσα από τη συμμετρία στον ορισμό του αντίθετου A.4.
4. Προκύπτει ανάλογα με το προηγούμενο σκέλος.

5. Έχουμε

$$\begin{aligned}(x+y)+((-x)+(-y)) &\overset{A.1}{=} (y+x)+((-x)+(-y)) \overset{A.2}{=} ((y+x)+(-x))+(-y)\\ &\overset{A.2}{=} (y+(x+(-x)))+(-y) \overset{A.4}{=} (y+0)+(-y) \overset{A.3}{=} y+(-y) \overset{A.4}{=} 0\\ &\Rightarrow (x+y)+((-x)+(-y))=0,\end{aligned}$$

   από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

6. Προκύπτει ανάλογα με το προηγούμενο σκέλος.

7. Έχουμε

$$0+0x \overset{A.3}{=} 0x \overset{A.3}{=} (0+0)x \overset{A.9}{=} 0x+0x \Rightarrow 0+0x=0x+0x \Rightarrow 0=0x.$$

   Η τελευταία συνεπαγωγή προέκυψε από το Σκέλος 1.

8. Έχουμε

$$x(-y)+xy \overset{A.9}{=} x((-y)+y) \overset{A.4}{=} x0=0.$$

   Η τελευταία ιδιότητα προκύπτει από το Σκέλος 7.

9. Προκύπτει από το Σκέλος 8 για $y=1$.

10. Έχουμε

$$(-x)(-y) = -((-x)y) = -(-(xy)) = xy.$$

   Η πρώτη ισότητα προέκυψε από το Σκέλος 8, όπως και η δεύτερη. Η τρίτη ισότητα προέκυψε από το Σκέλος 3. ■

Αν καταλάβατε την λογική των παραπάνω αποδείξεων, τότε, με πολλή υπομονή, μπορείτε να αποδείξετε όσες ακόμα ιδιότητες των πραγματικών αριθμών θέλετε, βασιζόμενοι μόνο στα Αξιώματα Πεδίου. Μερικές ακόμα ιδιότητες δίνονται στην Άσκηση 1.7. Φροντίστε, μόνο, στις αποδείξεις σας, να μην χρησιμοποιείτε ιδιότητες που δεν έχετε αποδείξει ακόμα. Είναι δυσκολότερο από ό,τι φαίνεται!

Κλείνουμε την παράγραφο με τον ορισμό των ακεραίων δυνάμεων πραγματικών αριθμών.

Ορισμός 1.3. ***(Ακέραιες δυνάμεις)***

1. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}^*$, ορίζουμε $a^n \triangleq \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ φορές}}$. Το a καλείται **βάση**, το n καλείται **εκθέτης**, και το a^n καλείται η n-οστή **δύναμη** του a.*

2. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και $n \in \mathbb{N}^*$, ορίζουμε $x^{-n} = (x^{-1})^n$.*

3. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $x^0 = 1$.*

Η απόδειξη της παρακάτω πρότασης ζητείται στην Άσκηση 1.8.

Πρόταση 1.3. ***(Ιδιότητες ακεραίων δυνάμεων)*** *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$ ισχύουν τα ακόλουθα:*

$$x^n x^m = x^{n+m}, \qquad x^n y^n = (xy)^n, \quad (x^n)^m = x^{mn}.$$

(Αν κάποιο x, y υψώνεται σε αρνητικό εκθέτη, εννοείται πως είναι διάφορο του μηδενός.)

Στη συνέχεια, θα θεωρούμε γνωστές όλες τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών οι οποίες εμπλέκουν ισότητες και οι οποίες μάς είναι γνωστές από το Λύκειο γνωστές. Οι ιδιότητες που εμπλέκουν ανισότητες είναι το αντικείμενο της επόμενης παραγράφου.

Ασκήσεις

1.7. [⋆⋆] (Ιδιότητες πεδίου) Αποδείξτε ότι ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες για κάθε $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Εννοείται ότι αν για κάποιο αριθμό εμφανίζεται ο αντίστροφός του, ο αριθμός αυτός είναι διάφορος του 0. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μόνο τα Αξιώματα Πεδίου και ιδιότητες που εμφανίζονται σε αυτή την παράγραφο και έχουν ήδη αποδειχθεί. Σε κάθε ισότητα ή ισοδυναμία που γράφετε, αναφέρετε το αξίωμα ή την ιδιότητα που χρησιμοποιείτε.

1. Αν $xy = 0$, τότε είτε το $x = 0$, είτε το $y = 0$, είτε $x = y = 0$.
2. $x(y - z) = xy - xy$.
3. $(x + y)/z = x/z + y/z$.
4. $(x/y)/(z/w) = (xw)/(yz)$.
5. $(xy)/(zw) = y/z$
6. $(x/z) + (y/w) = (xw + yz)/(zw)$.
7. $x^{-n} = (x^n)^{-1}$.

1.8. [⋆] (Ιδιότητες ακεραίων δυνάμεων) Αποδείξτε την Πρόταση 1.3.

1.9. (Διωνυμικό Θεώρημα) Έστω $k \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε το k **παραγοντικό** ως

$$k! \triangleq \begin{cases} 1 \times 2 \times \cdots \times (k-1) \times k, & k \geq 1, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Ορίζουμε, επίσης, τον **διωνυμικό συντελεστή**

$$\binom{N}{n} \triangleq \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Να αποδείξετε το **Διωνυμικό Θεώρημα**:

$$(x + y)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n y^{N-n},$$

όπου $x, y \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}^*$.

1.10. (Ταυτότητα διαφοράς δυνάμεων) Αποδείξτε την ταυτότητα

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}),$$

όπου $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όλες τις γνωστές σας ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

1.11. (Ταυτότητα αθροίσματος) Αποδείξτε την ταυτότητα

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$

όπου $N \in \mathbb{N}^*$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όλες τις γνωστές σας ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

1.12. (Ταυτότητα αθροίσματος τετραγώνων) Αποδείξτε την ταυτότητα

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

όπου $N \in \mathbb{N}^*$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όλες τις γνωστές σας ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

1.13. Δώστε ένα απλό τύπο για το άθροισμα $\sum_{n=1}^{N} n^3$.

1.4 Αξιώματα Διάταξης

Αξιώματα Διάταξης: *Υπάρχει το υποσύνολο $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}$, που καλείται το σύνολο των **θετικών** πραγματικών αριθμών, με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

A.10 (Κλειστότητα ως προς την πρόσθεση) Αν $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, τότε $x + y \in \mathbb{R}_+^*$.

A.11 (Κλειστότητα ως προς τον πολλαπλασιασμό) Αν $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, τότε $xy \in \mathbb{R}_+^*$.

A.12 (Κανόνας της Τριχοτόμησης) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συμβαίνει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα: είτε $x \in \mathbb{R}_+^*$, είτε $-x \in \mathbb{R}_+^*$, είτε $x = 0$.

Παρατηρήστε ότι οι πραγματικοί αριθμοί δεν είναι το μόνο πεδίο που ικανοποιεί τα Αξιώματα Διάταξης. Ένα άλλο παράδειγμα είναι οι ρητοί αριθμοί, όχι όμως και οι μιγαδικοί. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ουσιαστικά τα Αξιώματα Διάταξης σημαίνουν ότι μπορούμε να βάλουμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς σε μια σειρά, επομένως, διαισθητικά μιλώντας, αυτοί είναι ένα μονοδιάστατο σύνολο. Αυτό μπορεί να γίνει και για τους ρητούς, όχι όμως και για τους μιγαδικούς, που ουσιαστικά είναι ένα δισδιάστατο σύνολο.

Τα Αξιώματα Διάταξης είναι σημαντικά στη θεωρία μας διότι αρκούν, μαζί με τα Αξιώματα Πεδίου, για να αποδείξουμε όλες τις γνωστές μας ιδιότητες που εμπλέκουν ισότητες *και* ανισότητες. Θα αποδείξουμε αρκετές από αυτές ιδιότητες στη συνέχεια, πρώτα όμως θα ορίσουμε μερικές επιπλέον έννοιες:

Ορισμός 1.4. ***(Αρνητικοί, ανισότητες και απόλυτη τιμή)*** *Ορίζουμε τα ακόλουθα:*

1. *Ένας αριθμός x καλείται **αρνητικός** αν ο $-x$ είναι θετικός. Επομένως, από το Αξίωμα A.12 έχουμε ότι κάθε αριθμός x είναι ή θετικός ή αρνητικός ή το 0.*
2. *Συμβολίζουμε με $\mathbb{R}_-^*$ το σύνολο των αρνητικών αριθμών.*
3. *$x > y$ σημαίνει ότι ο $x - y$ είναι θετικός.*
4. *(Απόρροια του προηγούμενου σκέλους με $y = 0$) $x > 0$ σημαίνει ότι ο x είναι θετικός. Επομένως, $x > y \Leftrightarrow x - y > 0$.*
5. *$x < y$ σημαίνει ότι $y > x$.*
6. *(Απόρροια του προηγούμενου σκέλους με $y = 0$) $x < 0$ σημαίνει ότι ο x είναι αρνητικός. Επομένως, $x < y \Leftrightarrow x - y < 0$.*
7. *$x \geq y$ σημαίνει ότι $x = y$ ή $x > y$.*

8. *$x \leq y$ σημαίνει ότι $y \geq x$.*

9. *Η **απόλυτη τιμή** $|a|$ ενός πραγματικού a ορίζεται ως*

$$|a| \triangleq \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Πρόταση 1.4. ***(Συνέπειες Αξιωμάτων Διάταξης)***

1. *$x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$.*
2. *$-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$.*
3. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα: $x < y$, $x = y$, $x > y$.*
4. *Αν $x < y$ και $z < w$, τότε $x + z < y + w$.*
5. *Αν $x < y$ και $w > 0$, τότε $wx < wy$.*
6. *Αν $x < y$ και $w < 0$, τότε $wx > wy$.*
7. *Αν $x < y$ τότε $-x > -y$.*
8. *Για κάθε $x \neq 0$, $x^2 > 0$.*
9. *$1 > 0$.*
10. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$.*

Απόδειξη:

1. Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό των αρνητικών αριθμών.
2. Σχετικά με την ευθεία συνεπαγωγή, έστω πως $x > 0$. Τότε $-(-x)) > 0$, επομένως, από τον ορισμό των αρνητικών , ο $-x$ είναι αρνητικός, δηλαδή $-x < 0$. Αντιστρόφως, αν $-x < 0$, και πάλι από τον ορισμό των αρνητικών, ο $-(-x)$ είναι θετικός, δηλαδή $x > 0$.
3. Έστω ο $x - y$. Λόγω του Κανόνα της Τριχοτόμησης, υπάρχουν ακριβώς τρία ενδεχόμενα: Αν $x - y$ θετικός, τότε εξ ορισμού $x > y$. Αν $x - y = 0$ τότε και $x = y$. Τέλος, αν $x - y$ αρνητικός, τότε ο $y - x$ θετικός, δηλαδή $y > x$.
4. Αφού $x < y$ θα έχουμε και $y - x > 0$. Ομοίως, αφού $z < w$ θα έχουμε και $w - z > 0$. Από το Αξίωμα Α.10, προκύπτει ότι ο $(y - x) + (w - z) = (y + w) - (x + z)$ είναι θετικός, δηλαδή $y + w > x + z$.
5. Έχουμε $y - x > 0$ και $w > 0$, άρα από το Αξίωμα Α.11 έχουμε $w(y - x) > 0 \Rightarrow wy - wx > 0 \Rightarrow wx < wy$.
6. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $y - x > 0$ και $w < 0 \Rightarrow -w > 0$, άρα από το Αξίωμα Α.11 έχουμε $(-w)(y - x) > 0 \Rightarrow -wy + wx > 0 \Rightarrow wx > wy$.
7. Προκύπτει από το Σκέλος 6 για $w = -1$.

8. Αφού $x \neq 0$, από το Αξίωμα Α.12 υπάρχουν δύο ενδεχόμενα, είτε $x > 0$, είτε $x < 0$. Στην πρώτη περίπτωση, από το Αξίωμα Α.11 προκύπτει ότι $x^2 = x \cdot x > 0$. Στη δεύτερη περίπτωση, $x < 0 \Rightarrow (-x) > 0$ και πάλι από το Αξίωμα Α.11 έχουμε $(-x)(-x) > 0$. Όμως, $(-x)(-x) = x^2$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

9. Προκύπτει από το Σκέλος 8, αφού $1 = 1 \cdot 1$.

10. Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα. Αν $x \neq 0$, από το Σκέλος 8 έχουμε $x^2 > 0$, επομένως και $x^2 \geq 0$. Αν $x = 0$, τότε $x^2 = 0$, οπότε και πάλι $x^2 \geq 0$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ∎

Από εδώ και στο εξής, όπως κάναμε ήδη για τα Αξιώματα Πεδίου, θεωρούμε γνωστές όλες τις ιδιότητες που έχουμε μάθει στο Λύκειο που εμφανίζουν ανισότητες.

Ασκήσεις

1.14. [⋆⋆] (Ιδιότητες ανισοτήτων) Να αποδείξετε τις ακόλουθες ιδιότητες, χρησιμοποιώντας όλες τις ιδιότητες που προκύπτουν από τα Αξιώματα Πεδίου (ακόμα και αν δεν τις έχουμε αποδείξει), τα Αξιώματα Διάταξης και όσες ιδιότητες απορρέουν από τα Αξιώματα Διάταξης που έχουμε αποδείξει.

1. Αν $x > 0$ και $y < 0$, τότε $xy < 0$.

2. Αν $x > 0$, τότε $x^{-1} > 0$.

3. Αν $x < 0$, τότε $x^{-1} < 0$.

4. Αν $x < y$ και $y < z$, τότε $x < z$.

5. Αν $x < y$ και $z \leq w$, τότε $x + z < y + w$.

6. Αν $0 < x < y$ τότε $x^{-1} > y^{-1} > 0$.

7. Αν $x < y$ τότε $x < \frac{x+y}{2} < y$.

1.15. [⋆⋆] (Ιδιότητες δυνάμεων) Να αποδείξετε τις ακόλουθες ιδιότητες, χρησιμοποιώντας όλες τις ιδιότητες που προκύπτουν από τα Αξιώματα Πεδίου (ακόμα και αν δεν τις έχουμε αποδείξει), τα Αξιώματα Διάταξης, και όσες ιδιότητες απορρέουν από τα Αξιώματα Διάταξης που έχουμε αποδείξει.

1. Έστω $n \in N^*$ περιττός. Να δείξετε ότι $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^n < x_2^n$.

2. Έστω $n \in N^*$ άρτιος. Να δείξετε ότι $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^n < x_2^n$ και ότι $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow x_1^n > x_2^n$.

1.5 Διαστήματα

Έχοντας ορίσει τις ανισότητες, μπορούμε να ορίσουμε και την έννοια του διαστήματος.

Ορισμός 1.5. *(Διαστήματα)*

1. *Καλούμε* ***διάστημα*** *κάθε σύνολο S που έχει την ιδιότητα αν $x \in S$ και $y \in S$ με $x < y$, τότε και $z \in S$ για οποιαδήποτε z τέτοιο ώστε $x \leq z \leq y$.*

2. *Χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες συντομογραφίες:*

$$\begin{aligned} (a,b) &\triangleq \{x\in\mathbb{R} : a<x<b\}, \quad [a,b] \triangleq \{x\in\mathbb{R} : a\le x\le b\},\\ (a,b] &\triangleq \{x\in\mathbb{R} : a<x\le b\}, \quad [a,b) \triangleq \{x\in\mathbb{R} : a\le x< b\},\\ (a,\infty) &\triangleq \{x\in\mathbb{R} : a<x\}, \quad (-\infty,b) \triangleq \{x\in\mathbb{R} : x<b\},\\ [a,\infty) &\triangleq \{x\in\mathbb{R} : a\le x\}, \quad (-\infty,b] \triangleq \{x\in\mathbb{R} : x\le b\},\\ (-\infty,\infty) &\triangleq \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   όπου $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \le b$.

3. *Τα **άκρα** του (a, b) ορίζονται ως τα a (**αριστερό άκρο**) και b (**δεξιό άκρο**). Παρόμοιοι ορισμοί ισχύουν και για τα άλλα διαστήματα του Σκέλους 2.*

4. *Τα (a, b), (a, ∞), $(-\infty, b)$, $(-\infty, \infty)$ καλούνται **ανοικτά**.*

5. *Τα $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, \infty)$ καλούνται **κλειστά**.*

Μπορούμε να δείξουμε ότι τα *μόνα* διαστήματα που υπάρχουν είναι αυτά των μορφών που αναφέρονται στο Σκέλος 2. Παρατηρήστε ότι, στην περίπτωση που $a = b$, ορισμένα εξ αυτών είναι το κενό σύνολο ή μονοσύνολα. Δείτε, σχετικά, την Άσκηση 1.27.

Τα **σύμβολα του απείρου** ∞ και $-\infty$ προς το παρόν χρησιμοποιούνται ως ένας πολύ διαισθητικός τρόπος για να συμβολίσουμε ότι ένα διάστημα δεν είναι άνω ή κάτω (αντίστοιχα) φραγμένο. Στο επόμενο κεφάλαιο θα βρούμε και άλλες χρήσεις γι' αυτά. Σε κάθε περίπτωση, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι *δεν* είναι αριθμοί! Σχετικά με τους συμβολισμούς, θα αποφεύγουμε να γράφουμε $+\infty$. Το ∞ θα εννοείται πως είναι το $+\infty$, όπως ακριβώς και το 5 εννοείται ότι είναι το $+5$.

1.5.1 Ανοικτά και Κλειστά Σύνολα

Οι πολύ παρατηρητικοί θα πρόσεξαν ότι το $(-\infty, \infty)$ ορίστηκε *και* ανοιχτό *και* κλειστό. (Μάλιστα, ορισμένοι το χαρακτηρίζουν «clopen», από τις λέξεις closed και open.) Αυτό οφείλεται στον τρόπο που ορίζονται γενικότερα τα ανοικτά και τα κλειστά *σύνολα*. Δείτε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 1.6. ***(Ανοικτά και κλειστά σύνολα)*** *Έστω $S \subseteq \mathbb{R}$.*

1. *Ένα σημείο $x \in S$ καλείται **εσωτερικό σημείο** του S αν υπάρχει ανοικτό διάστημα (a, b) τέτοιο ώστε $x \in (a, b)$ και $(a, b) \subseteq S$.*

2. *Τα εσωτερικά σημεία ενός συνόλου S απαρτίζουν το **εσωτερικό** του $\operatorname{int} S$.*

3. *Καλούμε ένα σύνολο S **ανοικτό** όταν όλα τα σημεία του είναι εσωτερικά,*

4. *Καλούμε ένα σύνολο S **κλειστό** όταν το συμπλήρωμα του S^c είναι ανοικτό.*

5. *Αν το c είναι εσωτερικό σημείο ενός συνόλου S, τότε το S καλείται **γειτονιά** του c.*

Επομένως, το εσωτερικό του διαστήματος $[a, b]$ είναι το $\operatorname{int}[a, b] = (a, b)$. Αντίστοιχα, $\operatorname{int}(a, b] = (a, b)$, $\operatorname{int}[a, b) = (a, b)$, $\operatorname{int}(-\infty, b] = -\infty, b]$, κτλ.

Παρατηρήστε ότι, σύμφωνα με τον ορισμό που της έχουμε δώσει, η γειτονιά δεν χρειάζεται να είναι διάστημα. Πάντως, πρέπει να σημειώσουμε το ακόλουθο: συχνά στη συνέχεια θα λέμε ότι υπάρχει μια γειτονιά S ενός σημείου c τέτοια ώστε να ισχύει μια ιδιότητα για κάθε $x \in S$ (για παράδειγμα, μια συνάρτηση f είναι παντού θετική στην S). Μπορούμε τότε, πάντοτε, να υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο (a,b) με $c \in (a,b)$ ώστε να ισχύει αυτή η ιδιότητα για κάθε $x \in (a,b)$. Αυτό ισχύει διότι το c είναι εσωτερικό σημείο της S, επομένως, εξ ορισμού του εσωτερικού σημείου, υπάρχει κάποιο ανοικτό διάστημα $(a,b) \subseteq S$ τέτοιο ώστε $c \in (a,b)$.

Οι παραπάνω ορισμοί ίσως φαίνονται περισσότερο μυστηριώδεις από όσο χρειάζεται, αλλά έχουν το πλεονέκτημα ότι γενικεύονται άμεσα και σε άλλα σύνολα πέραν των πραγματικών αριθμών, όπως για παράδειγμα στο σύνολο $\mathbb{R}^n$ των διατεταγμένων n-άδων, τους μιγαδικούς αριθμούς $\mathbb{C}$, κτλ.

Παρατηρήστε πως, στον ορισμό του εσωτερικού σημείου, η απαίτηση το διάστημα (a,b) να είναι ανοικτό είναι ουσιώδης, διαφορετικά με λίγη σκέψη μπορείτε να δείτε ότι ο ορισμός του ανοικτού συνόλου δεν είναι συμβατός με την ειδική περίπτωση του ανοικτού διαστήματος που ήδη έχουμε δώσει.

Βάσει του παραπάνω ορισμού, ένα σύνολο S είναι ανοικτό αν, για οποιοδήποτε σημείο x εντός του συνόλου, μπορούμε να βρούμε μια ανοικτή γειτονιά (a,b) με $a < x < b$ η οποία είναι εντός του συνόλου S, δηλαδή όλα τα στοιχεία x του συνόλου είναι μακριά από τα άκρα του.

Έχοντας τους παραπάνω ορισμούς, μπορούμε να δείξουμε γιατί το $\mathbb{R}$ είναι και ανοικτό και κλειστό. Είναι καταρχάς ανοικτό, γιατί για κάθε σημείο x προφανώς υπάρχει μια ανοικτή γειτονιά $(x-1, x+1) \subseteq \mathbb{R}$. Είναι όμως *και* κλειστό, διότι το συμπλήρωμά του, που είναι το κενό σύνολο είναι ανοικτό. Πράγματι, για κάθε σημείο $x \in \emptyset$, υπάρχει μια ανοικτή γειτονιά $I \subset \emptyset$. Επίσης, κάθε σημείο $x \in \emptyset$ φοράει κόκκινο πουλόβερ, του αρέσουν οι λεμονάδες, κτλ. Όλα αυτά ισχύουν *αυτομάτως*, διότι το κενό σύνολο δεν έχει *κανένα* σημείο!

Ενδεχομένως να αισθάνεστε εξαπατημένοι με το τελευταίο επιχείρημα. Σε κάθε περίπτωση, είναι απολύτως ορθό και περισσότερα επί του θέματος μπορείτε να μάθετε σε μαθήματα Λογικής. Το καλό είναι ότι, αν δεν έχετε κανένα αυτοκίνητο, μπορείτε να δηλώσετε στους φίλους σας, χωρίς τύψεις, ότι, για κάθε αυτοκίνητο που έχετε, του έχετε εγκαταστήσει εκτινασσόμενα καθίσματα.

Ασκήσεις

1.16. (Το κενό σύνολο είναι clopen) Να δείξετε ότι το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι και ανοικτό και κλειστό.

1.17. (Εσωτερικό συνόλων) Προσδιορίστε το εσωτερικό των παρακάτω συνόλων. Ποια από αυτά είναι ανοικτά;

$$(0,1), \quad (0,1], \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R}-\mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{R}-\mathbb{Z}.$$

1.6 Supremum και Infimum

Σε αυτή την παράγραφο θα σταματήσουμε να προσπαθούμε να ξεχάσουμε αυτά που ξέραμε και θα προσπαθήσουμε να μάθουμε κάτι καινούργιο, και συγκεκριμένα τις έννοιες του supremum και του infimum ενός συνόλου. Οι έννοιες αυτές είναι, κατά κάποιο τρόπο, γενικεύσεις των αντίστοιχων εννοιών του μέγιστου και του ελάχιστου στοιχείου ενός συνόλου.

1.6.1 Supremum και Infimum

Ορισμός 1.7. ***(Φράγματα)*** *Έστω μη κενό σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}$.*

1. *Αν υπάρχει $u \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x \le u$ για κάθε $x \in S$, τότε το u καλείται* ***άνω φράγμα*** *του S και το S* ***άνω φραγμένο****. Αν, επιπλέον, $u \in S$, το u καλείται το* ***μέγιστο στοιχείο (ή maximum)*** *του S, και γράφουμε $u = \max S$.*

2. *Αντίστοιχα αν υπάρχει $l \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x \geq l$ για κάθε $x \in S$, τότε το l καλείται **κάτω φράγμα** του S και το S **κάτω φραγμένο**. Αν, επιπλέον, $l \in S$, το l καλείται το **ελάχιστο στοιχείο** (ή **minimum**) του S, και γράφουμε $l = \min S$.*

3. *Τα άνω και κάτω φράγματα καλούνται από κοινού **φράγματα**. Αν ένα σύνολο είναι και άνω φραγμένο, και κάτω φραγμένο, καλείται **φραγμένο**.*

Παρατηρήστε ότι μιλάμε για *το* μέγιστο και *το* ελάχιστο στοιχείο, γιατί αυτά πρέπει να είναι μοναδικά. Δείτε σχετικά την Άσκηση 1.18.

Ο λόγος που ορίζουμε τα supremum και infimum ενός συνόλου είναι ότι υπάρχουν σύνολα που, καίτοι φραγμένα άνω (αντίστοιχα, φραγμένα κάτω), δεν έχουν μέγιστο στοιχείο (αντίστοιχα, ελάχιστο στοιχείο). Για να κατανοήσουμε το πρόβλημα, ας εξετάσουμε το σύνολο $(0, 1)$ όλων των αριθμών $x : 0 < x < 1$. Ποιο είναι το μέγιστο στοιχείο του; Μια συνηθισμένη (λάθος) απάντηση είναι ότι αυτό είναι το 1. Η απάντηση είναι λάθος διότι το μέγιστο στοιχείο ενός συνόλου πρέπει να ανήκει σε αυτό (δείτε ξανά τον ορισμό!), κάτι που δεν ισχύει για το 1 και το σύνολο $(0, 1)$. Μια άλλη συνηθισμένη, επίσης λάθος, απάντηση είναι ότι το μέγιστο στοιχείο αυτού του συνόλου είναι ο αριθμός $0.9999\ldots$, όπου το πλήθος των 9 είναι άπειρο. Ο αριθμός αυτός είναι όμως το 1, και άρα επαναλαμβάνεται το προηγούμενο λάθος. (Δείτε την Άσκηση 1.19.) Μια ακόμα συνηθισμένη λάθος απάντηση είναι ότι το μέγιστο στοιχείο *τείνει* στο 1. Αυτή η απάντηση είναι ακόμα πιο λάθος, καθώς το ζητούμενο είναι ένας αριθμός, ο οποίος δεν μπορεί να *τείνει* κάπου. Μόνο οι συναρτήσεις και οι ακολουθίες *τείνουν*, όπως γνωρίζουμε από το Λύκειο και θα θυμηθούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Τελικά, η απάντηση είναι ότι *δεν υπάρχει* μέγιστο στοιχείο γι' αυτό το σύνολο. Υπάρχει, πάντως, ένας αριθμός που, αν και δεν είναι μέγιστο στοιχείο, εντούτοις ικανοποιεί τη διαίσθησή μας ως ένα καλό υποκατάστατο. Αυτός ο αριθμός είναι, βέβαια, το 1. Τι ιδιαίτερο έχει αυτός ο αριθμός; Δεν είναι το μέγιστο στοιχείο (που, όπως είπαμε, δεν υπάρχει) αλλά ένα άνω φράγμα. Είναι, όμως, και το ελάχιστο, δηλαδή το *μικρότερο* άνω φράγμα. Καταλήγουμε, λοιπόν, στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.8. ***(Supremum, infimum)*** *Ένας αριθμός καλείται **ελάχιστο άνω φράγμα** ή **supremum** ενός μη κενού συνόλου S, και συμβολίζεται $\sup S$ αν:*

1. *Το $\sup S$ είναι άνω φράγμα του S, και*

2. *Είναι το ελάχιστο άνω φράγμα, δηλαδή κανένας αριθμός $x < \sup S$ δεν είναι άνω φράγμα του S.*

*Αντίστοιχα, ένας αριθμός καλείται **μέγιστο κάτω φράγμα** ή **infimum** ενός μη κενού συνόλου S, και συμβολίζεται $\inf S$ αν:*

1. *Το $\inf S$ είναι κάτω φράγμα του S, και*

2. *Είναι το μέγιστο κάτω φράγμα, δηλαδή κανένας αριθμός $x > \inf S$ δεν είναι κάτω φράγμα του S.*

Για να αποδείξουμε ότι ένας αριθμός είναι ελάχιστο άνω φράγμα, πρέπει να ακολουθήσουμε την οδό που σαφώς προσδιορίζει ο ορισμός: πρώτον, βρίσκουμε όλα τα άνω φράγματα, και, δεύτερον, επιλέγουμε το μικρότερο από αυτά. Ομοίως, για να αποδείξουμε ότι ένας αριθμός είναι μέγιστο κάτω φράγμα, πρώτον, βρίσκουμε όλα τα κάτω φράγματα, και, δεύτερον, επιλέγουμε το μεγαλύτερα από αυτά. Δείτε το ακόλουθο παράδειγμα για την εφαρμογή αυτής της μεθόδου.

Παράδειγμα 1.3. (Παραδείγματα supremum και infimum) Θα προσδιορίσουμε το supremum και το infimum ορισμένων χαρακτηριστικών συνόλων.

1. Έστω, καταρχάς, το $(0, 1)$. Τα άνω φράγματα του $(0, 1)$ απαρτίζουν το σύνολο $[1, \infty)$. Ο μικρότερος από αυτούς τους αριθμούς είναι ο 1, επομένως $\sup(0, 1) = 1$. Παρομοίως, τα κάτω φράγματα του $(0, 1)$ είναι το σύνολο $(-\infty, 0]$. Το μέγιστο από αυτά είναι το 0, επομένως, $\inf(0, 1) = 0$. Παρατηρήστε πως αυτό το σύνολο δεν έχει μέγιστο και ελάχιστο.

2. Ακριβώς τους ίδιους συλλογισμούς μπορούμε να ακολουθήσουμε για το διάστημα $[0, 1]$, καταλήγοντας στο ότι και για αυτό $\sup[0, 1] = 1$ και $\inf[0, 1] = 0$. Όμως, γι' αυτό το διάστημα υπάρχουν επίσης το μέγιστο $\max[0, 1] = 1$ και το ελάχιστο $\min[0, 1] = 0$, κάτι που δεν ισχύει για το προηγούμενο διάστημα.

3. Παρατηρήστε ότι οι έννοιες του supremum και του infimum είναι ορισμένες για μη κενά σύνολα, άρα αυτά δεν υπάρχουν στην περίπτωση του κενού συνόλου $\emptyset$.

4. Έστω το σύνολο $\mathbb{R}$. Σε αυτή την περίπτωση, το σύνολο των άνω φραγμάτων του $\mathbb{R}$ είναι το κενό σύνολο, το οποίο δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Επομένως, δεν υπάρχει supremum για το $\mathbb{R}$. Παρόμοια προκύπτει πως δεν υπάρχει και infimum.

5. Έστω το σύνολο $A = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \dots \right\}$. Είναι προφανές ότι $\sup A = \max A = \frac{1}{2}$. Σχετικά με το infimum του A, παρατηρήστε ότι όλοι οι αριθμοί στο διάστημα $(-\infty, 0]$ είναι κάτω φράγματα, αφού αν $x \leq 0$ τότε σίγουρα και $x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ για κάθε n. Από την άλλη, για οποιονδήποτε αριθμό $x > 0$ έχουμε $x > \left(\frac{1}{2}\right)^n$ για κάποιο n, άρα αν $x > 0$, ο x δεν είναι άνω φράγμα του A. Άρα, $\inf A = 0$. Παρατηρήστε πως δεν υπάρχει το $\min A$. Πράγματι, αν υπήρχε, θα ήταν της μορφής $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ και κάποιο k, και έχουμε άτοπο διότι το $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ μικρότερο από το υποτιθέμενο ελάχιστο.

6. Έστω το $B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Προφανώς $\sup B = \max B = \sqrt{2}$ και $\inf B = \min B = -\sqrt{2}$.

7. Ας αλλάξουμε λίγο το προηγούμενο σύνολο, εξετάζοντας τώρα την τομή $C = B \cap \mathbb{Q}$. Και πάλι, $\sup C = \sqrt{2}$ και $\inf C = -\sqrt{2}$. Όμως τώρα,επειδή τα $\pm\sqrt{2}$ είναι άρρητοι, δεν ανήκουν στο C, και, επομένως, δεν υπάρχουν τα $\max C$, $\min C$.

Όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, *όλα* τα μη κενά και φραγμένα άνω σύνολα είναι βέβαιο ότι έχουν supremum! Ομοίως, *όλα* τα μη κενά και φραγμένα κάτω σύνολα είναι βέβαιο ότι έχουν infimum. Αυτές οι ιδιότητες δεν αποδεικνύονται από τα αξιώματα που έχουμε ήδη παρουσιάσει, αλλά πρέπει να υποτεθούν αξιωματικά.

1.6.2 Συμβάσεις

Βάσει του παραπάνω ορισμού, τα μη φραγμένα άνω σύνολα δεν έχουν supremum. Παρόλα αυτά, συχνά γίνεται η σύμβαση να γράφουμε $\sup S = \infty$, όταν το S δεν είναι φραγμένο άνω. Ο λόγος που γίνεται η σύμβαση αυτή είναι ότι αν το S δεν είναι φραγμένο άνω, κανένας πραγματικός αριθμός δεν φράσσει το σύνολο εκτός του «αριθμού» ∞, επομένως αυτός είναι και το ελάχιστο άνω φράγμα. Επειδή, όμως, το ∞ αυστηρά δεν είναι αριθμός, μόνο κατά σύμβαση μπορεί να ισχύει το $\sup S = \infty$. Ομοίως, τα μη φραγμένα κάτω σύνολα δεν έχουν infimum, αλλά συχνά γίνεται η σύμβαση να γράφουμε $\inf S = -\infty$, όταν το S δεν είναι φραγμένο κάτω. Πράγματι, αν ένα σύνολο δεν είναι φραγμένο κάτω, τότε ο μόνος «αριθμός» που φράσσει το σύνολο αυτό είναι το $-\infty$, άρα αυτός είναι και το μέγιστο κάτω φράγμα.

Επιπλέον, το κενό σύνολο $\emptyset$ δεν έχει supremum και infimum, αν και μερικές φορές γράφουμε, επίσης κατά σύμβαση, $\sup \emptyset = -\infty$ και $\inf \emptyset = \infty$. Μπορούμε να δικαιολογήσουμε αυτές τις συμβάσεις ως εξής: *κάθε* αριθμός είναι μεγαλύτερος από *όλα* τα στοιχεία του κενού συνόλου. Αυτό ισχύει αυτομάτως διότι το κενό σύνολο δεν έχει στοιχεία! Επομένως, ο μόνος «αριθμός» που μπορεί να είναι το ελάχιστο *όλων* αυτών των άνω φραγμάτων είναι το $-\infty$. Ανάλογα, *κάθε* αριθμός είναι μικρότερος από *όλα* τα στοιχεία του κενού συνόλου. Και πάλι αυτό ισχύει αυτομάτως. Επομένως, ο μόνος «αριθμός» που μπορεί να είναι το μέγιστο *όλων* αυτών των κάτω φραγμάτων είναι το ∞.

Πολλές από τις ιδιότητες που θα παρουσιάσουμε θα ισχύουν και όταν κάποια από τα supremum και infimum που αναφέρουμε είναι $\pm\infty$. Πάντως, για λόγους απλότητας, στα επόμενα, όταν θα αναφερόμαστε στο supremum (infimum) ενός συνόλου, θα υπονοείται πάντα ότι το σύνολο αυτό είναι μη κενό και φραγμένο άνω (κάτω) και επομένως το supremum (infimum) είναι πραγματικός αριθμός, εκτός αν ρητώς αναφέρουμε ότι χρησιμοποιούμε τις παραπάνω συμβάσεις.

1.6.3 Ιδιότητες των Supremum και Infimum

Εξετάζουμε, στη συνέχεια, κάποιες βασικές ιδιότητες των supremum και infimum.

Πρόταση 1.5. ***(Μοναδικότητα supremum/infimum)*** *Το supremum και το infimum ενός συνόλου, αν υπάρχουν, είναι μοναδικά.*

Απόδειξη: Πράγματι, έστω πως ένα σύνολο A έχει δύο supremum, έστω S_1 και S_2, με $S_1 < S_2$. Τότε έχουμε άτοπο, διότι το S_1, ως ελάχιστο άνω φράγμα, είναι άνω φράγμα, και είναι μάλιστα μικρότερο από το S_2 που και αυτό είναι *ελάχιστο* άνω φράγμα. Η απόδειξη για το infimum είναι αντίστοιχη. ■

Πρόταση 1.6. ***(Maximum=supremum, minimum=infimum)*** *Αν υπάρχει το maximum ενός συνόλου, τότε υπάρχει και το supremum και ταυτίζονται. Αντίστοιχα, αν υπάρχει το minimum ενός συνόλου,τότε υπάρχει και το infimum και ταυτίζονται.*

Απόδειξη: Έστω σύνολο A με maximum το $M = \max A$. Εξ ορισμού, το M είναι άνω φράγμα. Είναι όμως και το ελάχιστο άνω φράγμα. Πράγματι, αν υπήρχε μικρότερο άνω φράγμα $M' < M$, τότε θα είχαμε άτοπο διότι το M, ως στοιχείο του συνόλου, οφείλει να ικανοποιεί την $M \leq M'$. ■

Πρόταση 1.7. ***(Ιδιότητα supremum/infimum)***

1. *Έστω σύνολο S με supremum $\sup S$. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in S$ τέτοιο ώστε $x > \sup S - \epsilon$.*
2. *Έστω σύνολο S με infimum $\inf S$. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in S$ τέτοιο ώστε $x < \inf S + \epsilon$.*

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε μόνο το πρώτο σκέλος, καθώς το δεύτερο σκέλος προκύπτει ανάλογα (δείτε την Άσκηση 1.21). Θα υποθέσουμε ότι δεν ισχύει η ιδιότητα, και θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Έστω λοιπόν πως υπάρχει κάποιο ϵ για το οποίο δεν μπορούμε να βρούμε $x \in S$ τέτοιο ώστε $x > \sup S - \epsilon$, δηλαδή για κάθε $x \in S$ ισχύει το ανάποδο, $x \leq \sup S - \epsilon$. Σε αυτή την περίπτωση, καταφέραμε να βρούμε ένα νέο άνω φράγμα για το S, και συγκεκριμένα το $\sup S - \epsilon$, το οποίο είναι μικρότερο του $\sup S$. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι το $\sup S$ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του S. ■

Πρόταση 1.8. ***(Supremum/infimum υποσυνόλων)*** *Έστω δύο σύνολα A, B με $A \subseteq B$.*

1. *Αν υπάρχουν τα $\sup A$, $\sup B$, τότε $\sup A \leq \sup B$.*
2. *Αν υπάρχουν τα $\inf A$, $\inf B$, τότε $\inf A \geq \inf B$.*

Απόδειξη: Και πάλι, θα αποδείξουμε μόνο το πρώτο σκέλος, καθώς το δεύτερο σκέλος προκύπτει ανάλογα (δείτε την Άσκηση 1.20). Θα υποθέσουμε ότι δεν ισχύει η ιδιότητα, και θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Έστω λοιπόν πως $\sup A > \sup B$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει κάποιος αριθμός που βρίσκεται ανάμεσα σε αυτά τα δύο supremum που ανήκει μεν στο A, όχι όμως και στο υπερσύνολό του B, δημιουργώντας έτσι άτοπο. Αναλυτικά, έστω $h = (\sup A - \sup B)/2$. Από την Πρόταση 1.7 προκύπτει ότι υπάρχει $x \in A$ με $x > \sup A - h$. Όμως,

$$x > \sup A - h = \sup A - \frac{\sup A - \sup B}{2} = \frac{\sup A + \sup B}{2} > \sup B \Rightarrow x > \sup B.$$

Αφού $x > \sup B$, το x δεν ανήκει στο B, αφού το $\sup B$ είναι άνω φράγμα του B. Το x όμως ανήκει στο A που είναι υποσύνολο του B. Έχουμε λοιπόν άτοπο. ■

Παράδειγμα 1.4. (Σύγκριση συνόλων) Έστω μη κενά σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Αν για κάθε $a \in A$, και για κάθε $b \in B$, έχουμε $a \leq b$, τότε θα δείξουμε ότι το A έχει supremum, το B έχει infimum, και $\sup A \leq \inf B$.

Πράγματι, το A είναι μη κενό και φραγμένο άνω από κάποιο οποιοδήποτε $b \in B$, άρα έχει supremum. Ομοίως, το B είναι μη κενό και φραγμένο κάτω από κάποιο οποιοδήποτε $a \in A$, άρα έχει infimum. Έστω τώρα ότι $\sup A > \inf B$. Άρα θα υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\sup A = \inf B + \epsilon$. Όμως από την κατασκευή του supremum και του infimum, θα υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$, με $a > \sup A - \frac{\epsilon}{2}$, $b < \inf B + \frac{\epsilon}{2}$. Άρα, $a - b > \sup A - \inf B - \epsilon = 0 \Rightarrow a > b$, που είναι άτοπο εξ υποθέσεως. Άρα, $\sup A \leq \inf B$.

1.6.4 Αρνήσεις Προτάσεων

Στις παραπάνω αποδείξεις χρειάστηκε, σε πολλές περιπτώσεις, να δημιουργήσουμε την άρνηση P^c μιας πρότασης P, δηλαδή μια πρόταση P^c που ισχύει αν και μόνο αν δεν ισχύει η P. Η θεωρία βάσει της οποίας μπορούμε να κατασκευάσουμε τέτοιες προτάσεις είναι πολύ πλούσια, και μια αναλυτική εξέτασή της ξεφεύγει από τους σκοπούς μας. Δυστυχώς, δεν υπάρχει κάποια απλή μεθοδολογία για να δημιουργούνται αρνήσεις προτάσεων. Στα πλαίσια αυτού του μαθήματος, μερικά απλά πράγματα που πρέπει να θυμόμαστε είναι:

1. Η άρνηση της πρότασης P^c είναι η αρχική P.
2. Η άρνηση της πρότασης $x \geq y$ είναι η $x < y$ και όχι η $x \leq y$.
3. Η άρνηση της πρότασης $x > y$ είναι η $x \leq y$ και όχι η $x < y$.
4. Η άρνηση της πρότασης «Η πρόταση P ισχύει για κάθε x» είναι ότι «Υπάρχει x για το οποίο η πρόταση P δεν ισχύει».
5. Η άρνηση της πρότασης «Υπάρχει x για το οποίο η πρόταση P ισχύει» είναι ότι «Δεν υπάρχει x για το οποίο η πρόταση P να ισχύει» ή, ισοδύναμα, «Για κάθε x ισχύει η P^c».
6. Η πρόταση $P \Rightarrow Q$ είναι ψευδής μόνο αν η P είναι αληθής και η Q ψευδής.

Το παρακάτω παράδειγμα θα σας βοηθήσει να εξασκηθείτε στις αρνήσεις:

Παράδειγμα 1.5. (Τηλεπαράθυρα) Παρακάτω ακολουθούν μερικές πραγματικές στιχομυθίες μεταξύ της Τηλεπερσόνας 1 (ΤΠ1) και της Τηλεπερσόνας 2 (ΤΠ2) που διημείφθησαν σε πρόσφατα δελτία των 8. Για κάθε στιχομυθία, ακολουθεί μια πρόταση και μετά μια άρνηση

1. (α΄) ΤΠ1: «Δεν υπάρχει υπουργός της κυβέρνησης με λιγότερο από 400 συμβούλους» .

(β΄) ΤΠ2: «Υπάρχει τουλάχιστον ένας υπουργός της κυβέρνησης που έχει λιγότερους από 400 συμβούλους».

2. (α΄) ΤΠ1: «Σε όλες τις προηγούμενες κυβερνήσεις πάνω από τους μισούς υπουργούς είχαν αποτύχει».

   (β΄) ΤΠ2: «Υπάρχει τουλάχιστον μια κυβέρνηση από τις προηγούμενες της οποίας είχαν αποτύχει οι μισοί ή λιγότεροι υπουργοί».

3. Δίνονται σταθερά C, συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, και σύνολο $I \subseteq \mathbb{R}$.

   (α΄) ΤΠ1: «$\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leq C|y - x|$». Με λόγια, για όλα τα ζεύγη αριθμών στο I, ικανοποιείται η $|f(y) - f(x)| \leq C|y - x|$.

   (β΄) ΤΠ2: «$\exists x, y \in I : |f(y) - f(x)| > C|y - x|$». Με λόγια, υπάρχει ζεύγος x, y για το οποίο $|f(y) - f(x)| > C|y - x|$.

4. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, και έστω $x_0, L \in \mathbb{R}$.

   (α΄) ΤΠ1: «$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$». Με λόγια, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ έτσι ώστε αν $0 < |x - x_0| < \delta$, τότε ισχύει $|f(x) - L| < \epsilon$.

   (β΄) ΤΠ2: «$\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0,\ \exists x : 0 < |x - x_0| < \delta,\ |f(x) - L| \geq \epsilon$». Με λόγια, υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε όσο μικρό δ και να πάρουμε, θα βρούμε ένα x για το οποίο ναι μεν $0 < |x - x_0| < \delta$, αλλά η $|f(x) - L| < \epsilon$ δεν θα ισχύει, δηλαδή $|f(x) - L| \geq \epsilon$.

Ασκήσεις

1.18. (Μοναδικότητα μέγιστου και ελάχιστου στοιχείου) Να δείξετε ότι ένα σύνολο S δεν μπορεί να έχει δύο ή περισσότερα μέγιστα στοιχεία. Επομένως, μπορούμε να μιλάμε για *το* μέγιστο στοιχείο. Αντιστοίχως, να δείξετε ότι ένα σύνολο S δεν μπορεί να έχει δύο ή περισσότερα ελάχιστα στοιχεία. Επομένως, μπορούμε να μιλάμε για *το* ελάχιστο στοιχείο.

1.19. ($0.9999\ldots$) Να δείξετε ότι ο αριθμός $0.99999\ldots$ είναι ο 1, δείχνοντας καταρχάς πως ικανοποιεί την εξίσωση $10x = 9 + x$.

1.20. (Ιδιότητα infimum) Να αποδείξετε το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 1.7.

1.21. (Infimum υποσυνόλου) Να αποδείξετε το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 1.8.

1.22. [Σ/Λ, Π] (Supremum υποσυνόλου) Αν για δύο *σύνολα* έχουμε $A \subset B$, τότε $\sup A < \sup B$.

1.23. [Σ/Λ, Π] (Supremum υποσυνόλου) Αν για δύο *διαστήματα* έχουμε $A \subset B$, τότε $\sup A < \sup B$.

1.24. (Φραγμένα σύνολα) Ορίσαμε ότι ένα σύνολο S είναι φραγμένο αν είναι άνω και κάτω φραγμένο, δηλαδή αν υπάρχει κάποιο άνω φράγμα u τέτοιο ώστε $u \geq x$ για κάθε $x \in S$, και κάποιο κάτω φράγμα l τέτοιο ώστε $l \leq x$ για κάθε $x \in S$. Να αποδείξετε τις ακόλουθες προτάσεις, που μπορούν να χρησιμεύσουν σαν εναλλακτικοί ορισμοί του φραγμένου συνόλου:

1. Ένα σύνολο S είναι φραγμένο ανν υπάρχει κάποιο B τέτοιο ώστε $|x| \leq B$ για κάθε $x \in S$.

2. Ένα σύνολο S είναι φραγμένο ανν υπάρχει κάποιο B τέτοιο ώστε $|x| < B$ για κάθε $x \in S$.

1.25. (Εύρεση supremum και infimum) Προσδιορίστε τα supremum, infimum, maximum και minimum των ακόλουθων συνόλων:

$$[0,1), \quad (0,1], \quad \mathbb{Q}, \quad \left\{1-\frac{1}{2},\, 1-\frac{1}{3},\, 1-\frac{1}{4},\dots\right\}, \quad A=\{x:(x-\sqrt{2})(x-3)\leq 0\}, \quad A\cap\mathbb{Q}.$$

1.26. (Αυθαίρετα κοντινά σύνολα) Έστω δύο μη κενά σύνολα A και B τέτοια ώστε για κάθε $x \in A$ και $y \in B$ έχουμε $x \leq y$, και επιπλέον για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x \in A$, $y \in B$, τέτοια ώστε $y - x < \epsilon$. Να δείξετε ότι υπάρχουν τα $\sup A$, $\inf B$ και μάλιστα είναι ίσα.

1.27. [$\star$] (Είδη διαστημάτων) Να δείξετε, χρησιμοποιώντας τις έννοιες των supremum και infimum, ότι τα *μόνα* διαστήματα που υπάρχουν είναι αυτά των μορφών του Σκέλους 2 του Ορισμού 1.5.

1.7 Αξίωμα της Πληρότητας

Είμαστε έτοιμοι να παρουσιάσουμε το Αξίωμα της Πληρότητας. Το αξίωμα αυτό είναι το μόνο που δεν μας είναι γνωστό από το Λύκειο, αν και στο Λύκειο χρησιμοποιούσαμε πολλές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών που προκύπτουν από αυτό.

Αξίωμα Πληρότητας: *Κάθε μη κενό, φραγμένο άνω σύνολο S έχει supremum.*

Παρατηρήστε ότι, σε αντίθεση με τα Αξιώματα Πεδίου και Διάταξης, το Αξίωμα της Πληρότητας δεν ισχύει για τους ρητούς αριθμούς. Πράγματι, ας φανταστούμε ότι βρισκόμαστε στον κόσμο των ρητών αριθμών, και ας εξετάσουμε το σύνολο των ρητών $\{x : \ x > 0, \ x^2 < 2\}$. Παρατηρήστε ότι δεν γράψαμε το σύνολο ως $\{x : \ x > 0, \ x < \sqrt{2}\}$ – είπαμε ότι είμαστε στον κόσμο των ρητών, στον οποίο δεν υπάρχει το $\sqrt{2}$. Παρατηρήστε επίσης ότι αυτό το σύνολο είναι άνω φραγμένο, και μάλιστα έχει πολλά άνω φράγματα, όμως δεν έχει κάποιο *ελάχιστο* άνω φράγμα. Ουσιαστικά, αυτό είναι το $\sqrt{2}$, που όμως, ως άρρητο, δεν υπάρχει για να το επικαλεστούμε.

Μπορεί να δειχθεί, αλλά η αυστηρή διατύπωση και η απόδειξη είναι αρκετά προχωρημένες για να τις παρουσιάσουμε εδώ, ότι ουσιαστικά η μόνη διαφορά μεταξύ ρητών και άρρητων είναι ότι μόνο στους δεύτερους ισχύει το Αξίωμα της Πληρότητας. Μπορούμε, μάλιστα, να αποδείξουμε ότι το μόνο σύνολο που υπάρχει όπου ισχύουν και οι τρεις ομάδες αξιωμάτων (δηλαδή τα Αξιώματα Πεδίου, Διάταξης και Πληρότητας) είναι αναγκαστικά οι πραγματικοί αριθμοί. Η διασαφήνιση και η απόδειξη αυτής της ιδιότητας επίσης ξεφεύγει από τις ανάγκες του μαθήματος.

Όπως φαντάζεστε, και το infimum ικανοποιεί μια αντίστοιχη ιδιότητα, που όμως δεν πρέπει να την υιοθετήσουμε αξιωματικά, αφού προκύπτει από το Αξίωμα της Πληρότητας. Η ιδιότητα αυτή είναι η ακόλουθη:

Πόρισμα 1.1. ***(Υπαρξη infimum)*** *Κάθε μη κενό, φραγμένο κάτω σύνολο S έχει infimum.*

Απόδειξη: Αφού το S είναι φραγμένο κάτω, υπάρχει B τέτοιο ώστε για κάθε $x \in S$, $x \geq B$. Έστω το σύνολο
$$-S \triangleq \{y : -y \in S\}.$$
Το σύνολο $-S$ είναι προφανώς μη κενό. Είναι επίσης και φραγμένο άνω από το $-B$. Πράγματι, έστω οποιοδήποτε στοιχείο του $y \in -S$. Το $-y$ ανήκει στο S, άρα $-y \geq B \Rightarrow y \leq -B$ και επομένως πράγματι το $-B$ είναι άνω φράγμα του $-S$. Άρα, από το Αξίωμα της Πληρότητας, το $-S$ έχει supremum, που το συμβολίζουμε με $\sup(-S)$.

Θα δείξουμε ότι το S έχει για infimum το $-\sup(-S)$.

Καταρχάς, το $-\sup(-S)$ είναι κάτω φράγμα, δηλαδή $\forall x \in S$, $x \geq -\sup(-S)$. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει κάποιο x στο S με $x < -\sup(-S)$. Τότε $-x > \sup(-S)$ και έχουμε άτοπο, αφού $-x \in -S$.

Το $-\sup(-S)$ είναι όμως και το μέγιστο κάτω φράγμα. Έστω πως δεν είναι, και πως υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in S$, $x \geq -\sup(-S) + \epsilon$. Όμως, υπάρχει $y \in (-S)$ τέτοιο ώστε $y > \sup(-S) - \epsilon$, αλλιώς το $\sup(-S)$ δεν θα ήταν supremum του $-S$, λόγω της Πρότασης 1.7. Άρα $-y < -\sup(-S) + \epsilon$. Επειδή το $-y$ ανήκει στο S, καταλήξαμε σε άτοπο. ∎

Το Αξίωμα της Πληρότητας θα μας είναι απαραίτητο στη συνέχεια σε διάφορα κρίσιμα σημεία της ανάπτυξης της θεωρίας, για παράδειγμα

1. στην απόδειξη του Θεωρήματος του Bolzano (Θεώρημα 4.1),
2. στην απόδειξη του θεωρήματος ότι οι συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα λαμβάνουν εκεί μέγιστη και ελάχιστη τιμή (Θεώρημα 4.5),
3. στον ορισμό του ολοκληρώματος (Ορισμός 7.2).

Επιπλέον, πιο γενικά, πολλές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, που κατά τα άλλα φαίνονται προφανείς και τις χρησιμοποιούμε χωρίς δεύτερη σκέψη, είναι άμεση απόρροια του Αξιώματος της Πληρότητας. Μερικά παραδείγματα, που τα αναφέρουμε χωρίς απόδειξη, είναι τα ακόλουθα:

1. Οι φυσικοί αριθμοί δεν είναι φραγμένοι άνω.
2. Η ύπαρξη (τετραγωνικών και άλλων) ριζών πραγματικών αριθμών. Δείτε το Θεώρημα 1.1, που δίνεται χωρίς απόδειξη.
3. Η πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς, δηλαδή το γεγονός ότι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διακριτών πραγματικών υπάρχει ένας ρητός.
4. Η πυκνότητα των άρρητων στους πραγματικούς, δηλαδή το γεγονός ότι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διακριτών πραγματικών υπάρχει ένας άρρητος.

Θεώρημα 1.1. ***(Ορισμός ρίζας πραγματικού αριθμού)***

1. *Έστω $y \in \mathbb{R}$ και $n \in N^*$ περιττός. Υπάρχει μοναδικός στο $\mathbb{R}$ αριθμός x τέτοιος ώστε $x^n = y$. Ο x συμβολίζεται ως $x = y^{\frac{1}{n}}$ και καλείται n-**οστή ρίζα ρίζα** του y.*
2. *Έστω $y \in [0, \infty)$ και $n \in N^*$ άρτιος. Υπάρχει μοναδικός στο $[0, \infty)$ αριθμός x τέτοιος ώστε $x^n = y$. Ο x συμβολίζεται ως $x = y^{\frac{1}{n}}$ και καλείται n-**οστή ρίζα** του y. Αν $y > 0$, ισχύει επίσης ότι $(-y^{\frac{1}{n}})^n = y$.*

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι εκτενής και παραλείπεται.

Ορισμός 1.9. ***(Ορισμός ρητής δύναμης πραγματικού αριθμού)*** *Έστω $x > 0$ και ρητός $r \in \mathbb{Q}$ με $r = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Ορίζουμε*

$$x^r = (x^p)^{\frac{1}{q}}$$

*Το x καλείται **βάση**, το r καλείται **εκθέτης**, και το x^r καλείται η r **δύναμη** του x.*

Περιορίσαμε τον ορισμό του x^r στην περίπτωση που $x > 0$. Αν $x < 0$, πρέπει να είμαστε κάπως πιο προσεκτικοί. Δείτε για παράδειγμα την Άσκηση 1.29. Επίσης, παρατηρήστε ότι υπάρχουν πολλοί τρόποι για να γραφτεί ένας ρητός. Για παράδειγμα, $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$, $\frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$. Αν και δεν το αποδεικνύουμε εδώ, αναφέρουμε ότι μπορούμε να αποδείξουμε ότι το x^r λαμβάνει πάντα την ίδια τιμή, ανεξάρτητα από τη μορφή που χρησιμοποιούμε για το r.

Η απόδειξη της παρακάτω πρότασης ζητείται στην Άσκηση 1.30.

Πρόταση 1.9. ***(Ιδιότητες ρητών δυνάμεων)*** *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ και για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}$ ισχύουν τα ακόλουθα:*

$$x^r x^s = x^{r+s}, \qquad x^r y^r = (xy)^r, \quad (x^r)^s = x^{rs}.$$

Ασκήσεις

1.28. **(Εναλλακτικός ορισμός ρητής δύναμης)** Έστω $x > 0$ και $r \in \mathbb{Q}$, με $r = p/q$ όπου $p \in \mathbb{Z}$ και $q \in \mathbb{Z}^*$. Να δείξετε ότι

$$x^r = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p.$$

1.29. **(Ρητή δύναμη αρνητικού αριθμού)** Με τι ισούται το $(-32)^{3/5}$; Με τι ισούται το $\left((-32)^6\right)^{1/10}$; Με τι ισούται το $\left((-32)^{1/10}\right)^6$; Έχετε κάποιο πρόβλημα;

1.30. **[$\star$] (Ιδιότητες ρητών δυνάμεων)** Να αποδείξετε την Πρόταση 1.9.

1.8 Περαιτέρω Μελέτη

Ο κλάδος των Μαθηματικών που ασχολείται με τη μελέτη των ιδιοτήτων των αλγεβρικών δομών, δηλαδή συνόλων εφοδιασμένων με πράξεις που διαθέτουν συγκεκριμένες ιδιότητες, είναι η Άλγεβρα. Τα πεδία είναι μόνο μία από τις πολυάριθμες αλγεβρικές δομές που υπάρχουν. Πολύ καλές εισαγωγές στην Άλγεβρα υπάρχουν στα βιβλία του Fraleigh [FRAE], [FRAG] και των Dummit και Foote [DUFO].

Το βιβλίο του Spivak [SPIE], [SPIG] περιέχει μια πολύ αναλυτική παρουσίαση των Αξιωμάτων Πεδίου, Διάταξης και Πληρότητας και των διαφόρων ιδιοτήτων τους.

Προκειμένου να εισάγουμε τη διάταξη στο $\mathbb{R}$, αντί να ορίσουμε το $\mathbb{R}_+^*$ και να το εφοδιάσουμε αξιωματικά με κάποιες ιδιότητες, όπως κάναμε στην Παράγραφο 1.4, θα μπορούσαμε, εναλλακτικά, να είχαμε εισαγάγει απευθείας τη σχέση $<$ και να την εφοδιάζαμε αξιωματικά με μια σειρά από ιδιότητες. Δείτε το βιβλίο του Stroyan [STRO] γι' αυτή την προσέγγιση. Η προσέγγιση που ακολουθήσαμε εμφανίζεται, εκτός των άλλων, στα βιβλία των Apostol [APE1], [APG1], Spivak [SPIE], [SPIG], Royden [ROYD] και Sagan [SAGA].

Επίσης, περισσότερες απόρροιες του Αξιώματος της Πληρότητας υπάρχουν στα βιβλία των Apostol [APE1], [APG1], Spivak [SPIE], [SPIG], και Sagan [SAGA].

Αναφέρουμε, τέλος, ότι εναλλακτικά θα μπορούσαμε να μην είχαμε εισαγάγει αξιωματικά την έννοια των πραγματικών αριθμών, αλλά να ξεκινούσαμε με μια πιο θεμελιώδη έννοια, για παράδειγμα με τους φυσικούς ή τους ρητούς, να ορίζαμε με κάποιον τρόπο τους πραγματικούς, και να *αποδεικνύαμε* κατόπιν τα δοσμένα αξιώματα. Μια τέτοια προσέγγιση είναι κοπιώδης και δεν έχει θέση σε μαθήματα αυτού του επιπέδου. Μπορείτε να βρείτε πάντως, κατασκευές των πραγματικών στα βιβλία των Rudin [RUDI] και Spivak [SPIE], [SPIG].

Κεφάλαιο 2

Συναρτήσεις

Στο δεύτερο, και τελευταίο, εισαγωγικό κεφάλαιο θυμίζουμε καταρχάς, περιληπτικά, την έννοια της συνάρτησης και ορισμένους σχετικούς ορισμούς. Εξετάζουμε, επίσης, τους διάφορους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να δημιουργήσουμε καμπύλες στο επίπεδο χρησιμοποιώντας συναρτήσεις.

Στην Παράγραφο 2.1 θυμίζουμε τη βασική γνώση που έχουμε από το Λύκειο για τις συναρτήσεις. Στην Παράγραφο 2.2 θυμίζουμε τον ορισμό και τις βασικότερες ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Στην Παράγραφο 2.3 δείχνουμε κάτι νέο, και συγκεκριμένα πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε το γράφημα μιας συνάρτησης χρησιμοποιώντας πολικές, αντί για καρτεσιανές, συντεταγμένες. Τέλος, στην Παράγραφο 2.4 παρουσιάζουμε την έννοια της καμπύλης σε παραμετρική μορφή.

2.1 Συναρτήσεις

Σε αυτή την παράγραφο θυμίζουμε τη βασική γνώση που έχουμε από το Λύκειο για τις συναρτήσεις, ξεκινώντας από τον ορισμό τους.

Ορισμός 2.1. ***(Συνάρτηση)***

1. *Ορίζουμε ως **συνάρτηση** $f : A \to \mathbb{R}$ μια απεικόνιση από το **πεδίο ορισμού** $\operatorname{dom} f \triangleq A$ στο $\mathbb{R}$.*

2. *Το $f(A) \triangleq \{y : f(x) = y \text{ για κάποιο } x \in A\}$ καλείται **πεδίο τιμών** της f.*

3. *Γενικότερα το σύνολο $f(B) \triangleq \{y : f(x) = y \text{ για κάποιο } x \in B\}$ καλείται **εικόνα** του συνόλου $B \subseteq A$.*

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να φανταστούμε τις συναρτήσεις. Καθένας από αυτούς έχει τη δική του χρησιμότητα, ανάλογα με το πρόβλημα που εξετάζουμε.

1. Ένας απλός αλγεβρικός τρόπος είναι ότι η συνάρτηση είναι ένας πίνακας με δύο στήλες, όπου στην πρώτη στήλη εμφανίζονται όλα τα στοιχεία του A, ακριβώς μια φορά το καθένα, και στη δεύτερη στήλη τιμές από το $\mathbb{R}$ (ενδεχομένως με επανάληψη).

2. Ένας πιο «μηχανικός» τρόπος είναι ότι η συνάρτηση είναι μια (ενδεχομένως πολύπλοκη) μηχανή γεμάτη γρανάζια (σαν τον μηχανισμό των Αντικυθήρων) με ένα περιστρεφόμενο γρανάζι (σαν τιμόνι) στην είσοδο και ένα ακόμα περιστρεφόμενο γρανάζι στην έξοδο. Ρυθμίζοντας το γρανάζι της εισόδου, αυτόματα λαμβάνει μια θέση το γρανάζι της εξόδου. Με αυτό τον τρόπο, είναι εύκολο να φανταστούμε την αντίστροφη συνάρτηση: απλώς ρυθμίζουμε το γρανάζι της εξόδου, και βλέπουμε να κινείται το γρανάζι της εισόδου. Είναι επίσης εύκολο να φανταστούμε την έννοια της παραγώγου. Αν, για παράδειγμα, η παράγωγος στη θέση x είναι 2, γυρίζοντας ελάχιστα

το γρανάζι κατά γωνία dx, το γρανάζι εξόδου θα γυρίσει κατά γωνία $2\,dx$. Τέλος, είναι εύκολο να φανταστούμε την έννοια της σύνθεσης $f(g(x))$ δύο συναρτήσεων f, g: απλώς κολλάμε το γρανάζι εξόδου της g στο γρανάζι εισόδου της f.

3. Τέλος, μπορούμε να φανταζόμαστε μια συνάρτηση μέσω του **γραφήματός** της, δηλαδή του συνόλου $\mathcal{G}(f) \subset \mathbb{R}^2$ που ορίζεται ως

$$\mathcal{G}(f) \triangleq \{(x, y) : \; x \in \operatorname{dom} f, \; y = f(x)\}.$$

Αυτή η θεώρηση μάς διευκολύνει κάπως να φανταστούμε την πρόσθεση δύο συναρτήσεων. Αν έχουμε σχεδιάσει τα δύο γραφήματά τους, μπορούμε να σχεδιάσουμε και το γράφημα της πρόσθεσης μετακινώντας κάθε σημείο του γραφήματος της μιας παράλληλα προς τον άξονα y απόσταση ίση με αυτή που ορίζεται στο γράφημα της άλλης. Επιπλέον, μας διευκολύνει στην κατανόηση του ολοκληρώματος ως (προσημασμένου) εμβαδού.

Η έννοια της συνάρτησης είναι βασική για το Λογισμό. Οι συναρτήσεις είναι οι πολίτες του κράτους του Λογισμού, και αυτό το μάθημα έχει ως αντικείμενο τη μελέτη των τρόπων με τους οποίους αυτοί οι πολίτες μπορούν να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους. Μας ενδιαφέρουν, λοιπόν, οι τυχόν ιδιότητες που μπορεί να έχουν ορισμένες ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων. Στη συνέχεια, απαριθμούμε μερικές από αυτές τις ειδικές περιπτώσεις.

Ορισμός 2.2. ***(Ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων)***

1. *Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται* ***άρτια*** *αν το πεδίο ορισμού της A περιλαμβάνει το $-x$ όποτε περιλαμβάνει το x, και επιπλέον*

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in A.$$

2. *Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται* ***περιττή*** *αν το πεδίο ορισμού της A περιλαμβάνει το $-x$ όποτε περιλαμβάνει το x, και επιπλέον*

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in A.$$

3. *Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται* ***γνησίως αύξουσα*** *στο $B \subseteq A$ αν*

$$\forall x_1, x_2 \in B, \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

4. *Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται* ***αύξουσα*** *στο $B \subseteq A$ αν*

$$\forall x_1, x_2 \in B, \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

5. *Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται* ***γνησίως φθίνουσα*** *στο $B \subseteq A$ αν*

$$\forall x_1, x_2 \in B, \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

6. *Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται* ***φθίνουσα*** *στο $B \subseteq A$ αν*

$$\forall x_1, x_2 \in B, \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

7. *Οι (γνησίως) αύξουσες και (γνησίως) φθίνουσες συναρτήσεις καλούνται από κοινού* ***(γνησίως) μονότονες***.

8. *Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται* ***άνω φραγμένη*** *στο $B \subseteq A$ αν υπάρχει $U \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq U$ για όλα τα x στο B, δηλαδή το $f(B)$ είναι φραγμένο άνω από το U. Όταν δεν προσδιορίζεται το B, τότε θα εννοείται πως $B = A$.*

9. *Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται* ***κάτω φραγμένη*** *στο $B \subseteq A$ αν υπάρχει $L \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq L$ για όλα τα x στο B, δηλαδή το $f(B)$ είναι φραγμένο κάτω από το L. Όταν δεν προσδιορίζεται προσδιορίζεται το B, τότε θα εννοείται πως $B = A$.*

10. *Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται* ***φραγμένη*** *στο $B \subseteq A$ αν είναι άνω και κάτω φραγμένη σε αυτό. Όταν δεν προσδιορίζεται το B, τότε θα εννοείται πως $B = A$.*

11. *Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται* ***περιοδική*** *με περίοδο $p > 0$ αν (i) το A περιλαμβάνει το $x + p$ όποτε περιλαμβάνει το x, και επιπλέον (ii) $f(x + p) = f(x)$ για όλα τα x στο A.*

12. *Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται* ***ένα προς ένα (1-1)*** *αν*
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Σχετικά με τους παραπάνω ορισμούς, αξίζει να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις. Καταρχάς, από τον ορισμό της συνάρτησης, ξέρουμε ότι *πάντα* $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Επομένως, αν μια συνάρτηση είναι 1-1, ισχύει η ισοδυναμία
$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Επίσης, παρατηρήστε πως ορίσαμε την έννοια της φραγμένης συνάρτησης μέσω της έννοιας του φραγμένου συνόλου. Αυτή η ανακύκλωση των ορισμών και η χρήση τους με νέους τρόπους είναι κάτι που αρέσει ιδιαίτερα στους μαθηματικούς. Σαν άλλο παράδειγμα αυτής της ανακύκλωσης, που σας είναι γνώριμο από το Λύκειο, η διαίρεση ορίζεται μεν για αριθμούς, αλλά και για πολυώνυμα. (Ορίζεται, επίσης, και για κάποιες μορφές συνόλων: το σύνολο $\mathbf{GF}(5)$ είναι η διαίρεση των ακεραίων από το σύνολο των πολλαπλασίων του 5! Φυσικά η αυστηρή παρουσίαση αυτής της ιδιότητας ξεφεύγει από τα πλαίσια αυτού του μαθήματος.) Θα δούμε αρκετά τέτοια παραδείγματα ανακύκλωσης στη συνέχεια του μαθήματος, ξεκινώντας από τον αμέσως επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.3. ***(Ολικά και τοπικά ακρότατα συνάρτησης)***
Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$.

1. *Ορίζουμε τα* ***supremum***, ***infimum***, ***maximum*** *(ή* ***μέγιστο***, *ή* ***ολικό μέγιστο****),* ***minimum*** *(ή* ***ελάχιστο***, *ή* ***ολικό ελάχιστο****) της f σε ένα σύνολο $B \subseteq A$ ως*
$$\sup_{x\in B} f \triangleq \sup\{f(x) : x \in B\}, \quad \inf_{x\in B} f \triangleq \inf\{f(x) : x \in B\},$$
$$\max_{x\in B} f \triangleq \max\{f(x) : x \in B\}, \quad \min_{x\in B} f \triangleq \min\{f(x) : x \in B\},$$
εφόσον τα δεξιά μέλη υπάρχουν. Τα παραπάνω καλούνται από κοινού ***(ολικά) ακρότατα***. *Όταν δεν προσδιορίζεται το B, δηλαδή γράφουμε $\sup f$, $\max f$, $\inf f$, ή $\min f$, εννοείται ότι $B = A$.*

2. *Αν $c \in B$ και $f(c) = \max_{x\in B} f$, τότε το c καλείται* ***θέση (ολικού) μέγιστου*** *στο B. Αν $c \in B$ και $f(c) = \min_{x\in B} f$, τότε το c καλείται* ***θέση (ολικού) ελάχιστου*** *στο B.*

3. *Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Η f έχει* ***τοπικό μέγιστο*** *το $f(c)$ αν υπάρχει ανοικτή γειτονιά I με $c \in I$ τέτοια ώστε*
$$f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in I \cap A.$$

*Το c καλείται **θέση τοπικού μεγίστου**.*

4. *Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Η f έχει **τοπικό ελάχιστο** το $f(c)$ αν υπάρχει γειτονιά I του c τέτοια ώστε*

$$f(x) \geq f(c) \quad \forall x \in I \cap A.$$

*Το c καλείται **θέση τοπικού ελάχιστου**.*

5. *Τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα καλούνται από κοινού **τοπικά ακρότατα**.*

6. *Οι θέσεις τοπικών μέγιστων και ελάχιστων καλούνται από κοινού **θέσεις τοπικών ακρότατων**.*

Όπως προκύπτει από τον ορισμό, όταν αναφερόμαστε σε κάποιο μέγιστο ή ελάχιστο χωρίς να διευκρινίζουμε αν είναι τοπικό ή ολικό, τότε αυτό είναι ολικό. Επίσης, παρατηρήστε ότι για μια συνάρτηση μπορεί να υπάρχει μεν το $\sup f$ (ή το $\inf f$), αλλά όχι το $\max f$ (ή, αντίστοιχα, το $\min f$). Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1/x$ δεν έχει ελάχιστο, έχει όμως infimum.

Ορισμός 2.4. ***(Σύνθεση συναρτήσεων)*** *Έστω συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$. Ορίζουμε την **σύνθεση** $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ των f, g, ως τη συνάρτηση $g \circ f(x) \triangleq g(f(x))$.*

Ασκήσεις

2.1. [Σ/Λ, Π] (Άθροισμα άρτιας και περιττής) Οποιαδήποτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα μιας περιττής και μιας άρτιας συνάρτησης.

2.2. [Σ/Λ, Π] (Κριτήριο ακρότατου) Αν η f είναι αύξουσα (φθίνουσα) στο σύνολο (a, c) και φθίνουσα (αύξουσα) στο (c, b) τότε έχει τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) στο c.

2.3. (Φραγμένες συναρτήσεις) Να δείξετε ότι

1. Μια συνάρτηση είναι φραγμένη ανν υπάρχει B τέτοιο ώστε $f(x) \leq B$ για κάθε $x \in \operatorname{dom} f$.

2. Μία συνάρτηση είναι φραγμένη ανν υπάρχει B τέτοιο ώστε $f(x) < B$ για κάθε $x \in \operatorname{dom} f$.

2.4. (Γνήσια μονοτονία $\Rightarrow$ 1-1) Να δείξετε ότι, αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, τότε είναι 1-1.

2.5. (Πηλίκο συναρτήσεων) Έστω οι συναρτήσεις $f, g : [a, b] \to \infty$ με $f > 0$ γνησίως αύξουσα και $g > 0$ γνησίως φθίνουσα. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f/g είναι γνησίως αύξουσα. Τι γίνεται αν οι f, g είναι απλώς μονότονες και όχι γνησίως μονότονες;

2.6. (Γνησίως αύξουσα συνάρτηση) Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο B τότε για κάθε $x_1, x_2 \in B$, έχουμε

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

(Παρατηρήστε ότι στον ορισμό της γνησίως αύξουσας συνάρτησης εμφανίζεται η *συνεπαγωγή* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.)

2.7. (Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση) Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο B τότε για κάθε $x_1, x_2 \in B$, έχουμε

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

2.8. [Π] (Αύξουσα σύνθεση) Να δείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι αύξουσες, τότε είναι αύξουσα και η σύνθεσή τους $f \circ g$ στο σύνολο όπου αυτή ορίζεται. Επαναλάβετε για την περίπτωση που οι δοσμένες συναρτήσεις είναι γνησίως μονότονες.

2.9. (Φθίνουσα σύνθεση) Να δείξετε ότι αν η f είναι αύξουσα και η g είναι φθίνουσα, τότε οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι φθίνουσες στα σύνολα όπου αυτές ορίζονται. Επαναλάβετε για την περίπτωση που οι δοσμένες συναρτήσεις είναι γνησίως μονότονες.

2.10. (Μονοτονία σε υποσύνολο) Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f έχει κάποιο είδος μονοτονίας σε κάποιο σύνολο B, τότε έχει το ίδιο είδος μονοτονίας σε οποιοδήποτε υποσύνολο $A \subseteq B$.

2.11. (Κριτήριο ακρότατου) Να δείξετε ότι αν η f είναι αύξουσα (εναλλακτικά, φθίνουσα) στο σύνολο $(a, c]$ και φθίνουσα (εναλλακτικά, αύξουσα) στο $[c, b)$ τότε έχει τοπικό μέγιστο (εναλλακτικά, ελάχιστο) στο c.

2.12. [$\star$] (Infimum αθροίσματος) Έστω συναρτήσεις $f, g : B \to \mathbb{R}$ κάτω φραγμένες στο σύνολο B. Να δείξετε ότι

$$\inf_{x\in B}\{f+g\} \geq \inf_{x\in B}\{f\} + \inf_{x\in B}\{g\}.$$

Μπορείτε να βρείτε μια γενική περίπτωση όπου ισχύει η ισότητα;

2.13. [$\star$] (Supremum αθροίσματος) Έστω συναρτήσεις $f, g : B \to \mathbb{R}$ άνω φραγμένες στο B. Να δείξετε ότι

$$\sup_{x\in B}\{f+g\} \leq \sup_{x\in B}\{f\} + \sup_{x\in B}\{g\}.$$

Μπορείτε να βρείτε μια γενική περίπτωση όπου ισχύει η ισότητα;

2.14. (Πολλαπλάσια περιόδων) Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο p, τότε έχει περίοδο κάθε αριθμό της μορφής kp, όπου $k \in \mathbb{N}^*$.

2.15. (Άρτια και περιττή συνάρτηση) Να δείξετε ότι η μόνη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι άρτια και περιττή είναι η μηδενική, $f(x) = 0$.

2.16. [$\star\star\star$] (Αυθαίρετα μικρές περίοδοι) Βρείτε μια συνάρτηση $f(x)$ με άπειρες περιόδους, και τέτοια ώστε να υπάρχουν περίοδοι όσο κοντά στο 0 θέλουμε.

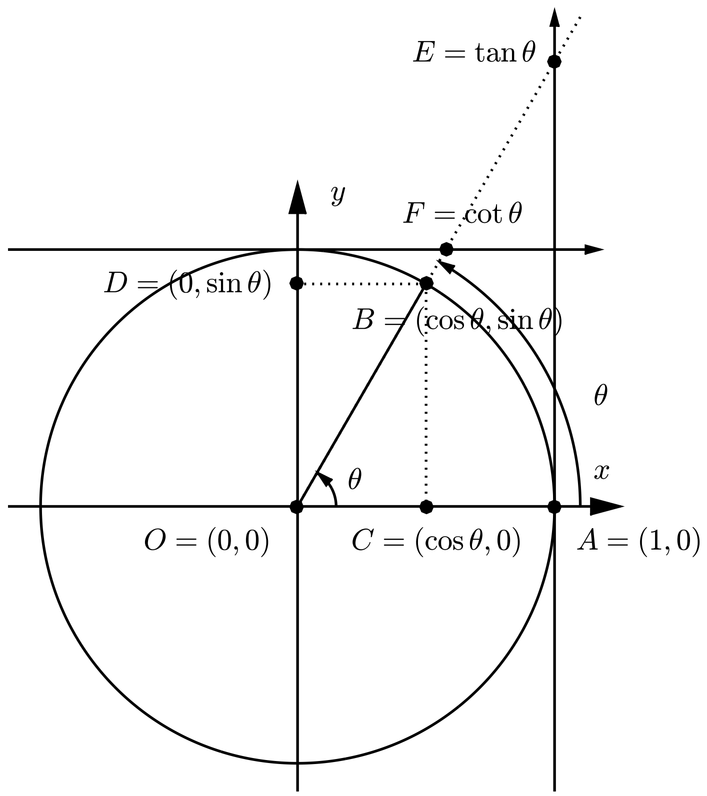
2.2 Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Συνεχίζουμε με μια σύντομη επισκόπηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και των βασικών τους ιδιοτήτων. Δίνουμε, καταρχάς, ένα γεωμετρικό ορισμό τους, με τη διευκρίνιση ότι δεν είναι απολύτως αυστηρός, καθώς βασίζεται σε γεωμετρικές έννοιες (για παράδειγμα στο μήκος τόξου και στη γωνία) που δεν έχουμε ορίσει αυστηρά.

Ορισμός 2.5. ***(Τριγωνομετρικές συναρτήσεις)*** *Έστω ο **μοναδιαίος κύκλος** με κέντρο το σημείο $O = (0, 0)$ και ακτίνα 1. Έστω $\theta \in \mathbb{R}$. Έστω τόξο AB μήκους $|\theta|$ με αρχή το σημείο $A = (1, 0)$, που διαγράφεται αντίθετα από τη φορά του ρολογιού αν $\theta > 0$ και σύμφωνα με τη φορά του ρολογιού αν $\theta < 0$. Το **συνημίτονο** $\cos\theta$ και το **ημίτονο** $\sin\theta$ ορίζονται ως η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου B αντίστοιχα. Επίσης, ορίζουμε την **εφαπτομένη** $\tan\theta$ και την **συνεφαπτομένη** $\cot\theta$ αντίστοιχα ως*

$$\tan\theta \triangleq \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta \triangleq \frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

εφόσον οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός.



Σχήμα 2.1: Ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Δείτε το Σχήμα 2.1. Παρατηρήστε ότι αν το $\theta \notin [-2\pi, 2\pi]$, τότε κατά τον παραπάνω ορισμό διαγράφουμε περισσότερο από έναν ολόκληρο κύκλο. Υπενθυμίζουμε πως, εξ ορισμού, η γωνιά AOB, που αντιστοιχεί στο τόξο AB μήκους θ του μοναδιαίου κύκλου, ισούται με θ.

Η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη μπορούν επίσης να απεικονιστούν γεωμετρικά με τη βοήθεια του μοναδιαίου κύκλου στο ίδιο σχήμα. Συγκεκριμένα, έστω ο άξονας που εφάπτεται του μοναδιαίου κύκλου στο σημείο $A = (1, 0)$ με αρχή το A και κατεύθυνση προς τα πάνω. Η εφαπτομένη $\tan\theta$ ισούται με τη συντεταγμένη, επί αυτού του άξονα, του σημείου E στο οποίο τον τέμνει η ημιευθεία που ξεκινά από την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο $B = (\cos x, \sin x)$. Πράγματι, για την περίπτωση που $\theta \in (0, \pi/2)$, τα τρίγωνα OCB και OAE είναι όμοια, επομένως

$$\frac{BC}{OC} = \frac{AE}{OA} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{AE}{1} \Rightarrow AE = \tan\theta.$$

(Η περίπτωση $\theta \notin (0, \pi/2)$, αποδεικνύονται με αναγωγή στην προηγούμενη και με χρήση συμμετριών, αλλά η απόδειξη παραλείπεται.) Ανάλογα, έστω ο άξονας που εφάπτεται του μοναδιαίου κύκλου στο σημείο $(0, 1)$ με αρχή το $(0, 1)$ και κατεύθυνση προς τα δεξιά. Η συνεφαπτομένη $\cot\theta$ ισούται με τη συντεταγμένη, επί αυτού του άξονα, του σημείου F στο οποίο τον τέμνει η ημιευθεία που ξεκινά από την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο $B = (\cos x, \sin x)$.

Οι ακόλουθες ιδιότητες προκύπτουν άμεσα από τον παραπάνω ορισμό:

Πρόταση 2.1. ***(Βασικές ιδιότητες τριγωνομετρικών συναρτήσεων)***

1. *Οι $\sin\theta$, $\cos\theta$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π, ενώ οι $\tan\theta$, $\cot\theta$ είναι περιοδικές με περίοδο π. Συνεπώς, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta, \ \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta, \ \tan(\theta + \pi) = \tan\theta, \ \cot(\theta + \pi) = \cot\theta.$$

2. *Οι συναρτήσεις* $\sin\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$ *είναι περιττές, ενώ η* $\cos\theta$ *είναι άρτια. Συνεπώς, για κάθε* $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta,\ \cos(-\theta) = \cos\theta,\ \tan(-\theta) = -\tan\theta,\ \cot(-\theta) = -\cot\theta.$$

3. $$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

4. $$\begin{array}{cccc} \sin 0 = 0, & \sin\frac{\pi}{2} = 1, & \sin\pi = 0, & \sin\frac{3\pi}{2} = -1, \\ \cos 0 = 1, & \cos\frac{\pi}{2} = 0, & \cos\pi = -1, & \cos\frac{3\pi}{2} = 0. \end{array}$$

5. $$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta, \quad \cos(\theta+\pi) = -\cos\theta.$$

6. $$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta, \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta,$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta, \quad \cot\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \tan\theta.$$

Απόδειξη: Οι αποδείξεις όλων των σκελών προκύπτουν με απλά γεωμετρικά επιχειρήματα. ■

Πρόταση 2.2. ***(Τριγωνομετρικές ανισότητες)***

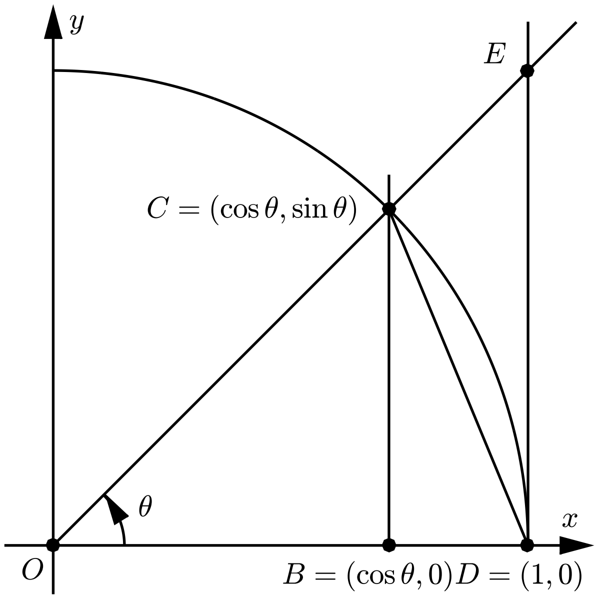
1. *Για κάθε* $\theta \in (0, \pi/2)$ *ισχύει:*
$$\sin\theta < \theta < \tan\theta.$$

2. *Για κάθε* $\theta \in (-\pi/2, 0)$ *ισχύει:*
$$\sin\theta > \theta > \tan\theta.$$

3. *Για κάθε* $\theta \in \mathbb{R}$,
$$|\sin\theta| \le |\theta|.$$
Η ισότητα ισχύει μόνο για την περίπτωση $\theta = 0$.

Απόδειξη:

1. Δείτε το Σχήμα 2.2. Παρατηρήστε ότι το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα με ακτίνα R και γωνία θ ισούται με $\frac{1}{2}\theta R^2$ (Άσκηση 2.17). Επομένως, το εμβαδόν $E(OCD)$ του κυκλικού τομέα OCD ισούται με $E(OCD) = \frac{1}{2}\theta \cdot 1^2 = \frac{1}{2}\theta$. Επίσης, το εμβαδόν $E'(OCD)$ του τριγώνου OCD ισούται με $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin\theta$. Τέλος, παρατηρήστε ότι επειδή τα τρίγωνα OBC, ODE είναι όμοια, έχουμε ότι
$$\frac{|OB|}{|BC|} = \frac{|OD|}{|DE|} \Rightarrow |DE| = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$
και επομένως το εμβαδόν $E(ODE)$ του τριγώνου ODE ισούται με $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot 1$. Η ζητούμενη ανισότητα προκύπτει παρατηρώντας απλώς ότι
$$E'(OCD) < E(OCD) < E(ODE).$$



Σχήμα 2.2: Απόδειξη της Πρότασης 2.2.

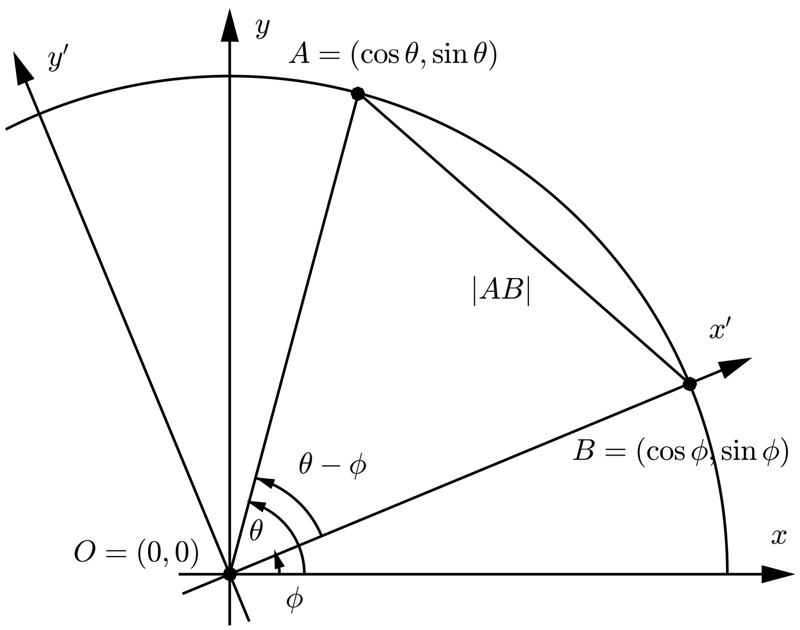
2. Η περίπτωση $\theta \in (-\pi/2, 0)$ προκύπτει ανάλογα με την προηγούμενη.

3. Για $\theta \in (0, \pi/2)$ η ανισότητα προκύπτει από το πρώτο σκέλος. Για $\theta \geq \pi/2$ και πάλι έχουμε $\theta > \sin\theta$ διότι $\sin\theta \leq 1$. Επομένως, για $\theta > 0$,
$$\theta > \sin\theta \Rightarrow |\theta| > |\sin\theta|.$$
Η περίπτωση $\theta < 0$ αντιμετωπίζεται ανάλογα (δείτε την Άσκηση 2.18). Τέλος, όταν $\theta = 0$, έχουμε $\sin\theta = \theta = 0$, και ισχύει η ισότητα. ■

Πρόταση 2.3. ***(Συνημίτονο διαφοράς)*** *Για κάθε $\theta, \phi \in \mathbb{R}$ ισχύει:*
$$\cos(\theta - \phi) = \cos\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta.$$

Απόδειξη: Δείτε το Σχήμα 2.3 και ειδικότερα τη χορδή AB. Για το μήκος $|AB|$ αυτής της χορδής έχουμε
$$|AB| = \sqrt{(\sin\theta - \sin\phi)^2 + (\cos\phi - \cos\theta)^2}.$$
Θα υπολογίσουμε το ίδιο μήκος στο σύστημα συντεταγμένων $x'y'$ που ορίζεται αν περιστρέψουμε το αρχικό κατά γωνία ϕ. Σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων, το σημείο B έχει συντεταγμένες $(1, 0)$ και το σημείο A έχει συντεταγμένες $(\cos(\theta - \phi), \sin(\theta - \phi))$, επομένως
$$|AB| = \sqrt{(1 - \cos(\theta - \phi))^2 + \sin^2(\theta - \phi)}.$$
Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα αν εξισώσουμε τα δεξιά μέλη των παραπάνω εξισώσεων και απλοποιήσουμε.

■



Σχήμα 2.3: Η απόδειξη της Πρότασης 2.3.

Ασκήσεις

2.17. (Εμβαδόν κυκλικού τομέα) Να δείξετε ότι το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα με ακτίνα R και γωνία θ ισούται με $\frac{1}{2}\theta R^2$.

2.18. (Απόδειξη Πρότασης 2.2) Να αποδείξετε το σκέλος της Πρότασης 2.2 που αφορά την περίπτωση $\theta < 0$.

2.19. (Τριγωνομετρικές ιδιότητες) Ξεκινώντας από την Πρόταση 2.3, αποδείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\cos(\phi + \theta) = \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta, \quad \sin(\phi \pm \theta) = \sin\phi\cos\theta \pm \cos\phi\sin\theta,$$

$$\sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi, \quad \cos 2\phi = \cos^2\phi - \sin^2\phi = 2\cos^2\phi - 1 = 1 - 2\sin^2\phi,$$

$$\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\phi}{2}}, \ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\phi}{2}},$$

$$\sin\phi + \sin\theta = 2\sin\left(\frac{\phi + \theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi - \theta}{2}\right), \qquad \cos\phi + \cos\theta = 2\cos\left(\frac{\phi + \theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi - \theta}{2}\right),$$

$$\sin\phi - \sin\theta = 2\cos\left(\frac{\phi + \theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi - \theta}{2}\right), \qquad \cos\phi - \cos\theta = -2\sin\left(\frac{\phi + \theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi - \theta}{2}\right),$$

$$\sin\phi\sin\theta = \frac{1}{2}\left[\cos(\phi - \theta) - \cos(\phi + \theta)\right], \qquad \cos\phi\cos\theta = \frac{1}{2}\left[\cos(\phi + \theta) + \cos(\phi - \theta)\right],$$

$$\sin\phi\cos\theta = \frac{1}{2}\left[\sin(\phi + \theta) + \sin(\phi - \theta)\right].$$

2.20. (Μονοτονία τριγωνομετρικών συναρτήσεων) Ξεκινώντας από την Πρόταση 2.3 και τα αποτελέσματα της Άσκησης 2.19, δείξτε ότι:

1. Το ημίτονο $\sin x$ είναι γνησίως αύξον σε διαστήματα της μορφής $(2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2)$, όπου $k \in \mathbb{Z}$, και γνησίως φθίνον σε διαστήματα της μορφής $(2k\pi + \pi/2, 2k\pi + 3\pi/2)$.

2. Το συνημίτονο $\cos x$ είναι γνησίως φθίνον σε διαστήματα της μορφής $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$, όπου $k \in \mathbb{Z}$, και γνησίως αύξον σε διαστήματα της μορφής $(2k\pi - \pi, 2k\pi)$.

3. Η εφαπτομένη $\tan x$ είναι γνησίως αύξουσα σε διαστήματα της μορφής $(k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$, όπου $k \in \mathbb{Z}$.

4. Η συνεφαπτομένη $\cot x$ είναι γνησίως φθίνουσα σε διαστήματα της μορφής $(k\pi, k\pi + \pi)$, όπου $k \in \mathbb{Z}$.

2.3 Γράφημα Συνάρτησης σε Πολικές Συντεταγμένες

2.3.1 Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Στο Λύκειο έχουμε χρησιμοποιήσει εκτενώς την απεικόνιση των συναρτήσεων σε καρτεσιανές συντεταγμένες, σε σημείο που συχνά ταυτίζουμε την ίδια τη συνάρτηση με το γράφημά της. Ας θυμηθούμε πώς ακριβώς ορίζονται οι καρτεσιανές συντεταγμένες, και πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε το γράφημα μιας συνάρτησης βασιζόμενοι σε αυτές.

Καταρχάς, έχουμε ορίσει στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες, τον άξονα των x και τον άξονα των y. Καλούμε αρχή των αξόνων το σημείο τομής τους, και επιλέγουμε για τον καθένα μια θετική κατεύθυνση, και τον αντίστοιχο θετικό ημιάξονα, και μια αρνητική κατεύθυνση, και τον αντίστοιχο αρνητικό ημιάξονα, έτσι ώστε αν κοιτάμε προς την κατεύθυνση που δείχνει ο θετικό ημιάξονας των x, να έχουμε τον θετικό ημιάξονα των y στο αριστερό μας χέρι. Επιλέγουμε, επίσης, μια κλίμακα μέτρησης αποστάσεων επί του επιπέδου.

Βάσει αυτών των αξόνων, έχουμε ορίσει μια απεικόνιση μεταξύ των σημείων του επιπέδου και των ζευγών $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ που είναι αμφιμονοσήμαντη, δηλαδή για κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί ακριβώς ένα ζεύγος, και το αντίστροφο. Για να βρούμε το σημείο στο οποίο αντιστοιχίζεται το ζεύγος (x, y) εκτελούμε την εξής διαδικασία: πρώτον, ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων κινούμαστε επί του άξονα των x κατά προσημασμένη απόσταση x. Αυτό σημαίνει ότι αν $x > 0$, τότε κινούμαστε προς την κατεύθυνση του θετικού ημιάξονα x κατά απόσταση x, αν όμως $x < 0$, κινούμαστε προς την αρνητική κατεύθυνση κατά απόσταση $-x = |x|$. Κατόπιν, κινούμαστε επί του άξονα των y μια (επίσης προσημασμένη) απόσταση y. Το σημείο στο οποίο καταλήγουμε είναι το σημείο στο οποίο αντιστοιχεί το ζεύγος (x, y). Καθώς η αντιστοίχιση είναι αμφιμονοσήμαντη, θα συμβολίζουμε στο εξής το σημείο με το ζεύγος (x, y) που του αντιστοιχεί, και το επίπεδο με το σύνολο $\mathbb{R}^2$.

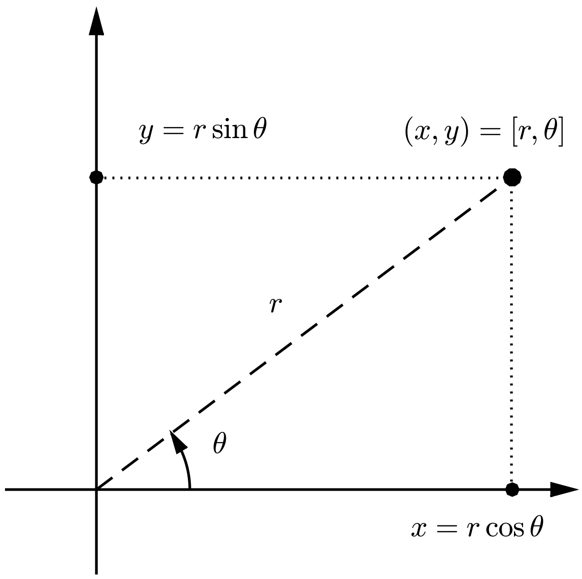
Έστω τώρα πως μας δίνεται μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Μπορούμε να απεικονίσουμε τη συνάρτηση μέσω του γραφήματός της στο χαρτί. Πρακτικά αυτό που κάνουμε είναι να υπολογίσουμε πολλά σημεία της μορφής $(x, f(x))$, και κατόπιν να τα ενώσουμε με μια γραμμή. Ο παραπάνω τρόπος απεικόνισης μιας συνάρτησης είναι βέβαια ο πιο συνηθισμένος, αλλά δεν είναι ο μόνος που έχουμε στη διάθεσή μας. Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε και έναν διαφορετικό τρόπο. Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας ένα διαφορετικό σύστημα συντεταγμένων.

2.3.2 Πολικές Συντεταγμένες

Ορισμός 2.6. *Έστω $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Καλούμε **πολικές συντεταγμένες** του σημείου του επιπέδου (x, y) κάθε ζεύγος $[r, \theta]$ με $r \geq 0$ και $\theta \in \mathbb{R}$, που ικανοποιεί τις εξισώσεις*

$$\{x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\}\,.$$

Παρατηρήστε ότι ισχύει η ακόλουθη ισοδυναμία, η οποία μας επιτρέπει να βρίσκουμε τις καρτε-



Σχήμα 2.4: Ορισμός των πολικών συντεταγμένων.

σιανές συντεταγμένες ενός σημείου έχοντας τις πολικές, και αντιστρόφως.

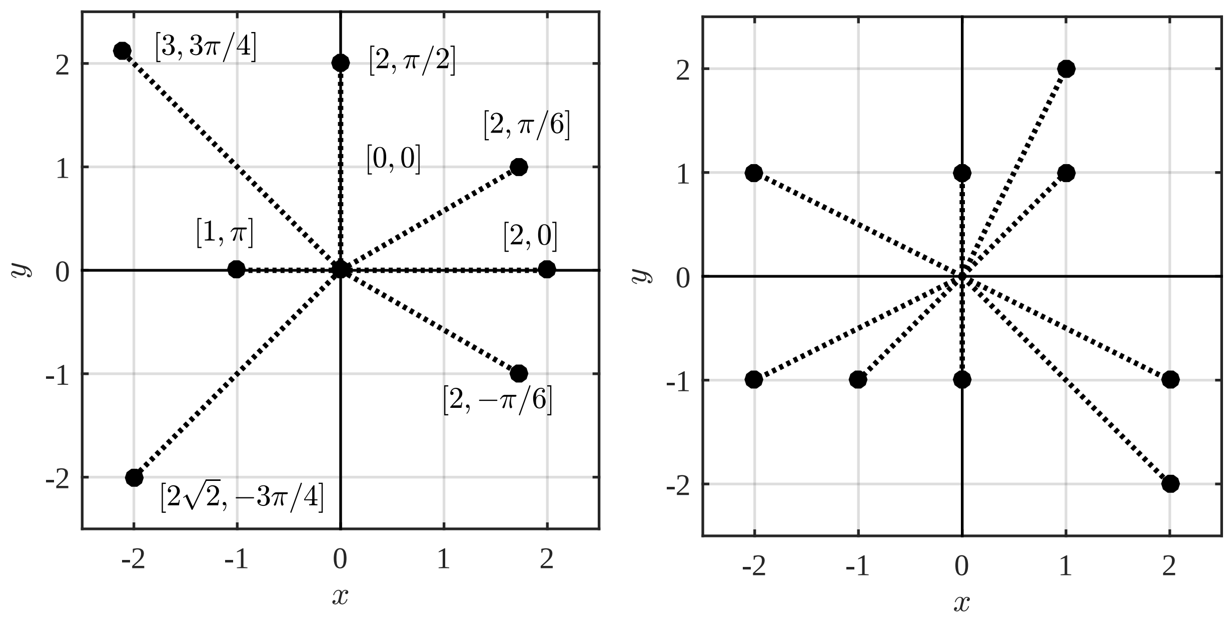
$$\left\{ r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\}$$
$$\Leftrightarrow \{x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\}\,.$$

Παρατηρήστε, επίσης, ότι, επειδή τόσο οι καρτεσιανές όσο και οι πολικές συντεταγμένες είναι ζεύγη αριθμών, για να ξεχωρίζουμε πότε ένα ζεύγος αριθμών x, y εκφράζει καρτεσιανές και πότε πολικές συντεταγμένες, θα γράφουμε το ζεύγος στη μεν πρώτη περίπτωση μέσα σε παρενθέσεις, δηλαδή (x, y), στη δε δεύτερη περίπτωση μέσα σε άγκιστρα, δηλαδή $[x, y]$.

Η γεωμετρική ερμηνεία των πολικών συντεταγμένων είναι ξεκάθαρη: Ένα σημείο (x, y) έχει πολικές συντεταγμένες το ζεύγος $[r, \theta]$ αν απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση r και η γωνία που δημιουργείται αν περιστρέψουμε τον άξονα των x μέχρι να συναντήσει την ημιευθεία που ξεκινά από την αρχή των αξόνων και φτάνει μέχρι το σημείο (x, y) είναι θ. Η γωνία θ είναι προσημασμένη, δηλαδή η περιστροφή γίνεται αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού όταν $\theta > 0$ και σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού όταν $\theta < 0$. Δείτε το Σχήμα 2.4.

Παράδειγμα 2.1. (Παραδείγματα πολικών συντεταγμένων) Στο πρώτο από τα γραφήματα του Σχήματος 2.5 έχουμε σημειώσει ορισμένα σημεία στο επίπεδο και τις αντίστοιχες πολικές τους συντεταγμένες. Αφού κατανοήσετε πλήρως πώς προκύπτουν όλες οι δοσμένες πολικές συντεταγμένες, μπορείτε κατόπιν προσπαθήσετε να προσδιορίσετε τις πολικές συντεταγμένες των σημείων που εμφανίζονται στο δεύτερο γράφημα.

Σε αντίθεση με τις καρτεσιανές συντεταγμένες, οι πολικές συντεταγμένες δεν έχουν αμφιμονοσήμαντη σχέση με τα σημεία του επιπέδου. Συγκεκριμένα, κάθε σημείο μπορεί να περιγραφεί από πολλά ζεύγη πολικών συντεταγμένων. Πράγματι, η αρχή των αξόνων $(0, 0)$ περιγράφεται από όλα τα ζεύγη $[0, \theta]$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$, ενώ οποιοδήποτε σημείο εκτός της αρχής των αξόνων περιγράφεται από το ζεύγος πολικών συντεταγμένων $[r, \theta]$, περιγράφεται επίσης και από όλα τα ζεύγη της μορφής $[r, \theta + 2k\pi]$, όπου $k \in \mathbb{Z}$. Ευτυχώς, κάθε ζεύγος πολικών συντεταγμένων περιγράφει μόνο ένα σημείο. Θα μπορούσαμε να κάνουμε τη σχέση αμφιμονοσήμαντη, απαιτώντας το θ να ανήκει στο $[0, 2\pi)$, ή οποιοδήποτε



Σχήμα 2.5: Αριστερά έχουμε ορισμένα σημεία στο χώρο και τις πολικές τους συντεταγμένες. Χρησιμοποιώντας τους άξονες, ή τις σχέσεις $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, μπορείτε να βρείτε και τις καρτεσιανές τους συντεταγμένες. Δεξιά έχουμε μερικά ακόμα σημεία, χωρίς να αναφέρονται οι πολικές τους συντεταγμένες. Μπορείτε να τις υπολογίσετε; Οι πολικές αυτές συντεταγμένες ζητούνται στην Άσκηση 2.21.

άλλο διάστημα της μορφής $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ ή $(\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$, και επίσης αντιστοιχώντας αυθαίρετα την αρχή των αξόνων στο $[0, 0]$, αλλά αυτό δεν εξυπηρετεί τις ανάγκες της παραγράφου. Το γεγονός ότι η σχέση μεταξύ των σημείων του επιπέδου και των πολικών τους συντεταγμένων δεν είναι αυτόματα αμφιμονοσήμαντη περιορίζει κάπως τις εφαρμογές τους, παρ' όλα αυτά σε πολλές περιπτώσεις η χρήση τους είναι προτιμότερη από τη χρήση των καρτεσιανών συντεταγμένων. Θα δούμε, στη συνέχεια, ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα.

2.3.3 Γράφημα Συνάρτησης σε Πολικές Συντεταγμένες

Έχοντας στη διάθεσή μας τις πολικές συντεταγμένες, μπορούμε να επιλέξουμε να απεικονίσουμε μια συνάρτηση $f : A \to [0, \infty)$ στο επίπεδο με χρήση *πολικών* αντί *καρτεσιανών* συντεταγμένων, εφόσον η συνάρτηση αυτή λαμβάνει μη αρνητικές τιμές.

Η απεικόνιση αυτή γίνεται ως εξής: όπως και στην περίπτωση της χρήσης καρτεσιανών συντεταγμένων, υπολογίζουμε για κάθε $\theta \in A$ την τιμή $f(\theta)$ και κατόπιν εντάσσουμε στο γράφημα της συνάρτησης όχι το σημείο $(\theta, f(\theta))$, σε καρτεσιανές συντεταγμένες, αλλά το σημείο $[f(\theta), \theta]$, σε πολικές συντεταγμένες:

$$\mathcal{G}_p(f) \triangleq \{[f(\theta), \theta] : \theta \in A\}.$$

Επομένως, για κάθε θ περιστρεφόμαστε σε σχέση με τον θετικό ημιάξονα των x κατά γωνία θ, κατόπιν προχωράμε κατά απόσταση $r = f(\theta)$, και εντάσσουμε στο γράφημα το σημείο $[f(\theta), \theta]$ στο οποίο καταλήξαμε. Στην πράξη, αν θέλουμε να σχεδιάσουμε το γράφημα επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για έναν ικανό αριθμό σημείων, και κατόπιν ενώνουμε αυτά τα σημεία με μια συνεχή γραμμή. Η διαδικασία είναι εξίσου απλή με την αντίστοιχη των καρτεσιανών συντεταγμένων, τις πρώτες όμως φορές φαίνεται δύσκολη, καθώς δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πλούσια εμπειρία μας σχετικά με το πώς μοιάζουν τα γραφήματα γνωστών συναρτήσεων στις καρτεσιανές συντεταγμένες.

Η απεικόνιση συναρτήσεων σε πολικές συντεταγμένες έχει ορισμένους σημαντικούς περιορισμούς:

1. Η συνάρτηση $f(\theta)$ που απεικονίζουμε δεν μπορεί να λαμβάνει αρνητικές τιμές.

2. Επειδή κάθε σημείο έχει πολλές πολικές συντεταγμένες, αν μας δοθεί το γράφημα δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση από αυτό (δείτε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα στη συνέχεια).

Παρ' όλα αυτά, η χρήση των πολικών συντεταγμένων έχει και ορισμένα πλεονεκτήματα:

1. Το όρισμα πολλών συναρτήσεων που απαντώνται σε εφαρμογές εκφράζει κάποια γωνία. Για παράδειγμα, οι κεραίες που χρησιμοποιούνται σε ασύρματα συστήματα επικοινωνιών παγίως περιγράφονται από ένα ή περισσότερα *διαγράμματα ακτινοβολίας*, τα οποία περιγράφουν την εκπεμπόμενη ισχύ (που ποτέ δεν είναι αρνητική) προς μια κατεύθυνση στο χώρο συναρτήσει μίας η περισσοτέρων γωνιών που ορίζουν αυτή την κατεύθυνση. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η χρήση του γραφήματος σε πολικές συντεταγμένες είναι πολύ πιο εύληπτη από τον αναγνώστη.

2. Πολλές καμπύλες μπορούν να περιγραφούν πολύ πιο απλά ως γραφήματα συναρτήσεων σε πολικές συντεταγμένες, παρά ως γραφήματα συναρτήσεων σε καρτεσιανές συντεταγμένες ή γεωμετρικοί τόποι της μορφής $F(x, y) = 0$. Θα δούμε ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα στη συνέχεια.

Παράδειγμα 2.2. (Γραφήματα συναρτήσεων σε πολικές συντεταγμένες) Στα Σχήματα 2.6, 2.7, και 2.8 έχουμε σχεδιάσει, αντιστοίχως, τις συναρτήσεις

1. $f(\theta) = |\cos\theta|$ με $\theta \in [0, 2\pi]$.

2. $f(x) = e^{-\theta/10}$ με $\theta \in [0, 4\pi]$.

3. $f(x) = \sin^2 2\theta$ με $\theta \in [0, 2\pi]$.

πρώτον σε καρτεσιανές και δεύτερον σε πολικές συντεταγμένες. Παρατηρήστε ότι η ίδια συνάρτηση μπορεί να έχει εντελώς διαφορετική απεικόνιση στο ένα σύστημα συντεταγμένων σε σχέση με το άλλο.

Ασκήσεις

2.21. (Προσδιορισμός πολικών συντεταγμένων) Να προσδιορίσετε τις πολικές συντεταγμένες που εμφανίζονται στο δεύτερο γράφημα του Σχήματος 2.5.

2.22. (Γραφήματα σε πολικές συντεταγμένες) Στο Σχήμα 2.9 μπορείτε να δείτε τα γραφήματα σε πολικές συντεταγμένες των ακόλουθων συναρτήσεων:

1. $f(\theta) = \log\theta$, με $\theta \in [1, 10\pi]$.

2. $f(\theta) = 1 + \cos\theta$, με $\theta \in [0, 2\pi)$.

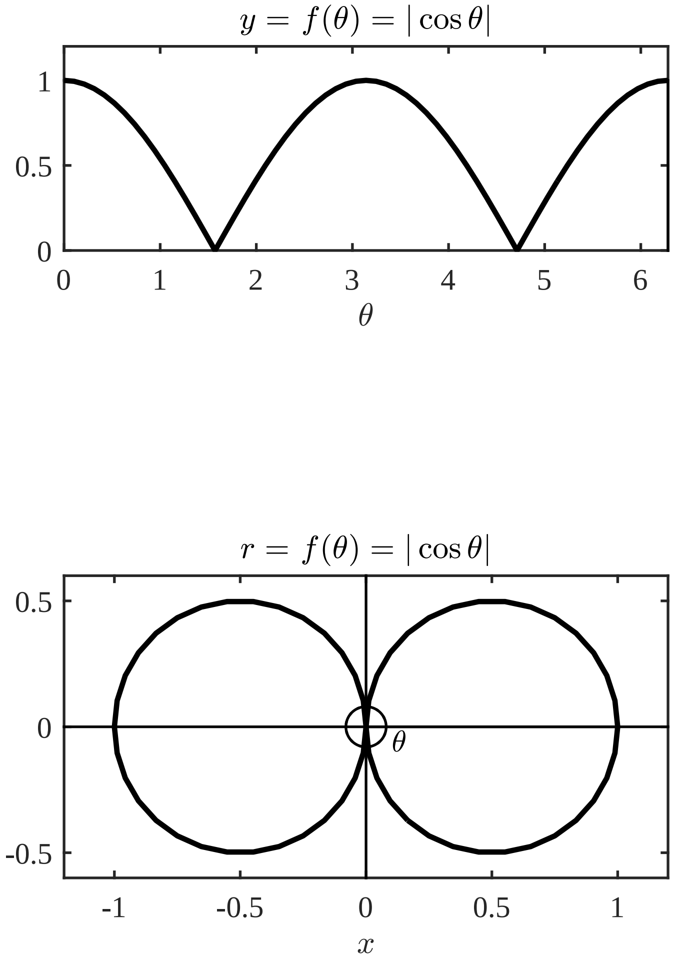
3. $f(\theta) = \cos^2 2\theta$, με $\theta \in [0, 2\pi)$.

4. $f(\theta) = \theta$, με $\theta \in [0, 3\pi]$.

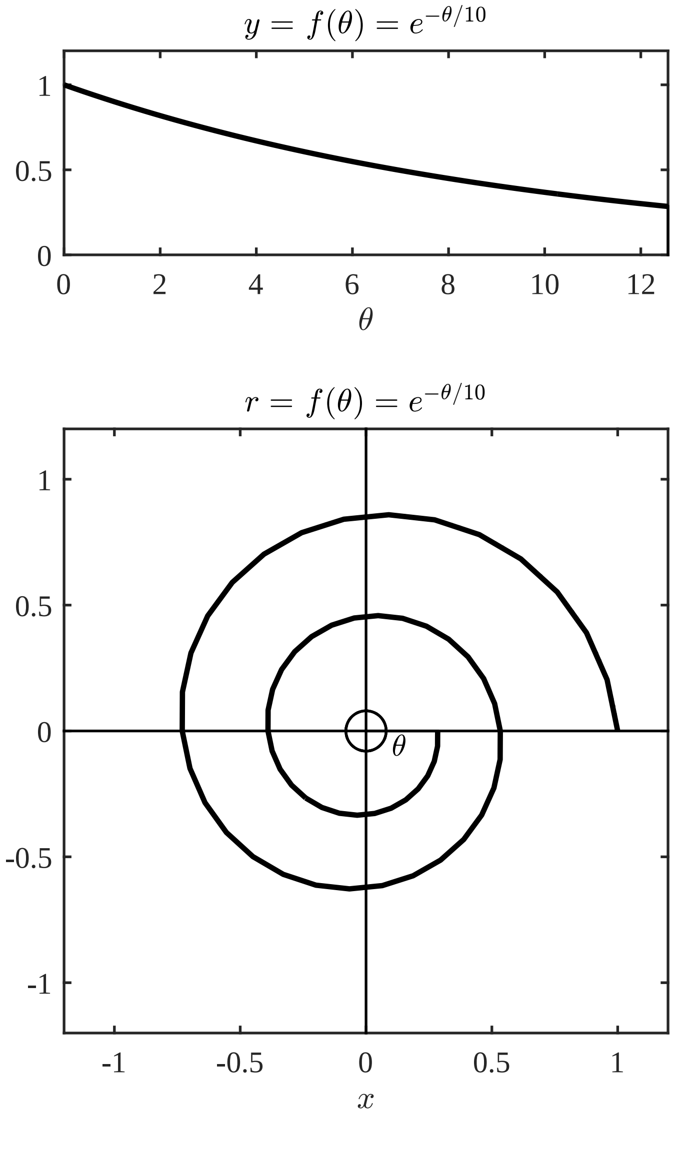
5. $f(\theta) = \lfloor\theta\rfloor$, με $\theta \in [0, 10]$.

6. $f(\theta) = 1$, με $\theta \in [0, 2\pi)$.

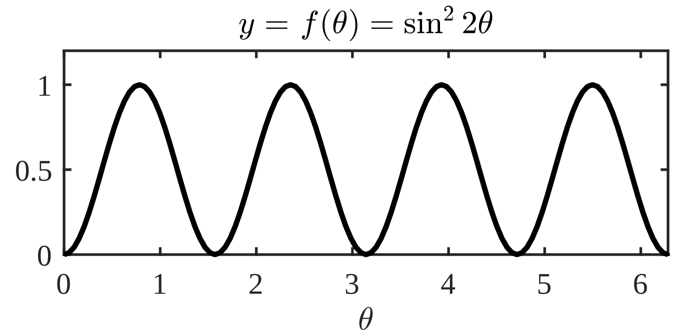
7. $f(\theta) = 1$, με $\theta \in [0, 100\pi)$.

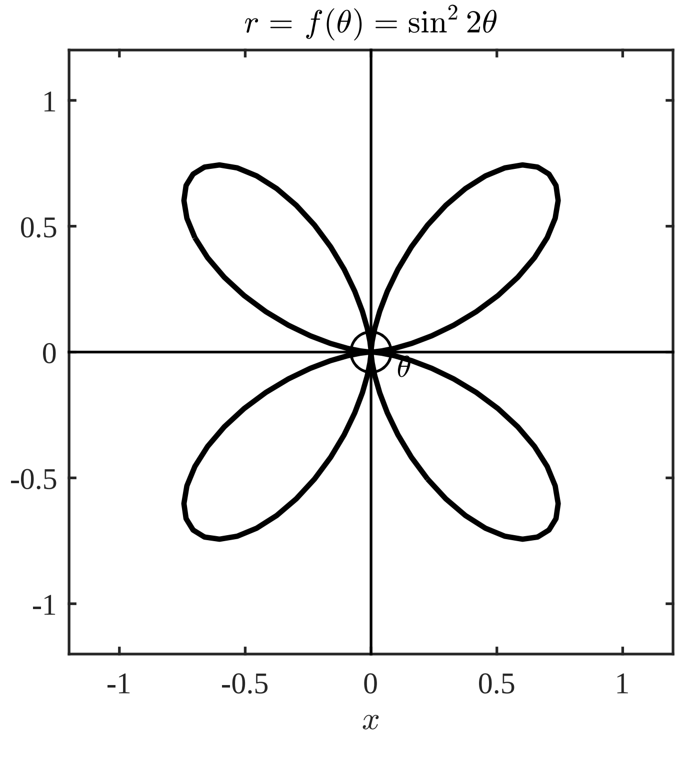


Σχήμα 2.6: Η συνάρτηση $f(\theta) = |\cos\theta|$ με $\theta \in [0, 2\pi]$ σε καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες.



Σχήμα 2.7: Η συνάρτηση $f(x) = e^{-\theta/10}$ με $\theta \in [0, 4\pi]$ σε καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες.





Σχήμα 2.8: Η συνάρτηση $f(x) = \sin^2 2\theta$ με $\theta \in [0, 2\pi]$ σε καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες.

8. $f(\theta) = 6/(1 + 0.7\cos\theta)$, με $\theta \in [0, 2\pi)$.

9. $f(\theta) = |\sin\theta|$, με $\theta \in [0, 2\pi)$.

10. $f(\theta) = |\sin\theta|$, με $\theta \in [2\pi, 4\pi)$.

11. $f(\theta) = |\cos 8\theta|$, με $\theta \in [0, 2\pi)$.

Αντιστοιχίστε το κάθε γράφημα σε μία ή περισσότερες συναρτήσεις.

2.23. (Εξίσωση κύκλου) Να δείξετε ότι το γράφημα, σε πολικές συντεταγμένες, της $f(\theta) = 2\cos\theta$ στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$ είναι ένας κύκλος με ακτίνα 1 και κέντρο το σημείο $(1, 0)$.

2.4 Καμπύλες σε Παραμετρική Μορφή

Μέχρι τώρα έχουμε μάθει τους ακόλουθους τρόπους για να περιγράψουμε μια καμπύλη στο χώρο με χρήση εξισώσεων:

1. Ως το γράφημα μιας συνάρτησης σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Για παράδειγμα, το γράφημα της συνάρτησης $y = x^2$ είναι μια παραβολή.

2. Ως το γεωμετρικό τόπο των σημείων (x, y) που ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής $f(x, y) = 0$. Για παράδειγμα, η εξίσωση $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ περιγράφει ένα κύκλο με ακτίνα R και κέντρο την αρχή των αξόνων.

3. Ως το γράφημα μιας συνάρτησης σε πολικές συντεταγμένες. Για παράδειγμα, το γράφημα της συνάρτησης $f(\theta) = 2\cos\theta$ στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$ είναι επίσης ένας κύκλος, με ακτίνα 1 και κέντρο το σημείο $(1, 0)$. (Δείτε την Άσκηση 2.23.)

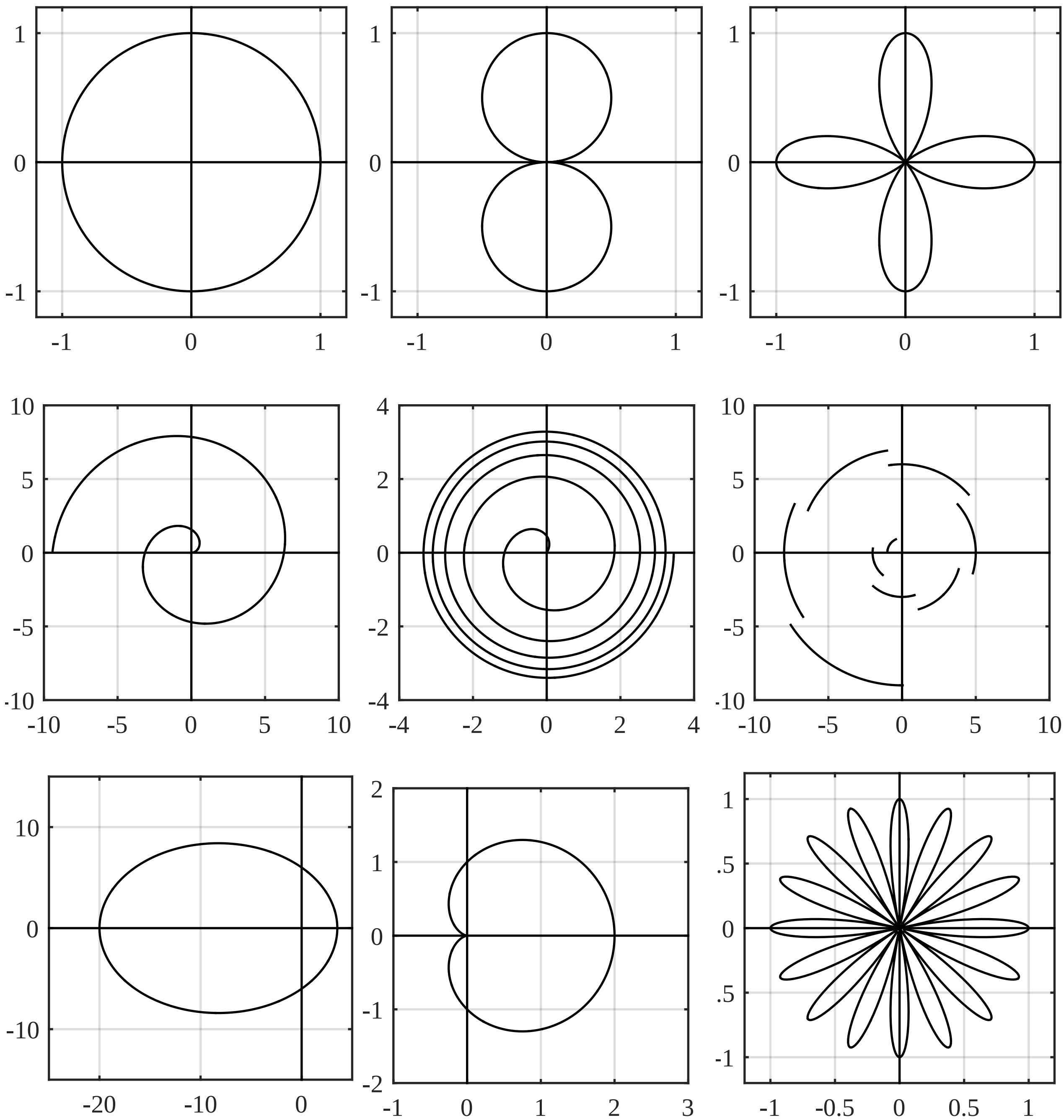
Τους πρώτους δύο τρόπους τους ξέρουμε από το Λύκειο. Τον τρίτο τρόπο τον είδαμε στην Παράγραφο 2.3. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε ακόμα έναν τρόπο, που σε γενικές γραμμές είναι πιο ισχυρός από αυτούς. Το μυστικό είναι να μη χρησιμοποιήσουμε μόνο *μία* συνάρτηση, αλλά *δύο*. Δείτε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.7. ***(Καμπύλη σε παραμετρική μορφή)***

1. *Ορίζουμε ως* ***καμπύλη (σε παραμετρική μορφή)*** *C κάθε ζεύγος συναρτήσεων*
$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad t \in I,$$
όπου η μεταβλητή t καλείται ***παράμετρος*** *της καμπύλης, και το διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$.*

2. *Καλούμε το σύνολο των σημείων του επιπέδου $\mathbb{R}^2$*
$$\mathcal{G}(C) = \{(f(t), g(t)) : t \in I\}$$
ίχνος *της καμπύλης.*

Μπορούμε να φανταστούμε μια καμπύλη που δίνεται σε παραμετρική μορφή ως εξής: η καμπύλη εκφράζει την κίνηση ενός σώματος, η παράμετρος t εκφράζει το χρόνο, το διάστημα I είναι το χρονικό διάστημα κατά το οποίο εκτελείται η κίνηση, και οι συναρτήσεις f, g ορίζουν, αντιστοίχως, την τετμημένη και την τεταγμένη του σημείου όπου πρέπει να βρίσκεται το σώμα σε κάθε χρονική στιγμή.



Σχήμα 2.9: Τα γραφήματα της Άσκησης 2.22.

Συνεχίζοντας αυτή την αναλογία, αν δώσουμε σε έναν ψύλλο έναν κουβά μπογιά, ένα πινέλο, ένα χρονόμετρο, τις δύο συναρτήσεις f, g και μια συσκευή GPS, και τον τοποθετήσουμε πάνω σε ένα επίπεδο όπου έχουμε χαράξει τους άξονες, ο ψύλλος θα μας χαράξει την καμπύλη ως εξής: θα κρατά διαρκώς στο επίπεδο το πινέλο, και σε κάθε χρονική στιγμή t θα φροντίζει να βρίσκεται στη θέση $(f(t), g(t))$ που του υπαγορεύουν οι δύο συναρτήσεις. Αν οι συναρτήσεις f, g παρουσιάζουν απότομες μεταβολές (δεν είναι δηλαδή συνεχείς, με την ορολογία κατοπινών κεφαλαίων) σε αυτά τα σημεία ο ψύλλος θα πρέπει να κάνει άλματα.

Πρέπει να τονιστεί ότι η καμπύλη διαφέρει από το ίχνος της. Συγκεκριμένα, η μεν καμπύλη είναι, ουσιαστικά, δύο συναρτήσεις της παραμέτρου t, το δε ίχνος είναι ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο. Μπορεί, κάλλιστα, δύο διαφορετικές καμπύλες να έχουν το ίδιο ίχνος (αλλά φυσικά το αντίστροφο δεν μπορεί να συμβεί), όπως θα δούμε στη συνέχεια. Πάντως, σε ορισμένες περιπτώσεις, χάριν συντομίας, θα καλούμε το ίχνος μιας καμπύλης επίσης καμπύλη.

Μια ειδική περίπτωση καμπύλης είναι όταν η μία εκ των συναρτήσεων είναι η ταυτοτική συνάρτηση. Σε αυτή την περίπτωση, η καμπύλη είναι η

$$x = t, \qquad y = g(t) = g(x), \qquad t \in I,$$

και επομένως σε αυτή την ειδική περίπτωση το ίχνος της καμπύλης ταυτίζεται με το γράφημα της άλλης, μη ταυτοτικής, συνάρτησης $y = g(x)$, στο διάστημα I.

Παράδειγμα 2.3. (Παραδείγματα καμπυλών) Έστω η καμπύλη

$$x = \sin t, \qquad y = \sin 2t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Το ίχνος της καμπύλης έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 2.10. Επίσης, έχουν σχεδιαστεί μεμονωμένα οι συναρτήσεις $f(t)$, $g(t)$.

Σαν ένα δεύτερο και τελευταίο παράδειγμα, έστω η καμπύλη

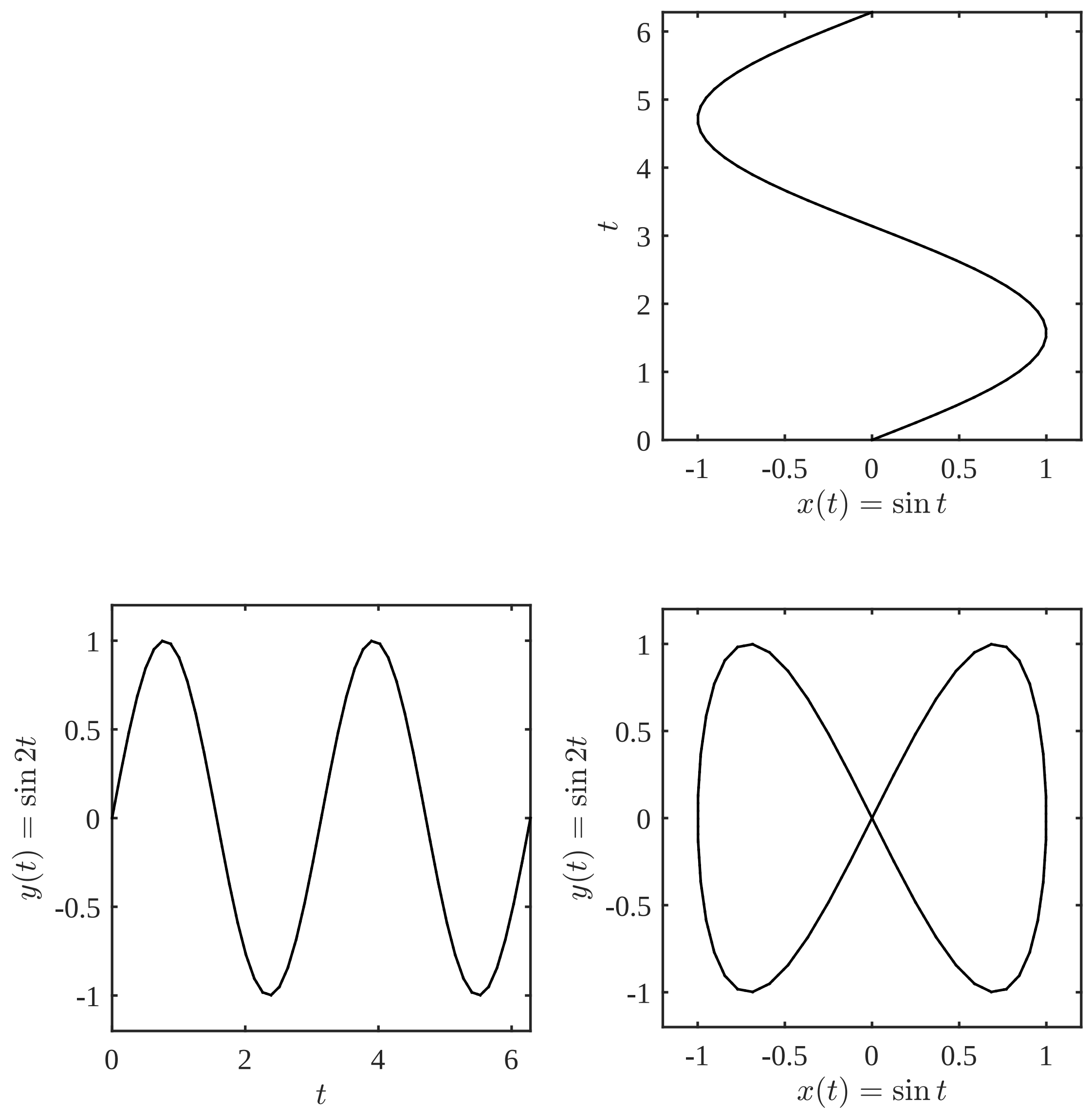
$$x = e^{-t/5} \sin t, \qquad y = e^{-t/5} \cos 2t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Η καμπύλη έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 2.11.

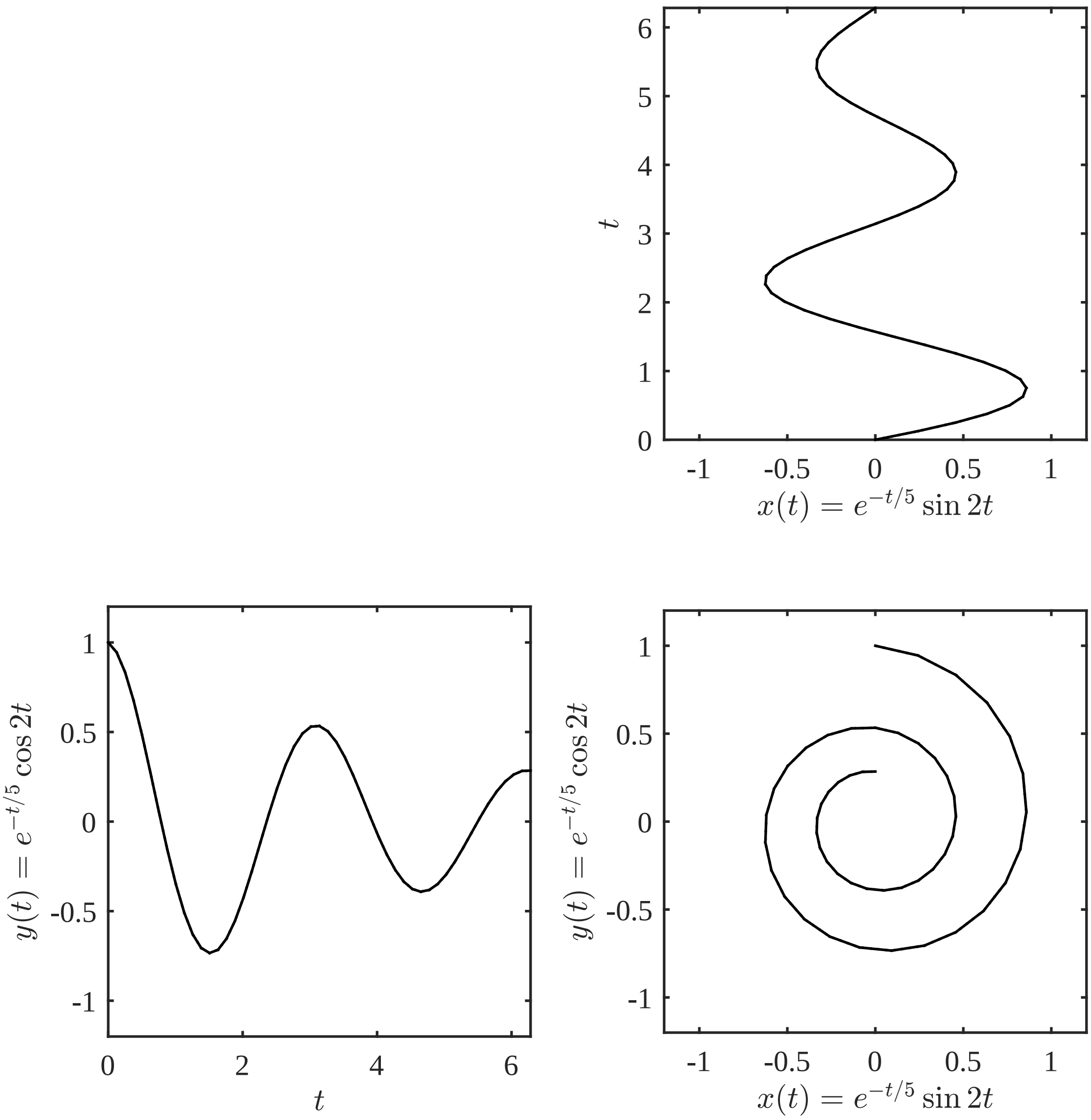
Ασκήσεις

2.24. (Αντιστοίχιση καμπυλών) Δείτε τα ίχνη του Σχήματος 2.12. Βρείτε ποιο είναι το ίχνος καθεμιάς από τις ακόλουθες καμπύλες:

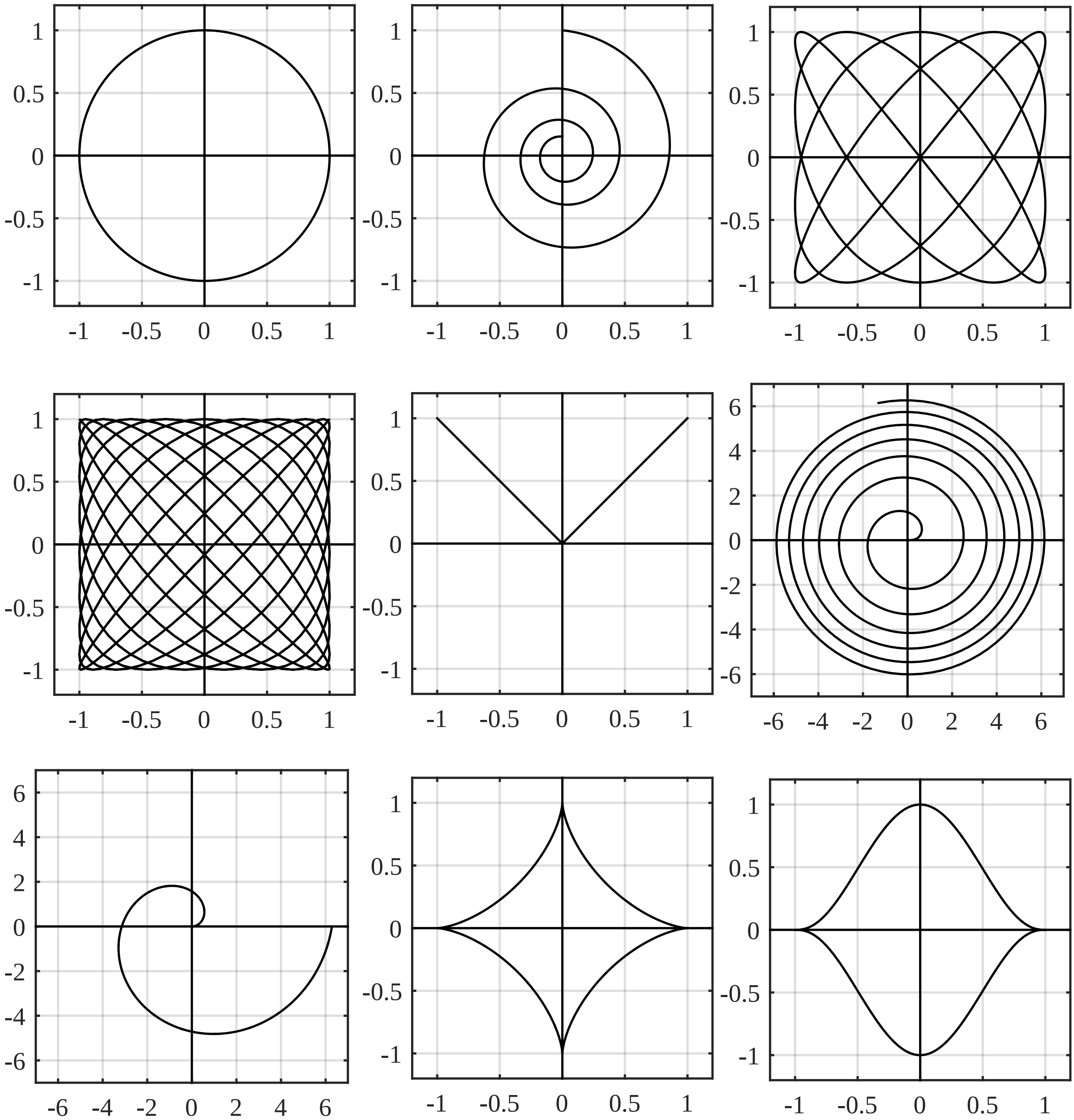
1. $x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \sin t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$
2. $x(t) = \cos(-t), \qquad y(t) = \sin(-t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$
3. $x(t) = \sin 4t, \qquad y(t) = \cos 5t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$
4. $x(t) = \sin 19t, \qquad y(t) = \cos 20t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$
5. $x(t) = t, \qquad y(t) = |t|, \qquad -1 \leq t \leq 1.$
6. $x(t) = t \cos t^2, \qquad y(t) = t \sin t^2, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$
7. $x(t) = t \cos t, \qquad y(t) = t \sin t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$
8. $x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \sin^5 t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$



Σχήμα 2.10: Η καμπύλη $x = \sin t$, $y = \sin 2t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.



Σχήμα 2.11: Η καμπύλη $x = e^{-t/5} \sin t$, $y = e^{-t/5} \cos 2t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.



Σχήμα 2.12: Τα ίχνη της Άσκησης 2.24.

9. $x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \sin t, \qquad 0 \le t \le 20\pi.$

10. $x(t) = \exp(-t/10)\cos t, \qquad y(t) = \exp(-t/10)\sin t, \qquad 0 \le t \le 6\pi.$

11. $x(t) = \cos^3 t, \qquad y(t) = \sin^3 t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$

12. $x(t) = t^3, \qquad y(t) = |t^3|, \qquad -1 \le t \le 1.$

Παρατηρήστε ότι ορισμένα ίχνη αντιστοιχούν σε περισσότερες από μία καμπύλες.

2.5 Περαιτέρω Μελέτη

Συναρτήσεις Ο Λογισμός του Thomas [THOE], [THOG] καθώς και τα βιβλία των Stewart [STEW] και Varberg et al. [VARB], περιέχουν εκτεταμένες εισαγωγές στις βασικές έννοιες των συναρτήσεων που καλύψαμε σε αυτό το κεφάλαιο, και είναι ιδανικά για άτομα των οποίων οι γνώσεις του Λυκείου είναι κάπως σκουριασμένες.

Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις Όπως αναφέρθηκε, ο ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων που παρουσιάσαμε, αν και αρκετά πειστικός, δεν είναι απολύτως αυστηρός, καθώς βασίζεται σε έννοιες από τη γεωμετρία που δεν έχουμε ορίσει αυστηρά. Μια πιο αυστηρή προσέγγιση θα βασιζόταν καταρχάς στον ορισμό της έννοιας της γωνίας και του μήκους τόξου. Εναλλακτικά, άλλοι αυστηροί ορισμοί δεν κάνουν χρήση γεωμετρικών εννοιών και βασίζονται είτε σε δυναμοσειρές [APE1], [APG1], είτε στην αξιωματική θεμελίωση μέσω κάποιων βασικών ιδιοτήτων [SPIE], [SPIG].

Καμπύλες Ο ορισμός της καμπύλης που δώσαμε εύκολα γενικεύεται στις τρεις διαστάσεις. Σε αυτή την περίπτωση, χρειαζόμαστε και μια τρίτη συνάρτηση, και δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν ψύλλο με έναν κουβά μπογιά, αλλά μια μύγα με καπνογόνο όπως αυτά που χρησιμοποιούν τα αεροπλάνα στις στρατιωτικές επιδείξεις. Αν κάποια από τις συναρτήσεις δεν είναι συνεχής, θα πρέπει η μύγα να μπορεί να τηλεμεταφέρεται. Ένα σημαντικό θέμα που δεν θίξαμε είναι πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος μιας καμπύλης. Το σημαντικό αυτό ερώτημα χρειάζεται ολοκληρώματα για να αντιμετωπιστεί, και γι’ αυτό θα το δούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 3

Όρια

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε το όριο συνάρτησης στις διάφορες μορφές του. Για παράδειγμα, όπως θυμόμαστε από το Λύκειο, λέμε ότι μια συνάρτηση f *τείνει* σε ένα όριο $L \in \mathbb{R}$ καθώς το x *τείνει* σε ένα αριθμό $x_0 \in \mathbb{R}$ αν, όταν το x είναι πολύ κοντά στο x_0 τότε και η τιμή $f(x)$ της συνάρτησης είναι πολύ κοντά στο L. Αντίστοιχα περιγράφονται και τα όρια όταν το x ή/και η τιμή της συνάρτησης τείνουν στο $\pm\infty$. Εκ πρώτης όψεως, η ιδέα του ορίου φαίνεται πολύ απλή και όχι ιδιαίτερα σημαντική. Στην πραγματικότητα, συμβαίνει το αντίθετο: όλος ο Λογισμός είναι μια ανεστραμμένη πυραμίδα που στην κορυφή της, δηλαδή στο σημείο όπου στηρίζονται όλα, βρίσκεται το όριο στις διάφορες μορφές του. Ο λόγος είναι ότι πάρα πολλές έννοιες των μαθηματικών είτε είναι στην πραγματικότητα τύποι ορίων (όπως, για παράδειγμα, οι παράγωγοι και τα καταχρηστικά ολοκληρώματα), είτε μπορούν να ερμηνευτούν εύκολα και ως όρια (για παράδειγμα, τα ολοκληρώματα όλων των μορφών και τα μήκη καμπυλών). Επομένως, η αυστηρή μελέτη των ορίων είναι ουσιαστικά η πύλη εισόδου στο Λογισμό.

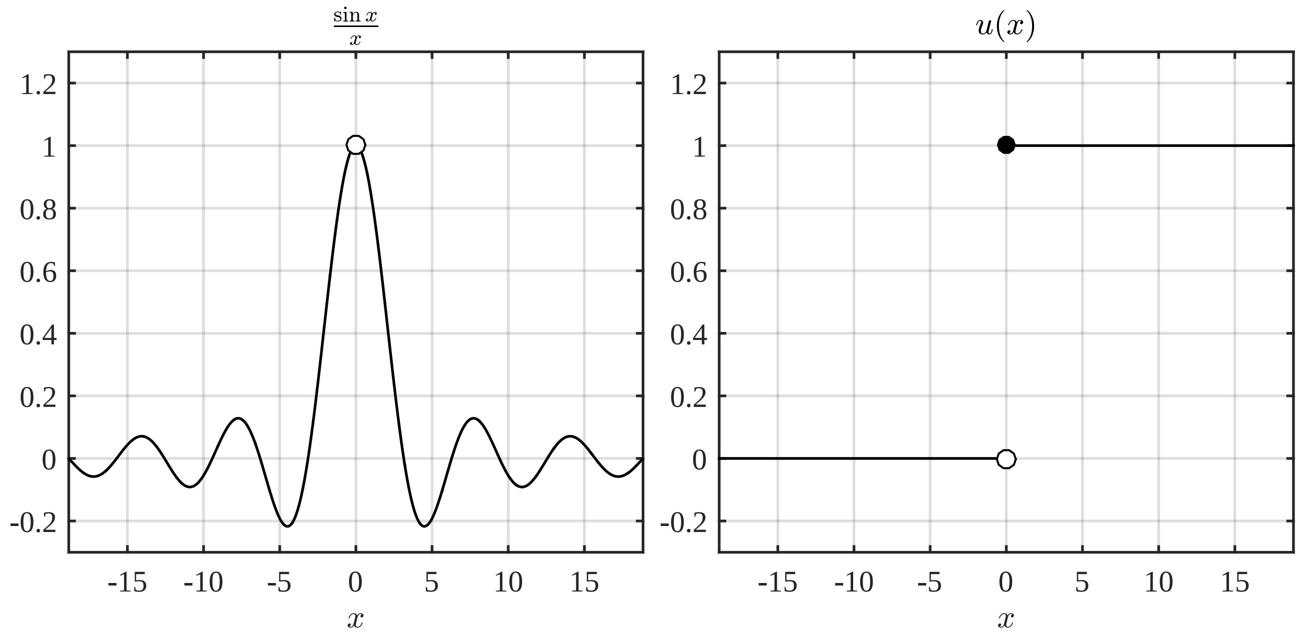
Στην Παράγραφο 3.1 θα δούμε τον ορισμό του πεπερασμένου ορίου μιας συνάρτησης f καθώς το x τείνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό. Στην Παράγραφο 3.2 θα δούμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό αυτό για να υπολογίσουμε όρια. Κατόπιν, στην Παράγραφο 3.3, θα μελετήσουμε τις ιδιότητες που απορρέουν από αυτό τον ορισμό. Σε αυτές τις παραγράφους θα είμαστε πολύ αναλυτικοί, καθώς όλα τα άλλα είδη ορίου αποτελούν παραλλαγές αυτού του ορισμού, και η διαίσθηση που έχουμε γι' αυτό το όριο μεταφέρεται σχεδόν αυτούσια και στα άλλα. Στην Παράγραφο 3.4 θα ορίσουμε το όριο μιας συνάρτησης στο άπειρο (δηλαδή την τιμή στην οποία τείνει η συνάρτηση όταν το x τείνει στο $\pm\infty$) και τις περιπτώσεις απειριζόντων ορίων, στις οποίες η ίδια η συνάρτηση τείνει στο $\pm\infty$ καθώς το x τείνει κάπου. Θα ολοκληρώσουμε αυτό το κεφάλαιο με την Παράγραφο 3.5, μελετώντας τα όρια ακολουθιών, δηλαδή συναρτήσεων με πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς.

3.1 Ορισμός Ορίου

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την περίπτωση στην οποία μια συνάρτηση f έχει όριο έναν πραγματικό αριθμό L στο $x = x_0$, δηλαδή την περίπτωση που, καθώς το x πλησιάζει πολύ κοντά στο x_0 (τείνει, όπως λέμε, στο x_0, και αντίστοιχα γράφουμε $x \to x_0$), τότε και η τιμή $f(x)$ της συνάρτησης πλησιάζει πολύ κοντά σε έναν πραγματικό αριθμό L (αντίστοιχα, λέμε ότι *τείνει* στο L και γράφουμε $f(x) \to L$).

Η παραπάνω περιγραφή του ορίου είναι από μόνη της επαρκής για να υπολογίσουμε μερικά απλά όρια. Για παράδειγμα, προφανώς καθώς το x τείνει στο x_0 το ax θα τείνει στο ax_0, και το $ax_0 + b$ θα τείνει στο $ax_0 + b$. Παρόμοια, μπορούμε να πειστούμε ότι για οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$ το όριό του καθώς το x τείνει στο x_0 είναι το $P(x_0)$.

Αν όμως βασιστούμε μόνο στον παραπάνω διαισθητικό ορισμό, τα πράγματα εύκολα μπορεί να



Σχήμα 3.1: Οι συναρτήσεις $\frac{\sin x}{x}$ και Heaviside $u(x)$.

δυσκολέψουν. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\sin x}{x},$$

που έχουμε σχεδιάσει στο Σχήμα 3.1. Ποιο είναι το όριό της καθώς το x τείνει στο 0; Παρατηρήστε ότι το 0 δεν βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Όπως φαίνεται όμως από το γράφημα της συνάρτησης, καθώς το x τείνει στο 0, χωρίς να λαμβάνει όμως αυτή την τιμή, οι τιμές της συνάρτησης είναι πολύ κοντά στη μονάδα. Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε ότι, και σε αυτή την περίπτωση, το όριο της συνάρτησης καθώς το x τείνει στο 0 είναι το 1.

Μπορεί επίσης η συνάρτηση να τείνει σε διαφορετικές τιμές, ανάλογα με το πώς πλησιάζει το x το σημείο x_0. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση Heaviside:

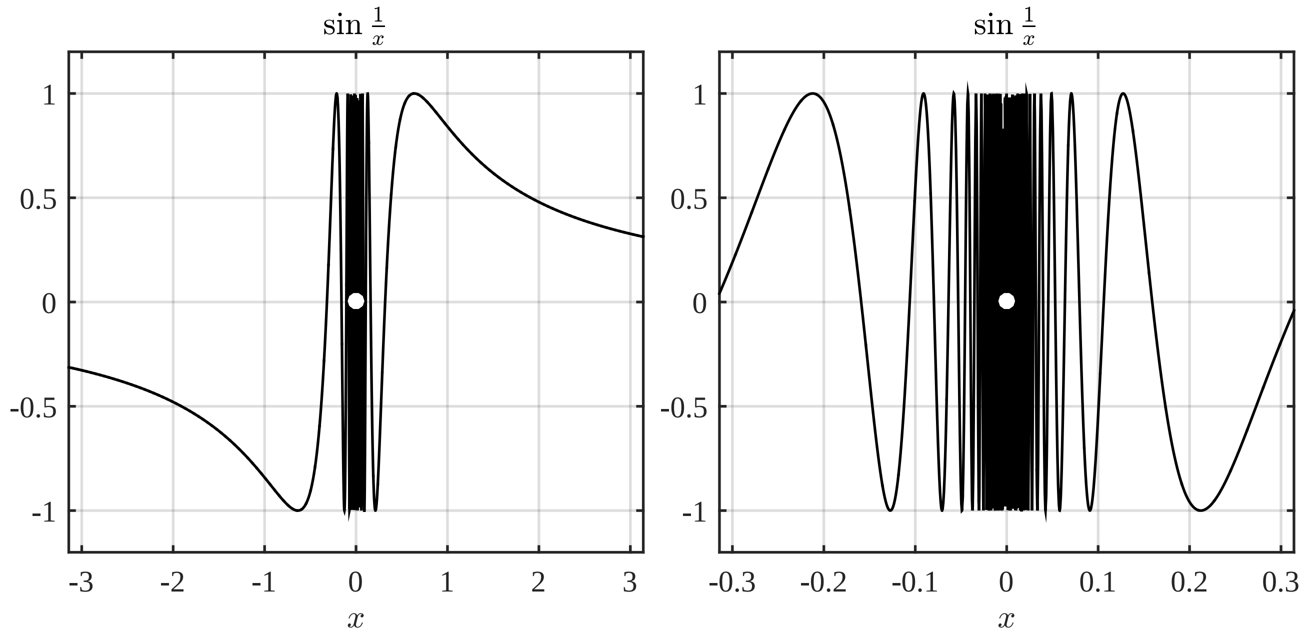
$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

που επίσης έχουμε σχεδιάσει στο Σχήμα 3.1. Εδώ έχουμε ότι $f(x) \to 1$ όταν ταυτοχρόνως $x > 0$ και $x \to 0$, και $f(x) \to 0$ όταν ταυτοχρόνως $x < 0$ και $x \to 0$. Αφού δεν υπάρχει ένας μόνο αριθμός στον οποίο να τείνει η συνάρτηση, μπορούμε να πούμε ότι το όριο δεν υπάρχει. Εναλλακτικά, βέβαια, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η συνάρτηση έχει δύο όρια.

Σαν ένα τελευταίο παράδειγμα, ας εξετάσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \sin \frac{1}{x},$$

που έχουμε σχεδιάσει στο Σχήμα 3.2. Σε αυτή την περίπτωση, καθώς $x \to 0$, το $\frac{1}{x}$ τείνει στο ∞, δηλαδή γίνεται αυθαίρετα μεγάλο, όταν το x είναι θετικό, και τείνει στο $-\infty$, δηλαδή γίνεται αυθαίρετα μικρό, όταν το $x < 0$. Επομένως, αφού το όρισμα του ημιτόνου δεν τείνει κάπου, δεν θα τείνει κάπου συγκεκριμένα και η συνάρτηση $f(x)$ καθώς το $x \to 0$. Μπορούμε να πούμε λοιπόν ότι το όριο σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει.



Σχήμα 3.2: Η συνάρτηση $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ σε δύο διαφορετικές κλίμακες. Οσοδήποτε μικρό και αν επιλέξουμε το εύρος στο οποίο μεταβάλλεται το x, πάντα θα βλέπουμε άπειρα μέγιστα και ελάχιστα της συνάρτησης.

Στα προηγούμενα παραδείγματα, αναγκαστήκαμε, σε πολλές περιπτώσεις, να κάνουμε παραδοχές και υποθέσεις βασιζόμενοι αποκλειστικά στη διαίσθησή μας για το τι πρέπει να είναι το όριο. Δυστυχώς, στα μαθηματικά αυτό δεν αρκεί: χρειαζόμαστε έναν αυστηρό ορισμό, ώστε να μπορούμε να καταλήγουμε στην ύπαρξη (ή μη) ορίων χωρίς επίκληση σε κάποιο διαισθητικό επιχείρημα ή κάποια επιπλέον παραδοχή. Ο αυστηρός ορισμός είναι επίσης απαραίτητος προκειμένου να μπορούμε να χτίσουμε τη θεωρία μας. Για παράδειγμα, αν προσπαθήσουμε να αναπτύξουμε όλη τη θεωρία που χρειαζόμαστε για να αποδείξουμε τον Κανόνα του L'Hôpital, βάσει επιχειρημάτων όπως τα παραπάνω, η απόδειξη θα μοιάζει περισσότερο με φιλοσοφικό παρά με μαθηματικό κείμενο.

Είμαστε, λοιπόν, έτοιμοι να δώσουμε τον αυστηρό ορισμό του ορίου:

Ορισμός 3.1. ***(Όριο συνάρτησης)*** *Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, ορισμένη στο $I - \{x_0\}$ όπου το I είναι γειτονιά του x_0. Η f **έχει όριο το** L, ή **τείνει στο** L, καθώς το x **τείνει στο** x_0, αν*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta), \quad |f(x) - L| < \epsilon. \tag{3.1}$$

Γράφουμε $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ ή, εναλλακτικά, ότι $f(x) \to L$ καθώς $x \to x_0$.

Με λόγια, η συνάρτηση f έχει όριο το L καθώς το $x \to x_0$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα x που απέχουν από το x_0 λιγότερο από δ, με εξαίρεση ίσως το x_0, δηλαδή για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, το $f(x)$ θα απέχει από το L λιγότερο από το ϵ, δηλαδή $|f(x) - L| < \epsilon$.

Πριν δούμε σε βάθος τον ορισμό, πρέπει να κάνουμε κάποιες προκαταρκτικές παρατηρήσεις.

1. Κατά τον παραπάνω ορισμό δεν μας ενδιαφέρει αν το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού και, αν ναι, ποια είναι η τιμή της συνάρτησης εκεί. Προτιμάμε να επιτρέψουμε να υπάρχουν και όρια συναρ-

τήσεων που δεν ορίζονται καν στο x_0, διότι αυτή η περίπτωση έχει μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον. Η παράγωγος είναι ένα τέτοιο όριο.

2. Απαιτούμε η $f(x)$ να ορίζεται σε μια γειτονιά του x_0. Επομένως, και σύμφωνα με τον ορισμό της γειτονιάς (Ορισμός 1.6) υπάρχουν a, b τέτοια ώστε το $(a, x_0) \cup (x_0, b) \subseteq A$, δηλαδή το x_0 είναι εσωτερικό στο πεδίο ορισμού A της f. Για παράδειγμα, αν το A είναι διάστημα, το x_0 δεν μπορεί να είναι άκρο του.

   Θα μπορούσαμε να είμαστε κάπως πιο ελαστικοί, για παράδειγμα να επιτρέπαμε, αν το A είναι κλειστό διάστημα, το x_0 να μπορεί να είναι άκρο του. Θα μπορούσαμε να είμαστε ακόμα πιο ελαστικοί, ώστε να καλύπτονται και άλλες περιπτώσεις στις οποίες το πεδίο ορισμού δεν είναι ένα απλό διάστημα, αλλά για λόγους απλότητας διατυπώνουμε τον ορισμό όπως παραπάνω.

3. Το δ που βρίσκουμε για το κάθε ϵ *πρέπει* να είναι τέτοιο ώστε η $f(x)$ που εμφανίζεται στην τελική ανισότητα της (3.1) να ορίζεται για όλα τα $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$. Αλλιώς, η ανισότητα δεν θα έχει νόημα για κάποια x, και επομένως ο ορισμός δεν ισχύει.

4. Ένας κάπως διαφορετικός τρόπος να γράψουμε τη συνθήκη (3.1) είναι ο ακόλουθος:

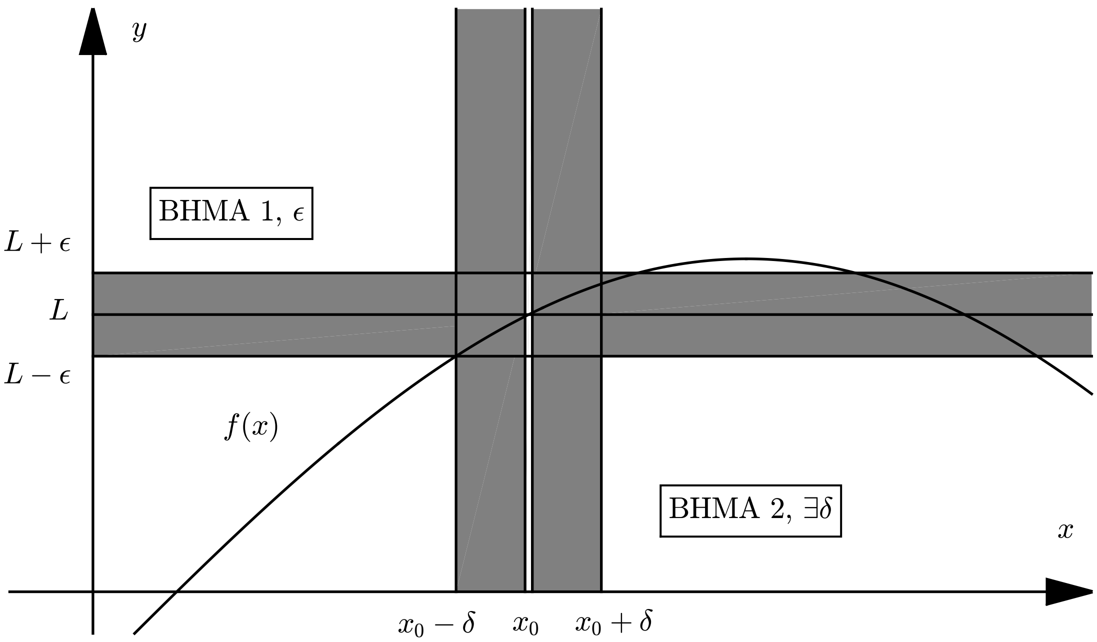
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \tag{3.2}$$

   Συχνά θα χρησιμοποιούμε αυτόν τον ορισμό σε αποδείξεις.

Ο παραπάνω ορισμός είναι από τους σημαντικότερους στα Μαθηματικά. Είναι σίγουρα ο σημαντικότερος σε αυτό το μάθημα και αξίζει να τον αποστηθίσετε. Δυστυχώς, όταν κάποιος τον διαβάζει για πρώτη φορά φαίνεται δυσνόητος, είναι όμως σίγουρα ο πιο απλός τρόπος για να περιγράψουμε αυτό που ήδη έχουμε αντιληφθεί διαισθητικά για το όριο. Πράγματι, η έκφραση «όσο πλησιάζει το x στο x_0 τόσο πλησιάζει το $f(x)$ στο L» μπορεί να ειπωθεί με κάπως μεγαλύτερη σαφήνεια, ως «μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι το $f(x)$ είναι όσο κοντά θέλουμε στο L, αρκεί να απαιτήσουμε το x να είναι αρκούντως κοντά στο x_0» ή, κάπως πιο αναλυτικά, «για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$, υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε να μπορούμε να απαιτήσουμε η $f(x)$ να απέχει από το L λιγότερο από το ϵ, αρκεί το x απέχει από το x_0 λιγότερο από δ». Ο παραπάνω ορισμός ισοδυναμεί με την τελευταία αυτή διατύπωση. Απλώς στον ορισμό διευκρινίζουμε επιπλέον ότι δεν μας αφορά αν υπάρχει ή όχι η τιμή της συνάρτησης στη θέση x_0, αλλά απαιτούμε η συνάρτηση να είναι ορισμένη παντού γύρω από το x_0. Αυτές οι διευκρινίσεις δεν είναι τόσο σημαντικές.

Αν ο ορισμός σας φαίνεται δυσνόητος και δύσχρηστος, είστε απολύτως δικαιολογημένοι. Είναι χαρακτηριστικό ότι, ενώ ο Λογισμός ως κλάδος των μαθηματικών μπορούμε να πούμε ότι ξεκίνησε με τον Νεύτωνα τον 17ο αιώνα, ο αυστηρός ορισμός του ορίου, όπως δόθηκε παραπάνω, παγιώθηκε τον 19ο αιώνα, με τις εργασίες των Cauchy και Weierstrass. Επομένως, ο αυστηρός ορισμός του ορίου εμφανίστηκε πολύ μετά από, για παράδειγμα, τον Κανόνα του L'Hôpital (αλλά όχι βέβαια την αυστηρή απόδειξή του). Τέτοιου είδους μπρος-πίσω είναι πολύ συνηθισμένα στην ιστορία των μαθηματικών, αν και στη διδασκαλία τους συνήθως δεν αναφέρονται.

Είναι, πάντως, απολύτως απαραίτητο να κατανοήσουμε πλήρως τον μηχανισμό του ορισμού αυτού. Ένας τρόπος είναι ο ακόλουθος. Φανταστείτε ότι παίζετε ένα παιχνίδι εναντίον ενός αντιπάλου. Το παιχνίδι παίζεται σε δύο βήματα. Ο αντίπαλος παίζει πρώτος και σας προκαλεί δίνοντάς σας αριθμούς $\epsilon > 0$, για τους οποίους απαιτεί να ισχύει ότι $|f(x) - L| < \epsilon$. Στο δεύτερο βήμα, εσείς πρέπει να βρείτε κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν το x απέχει από το x_0 λιγότερο από το δ, χωρίς όμως να είναι ίσο με αυτό, δηλαδή αν $0 < |x - x_0| < \delta$, τότε να είναι *σίγουρο* ότι θα ισχύει η ανισότητα $|f(x) - L| < \epsilon$. Αν μπορείτε πάντοτε να κερδίζετε το παιχνίδι, τότε το όριο υπάρχει. Αν, όμως, υπάρχει $\epsilon > 0$ για το οποίο εσείς δεν μπορείτε να βρείτε $\delta > 0$, τότε ο αντίπαλός σας μπορεί να σας κερδίσει, αν επιλέξει αυτό το ϵ, και το όριο δεν υπάρχει.



Σχήμα 3.3: Γραφική απεικόνιση του ορισμού του ορίου $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, για μία περίπτωση που το όριο υπάρχει.

Παρατηρήστε ότι το δ δεν είναι μοναδικό. Πράγματι, αν η ανισότητα $|f(x)-L| < \epsilon$ ισχύει για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$, θα ισχύει και για κάθε $x \in (x_0-\delta', x_0) \cup (x_0, x_0+\delta')$ εφόσον $\delta' < \delta$. Άρα, αν μπορούμε να αποκριθούμε στον αντίπαλό μας με κάποιο δ, μπορούμε να αποκριθούμε και με οποιοδήποτε μικρότερό του. Όπως θα δούμε, συνήθως υπάρχει κάποιο μέγιστο $\delta > 0$ που μπορούμε να επιλέξουμε, το οποίο εξαρτάται από τη μορφή της f, το x_0, και βέβαια το ϵ.

Στο Σχήμα 3.3 έχουμε μια γραφική απεικόνιση αυτού του παιχνιδιού στην περίπτωση που το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με L. Για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ επιλέξει ο αντίπαλος στο Βήμα 1, μπορούμε να αποκριθούμε με κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε όποτε ισχύει

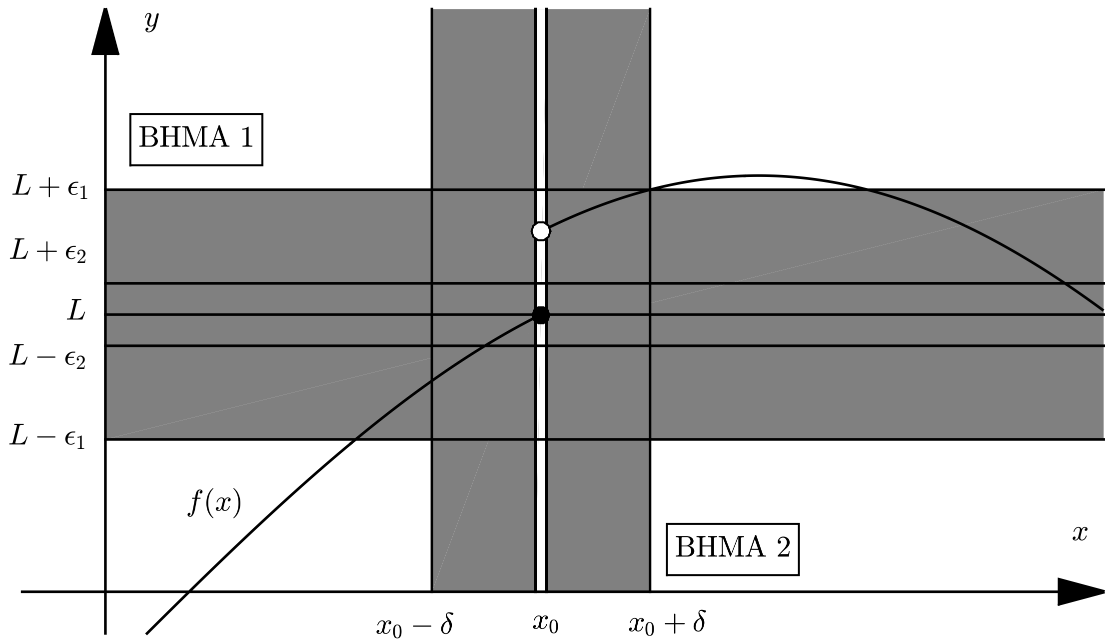
$$0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\},$$

δηλαδή το γράφημα της συνάρτησης βρίσκεται εντός της κατακόρυφης γκρίζας λωρίδας του σχήματος, εξαιρουμένης ίσως της γραμμής $x = x_0$, τότε θα ισχύει και

$$|f(x) - L| < \epsilon \Leftrightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon,$$

δηλαδή το γράφημα θα βρίσκεται *και* εντός της οριζόντιας γκρίζας λωρίδας του σχήματος. Στο συγκεκριμένο σχήμα, ο αντίπαλός μας επέλεξε ένα ϵ και κατόπιν επιλέξαμε ένα δ για το οποίο η ιδιότητα αυτή ισχύει οριακά, αφού το γράφημα της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο $(x_0-\delta, L-\epsilon)$. Αν μεγαλώσουμε το δ έστω και ελάχιστα σε σχέση με την αρχική επιλογή μας, παρατηρήστε ότι η ανισότητα του ορισμού (3.1) θα πάψει να ισχύει για κάποια $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\}$, λόγω του αριστερού τμήματος του γραφήματος της συνάρτησης. (Παρατηρήστε ότι από τα δεξιά υπάρχει κάποιο περιθώριο αύξησης της τιμής του δ, καθώς από τα δεξιά η f μεταβάλλεται πιο αργά.) Αντίθετα, θα μπορούσαμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε άλλο δ μικρότερο από αυτό του σχήματος.

Στο Σχήμα 3.4 έχουμε μια γραφική απεικόνιση αυτού του παιχνιδιού στην περίπτωση που το όριο *δεν* υπάρχει. Έστω πως ισχυριζόμαστε ότι το όριο υπάρχει, και είναι το L. Αρχικά, ο αντίπαλός μας



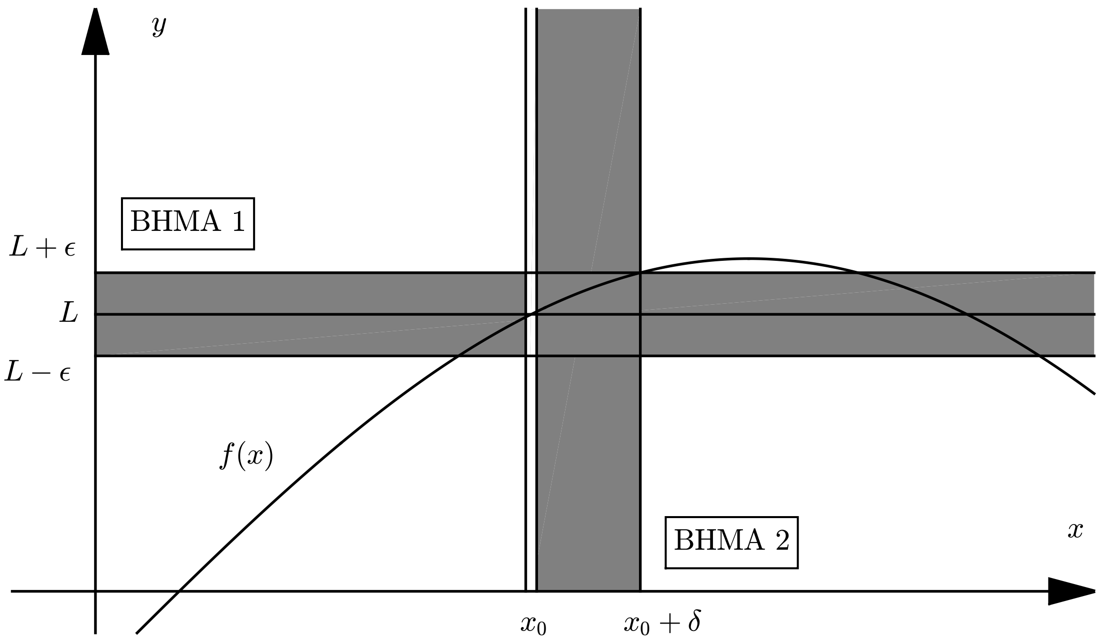
Σχήμα 3.4: Γραφική απεικόνιση του ορισμού του ορίου $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, για μια περίπτωση που το όριο δεν υπάρχει.

επιλέγει μια σχετικά μεγάλη τιμή ϵ_1, και έτσι εμείς μπορούμε να ανταποκριθούμε επιλέγοντας μια τιμή για το δ. (Παρατηρήστε μάλιστα πως η τιμή που επιλέξαμε είναι η μέγιστη δυνατή, καθώς το γράφημα της συνάρτησης διέρχεται από τη θέση $(x_0+\delta, L+\epsilon_1)$. Κατόπιν, ο αντίπαλός μας επιλέγει το ϵ_2. Με αυτή την επιλεγμένη τιμή, είναι βέβαιο πως θα χάσουμε: όσο μικρό δ και να επιλέξουμε, το γράφημα της συνάρτησης που βρίσκεται εντός της κατακόρυφης λωρίδας θα είναι εκτός της οριζόντιας λωρίδας. Ουσιαστικά, το πρόβλημα δημιουργείται από το απότομο άλμα που κάνει η συνάρτηση στη θέση $(x_0, f(x_0))$. Παρατηρήστε ότι με το παραπάνω επιχείρημα δείχνουμε γραφικά ότι η συνάρτηση δεν έχει όριο το L στη θέση x_0, *όχι όμως* και το ότι το όριο δεν υπάρχει. Για να δείξουμε γραφικά ότι δεν υπάρχει το όριο, πρέπει να επαναλάβουμε το επιχείρημα για όλους τους πραγματικούς αριθμούς, παίρνοντας περιπτώσεις. Δείτε, σχετικά, την Άσκηση 3.1.

Ουσιαστικά, το γράφημα της συνάρτησης του Σχήματος 3.4 είναι μια συνεχής γραμμή, με ένα άλμα στη θέση x_0. Αυτός όμως δεν είναι ο μόνος λόγος για τον οποίο μπορεί μια συνάρτηση να μην έχει όριο! Μια άλλη πιθανότητα είναι η συνάρτηση να λαμβάνει κάποιο σύνολο συγκεκριμένων τιμών όσο κοντά θέλουμε στο x_0. Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, με τη συνάρτηση $\sin\frac{1}{x}$, που έχουμε σχεδιάσει στο Σχήμα 3.2 στη θέση x_0. Πράγματι, αν επιχειρήσουμε να παίξουμε το παιχνίδι που περιγράφουμε παραπάνω, είναι σίγουρο ότι θα χάσουμε αν ο αντίπαλός μας επιλέξει $\epsilon < 1$.

3.1.1 Πλευρικό Όριο

Η συνάρτηση του Σχήματος 3.4 είναι χαρακτηριστική, καθώς δεν υπάρχει μεν το όριο όταν το x πλησιάζει το x_0, υπάρχει όμως το όριο αν περιορίσουμε το x να πλησιάζει το x_0 είτε από τα δεξιά, παραμένοντας δηλαδή μεγαλύτερο του x_0, είτε από τα αριστερά, παραμένοντας δηλαδή μικρότερο του x_0. Επειδή μας ενδιαφέρει η μελέτη αυτών των περιπτώσεων, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:



Σχήμα 3.5: Γραφική απεικόνιση του ορισμού του πλευρικού ορίου από τα δεξιά $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$.

Ορισμός 3.2. ***(Πλευρικό όριο συνάρτησης)***

1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ όπου $(x_0, a) \subseteq A$, με $a > x_0$. Η f* ***έχει δεξί (πλευρικό) όριο το*** *L, ή* ***τείνει στο*** *L, καθώς το x* ***τείνει στο*** *x_0* ***από τα δεξιά*** *αν*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta), \quad |f(x) - L| < \epsilon. \tag{3.3}$$

Γράφουμε $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ ή, εναλλακτικά, ότι $f(x) \to L$ καθώς $x \to x_0^+$.

2. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ όπου $(a, x_0) \subseteq A$, με $a < x_0$. Η f* ***έχει αριστερό (πλευρικό) όριο το*** *L, ή* ***τείνει στο*** *L, καθώς το x* ***τείνει στο*** *x_0* ***από τα αριστερά*** *αν*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0), \quad |f(x) - L| < \epsilon. \tag{3.4}$$

Γράφουμε $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ ή, εναλλακτικά, ότι $f(x) \to L$ καθώς $x \to x_0^-$.

Η συνθήκη (3.3) μπορεί, εναλλακτικά, να γραφεί ως

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Παρόμοια, η συνθήκη (3.4) μπορεί, εναλλακτικά, να γραφεί ως

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Αν έχετε κατανοήσει τον ορισμό του κανονικού ορίου, τότε εύκολα θα κατανοήσετε και τον ορισμό του πλευρικού ορίου. Δείτε το Σχήμα 3.5. Και πάλι, μπορούμε να ερμηνεύσουμε τον ορισμό ως την περιγραφή του ακόλουθου παιχνιδιού: στο Βήμα 1 ένας αντίπαλος σας δίνει ένα $\epsilon > 0$ και εσείς πρέπει να αποκριθείτε βρίσκοντας ένα δ έτσι ώστε, όποτε το x βρίσκεται σε απόσταση από το x_0 μικρότερη του δ και στα δεξιά του, δηλαδή όποτε το γράφημα της συνάρτησης βρίσκεται εντός της κατακόρυφης λωρίδας $(x_0, x_0 + \delta)$, τότε εγγυημένα θα βρίσκεται και εντός της οριζόντιας λωρίδας $|f(x) - L| < \epsilon$. Στο συγκεκριμένο σχήμα έχουμε επιλέξει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή για το δ.

Ασκήσεις

3.1. (Γραφική ερμηνεία μη ύπαρξης ορίου) Για τη συνάρτηση του Σχήματος 3.4 εξηγήστε, αποκλειστικά με γραφικά επιχειρήματα όπως αυτά που χρησιμοποιήσαμε σε αυτή την παράγραφο, γιατί η συνάρτηση δεν έχει όριο L παίρνοντας περιπτώσεις για τις τιμές του L.

3.2. (Γραφική ερμηνεία ύπαρξης πλευρικών ορίων) Για τη συνάρτηση του Σχήματος 3.4 εξηγήστε, αποκλειστικά με γραφικά επιχειρήματα, γιατί η συνάρτηση έχει πλευρικά όρια στο x_0, και ποια είναι αυτά.

3.2 Υπολογισμός Ορίων με τον Ορισμό

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε όρια και πλευρικά όρια συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τον ορισμό τους. Στην πραγματικότητα, συνήθως (αλλά όχι πάντα) τα όρια υπολογίζονται με χρήση ιδιοτήτων τις οποίες θα δούμε στην επόμενη παράγραφο. Σε κάθε περίπτωση, όμως, η χρήση του ορισμού έχει τη δική της χρησιμότητα γιατί μας επιτρέπει να τον αποσαφηνίσουμε.

Ένα βασικό ερώτημα («καημός» είναι καταλληλότερη λέξη) πολλών φοιτητών είναι αν υπάρχει μια «μεθοδολογία» που μπορούμε να ακολουθήσουμε για να βρούμε το όριο μιας συνάρτησης με χρήση του ορισμού του. Δεν υπάρχει μια αναλυτική μέθοδος που να αποτελείται από συγκεκριμένα βήματα τα οποία μπορούμε πάντοτε να εκτελούμε στα τυφλά, ευτυχώς ή δυστυχώς. Υπάρχει μια *γενική* μεθοδολογία και είναι η ακόλουθη.

Καταρχάς, υποθέτουμε ότι έχει δοθεί ένα αυθαίρετο $\epsilon > 0$ με το οποίο μας έχει προκαλέσει ο αντίπαλός μας. Κατόπιν, εμείς πρέπει να βρούμε ένα $\delta > 0$ ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη (3.1) ή η ισοδύναμή της (3.2). Υπάρχουν δύο προσεγγίσεις για να βρούμε αυτό το $\delta > 0$. Οι προσεγγίσεις συνδέονται, αφού βασίζονται στην ίδια βασική ιδέα. Πολλές φορές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τις δύο, αλλά συχνά η μια είναι ευκολότερη.

1. Η πρώτη προσέγγιση είναι η «γραφική» και είναι αυτή που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο: πρέπει να βρούμε ένα $\delta > 0$ ώστε όποτε το γράφημα της συνάρτησης είναι εντός της κατακόρυφης λωρίδας $0 < |x - x_0| < \delta$, αυτόματα να βρίσκεται και εντός της λωρίδας $|f(x)-L| < \epsilon$. Αν η συνάρτηση είναι αύξουσα, πρέπει να βρούμε ένα δ_1 τέτοιο ώστε $f(x_0-\delta_1) = L - \epsilon$ και ένα δ_2 τέτοιο ώστε $f(x_0 + \delta_2) = L + \epsilon$, και κατόπιν να πάρουμε ως δ το μικρότερο από τα δύο. Αν η συνάρτηση είναι φθίνουσα, τα παραπάνω τροποποιούνται κατάλληλα. Θα πρέπει, στο τέλος της απόδειξης, να έχουμε βρει έναν τύπο που θα δίνει το δ ως συνάρτηση των ϵ, x_0 και της μορφής της f.

2. Η δεύτερη προσέγγιση είναι αμιγώς «αλγεβρική»: Αφού πρέπει να βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε
$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon,$$
μπορούμε να κατασκευάσουμε μια σειρά από *αντίστροφες συνεπαγωγές* που θα ξεκινούν από αυτό στο οποίο θέλουμε να καταλήξουμε, δηλαδή το $|f(x) - L| < \epsilon$, και θα καταλήγουν σε μια έκφραση της μορφής $0 < |x - x_0| < g(\epsilon, x_0)$, όπου η $g(\epsilon, x_0)$ είναι μια οποιαδήποτε έκφραση που εμφανίζει τα ϵ, x_0 και η οποία εξαρτάται από τη μορφή της f. Δηλαδή:
$$|f(x) - L| < \epsilon \Leftarrow \cdots \Leftarrow 0 < |x - x_0| < g(\epsilon, x_0).$$

Οι αντίστροφες συνεπαγωγές δεν συνηθίζονται, και ίσως μπερδεύουν. Εναλλακτικά, όπου αυτό είναι δυνατόν, μπορούμε να τις αντικαθιστούμε με ισοδυναμίες, με τις οποίες είμαστε πιο εξοικειωμένοι, αφού, αν ισχύει η ισοδυναμία, ισχύει αυτόματα και η αντίστροφη συνεπαγωγή. Έχοντας τις παραπάνω αντίστροφες συνεπαγωγές, μπορούμε τώρα να θέσουμε $\delta = g(\epsilon, x_0)$, και έχουμε τελικά

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Πρέπει να τονιστεί ότι το $\delta > 0$ που ψάχνουμε μπορεί να είναι συνάρτηση του x_0 και του ϵ (και συνήθως είναι), αλλά *δεν* επιτρέπεται να είναι συνάρτηση του x. Ουσιαστικά θέλουμε να βρούμε ένα δ ώστε όταν το x βρίσκεται εντός της γειτονιάς $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ αυτόματα να έχουμε $|f(x) - L| < \epsilon$. Επομένως, το x δεν έχει μια μόνο τιμή, αλλά λαμβάνει τιμές από ένα εύρος τιμών.

Η παραπάνω μεθοδολογία τροποποιείται ανάλογα αν πρέπει να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός πλευρικού ορίου.

Στα παρακάτω παραδείγματα εφαρμόζουμε την παραπάνω μεθοδολογία με τη δεύτερη προσέγγιση. Αφού τα κατανοήσετε, προσπαθήστε να δείξετε την ύπαρξη αυτών των ορίων χρησιμοποιώντας την πρώτη προσέγγιση. (Δείτε σχετικά την Άσκηση 3.3.)

Παράδειγμα 3.1. (Όριο της $f(x) = 5x + 3$) Σαν ένα απλό πρώτο παράδειγμα, θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x \to 1} (5x + 3) = 8.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Έχουμε

$$|f(x) - L| < \epsilon \Leftrightarrow |5x + 3 - 8| < \epsilon \Leftrightarrow 5|x - 1| < \epsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\epsilon}{5} \Leftarrow 0 < |x - x_0| < \frac{\epsilon}{5}.$$

Παρατηρήστε ότι στο τέλος χρησιμοποιήσαμε μια αντίστροφη συνεπαγωγή. Θέτοντας, τώρα, $\delta = \frac{\epsilon}{5}$, προκύπτει από τα παραπάνω ότι

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Παράδειγμα 3.2. (Όριο της $f(x) = ax + b$) Θα γενικεύσουμε το προηγούμενο παράδειγμα, αποδεικνύοντας ότι

$$\lim_{x \to x_0} (ax + b) = L \triangleq ax_0 + b.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Έχουμε

$$|f(x) - L| < \epsilon \Leftrightarrow |ax + b - ax_0 - b| < \epsilon \Leftrightarrow |a||x - x_0| < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{\epsilon}{|a|} \Leftarrow 0 < |x - x_0| < \frac{\epsilon}{|a|}.$$

Στην τρίτη ισοδυναμία χρειάστηκε να διαιρέσουμε με το $|a|$, επομένως, υποθέτουμε πως $a \neq 0$, και θα αντιμετωπίσουμε την περίπτωση $a = 0$ αργότερα. Παρατηρήστε, επίσης, ότι στο τέλος χρησιμοποιήσαμε μια αντίστροφη συνεπαγωγή. Θέτοντας, τώρα, $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$, προκύπτει από τα παραπάνω ότι

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε για την περίπτωση $a \neq 0$.

Η περίπτωση $a = 0$ είναι τόσο απλή, που δημιουργεί σύγχυση. Παρατηρήστε ότι το $|f(x) - L| = |0x + b - 0x_0 - 0| = 0 < \epsilon$ για κάθε ϵ, και ανεξάρτητα από το που βρίσκεται το x. Επομένως, σε αυτή την ειδική περίπτωση μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε $\delta > 0$ ώστε να ικανοποιήσουμε τη συνεπαγωγή. Έστω, λοιπόν, κάποιο $\epsilon > 0$. Θέτουμε $\delta = 10^6$, παρατηρούμε πως

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta), \quad |f(x) - L| < \epsilon,$$

ή, εναλλακτικά,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε για κάθε a.

Στο επόμενο παράδειγμα, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $x = \min\{a, b\}$, που σημαίνει ότι ο αριθμός x είναι ο μικρότερος (κατ' αλγεβρική τιμή) αριθμός από τους a, b. Έτσι, για παράδειγμα έχουμε τα ακόλουθα:

$$1 = \min\{1, 5\}, \quad -5 = \min\{-5, 1\}, \quad 3 = \min\{3, 3\}.$$

Παρατηρήστε ότι αν $x = \min\{a, b\}$, τότε έχουμε $x \leq a$ και $x \leq b$. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την ιδιότητα επανειλημμένα στη συνέχεια.

Παράδειγμα 3.3. [★] (Όριο της $f(x) = \sqrt{x}$) Έστω $x_0 > 0$. Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Πρέπει να βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta), \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Καταρχάς, πρέπει $\delta \leq x_0$, διαφορετικά θα υπάρχουν κάποια $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ αρνητικά, για τα οποία δεν έχει νόημα η έκφραση $|f(x) - L| < \epsilon$.

Επιπλέον, παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} |f(x) - \sqrt{x_0}| < \epsilon \Leftrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \epsilon \Leftrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \times |\sqrt{x} + \sqrt{x_0}| < \epsilon |\sqrt{x} + \sqrt{x_0}| \\ \Leftrightarrow |x - x_0| < \epsilon(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Δυστυχώς δεν μπορούμε να θέσουμε $\delta = \epsilon|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|$, διότι το δ δεν πρέπει να είναι συνάρτηση του x. Παρατηρούμε όμως ότι πάντοτε έχουμε $(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}) \geq \sqrt{x_0}$. Μπορούμε, λοιπόν, να θέσουμε δ οποιονδήποτε αριθμό μικρότερο ή ίσο του $\epsilon\sqrt{x_0}$, και τότε θα έχουμε

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \epsilon(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})$$

Συνδυάζοντας τους παραπάνω περιορισμούς, θέτουμε, τελικά,

$$\delta = \min\left(x_0, \epsilon\sqrt{x_0}\right),$$

ώστε να εξασφαλίζεται ότι $\delta \leq x_0$ και $\delta \leq \epsilon\sqrt{x_0}$. Θα έχουμε, λοιπόν,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \epsilon\sqrt{x_0} \Rightarrow |x - x_0| < \epsilon(\sqrt{x_0} + \sqrt{x}) \Rightarrow |f(x) - \sqrt{x_0}| < \epsilon.$$

Η πρώτη συνεπαγωγή ισχύει λόγω της $\delta \leq \epsilon\sqrt{x_0}$. Στη δεύτερη συνεπαγωγή χρησιμοποιήσαμε το ότι $\delta \leq x_0$, άρα $x > x_0 - \delta \geq 0 \Rightarrow x > 0$. Η τελευταία συνεπαγωγή προκύπτει από την (3.5).

Επομένως, για κάθε $\epsilon > 0$ με το οποίο μας προκαλεί ο αντίπαλος, εμείς μπορούμε να αποκριθούμε με το $\delta = \min\{x_0, \epsilon|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|\}$, και τελικά το όριο υπάρχει.

Παράδειγμα 3.4. (Πλευρικό όριο της $f(x) = \sqrt{x}$ στο $x_0 = 0$) Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

Έστω, όπως πάντα, ότι μας δίνεται ένα $\epsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι

$$|f(x) - 0| < \epsilon \Leftrightarrow |\sqrt{x} - 0| < \epsilon \Leftrightarrow \sqrt{x} < \epsilon \Leftrightarrow 0 < x < \epsilon^2.$$

Θέτουμε λοιπόν $\delta = \epsilon^2 > 0$, και προκύπτει πως, για $x_0 = 0$,

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow 0 < x < \epsilon^2 \Rightarrow |f(x) - 0| < \epsilon,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Παράδειγμα 3.5. [★] (Όριο της $f(x) = x^2$) Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2.$$

Υποθέτουμε καταρχάς πως $x_0 = 0$. Παρατηρούμε ότι

$$|f(x) - L| < \epsilon \Leftrightarrow |x^2 - 0| < \epsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\epsilon}.$$

Θέτουμε, λοιπόν, $\delta = \sqrt{\epsilon}$, και παρατηρούμε ότι

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x| < \sqrt{\epsilon} \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Επομένως αποδείξαμε το ζητούμενο για $x_0 = 0$.

Έστω τώρα πως $x_0 > 0$. (Η απόδειξη για $x_0 < 0$ είναι ανάλογη και παραλείπεται. Δείτε την Άσκηση 3.4.) Έστω, λοιπόν, κάποιο $\epsilon > 0$. Έχουμε

$$|f(x) - x_0^2| < \epsilon \Leftrightarrow |x^2 - x_0^2| < \epsilon \Leftrightarrow |x - x_0||x + x_0| < \epsilon \Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{\epsilon}{|x + x_0|}. \tag{3.6}$$

Σε αυτό το σημείο, *δεν* μπορούμε να θέσουμε $\delta = \frac{\epsilon}{|x+x_0|}$, διότι το δ δεν επιτρέπεται να είναι συνάρτηση του x. Για να προχωρήσουμε, αρκεί να παρατηρήσουμε πως μπορούμε να ξεκινήσουμε από την τελευταία έκφραση (στην παραπάνω ακολουθία ισοδυναμιών) και να συνεχίσουμε με αντίστροφες συνεπαγωγές καταλήγοντας σε μια συνεπαγωγή της μορφής $0 < |x - x_0| < \delta$. Ουσιαστικά πρέπει να βρούμε ένα δ ώστε, αν ισχύει ότι $0 < |x - x_0| < \delta$, τότε ισχύει και η τελευταία έκφραση της (3.6), άρα και η πρώτη. Αρκεί, λοιπόν, να βρούμε ένα δ μικρότερο του $\frac{\epsilon}{|x+x_0|}$, διότι τότε

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \frac{\epsilon}{|x + x_0|}. \tag{3.7}$$

Το πρόβλημα είναι ότι το $\frac{\epsilon}{|x+x_0|}$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό, αρκεί να επιλέξουμε το x αρκούντως μεγάλο. Η λύση που δίνουμε είναι να επιλέξουμε

$$\delta = \min\left\{x_0, \frac{\epsilon}{3x_0}\right\},$$

δηλαδή όποιον από τους αριθμούς x_0, $\frac{\epsilon}{3x_0}$ τυγχάνει να είναι μικρότερος. Με αυτή την επιλογή μας, επιτυγχάνουμε δύο πράγματα. Πρώτον, επειδή το $\delta < x_0$, φράσσουμε το πόσο μεγάλο μπορεί να γίνει το $|x + x_0|$, άρα και το πόσο μικρό μπορεί να γίνει το $\frac{\epsilon}{|x+x_0|}$. Αυστηρά, έχουμε

$$\begin{aligned} 0 < |x - x_0| < \delta \le x_0 \Rightarrow 0 < |x - x_0| < x_0 \Rightarrow 0 < x < 2x_0 \\ \Rightarrow 0 < x + x_0 < 3x_0 \Rightarrow \frac{\epsilon}{|x + x_0|} > \frac{\epsilon}{3x_0}. \end{aligned}$$

Δεύτερον, έχοντας φράξει από κάτω το $\frac{\epsilon}{|x+x_0|}$ από το $\frac{\epsilon}{3x_0}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επιπλέον το ότι το δ είναι το πολύ ίσο με αυτό το φράγμα, και έτσι να γράψουμε τη συνεπαγωγή (3.7). Αναλυτικά,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow 0 < |x - x_0| < \frac{\epsilon}{3x_0} \Rightarrow |x - x_0| < \frac{\epsilon}{|x + x_0|} \Rightarrow |f(x) - x_0^2| < \epsilon,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Η τελευταία συνεπαγωγή προέκυψε από την ακολουθία ισοδυναμιών (3.6).

Παράδειγμα 3.6. (Πλευρικά όρια της συνάρτησης Heaviside) Θα αποδείξουμε ότι για τη συνάρτηση Heaviside του Σχήματος 3.1, έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} u(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0^-} u(x) = 0.$$

Όπως και στην περίπτωση του ορίου $\lim_{x\to x_0} b = b$, η απόδειξη είναι τόσο εύκολη που μπορεί να μπερδέψει. Ουσιαστικά η συνάρτηση παραμένει σταθερή σε οποιοδήποτε διάστημα αριστερά ή δεξιά του μηδενός, και επομένως το δ δεν είναι συνάρτηση του ϵ και του x_0. Οποιαδήποτε τιμή μάς κάνει! Δείχνουμε λοιπόν τους σχετικούς υπολογισμούς αναλυτικά. Έστω $\epsilon > 0$.

Για το πρώτο όριο, θέτουμε $\delta = 10^6$, ή $\delta = \pi$, ή όποια άλλη τιμή θέλουμε. Παρατηρούμε πως

$$\forall x \in (0, \delta), \quad |f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \epsilon,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Για το δεύτερο όριο, θέτουμε και πάλι $\delta = 10^6$, ή $\delta = \pi$, ή όποια άλλη τιμή θέλουμε. Παρατηρούμε πως

$$\forall x \in (-\delta, 0), \quad |f(x) - 1| = |0 - 0| = 0 < \epsilon,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Όπως φαίνεται και από τις σχεδόν ηρωικές μας προσπάθειες σε ορισμένα από τα παραπάνω παραδείγματα, προκειμένου να αποδείξουμε την ύπαρξη ορίων, ο ορισμός τους είναι εξαιρετικά δύσχρηστος. Στην επόμενη παράγραφο θα αποδείξουμε, με χρήση του ορισμού, ορισμένες ιδιότητες των ορίων που μας επιτρέπουν να προσδιορίσουμε την ύπαρξη ή μη του ορίου εξαιρετικά πολύπλοκων συναρτήσεων.

Σαν ένα τελευταίο σχόλιο, παρατηρήστε ότι σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα, ήταν δοσμένη η τιμή του ορίου. Στην πράξη, είναι συνήθως εύκολο να *μαντέψουμε* την τιμή του ορίου και, σε περίπτωση που το όριο δεν έχει δοθεί στην άσκηση που λύνουμε, αυτό θα πρέπει να είναι πάντα το πρώτο μας βήμα. Το δύσκολο είναι να *αποδείξουμε* ότι πράγματι το όριο είναι αυτό που έχουμε μαντέψει.

Ασκήσεις

3.3. [$\star\star$] (Υπολογισμός δ) Δείξτε γραφικά ότι τα δ που επιλέξαμε στα παραδείγματα αυτής της παραγράφου ικανοποιούν την σχετική συνθήκη του ορισμού του ορίου (3.1) ή (3.3) ή (3.4) (κατά περίπτωση).

3.4. (Όριο της x^2) Ολοκληρώστε το Παράδειγμα 3.5: Να δείξετε, αποκλειστικά με χρήση του ορισμού του ορίου, ότι $\lim_{x\to 0} x^2 = x_0^2$ όταν $x_0 < 0$.

3.5. [Π] (Όριο απολύτου) Να δείξετε, αποκλειστικά με χρήση του ορισμού του ορίου, ότι $\lim_{x\to 0} |x| = 0$.

3.6. [$\star$] (Όριο της $1/x$) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$, για $x_0 \neq 0$.

3.7. [$\star$] (Όριο της $\sqrt{f(x)}$) Δίνεται $f(x)$ με $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$. Να δείξετε ότι $\lim_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to x_0} f(x)}$.

3.8. **[$\star$] (Όριο της $\sqrt{f(x)}$)** Δίνεται $f(x)$ με $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) \geq 0$ σε μια γειτονιά του x_0. Να δείξετε ότι $\lim_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = 0$.

3.9. **(Ισοδυναμία ορίων)** Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} (f(x) - L) = 0$.

3.10. **(Ισοδυναμία ορίων στο** 0**)** Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

3.11. **(Ισοδυναμία ορίων)** Αποδείξτε ότι, για κάθε $x_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_1} f(x + x_0 - x_1) = L$.

3.12. **(Πλευρικό όριο άρτιας συνάρτησης)** Να δείξετε ότι αν η f είναι άρτια και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L$, τότε και $\lim_{x\to 0^-} f(x) = L$.

3.13. **(Πλευρικό όριο περιττής συνάρτησης)** Να δείξετε ότι αν η f είναι περιττή και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L$, τότε και $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -L$.

3.14. **[Σ/Λ, Π] (Υπαρξη ορίου)** Αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to 0} f(x^2)$.

3.15. **[Σ/Λ, Π] (Υπαρξη ορίου)** Αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x^2)$ τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

3.16. **[$\star\star$]** Να δείξετε ότι αν υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x^2)$ τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to 1} f(x)$. Χρησιμοποιήστε σύνθεση συναρτήσεων και την Πρόταση 4.6 Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με αυτό της Άσκησης 3.15. Πως εξηγείτε τη διαφοροποίηση;

3.3 Ιδιότητες Ορίου

3.3.1 Βασικές Ιδιότητες Ορίου

Μια βασική ιδιότητα του ορίου είναι ότι μια συνάρτηση δεν μπορεί να έχει πάνω από ένα όριο σε ένα σημείο x_0. Επομένως, μπορούμε να μιλάμε για *το* όριο της $f(x)$ στο x_0 και όχι για *ένα* όριο. Διαισθητικά, όταν μια συνάρτηση έχει ένα όριο, μπορούμε να φέρουμε *όλες* τις τιμές της συνάρτησης όσο κοντά θέλουμε στο όριο, αρκεί να περιοριστούμε σε τιμές του x αρκούντως κοντά στο x_0. Επομένως, δεν μπορούμε να φέρουμε *όλες* τις τιμές της συνάρτησης για ορίσματα γύρω από το x όσο κοντά θέλουμε σε δύο *διαφορετικούς* αριθμούς. Η απόδειξη της ιδιότητας είναι απλώς αποσαφήνιση αυτού του επιχειρήματος.

Πρόταση 3.1. ***(Μοναδικότητα ορίου)*** *Σε κάθε σημείο x_0 μια συνάρτηση f μπορεί να έχει το πολύ ένα όριο.*

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω πως η f έχει δύο ή περισσότερα όρια στο x_0. (Παρατηρήστε ότι αυτή είναι η άρνηση της δοσμένης πρότασης.) Έστω, λοιπόν, δύο από αυτά, L_1 και L_2, με $L_1 < L_2$, χωρίς βλάβη της γενικότητας. Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1, \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = L_2.$$

Έστω $\epsilon = \frac{L_2 - L_1}{2}$. Από τον ορισμό του πρώτου ορίου, θα υπάρχει δ_1 τέτοιο ώστε

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \epsilon = \frac{L_2 - L_1}{2} \Rightarrow f(x) - L_1 < \frac{L_2 - L_1}{2} \Rightarrow f(x) < \frac{L_1 + L_2}{2}.$$

Ομοίως, από τον ορισμό του δεύτερου ορίου θα υπάρχει δ_2 τέτοιο ώστε

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \epsilon = \frac{L_2 - L_1}{2} \Rightarrow f(x) - L_2 > \frac{L_1 - L_2}{2} \Rightarrow f(x) > \frac{L_1 + L_2}{2}.$$

Έστω τώρα $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ και κάποιο x για το οποίο $0 < |x - x_0| < \delta$. Τότε για αυτό το x θα ισχύει *και* το $0 < |x - x_0| < \delta_1$ *και* το $0 < |x - x_0| < \delta_2$, επομένως θα έχουμε *και* $f(x) < \frac{L_1+L_2}{2}$ *και* $f(x) > \frac{L_1+L_2}{2}$, που είναι άτοπο. ■

Βεβαιωθείτε ότι καταλάβατε τη λογική της απόδειξης, και όχι μόνο τα διαδοχικά βήματα. Ουσιαστικά, κάναμε το «αρκούντως κοντά» του διαισθητικού μας επιχειρήματος να σημαίνει «πιο κοντά στο ένα όριο από το άλλο». Παρατηρήστε ότι το σημείο που ισαπέχει από τα L_1 και L_2 είναι το $\frac{L_1+L_2}{2}$. Παρατηρήστε, επίσης, ότι θα μπορούσαμε να είχαμε επιλέξει και άλλες τιμές για το ϵ. Η μεγαλύτερη δυνατή τιμή για την οποία θα λειτουργούσε η απόδειξη είναι αυτή που επιλέξαμε.

Η επόμενη ιδιότητα μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε την ύπαρξη ορίων μέσω της ύπαρξης των αντίστοιχων πλευρικών, και αντίστροφα. Σύμφωνα με την ιδιότητα, το όριο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο υπάρχει και είναι ίσο με L, αν και μόνο αν υπάρχουν και τα δύο πλευρικά όρια, και είναι ίσα με L. Διαισθητικά η ιδιότητα είναι αναμενόμενη: οι τιμές της συνάρτησης μπορούν να βρεθούν αυθαίρετα κοντά στο L καθώς το x πλησιάζει το x_0, αν και μόνο αν μπορούν να βρεθούν αυθαίρετα κοντά στο L καθώς το x πλησιάζει το x_0 τόσο από τα αριστερά, όσο και από τα δεξιά. Υπενθυμίζουμε ότι το «ανν» είναι συντομογραφία του «αν και μόνο αν».

Πρόταση 3.2. ***(Κριτήριο πλευρικών ορίων)*** *Το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με L ανν τα όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ υπάρχουν και είναι και τα δύο ίσα με L.*

Απόδειξη: *(Ευθύ)* Έστω πως υπάρχει το όριο της συνάρτησης, και είναι ίσο με L. Θα αποδείξουμε ότι και το δεξί πλευρικό όριο της συνάρτησης είναι ίσο με L. (Η απόδειξη για το αριστερά πλευρικό όριο είναι παρόμοια και ζητείται στην Άσκηση 3.17.) Έστω λοιπόν κάποιο $\epsilon > 0$, για το οποίο πρέπει να βρούμε κάποιο $\delta > 0$ ώστε να ισχύει ο ορισμός του πλευρικού ορίου. Όμως, για αυτό το $\epsilon > 0$, από τον ορισμό του ορίου, που εξ υποθέσεως υπάρχει, ξέρουμε πως υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Όμως γνωρίζουμε πως

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Συνδυάζοντας τις συνεπαγωγές, προκύπτει

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon,$$

δηλαδή η συνεπαγωγή που πρέπει να ισχύει για τον ορισμό του ζητούμενου πλευρικού ορίου.

(Αντίστροφο) Έστω, τώρα, πως υπάρχουν τα πλευρικά όρια και είναι ίσα με L. Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει και το όριο, πρέπει για κάποιο $\epsilon > 0$ να βρούμε κάποιο $\delta > 0$ ώστε $|f(x) - L| < \epsilon$ όποτε $0 < |x - x_0| < \delta$. Έστω, λοιπόν, κάποιο $\epsilon > 0$. Από τον ορισμό των πλευρικών ορίων, ξέρουμε ότι υπάρχουν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$ τέτοια ώστε

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

και

$$x_0 - \delta_2 < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon,$$

αντιστοίχως. Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Έστω τώρα κάποιο x για το οποίο ισχύει $0 < |x - x_0| < \delta$. Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα, να έχουμε $x > x_0$ ή $x < x_0$. Στην πρώτη περίπτωση,

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow x_0 < x < x_0 + \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Στη δεύτερη περίπτωση,

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow x_0 - \delta_2 < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση θα ισχύει και το $|f(x) - L| < \epsilon$ και αποδείξαμε ότι $|f(x) - L| < \epsilon$ όποτε $0 < |x - x_0| < \delta$. ■

Οι αποδείξεις και των δύο σκελών βασίζονται σε μια συνηθισμένη και πολύ σημαντική μεθοδολογία: για να βρούμε το δ που χρειαζόμαστε για να αποδείξουμε τον ορισμό ενός ορίου, βασιζόμαστε στα δ που δίνουν άλλοι ορισμοί, που εξ υποθέσεως ισχύουν.

Παράδειγμα 3.7. (Συνάρτηση Heaviside) Από το Παράδειγμα 3.6 ξέρουμε ότι η συνάρτηση Heaviside $u(x)$ έχει μεν πλευρικά όρια στο 0, αυτά όμως διαφέρουν, επομένως η $u(x)$ δεν έχει όριο στο 0.

Η επόμενη ιδιότητα ίσως σε πρώτη ανάγνωση φαίνεται προφανής ή/και αχρείαστη, αλλά στην πραγματικότητα τη χρησιμοποιούμε αρκετά συχνά. Μας εγγυάται ότι, αν δύο συναρτήσεις διαφέρουν, γύρω από το x_0, μόνο στην τιμή που (ενδεχομένως) λαμβάνουν στο x_0, τότε τα όριά τους στο x_0 είναι ίσα.

Πρόταση 3.3. *(Ισες συναρτήσεις) Αν δύο συναρτήσεις f, g ταυτίζονται σε μια γειτονιά του x_0, εκτός ενδεχομένως του σημείου x_0, τότε*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = L.$$

Απόδειξη: Έστω $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ ένα σύνολο όπου $f(x) = g(x)$. Έστω επίσης πως $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Θα δείξουμε ότι και $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$. Έστω, λοιπόν, ένα $\epsilon > 0$. Πρέπει να βρούμε ένα δ για να ικανοποιήσουμε τον ορισμό του ορίου της $g(x)$. Από τον ορισμό του ορίου της $f(x)$, όμως, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, όποτε $0 < |x - x_0| < \delta$, να έχουμε και $|f(x) - L| < \epsilon$. Επιλέγουμε ένα νέο $\delta' = \min\{\delta, x_0 - a, b - x_0\}$. Ουσιαστικά, με αυτή την επιλογή του δ' εξασφαλίζουμε ότι

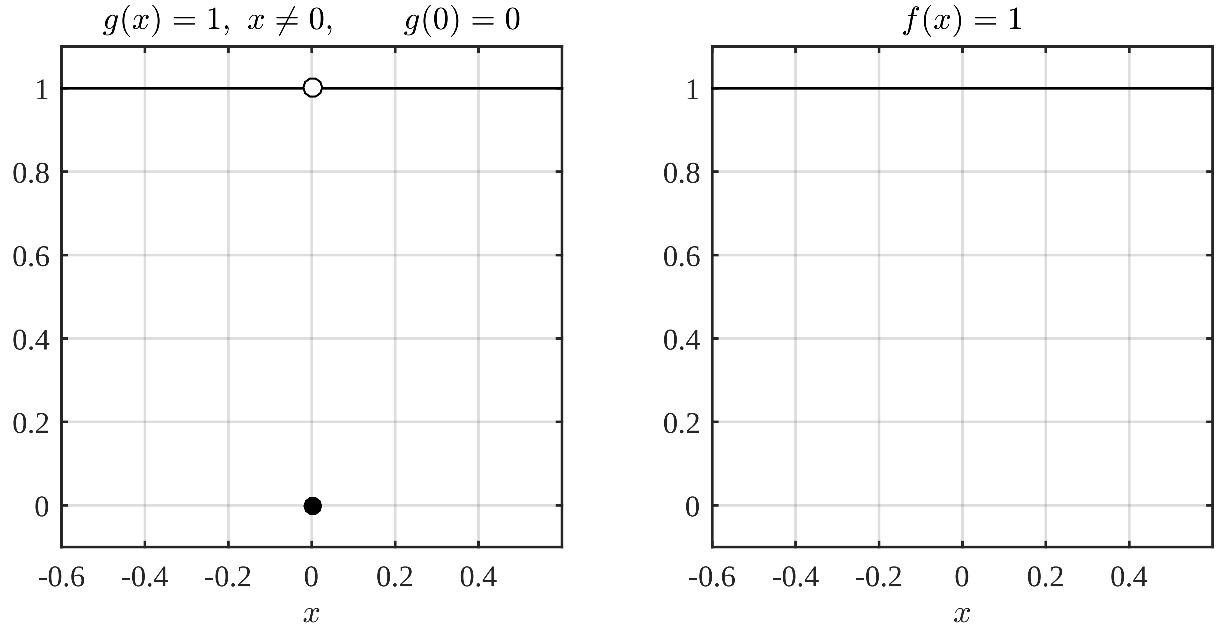
$$(x_0 - \delta', x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta') \subseteq (a, x_0) \cup (x_0, b).$$

Έστω λοιπόν ένα x με $0 < |x - x_0| < \delta'$. Πρώτον, επειδή $\delta' \leq \delta$, έχουμε ότι $|f(x) - L| < \epsilon$. Δεύτερον, επειδή το x θα ανήκει και στο $(a, x_0) \cup (x_0, b)$, θα έχουμε $g(x) = f(x)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, προκύπτει πως $|g(x) - L| < \epsilon$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

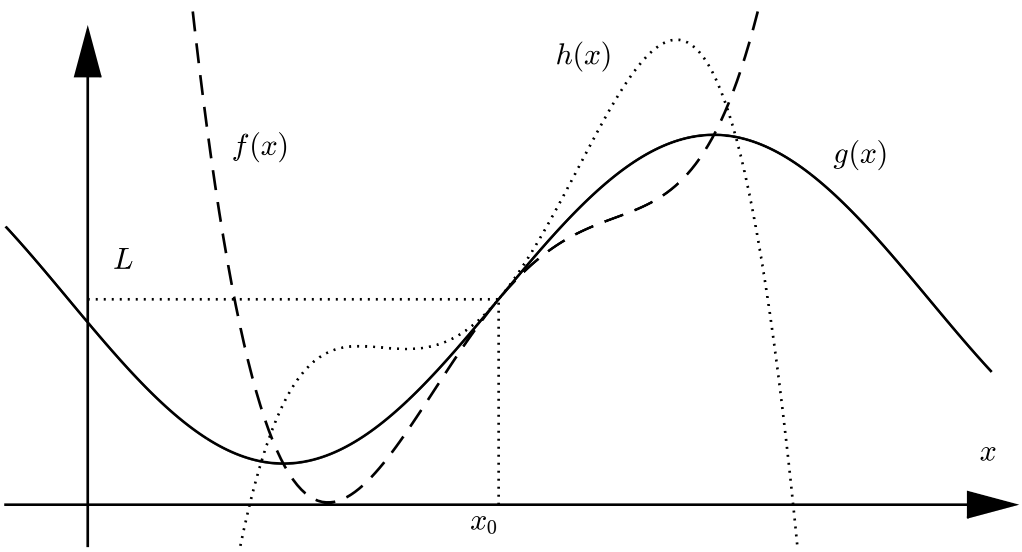
Παράδειγμα 3.8. Βάσει της Πρότασης 3.3, η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

στα αριστερά του Σχήματος 3.6 έχει όριο στο 0 το 1, όπως ακριβώς και η συνάρτηση $f(x) = 1$ στα δεξιά του σχήματος, αφού διαφέρουν μόνο στην τιμή που λαμβάνουν στο 0.



Σχήμα 3.6: Παράδειγμα 3.8: Οι δύο συναρτήσεις $g(x)$ και $f(x)$ έχουν όριο στο 0 το 1.



Σχήμα 3.7: Το Κριτήριο της Παρεμβολής.

Παράδειγμα 3.9. **(Το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}|x|$)** Θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}|x| = |x_0|$. Πράγματι, για $x_0 > 0$, η συνάρτηση $|x|$ ισούται με τη συνάρτηση x σε μια ανοικτή γειτονιά γύρω από το x_0, άρα $\lim\limits_{x\to x_0}|x| = \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0 = |x_0|$. Αντιστοίχως, για $x_0 < 0$, η συνάρτηση $|x|$ ισούται με τη συνάρτηση $-x$ σε μια ανοικτή γειτονιά γύρω από το x_0, άρα $\lim\limits_{x\to x_0}|x| = \lim\limits_{x\to x_0} -x = -x_0 = |x_0|$. Η περίπτωση $x_0 = 0$ έχει δοθεί ως άσκηση (Άσκηση 3.5).

Η επόμενη ιδιότητα μας εξασφαλίζει ότι αν μια δοσμένη συνάρτηση $g(x)$ φράσσεται κοντά σε κάποιο x_0 μεταξύ δύο συναρτήσεων $f(x)$ και $h(x)$ που έχουν κοινό όριο L στο x_0, τότε και η δοσμένη συνάρτηση $g(x)$ θα *πρέπει* να έχει το ίδιο όριο. Δείτε το Σχήμα 3.7. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, δεν χρειάζεται οι f, h να φράσσουν την g παντού. Αρκεί να τη φράσσουν σε μια γειτονιά γύρω από το x_0. Στα αγγλικά, η ιδιότητα αυτή ονομάζεται το Θεώρημα του Ζουλήγματος (Squeezing Theorem) ή Θεώρημα του Σάντουιτς (Sandwich Theorem). Στα ιταλικά, το θεώρημα είναι γνωστό το Θεώρημα των Δύο Χωροφυλάκων (due Carabinieri). Πράγματι, φανταστείτε δύο χωροφύλακες να συνοδεύουν ένα κρατούμενο, ο ένας από το ένα χέρι και ο άλλος από το άλλο. Αν οι χωροφύλακες περάσουν μέσα από μια πόρτα, θα έχει περάσει και ο κρατούμενος, αφού βρίσκεται συνεχώς ανάμεσά τους. Στα ελληνικά η ονομασία είναι πιο συμβατική. Η απόδειξή της είναι πολύ χρήσιμη στο να καταλάβουμε πώς δουλεύει ο ορισμός του ορίου.

Πρόταση 3.4. ***(Κριτήριο Παρεμβολής)*** *Έστω συναρτήσεις f, g, h τέτοιες ώστε*

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

για κάποιο $\delta > 0$. Έστω, επίσης, πως $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$. Τότε θα έχουμε και $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$.

Απόδειξη: Αφού $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, θα υπάρχει κάποιο $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \Rightarrow f(x) - L > -\epsilon \Rightarrow f(x) > L - \epsilon.$$

Παρομοίως, αφού $\lim_{x \to x_0} h(x) = L$, θα υπάρχει κάποιο $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \epsilon \Rightarrow h(x) - L < \epsilon \Rightarrow h(x) < L + \epsilon.$$

Έστω τώρα $\delta' = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$. Έστω επίσης x τέτοιο ώστε $0 < |x - x_0| < \delta'$. Σε αυτή την περίπτωση:

1. Θα έχουμε $0 < |x - x_0| < \delta$, άρα και $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
2. Θα έχουμε $0 < |x - x_0| < \delta_1$, άρα και $f(x) > L - \epsilon$.
3. Θα έχουμε $0 < |x - x_0| < \delta_2$, άρα και $h(x) < L + \epsilon$.

Άρα, θα έχουμε συνολικά

$$L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \Rightarrow |g(x) - L| < \epsilon,$$

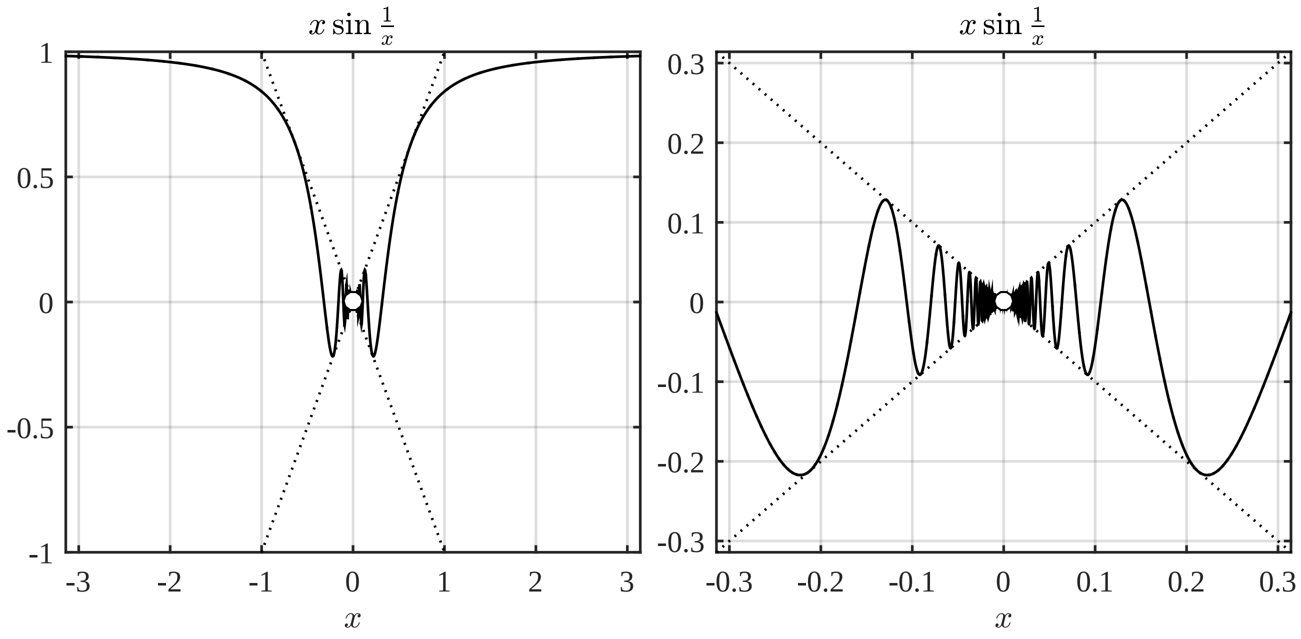
και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Παράδειγμα 3.10. **(Όριο της $x \sin \frac{1}{x}$ στο 0)** Θα δείξουμε ότι το όριο της $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ στο $x_0 = 0$ είναι το L. Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 3.8, η συνάρτηση είναι φραγμένη από κάτω και από άνω από τις $-|x|$ και $|x|$ αντίστοιχα. (Αν νομίζατε ότι το κάτω και το άνω φράγμα ήταν οι $-x$ και x αντίστοιχα, κάνατε λάθος. Βεβαιωθείτε ότι καταλάβατε γιατί.) Πράγματι, όταν $x > 0$, έχουμε

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow -x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x \Rightarrow -|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|.$$

Αν, όμως, $x < 0$, τότε

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow -x \geq x \sin \frac{1}{x} \geq x \Rightarrow |x| \geq x \sin \frac{1}{x} \geq -|x|.$$



Σχήμα 3.8: Η συνάρτηση $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ σε δύο διαφορετικές κλίμακες.

Επιπλέον, από την Άσκηση 3.5 έχουμε ότι

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0,$$

ενώ ανάλογα προκύπτει πως επίσης

$$\lim_{x \to 0} (-|x|) = 0.$$

Επομένως, εφαρμόζοντας το Κριτήριο της Παρεμβολής προκύπτει πως $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Παράδειγμα 3.11. (Όριο της $xf_D(x)$ στο 0) Έστω η συνάρτηση Dirichlet

$$f_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

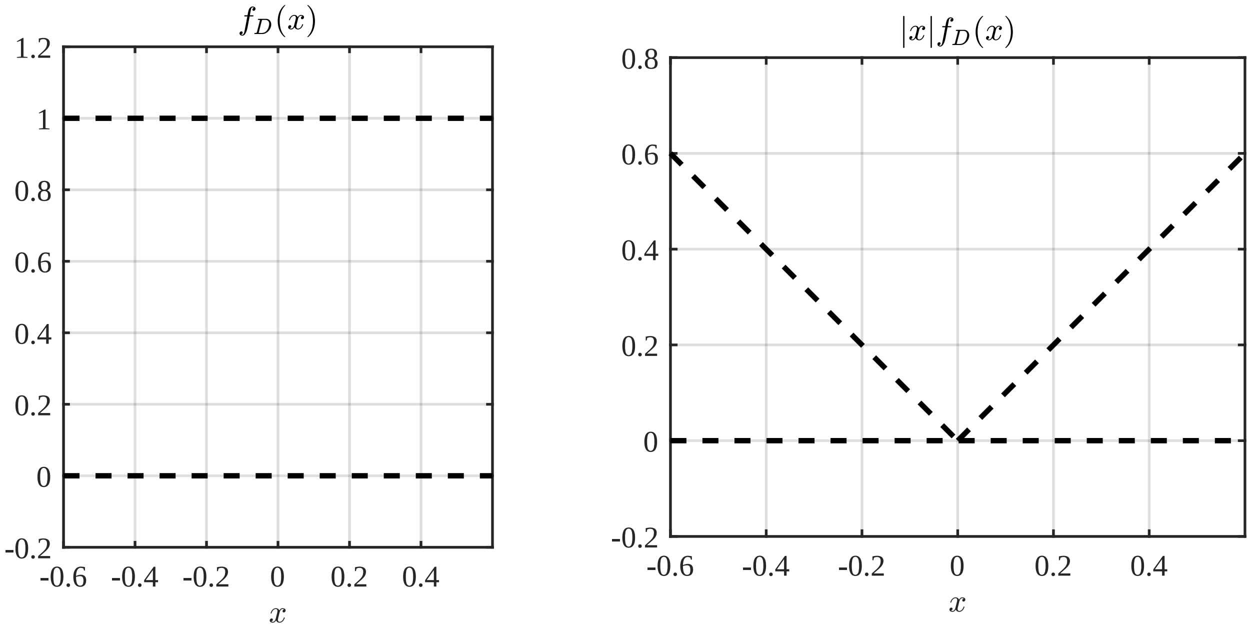
Το γράφημα της συγκεκριμένης συνάρτησης δεν μπορεί να σχεδιαστεί επακριβώς, φυσικά, λόγω των συνεχών αλμάτων που κάνει. Μπορούμε να τη φανταστούμε, κατά το δυνατόν, ως δύο νέφη σημείων, ένα επί του άξονα των x, και ένα επί της ευθείας $y = 1$. Δείτε το Σχήμα 3.9, αριστερά.

Με τρόπο ανάλογο αυτού του προηγούμενου παραδείγματος, μπορούμε να δείξουμε πως η $|x|f_D(x)$, που έχουμε σχεδιάσει δεξιά στο Σχήμα 3.9, έχει όριο στο $x_0 = 0$ το $L = 0$. Πράγματι, αφενός μεν $|x|f_D(x) \geq 0$, αφετέρου δε $|x|f_D(x) \leq |x|$. Επειδή έχουμε

$$\lim_{x \to 0} 0 = \lim_{x \to 0} |x| = 0,$$

θα έχουμε και $\lim_{x \to 0} |x|f_D(x) = 0$.

Τα παραπάνω δύο παραδείγματα αναδεικνύουν την μεγάλη χρησιμότητα και γενικότητα του Κριτηρίου του Παρεμβολής. *Δεν* μας ενδιαφέρει πόσο περίεργα συμπεριφέρεται μια συνάρτηση κοντά σε κάποιο x_0. Αν μπορεί να φραχτεί από πάνω και από κάτω από δύο συναρτήσεις που έχουν το ίδιο όριο,



Σχήμα 3.9: Η συνάρτηση Dirichlet $f_D(x)$ και η συνάρτηση $xf_D(x)$.

τελικά θα έχει *και* αυτή το ίδιο όριο.

Παράδειγμα 3.12. (Όριο της $\frac{\sin x}{x}$ στο 0) Θα δείξουμε πως για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ του Σχήματος 3.1 έχουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Πράγματι, από το πρώτο σκέλος της Πρότασης 2.2, έχουμε ότι για $x > 0$,

$$x\cos^2 x < \cos x \sin x < x \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Στην ίδια διπλή ανισότητα καταλήγουμε και για την περίπτωση $x < 0$, χρησιμοποιώντας το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 2.2. Επομένως, για κάθε $x \neq 0$ έχουμε

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x},$$

και από το Κριτήριο της Παρεμβολής, επειδή $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1$, προκύπτει το δοσμένο όριο.

3.3.2 Υπολογισμός Ορίων με Χρήση Ορίων Απλούστερων Αλγεβρικών Εκφράσεων

Η επόμενη ιδιότητα μας επιτρέπει να υπολογίζουμε όρια συναρτήσεων μέσω του υπολογισμού ορίων απλούστερων συναρτήσεων. Επίσης, η απόδειξή του, και ειδικά η απόδειξη του δεύτερου σκέλους, μας βοηθά να καταλάβουμε πώς δουλεύει ο μηχανισμός του ορισμού του ορίου.

Πρόταση 3.5. ***(Όριο γραμμικού συνδυασμού συναρτήσεων)***

1. *Αν υπάρχει το* $\lim_{x\to x_0} f(x)$*, τότε υπάρχει και το* $\lim_{x\to x_0} kf(x)$*, για κάθε* $k\in\mathbb{R}$*, και ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0} kf(x) = k\lim_{x\to x_0} f(x).$$

2. *Αν υπάρχουν τα* $\lim_{x\to x_0} f(x)$*,* $\lim_{x\to x_0} g(x)$ *και τότε υπάρχει και το* $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ *και ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x).$$

3. *Αν υπάρχουν τα* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ $\lim_{x\to x_0} g(x)$ *τότε υπάρχει και το* $\lim_{x\to x_0}(af(x)+bg(x))$*, για κάθε* $a,b\in\mathbb{R}$*, και μάλιστα ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0}(af(x)+bg(x)) = a\lim_{x\to x_0} f(x) + b\lim_{x\to x_0} g(x).$$

Απόδειξη:

1. Έστω $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\lim_{x\to x_0} kf(x) = kL$. Όταν $k=0$, η ισότητα γίνεται $\lim_{x\to x_0} 0 = 0$, που ξέρουμε ότι ισχύει, ως ειδική περίπτωση του Παραδείγματος 3.2. Θα δείξουμε την απόδειξη για $k>0$. (Η απόδειξη για $k<0$ είναι παρόμοια και ζητείται στην Άσκηση 3.18.)

   Έστω λοιπόν $\epsilon>0$. Πρέπει να βρούμε για αυτό το $\epsilon>0$ ένα $\delta>0$ ώστε

   $$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |kf(x)-kL|<\epsilon.$$

   Όμως,

   $$|kf(x)-kL|<\epsilon \Leftrightarrow |f(x)-L|<\frac{\epsilon}{k}.$$

   Μπορούμε, όμως, να βρούμε ένα $\delta>0$ ώστε, όποτε $0<|x-x_0|<\delta$, να έχουμε $|f(x)-L|<\frac{\epsilon}{k}$. Είναι το $\delta>0$ που μας δίνει ο ορισμός του $\lim_{x\to x_0} f(x)$ για το $\frac{\epsilon}{k}>0$. Επομένως, για το δοσμένο $\epsilon>0$, έχουμε ότι και $\epsilon' = \frac{\epsilon}{k}>0$, άρα για αυτό το $\epsilon'>0$ από τον ορισμό του $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε

   $$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon' = \frac{\epsilon}{k} \Rightarrow |kf(x)-kL|<\epsilon,$$

   και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Παρατηρήστε πως, για ακόμα μια φορά, χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό ενός δοσμένου ορίου για να δημιουργήσουμε τον ορισμό ενός άλλου, ζητούμενου, ορίου.

2. Έστω $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ και $\lim_{x\to x_0} f(x) = M$. Πρέπει αν δείξουμε ότι $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = L+M$.

   Παρατηρήστε ότι το άθροισμα $a+b$ δύο αριθμών a, b είναι εγγυημένο ότι θα απέχει από έναν αριθμό $L+M$ λιγότερο από ϵ, αν το a απέχει από το L λιγότερο από το $\epsilon/2$ και το b απέχει από το M λιγότερο από $\epsilon/2$. (Δείτε την Άσκηση 3.19.) Η απόδειξη βασίζεται σε αυτή την παρατήρηση.

   Έστω λοιπόν $\epsilon>0$. Άρα και το $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}>0$. Για αυτό το ϵ', υπάρχουν $\delta_1,\delta_2>0$, τέτοια ώστε

   $$0<|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon' = \frac{\epsilon}{2},$$

   και

   $$0<|x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-M|<\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}.$$

Θέτουμε, λοιπόν, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Τότε, αν $0 < |x - x_0| < \delta$, θα ισχύουν και οι δύο ανισότητες

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω κατά μέλη, και με χρήση της τριγωνικής ανισότητας $|x + y| \leq |x| + |y|$, έχουμε

$$|f(x) - L| + |g(x) - M| \leq \epsilon \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L + M)| < \epsilon,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

3. Για το τρίτο σκέλος δεν μας έχει μείνει πολλή δουλειά. Αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τα προηγούμενα:

$$\lim_{x\to x_0} (af(x) + bg(x)) = \lim_{x\to x_0} af(x) + \lim_{x\to x_0} bg(x) = a \lim_{x\to x_0} f(x) + b \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει λόγω του δεύτερου σκέλους, και η δεύτερη λόγω του πρώτου. Παρατηρήστε ότι η πρώτη ισότητα είναι σωστή μόνο εφόσον υπάρχουν και τα δύο όρια του δεξιού της μέλους. Όταν γράψαμε την ισότητα αναβάλαμε την απόδειξη της ύπαρξής τους για τη συνέχεια, κάνοντας ένα μικρό άλμα πίστης. Με αυτή την έννοια, θα ήταν πιο σωστό, αλλά λιγότερο διαισθητικό, να γράψουμε την παραπάνω ακολουθία εκφράσεων με την αντίθετη σειρά. ■

Η επόμενη ιδιότητα μας επιτρέπει να αυξήσουμε σημαντικά το εύρος των ορίων που μπορούμε να υπολογίσουμε. Η απόδειξή της ακολουθεί το πνεύμα της προηγούμενης και ζητείται στην Άσκηση 3.20.

Πρόταση 3.6. ***(Όριο γινομένου/πηλίκου συναρτήσεων)***

1. *Αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x))$ και ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x))(\lim_{x\to x_0} g(x)).$$

2. *Αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$, και επιπλέον $\lim g(x) \neq 0$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ και ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}.$$

3. *Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$, τότε για κάθε $n \in N^*$ υπάρχει και το $\lim_{x\to x_0} f^n(x)$ και ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0} f^n(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n.$$

4. *Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ με $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, υπάρχει και το $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f^n(x)}$ και ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f^n(x)} = \frac{1}{\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n}.$$

Παράδειγμα 3.13. Για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχουμε

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$

Πράγματι, έστω $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Τότε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} P(x) &= \lim_{x\to x_0} \big(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\big) \\
&= \lim_{x\to x_0} a_n x^n + \lim_{x\to x_0} a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \lim_{x\to x_0} a_1 x + \lim_{x\to x_0} a_0 \\
&= a_n \lim_{x\to x_0} x^n + a_{n-1} \lim_{x\to x_0} x^{n-1} + \cdots + a_1 \lim_{x\to x_0} x + \lim_{x\to x_0} a_0 \\
&= a_n (\lim_{x\to x_0} x)^n + a_{n-1} (\lim_{x\to x_0} x)^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 \\
&= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = P(x_0).
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.14. Επίσης, για κάθε ρητή συνάρτηση $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου τα $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα, ισχύει ότι

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = R(x_0) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)},$$

για κάθε x_0 στο πεδίο ορισμού της. Πράγματι,

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} P(x)}{\lim_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Αν συγκρίνετε τα διαθέσιμα εργαλεία για τον υπολογισμό ορίων που έχουμε τώρα σε σχέση με την αρχή αυτής της παραγράφου (όπου γνωρίζαμε μόνο τον ορισμό και ακόμα και ο υπολογισμός του ορίου $\lim_{x\to x_0} x^2$ ήταν κοπιώδης), θα δείτε ότι έχουμε προχωρήσει αρκετά. Για παράδειγμα, μπορούμε απλά να γράψουμε

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 + x^3 - 2x^2 + 7}{x^3 - x + 1} = \frac{1^4 + 1^3 - 2\times 1^2 + 7}{1^3 - 1 + 1} = 7.$$

Παράδειγμα 3.15. Μπορεί, πάντως, μια ρητή συνάρτηση να έχει όριο και εκτός του πεδίου ορισμού της. Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-5)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-5}{x-1} = 3.$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 3.3.

3.3.3 Μη Ύπαρξη Ορίου

Οι επόμενες δύο ιδιότητες μας επιτρέπουν να προσδιορίζουμε περιπτώσεις όπου δεν υπάρχουν όρια. Η πρώτη παρέχει ένα αναγκαίο και ικανό κριτήριο προκειμένου η συνάρτηση να μην έχει ένα συγκεκριμένο όριο L. Σύμφωνα με την ιδιότητα, η $f(x)$ δεν έχει όριο το L αν, όσο κοντά και αν είμαστε στο x_0, μπορούμε να βρούμε ένα x τέτοιο ώστε η απόσταση $|f(x) - L|$ να παραμένει μεγαλύτερη από ένα δοσμένο φράγμα.

Πρόταση 3.7. ***(Μη ύπαρξη ορίου** L)* *Μια συνάρτηση f δεν έχει όριο στο x_0 το L ανν υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $\delta > 0$, να υπάρχει κάποιο $x \in (x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$ για το οποίο $|f(x)-L| \geq \epsilon$.*

Απόδειξη: Η πρόταση είναι ουσιαστικά η άρνηση του ορισμού. Πράγματι, ο ορισμός λέει ότι το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ ανν

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta), \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Άρα, η συνάρτηση $f(x)$ δεν έχει όριο το L στο x_0 αν υπάρχει κάποιο $\epsilon > 0$ για το οποίο δεν ικανοποιείται η πρόταση

$$\exists \delta > 0 : \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta), \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Άρα, ισχύει η άρνηση αυτής της πρότασης, δηλαδή ότι για κάθε $\delta > 0$ δεν ισχύει η συνθήκη

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta), \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Για να μην ισχύει η συνθήκη, πρέπει να βρούμε ένα $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ για το οποίο δεν ισχύει η $|f(x) - L| < \epsilon$, δηλαδή $|f(x) - L| \geq \epsilon$. ■

Παράδειγμα 3.16. (Η $\sin\frac{1}{x}$ δεν έχει όριο στο 0**)** Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ του Σχήματος 3.2 δεν έχει όριο στο 0. Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω, λοιπόν, πως έχει όριο, το L. Υποθέτουμε πως $L \geq 0$. (Η περίπτωση $L < 0$ μπορεί να αντιμετωπιστεί ανάλογα, και ζητείται στην Άσκηση 3.21.) Επιλέγουμε το $\epsilon = \frac{1}{2}$. Παρατηρούμε ότι, αν υπάρχει το όριο, τότε θα υπάρχει κάποιο δ τέτοιο ώστε

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{2}.$$

Αυτό όμως είναι αδύνατο. Πράγματι, έστω ένα οποιοδήποτε $\delta > 0$. Μπορούμε να βρούμε έναν φυσικό αριθμό k αρκούντως μεγάλο ώστε $x = \frac{1}{2k\pi-\pi/2} \in (0, \delta)$. Για αυτό το x, όμως, $\sin\frac{1}{x} = \sin(2k\pi - \pi/2) = -1$, που έχει απόσταση από το L σίγουρα μεγαλύτερη από το $\epsilon = \frac{1}{2}$, αφού $L \geq 0$. Άρα, από την Πρόταση 3.7 προκύπτει ότι η $\sin\frac{1}{x}$ δεν έχει όριο στο 0. Παρατηρήστε πως το ϵ που επιλέξαμε δεν ήταν το μεγαλύτερο που θα μπορούσαμε να είχαμε θέσει.

Ας εξετάσουμε τώρα τη συνάρτηση $x\sin\frac{1}{x}$, που έχουμε σχεδιάσει στο Σχήμα 3.8. Το επιχείρημά μας πλέον δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Μάλιστα, στο Παράδειγμα 3.10 δείξαμε ότι αυτή η συνάρτηση έχει όριο στο 0.

Το ακόλουθο κριτήριο είναι πιο ισχυρό από το προηγούμενο, γιατί είναι ικανό για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση $f(x)$ όχι απλώς δεν έχει όριο το L (όπως δείχνει το προηγούμενο κριτήριο), αλλά δεν έχει *κανένα* όριο.

Πρόταση 3.8. ***(Μη ύπαρξη ορίου)*** *Μια συνάρτηση f δεν έχει όριο στο x_0 αν υπάρχουν αριθμοί A και B με $A < B$ τέτοιοι ώστε για κάθε $\delta > 0$ να μπορούμε να βρούμε ένα x_1 με $0 < |x_1 - x_0| < \delta$ και $f(x_1) \leq A$, και ένα x_2 με $0 < |x_2 - x_0| < \delta$ και $f(x_2) \geq B$.*

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω, λοιπόν, πως υπάρχει όριο L και $L \leq \frac{A+B}{2}$. (Η περίπτωση $L > \frac{A+B}{2}$ αντιμετωπίζεται ανάλογα και η απόδειξη ζητείται στην Άσκηση 3.22). Έστω το $\epsilon = \frac{B-A}{2}$. Θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x για το οποίο ισχύει $0 < |x-x_0| < \delta$ θα έχουμε και

$$|x - L| < \epsilon \Rightarrow x < \epsilon + L = \frac{B - A}{2} + L \leq \frac{B - A}{2} + \frac{A + B}{2} = B \Rightarrow x < B.$$

Αυτό, όμως, είναι άτοπο, διότι εξ υποθέσεως, για κάθε $\delta > 0$, άρα και για το συγκεκριμένο που επιλέξαμε, υπάρχει κάποιο x_2 με $f(x_2) \geq B$. ■

Παράδειγμα 3.17. (Συνάρτηση Dirichlet) Με εφαρμογή της Πρότασης 3.8 (με $A = 0$, $B = 1$, προκύπτει ότι η συνάρτηση f_D δεν έχει όριο για κανένα x_0!

Έστω τώρα πως πολλαπλασιάζουμε την f_D με την $|x|$, παίρνοντας έτσι την

$$|x|f_D(x) = \begin{cases} |x|, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή έχει επίσης σχεδιαστεί στο Σχήμα 3.9. Με εφαρμογή της Πρότασης 3.8 μπορούμε να δείξουμε πως η συνάρτηση αυτή δεν έχει όριο για κανένα $x_0 \neq 0$. Η πρόταση εφαρμόζεται εύκολα επιλέγοντας $A = 0$, $B = |x_0|$. Στην περίπτωση που $x_0 = 0$, όμως, η πρόταση δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Είδαμε, μάλιστα, στο Παράδειγμα 3.10, ότι το όριο υπάρχει και ισούται με το 0.

3.3.4 Πλευρικά Όρια

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάσαμε αρκετές από τις πιο σημαντικές ιδιότητες των ορίων. Όλες αυτές έχουν τις ανάλογές τους στην περίπτωση των *πλευρικών* ορίων. Αν τις καταγράφαμε και αυτές αναλυτικά, θα χρειαζόμασταν πολύ χώρο. Από δω και στο εξής, λοιπόν, θεωρούμε ότι όλες οι ιδιότητες που αναφέραμε ισχύουν και στις περιπτώσεις πλευρικών ορίων, με τις κατάλληλες τροποποιήσεις.

Ασκήσεις

3.17. (Όριο ⇒ πλευρικό όριο) Ολοκληρώστε την απόδειξη της Πρότασης 3.2, δείχνοντας ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

3.18. (Όριο γραμμικού συνδυασμού συναρτήσεων) Ολοκληρώστε το πρώτο σκέλος της απόδειξης της Πρότασης 3.5 για την περίπτωση $k < 0$.

3.19. Να δείξετε ότι αν ο $x \in \mathbb{R}$ απέχει από τον $X \in \mathbb{R}$ λιγότερο από d_1 και ο $y \in \mathbb{R}$ απέχει από τον $Y \in \mathbb{R}$ λιγότερο από d_2, τότε ο $x + y$ απέχει από τον $+$ λιγότερο από $d_1 + d_2$.

3.20. [⋆⋆] (Όριο γινομένου/πηλίκου συναρτήσεων) Αποδείξτε την Πρόταση 3.6.

3.21. Να ολοκληρώσετε το Παράδειγμα 3.16 εξετάζοντας αναλυτικά την περίπτωση $L < 0$.

3.22. (Μη ύπαρξη ορίου) Ολοκληρώστε την απόδειξη της Πρότασης 3.8 για την περίπτωση $L > (A + B)/2$.

3.23. [⋆] (Αλλαγή μεταβλητής) Έστω $a \neq 0$. Αποδείξτε ότι το όριο

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{h\to \frac{x_0 - b}{a}} f(ah + b)$$

και είναι πεπερασμένο. Χρησιμοποιήστε αποκλειστικά τον ορισμό του ορίου.

3.24. [Σ/Λ, Π] (Ύπαρξη ορίου) Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$, αλλά δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} g(x)$, τότε σίγουρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x))$.

3.25. [Σ/Λ, Π] (Ύπαρξη ορίου) Αν δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$, τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$

3.26. (Όριο ⇒ φράγμα) Έστω $\lim_{x\to x_0} f(x) = k > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ανοικτή γειτονιά (a,b) περί το x_0, δηλαδή $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < x_0 < b$, και *θετικός* $P \in \mathbb{R}_+^*$ τέτοια ώστε

$$x \in (a,b) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) > P,$$

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι πιο ισχυρό από το

$$x \in (a,b) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) > 0,$$

διότι στην πρώτη περίπτωση οι τιμές του x δεν μπορούν να πλησιάσουν αυθαίρετα κοντά στο 0. Διαισθητικά, η ιδιότητα μας λέει ότι αν σε κάποιο x_0 το όριο είναι θετικό, τότε υπάρχει μια γειτονιά γύρω από το x_0 στην οποία οι τιμές της συνάρτησης κρατιούνται μακρυά από το 0.

3.27. [Σ/Λ, Π] (Ύπαρξη ορίου) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ και $\lim_{x\to x_1} g(x) = x_0$, τότε $\lim_{x\to x_1} f(g(x_1)) = L$.

3.28. (Ύπαρξη ορίου) Να δείξετε ότι αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, $\lim_{x\to x_1} g(x) = x_0$, και $g(x) \neq x_0$ για κάθε x σε μια γειτονιά του x_1, τότε $\lim_{x\to x_1} f(g(x_1)) = L$.

3.29. (Όριο γινομένου) Γενικεύστε τα Παραδείγματα 3.10, 3.11. Συγκεκριμένα, δείξτε ότι αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και η $g(x_0)$ είναι φραγμένη σε μια ανοιχτή γειτονιά του x_0, τότε θα έχουμε και $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

3.30. [⋆] Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο $[a,b]$, τότε υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to b^-} f(x)$ και μάλιστα

$$f(a) \le \lim_{x\to a^+} f(x) \le \lim_{x\to b^-} f(x) \le f(b).$$

Κατόπιν, να δείξετε περιπτώσεις όπου κάθε μία από τις παραπάνω ανισότητες ισχύει είτε ως ισότητα είτε ως αυστηρή ανισότητα.

3.31. [⋆] Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο $[a,b]$, και $c \in (a,b)$, τότε υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to c^+} f(x)$, $\lim_{x\to c^-} f(x)$ και μάλιστα

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \le \lim_{x\to c^+} f(x)$$

Κατόπιν, να δείξετε περιπτώσεις όπου η παραπάνω ανισότητα ισχύει είτε ως ισότητα είτε ως αυστηρή ανισότητα.

3.32. (Όρια) Να υπολογίσετε το ακόλουθο όριο χρησιμοποιώντας αποκλειστικά ιδιότητες ορίων και γνωστά τριγωνομετρικά όρια.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x + \sin^2 x + \sin x}{x^3 + x^2 + x}.$$

3.4 Άλλα Είδη Ορίων

Το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$, που ορίσαμε στην Παράγραφο 3.1, δεν είναι το μοναδικό όριο που υπάρχει. Πράγματι, πέραν των περιπτώσεων συναρτήσεων που τείνουν πολύ κοντά σε έναν πραγματικό αριθμό L καθώς το x τείνει σε έναν άλλο πραγματικό αριθμό x_0, μας ενδιαφέρουν και περιπτώσεις συναρτήσεων που, για παράδειγμα, αποκτούν αυθαίρετα μεγάλες τιμές καθώς το x τείνει σε κάποιο x_0, ή που τείνουν μεν προς κάποιο L, αλλά μόνο όταν το x γίνεται αυθαίρετα μεγάλο.

Συνολικά, υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις για το πού μπορεί να τείνει η τιμή της μεταβλητής x_0:

1. Το x λαμβάνει τιμές αυθαίρετα κοντά σε κάποιο πραγματικό x_0. Τότε λέμε ότι το x τείνει στο x_0 και γράφουμε $x \to x_0$.
2. Το x λαμβάνει τιμές αυθαίρετα κοντά σε κάποιο πραγματικό x_0 και μεγαλύτερες από αυτό. Τότε λέμε ότι το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά και γράφουμε $x \to x_0^+$.
3. Το x λαμβάνει τιμές αυθαίρετα κοντά σε κάποιο πραγματικό x_0 και μικρότερες από αυτό. Τότε λέμε ότι το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά και γράφουμε $x \to x_0^-$.
4. Το x λαμβάνει τιμές αυθαίρετα μεγάλες. Τότε λέμε ότι το x τείνει στο ∞, και γράφουμε $x \to \infty$.
5. Το x λαμβάνει τιμές αυθαίρετα μικρές, δηλαδή αρνητικές και αυθαίρετα μεγάλες κατ' απόλυτο τιμή. Τότε λέμε ότι το x τείνει στο $-\infty$, και γράφουμε $x \to -\infty$.

Επίσης, υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις για το πού μπορεί να τείνει η τιμή μιας συνάρτησης f:

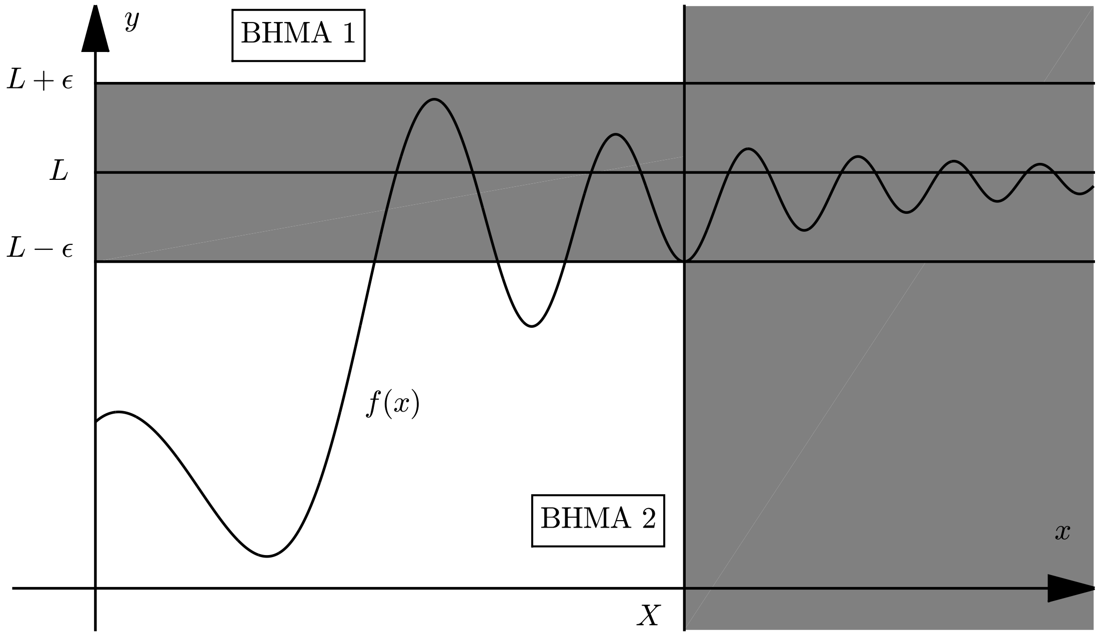
1. Η $f(x)$ λαμβάνει τιμές αυθαίρετα κοντά σε κάποιον πραγματικό αριθμό L. Τότε λέμε ότι τείνει στο L, και γράφουμε $f(x) \to L$.
2. Η $f(x)$ λαμβάνει τιμές αυθαίρετα μεγάλες. Τότε λέμε ότι η $f(x)$ τείνει στο ∞, και γράφουμε $f(x) \to \infty$.
3. Η $f(x)$ λαμβάνει τιμές αυθαίρετα μικρές, δηλαδή αρνητικές και αυθαίρετα μεγάλες κατ' απόλυτο τιμή. Τότε λέμε ότι η $f(x)$ τείνει στο $-\infty$, και γράφουμε $f(x) \to -\infty$.

Τα όρια για τα οποία $x \to \pm\infty$ καλούνται **όρια στο** $\pm\infty$, ενώ τα όρια για τα οποία $f(x) \to \pm\infty$ καλούνται **απειρίζοντα**.

Υπάρχουν, λοιπόν, $5 \times 3 = 15$ περιπτώσεις ορίων, εκ των οποίων έχουμε δει μόνο τις 3. Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να μελετήσουμε και τις υπόλοιπες. Ευτυχώς, όλα τα όρια έχουν ορισμούς που βασίζονται στην ίδια λογική. Αν, λοιπόν, καταλάβουμε έναν ορισμό, τους έχουμε καταλάβει όλους. Δεν χρειάζεται, επομένως, να δούμε όλους τους ορισμούς αναλυτικά, και θα περιοριστούμε σε κάποιες από τις 12 περιπτώσεις που απομένουν.

Ορισμός 3.3. ***(Όριο συνάρτησης στο*** $\pm\infty$***)***

1. *Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με $(a, \infty) \subseteq A$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Η f έχει όριο το L ή τείνει στο L καθώς το x τείνει στο ∞ αν*
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists X : \quad \forall x > X, \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$
Ισοδύναμα,
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists X : \quad x > X \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$
Γράφουμε $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ή, εναλλακτικά, ότι $f(x) \to L$ καθώς $x \to \infty$.
2. *Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με $(-\infty, a) \subseteq A$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Η f έχει όριο το L ή τείνει στο L καθώς το x τείνει στο $-\infty$ αν*
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists X : \quad \forall x < X, \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$
Ισοδύναμα,
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists X : \quad x < X \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$
Γράφουμε $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ ή, εναλλακτικά, ότι $f(x) \to L$ καθώς $x \to -\infty$.



Σχήμα 3.10: Γραφική απεικόνιση της εφαρμογής του ορισμού του ορίου $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. Σε αυτή την περίπτωση το όριο υπάρχει.

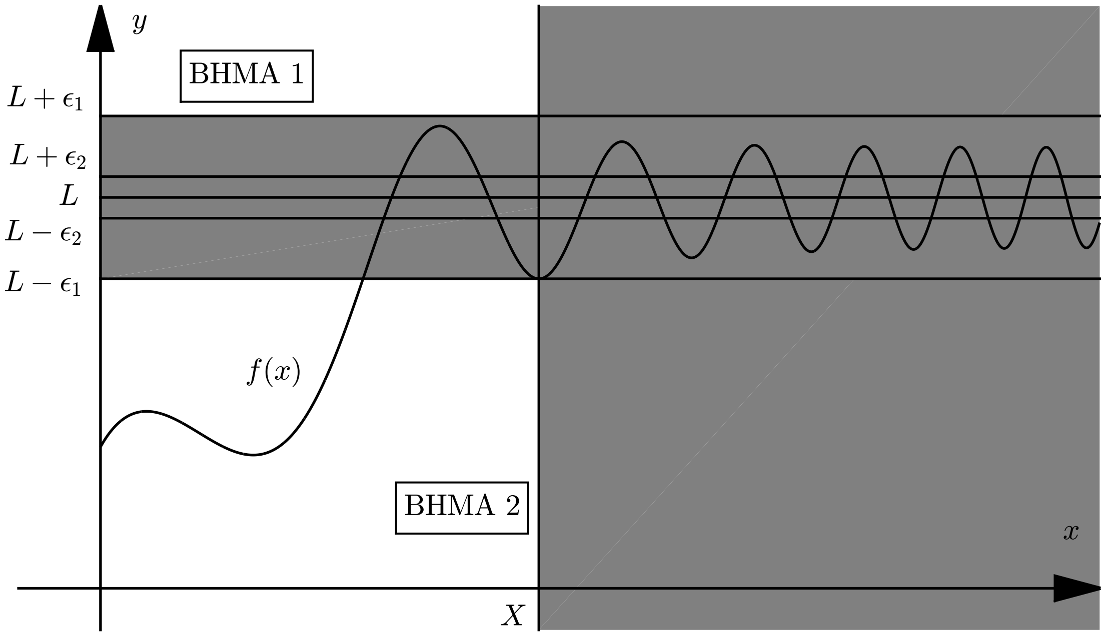
Παρατηρήστε ότι ο βασικός μηχανισμός του ορισμού του ορίου $\lim_{x\to x_0} f(x)$ διατηρείται και στα όρια $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. Απλώς, η απαίτηση $0 < |x - x_0| < \delta$ να είμαστε αρκούντως κοντά στο x_0 μετατρέπεται στην απαίτηση $x > X$ να είμαστε αρκούντως κοντά στο ∞, στην πρώτη περίπτωση, και στην απαίτηση $x < X$ να είμαστε αρκούντως κοντά στο $-\infty$, στη δεύτερη περίπτωση.

Και σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να κατανοήσουμε τον ορισμό του ορίου σαν ένα παιχνίδι που παίζουμε με έναν αντίπαλο. Δείτε το Σχήμα 3.10. Ο αντίπαλος μας προκαλεί με διάφορες μικρές τιμές του ϵ για τις οποίες πρέπει να εξασφαλίζεται ότι η συνάρτηση βρίσκεται εντός της λωρίδας $|f(x) - L| < \epsilon$. Εμείς πρέπει να αποκριθούμε βρίσκοντας ένα μεγάλο αριθμό X τέτοιο ώστε το γράφημα της συνάρτησης να είναι εντός της λωρίδας, αρκεί να βρίσκεται και δεξιά του ημιεπιπέδου $x > X$. Αν μπορούμε να κερδίζουμε πάντα, δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ να βρίσκουμε ένα X που να κερδίζει τον αντίπαλο, τότε η συνάρτηση έχει όριο.

Αν, από την άλλη, δεν μπορούμε να κερδίζουμε πάντα, τότε η συνάρτηση δεν έχει όριο. Στο Σχήμα 3.11 μπορείτε να δείτε μια τέτοια περίπτωση. Σε αυτή την περίπτωση, αν ο αντίπαλος μας προκαλέσει με ένα $\epsilon_1 > 0$ σχετικά μεγάλο, μπορούμε να βρούμε ένα X ώστε όποτε $x > X$ να έχουμε και $|f(x) - L| < \epsilon$. Αν όμως ο αντίπαλος επιλέξει το $\epsilon_2 > 0$ του σχήματος, τότε, λόγω της μη μειούμενης ταλάντωσης αυτής της συνάρτησης, δεν μπορούμε να αποκριθούμε με κάποιο X, και χάνουμε. Η συνάρτηση, λοιπόν, δεν έχει όριο.

Όπως και στην περίπτωση του ορίου στο x_0, όπου η επιλογή του δ δεν είναι μοναδική, έτσι και στην περίπτωσή μας η επιλογή του X δεν είναι μοναδική. Εκτός τετριμμένων περιπτώσεων, υπάρχει ένα ελάχιστο X που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το οποίο εξαρτάται από τη μορφή της f, το x_0 και το ϵ. *Δεν* πρέπει, πάντως, να εξαρτάται από το x. Παρατηρήστε ότι στα Σχήματα 3.10 και 3.11 τα X που επιλέξαμε ήταν τα ελάχιστα δυνατά, καθώς η συνάρτηση διέρχεται από το σημείο $(X, L - \epsilon)$.

Η μεθοδολογία με την οποία υπολογίζουμε όρια στο $\pm\infty$ με χρήση του ορισμού είναι παρόμοια με την περίπτωση ορίων καθώς $x \to x_0$. Δείτε τα επόμενα παραδείγματα:



Σχήμα 3.11: Γραφική απεικόνιση της εφαρμογής του ορισμού του ορίου $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$. Σε αυτή την περίπτωση το όριο δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 3.18. (Όριο στο άπειρο ρητής συνάρτησης) Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x+4} = 2.$$

Έστω, λοιπόν, ένα $\epsilon > 0$. Πρέπει να βρούμε ένα X έτσι ώστε αν $x > X$, να έχουμε και $|f(x)-2| < \epsilon$. Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, ξεκινάμε από αυτή την έκφραση και προσπαθούμε να δημιουργήσουμε μια συνθήκη της μορφής $x > X$, για κατάλληλα ορισμένο X:

$$|f(x)-2| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2x+1}{x+4} - 2\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2x+1-2x-8}{x+4}\right| < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow \frac{7}{|x+4|} < \epsilon \Leftrightarrow |x+4| > \frac{7}{\epsilon} \Leftarrow x > \frac{7}{\epsilon}.$$

Παρατηρήστε ότι στο τέλος χρησιμοποιήσαμε μια αντίστροφη συνεπαγωγή. Πράγματι, ο στόχος είναι να δημιουργήσουμε μια συνεπαγωγή προς την αντίθετη κατεύθυνση. Θέτοντας, λοιπόν, $X = \frac{7}{\epsilon}$, έχουμε τελικά ότι

$$x > X \Rightarrow |f(x)-2| < \epsilon,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Κάποιος μπορεί να αναρωτηθεί πώς γνωρίζαμε ότι το όριο ήταν το 2. Στις περισσότερες ασκήσεις αυτής της μορφής, συνήθως μπορούμε εύκολα να μαντέψουμε το όριο χρησιμοποιώντας τη διαίσθησή μας. Στην προκειμένη περίπτωση, όταν το x είναι πολύ μεγάλο, περιμένουμε ότι οι σταθεροί συντελεστές στον αριθμητή και τον παρονομαστή γίνονται πρακτικά ασήμαντοι, επομένως

$$\frac{2x+1}{x+4} \simeq \frac{2x}{x} = 2.$$

Παράδειγμα 3.19. Έστω $n \in \mathbb{N}^*$. Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Παρατηρούμε πως

$$|f(x) - 0| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x^n} - 0\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x|^n} < \epsilon \Leftrightarrow |x|^n > \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\epsilon^{1/n}} \Leftarrow x > \frac{1}{\epsilon^{1/n}}.$$

Θέτοντας, λοιπόν, $X = \frac{1}{\epsilon^{1/n}}$, έχουμε

$$x > X \Rightarrow |f(x) - 0| < \epsilon,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Προχωράμε σε έναν ακόμα ορισμό, που αφορά συναρτήσεις που λαμβάνουν πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές τιμές γύρω από ένα σημείο x_0.

Ορισμός 3.4. ***(Άπειρο όριο συνάρτησης)*** *Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, ορισμένη παντού σε μια ανοικτή γειτονιά του x_0, αλλά όχι απαραιτήτως και στο x_0.*

1. *Η f **έχει όριο το** ∞, ή **τείνει στο** ∞, καθώς το x **τείνει στο** x_0, και γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, αν*

$$\forall M, \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta), \quad f(x) > M.$$

Ισοδύναμα,

$$\forall M, \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ ή, εναλλακτικά, ότι $f(x) \to \infty$ καθώς $x \to x_0$.

2. *Η f **έχει όριο το** $-\infty$, ή **τείνει στο** $-\infty$, καθώς το x **τείνει στο** x_0, και γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, αν*

$$\forall M, \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta), \quad f(x) < M.$$

Ισοδύναμα,

$$\forall M, \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M.$$

Γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ ή, εναλλακτικά, ότι $f(x) \to -\infty$ καθώς $x \to x_0$.

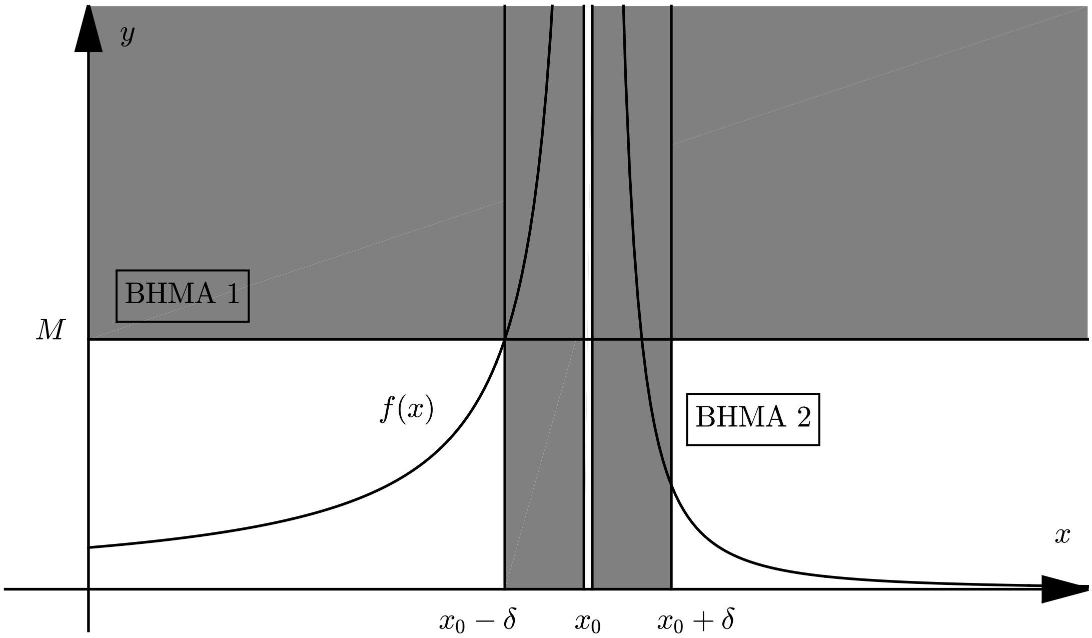
Αν καταλάβατε καλά τους προηγούμενους ορισμούς, αυτοί οι ορισμοί δεν κρύβουν κάτι ιδιαίτερα νέο. Όπως και στην περίπτωση των άλλων, μπορούμε να τους συνδέσουμε με ένα παιχνίδι εναντίον ενός αντιπάλου ο οποίος επιλέγει πρώτος ένα M, και εμείς πρέπει να αποκριθούμε με ένα $\delta > 0$. Δείτε το Σχήμα 3.12.

Παράδειγμα 3.20. Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{(x - x_0)^2} = \infty$$

με χρήση του ορισμού. Έστω, λοιπόν, ένα M. Αν το M είναι αρνητικό, τότε αφού η συνάρτηση είναι θετική, μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε δ και θα ισχύει η συνεπαγωγή. Έστω λοιπόν, $M > 0$. Τότε:

$$f(x) > M \Leftrightarrow \frac{1}{(x - x_0)^2} > M \Leftrightarrow (x - x_0)^2 < \frac{1}{M} \Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Leftarrow 0 < |x - x_0| < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$



Σχήμα 3.12: Γραφική απεικόνιση της εφαρμογής του ορισμού του ορίου $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

Θέτοντας, λοιπόν, $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$, προκύπτει πως

$$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Λόγω της ομοιότητας που έχουν οι ορισμοί των ορίων, οι ιδιότητες που είδαμε στην Παράγραφο 3.3 επεκτείνονται και σε όλα τα άλλα όρια, που έχουμε δει σε αυτή την παράγραφο, με κατάλληλες τροποποιήσεις κατά περίπτωση. Για παράδειγμα, για την περίπτωση ορίων στο ∞ ισχύει το Κριτήριο της Παρεμβολής (Πρόταση 3.4), όπως αποδεικνύουμε στις Ασκήσεις 3.33 και 3.34, όχι όμως και το κριτήριο των πλευρικών ορίων (Πρόταση 3.2), αφού δεν νοούνται πλευρικά όρια στο ∞. Σε κάθε περίπτωση, αν έχουμε αμφιβολία κατά πόσο μια ιδιότητα ισχύει ή όχι, μπορούμε να προσπαθήσουμε να την αποδείξουμε, ή να βρούμε αντιπαράδειγμα.

Παράδειγμα 3.21. Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos^2 x}{x}=0.$$

Πράγματι,

$$0\le\cos^2 x\le 1\Rightarrow 0\le\frac{\cos^2 x}{x}\le\frac{1}{x},$$

και το ζητούμενο προκύπτει με χρήση του Παραδείγματος 3.19 και του Κριτηρίου της Παρεμβολής. Εντελώς ανάλογα μπορούμε να δείξουμε και ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos^2 x}{x}=0.$$

Τέλος, μπορεί να δειχθεί ότι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos^2 x}{x}=\infty,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{\cos^2 x}{x}=-\infty.$$

Οι λεπτομέρειες ζητούνται στην Άσκηση 3.52.

Σύμβαση: *Προς αποφυγή σύγχυσης, στη συνέχεια, όταν θα αναφέρουμε ότι μια συνάρτηση έχει όριο καθώς $x \to x_0$, θα εννοείται ότι το όριο αυτό είναι πεπερασμένο, και ότι $x_0 \in \mathbb{R}$, δηλαδή $x_0 \neq \pm\infty$, εκτός αν αναφέρεται ρητώς κάτι διαφορετικό.*

Ασκήσεις

3.33. (Κριτήριο Παρεμβολής) Αποδείξτε το Κριτήριο της Παρεμβολής για την περίπτωση των ορίων του Ορισμού 3.3.

3.34. (Κριτήριο Παρεμβολής) Αποδείξτε το Κριτήριο της Παρεμβολής για την περίπτωση των ορίων του Ορισμού 3.4.

3.35. [Σ/Λ, Π] (Όριο αντίστροφης συνάρτησης) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, τότε και $\lim_{x\to x_0} 1/f(x) = 0$.

3.36. [Σ/Λ, Π] (Όριο αντίστροφης συνάρτησης) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, τότε και $\lim_{x\to x_0} 1/f(x) = \infty$.

3.37. [Σ/Λ, $\star$, Π] (Όριο αντίστροφης συνάρτησης) Αν $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = 0$, τότε και $\lim_{x\to x_0^+} 1/f(x) = \infty$.

3.38. (Όριο αντίστροφης θετικής συνάρτησης) Να δείξετε ότι αν $f(x) > 0$ σε μια ανοικτή γειτονιά γύρω από το x_0, εκτός ίσως του x_0, και $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, τότε και $\lim_{x\to x_0} 1/f(x) = \infty$.

3.39. [Π] (Αύξουσα φραγμένη άνω συνάρτηση) Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και φραγμένη άνω, τότε υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\infty} f(x)$. *(Υπόδειξη: πρέπει να χρησιμοποιήσετε την έννοια του supremum.)*

3.40. (Αύξουσα όχι φραγμένη άνω συνάρτηση) Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f : [a,\infty)$ είναι αύξουσα και όχι φραγμένη άνω, τότε $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

3.41. (Αύξουσα συγκλίνουσα συνάρτηση) Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και υπάρχει το πεπερασμένο όριο $L = \lim_{x\to\infty} f(x)$, τότε είναι φραγμένη άνω.

3.42. (Όριο στο $-\infty$) Κατ' αναλογία του Παραδείγματος 3.19, να δείξετε ότι για $n \in N^*$ έχουμε $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

3.43. ($\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$) Δώστε τον ορισμό του $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$ και εφαρμόστε τον για να δείξετε ότι

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

3.44. ($\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$) Δώστε τον ορισμό του $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$ και εφαρμόστε τον για να δείξετε ότι

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

3.45. ($\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$) Δώστε τον ορισμό του $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ και εφαρμόστε τον για να δείξετε ότι

$$\lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty.$$

3.46. ($\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$) Δώστε τον ορισμό του $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ και εφαρμόστε τον για να δείξετε ότι

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

3.47. ($\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$) Δώστε τον ορισμό του $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ και εφαρμόστε τον για να δείξετε ότι, για $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty.$$

3.48. ($\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$) Δώστε τον ορισμό του $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ και εφαρμόστε τον για να δείξετε ότι, για $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x\to\infty} (-x^n) = -\infty.$$

3.49. ($\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$) Δώστε τον ορισμό του $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ και εφαρμόστε τον για να δείξετε ότι όταν το $n \in \mathbb{N}^*$ είναι άρτιος,

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \infty.$$

3.50. ($\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$) Δώστε τον ορισμό του $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και εφαρμόστε τον για να δείξετε ότι όταν το $n \in \mathbb{N}^*$ είναι περιττός,

$$\lim_{x\to-\infty} (x^n) = -\infty.$$

3.51. (Όρια του $\cos x$ στο $\pm\infty$) Να δείξετε, με χρήση του ορισμού του ορίου και όχι με γραφικά επιχειρήματα, ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\infty} \cos x$, $\lim_{x\to-\infty} \cos x$.

3.52. Να δείξετε ότι

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos^2 x}{x} = \infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos^2 x}{x} = -\infty.$$

3.53. [$\star$] (Όρια ρητών συναρτήσεων στο ∞) Έστω ρητή συνάρτηση

$$R(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

με $n, k \in \mathbb{N}^*,\ a_n, b_k \neq 0$. Να δείξετε ότι

1. Όταν $n < k$ τότε $\lim_{x\to\infty} R(x) = 0$.
2. Όταν $n > k$ τότε το $\lim_{x\to\infty} R(x)$ ισούται με ∞ όταν το a_n/b_k είναι θετικό και με $-\infty$ όταν το a_n/b_k είναι αρνητικό.
3. Όταν $n = k$ τότε το $\lim_{x\to\infty} R(x) = a_n/b_k$.

3.54. (Αλλαγή μεταβλητής) Έστω συνάρτηση $f : (0, a) \to \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\lim_{x\to\infty} f(1/x) = L$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L$, είτε το $L \in \mathbb{R}$ είτε $L = \pm\infty$.

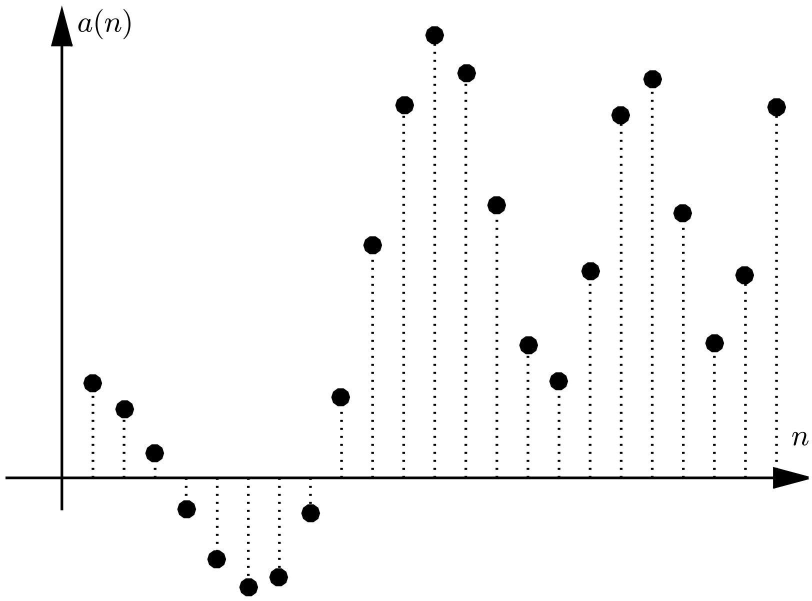
3.55. (Αλλαγή μεταβλητής) Να δείξετε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to-\infty} f(-x) = L$, όπου $L \in \mathbb{R}$ ή $L = \pm\infty$.

3.56. Να αποδείξετε, με χρήση του ορισμού του ορίου, ότι

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty,$$

και

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{-h}} = \infty.$$



Σχήμα 3.13: Γραφική απεικόνιση μιας ακολουθίας $a(n)$.

3.57. [Σ/Λ, Π] Αν $f(x) = g(x)h(x)$ και η $g(x)$ έχει όριο $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$ (πεπερασμένο ή άπειρο) αλλά η $h(x)$ δεν έχει όριο (πεπερασμένο ή άπειρο) στο x_0, τότε ούτε και η $f(x)$ έχει όριο στο x_0.

3.58. Να δείξετε ότι αν $f(x) = g(x)h(x)$ και η $g(x)$ έχει όριο $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$, με $L \in \mathbb{R} - \{0\}$, αλλά η $h(x)$ δεν έχει όριο (πεπερασμένο ή άπειρο) στο x_0, τότε ούτε και η $f(x)$ έχει όριο (πεπερασμένο ή άπειρο) στο x_0.

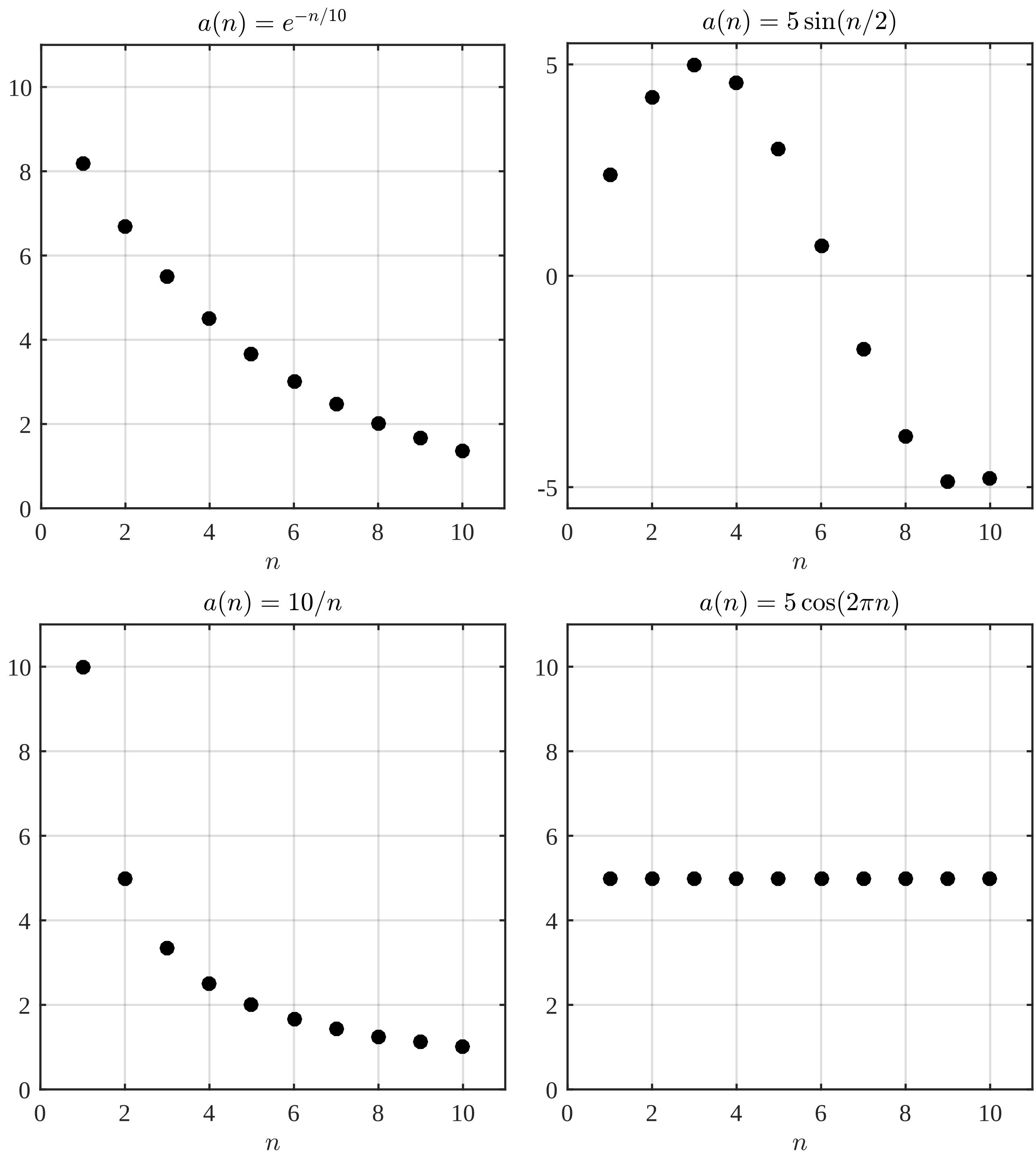
3.5 Όρια Ακολουθιών

Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο αυτό με μια σύντομη αναφορά στα όρια ακολουθιών.

Ορισμός 3.5. ***(Όριο ακολουθίας)*** *Κάθε συνάρτηση $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ καλείται* ***ακολουθία***. *Συμβολίζεται ως $a(n)$, $\{a_n\}$ ή απλά a_n.*

Επομένως οι ακολουθίες είναι απλώς συναρτήσεις με πεδίο ορισμού τους θετικούς φυσικούς. Όμως ο πιο απλός τρόπος για να τις σκεφτόμαστε είναι, όπως λέει και η λέξη, ως ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Επειδή ακριβώς το πεδίο ορισμού τους είναι το $\mathbb{N}^*$, δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε κάποιο γράφημα για αυτές που να είναι συνεχής γραμμή, αφού αυτή αναγκαστικά θα πρέπει να περνά από τιμές του x για τις οποίες δεν ορίζεται η $a(x)$. Ένας απλός τρόπος να τις απεικονίσουμε γραφικά είναι ως ακολουθίες από σημεία $(n, a(n))$. Δείτε το Σχήμα 3.13. Δείτε επίσης το Σχήμα 3.14 όπου έχουμε σχεδιάσει μερικά παραδείγματα ακολουθιών. Βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε γιατί καθεμία από τις 4 ακολουθίες απεικονίζεται με τον τρόπο που απεικονίζεται.

Οι ακολουθίες είναι πολύ χρήσιμες στα Μαθηματικά γιατί μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως δομικό στοιχείο πιο πολύπλοκων εννοιών. Για παράδειγμα, ένας τρόπος να ορίσουμε το όριο συναρτήσεων (που δεν ακολουθήσαμε εδώ) είναι μέσω του ορίου ακολουθιών. Πέραν του θεωρητικού τους ενδιαφέροντος, οι ακολουθίες είναι και από μόνες τους χρήσιμες. Για παράδειγμα, τα ακόλουθα μπορούν να μοντελοποιηθούν ως ακολουθίες:



Σχήμα 3.14: Παραδείγματα ακολουθιών.

1. Η τιμή στην οποία κλείνει το χρηματιστήριο κάθε μέρα. Εδώ η ανεξάρτητη μεταβλητή n είναι το πλήθος των ημερών από τότε που άνοιξε το χρηματιστήριο.
2. Οι διαδοχικοί βαθμοί που παίρνει ένας φοιτητής στα μαθήματα που δίνει. Εδώ η ανεξάρτητη μεταβλητή n είναι η φορά που συμμετέχει ο φοιτητής σε εξετάσεις. Υποθέτουμε, βέβαια, ότι ο φοιτητής δίνει το μάθημα για πάντα, ώστε το πεδίο ορισμού να είναι το N^* και όχι κάποιο υποσύνολο του. (Η υπόθεση έχει επαληθευτεί εμπειρικά σε πολλές περιπτώσεις.)
3. Οι διαδοχικοί αριθμοί επιτυχόντων στις εξετάσεις ενός μαθήματος. Εδώ η ανεξάρτητη μεταβλητή n είναι το πλήθος των φορών που εξετάστηκε ένα μάθημα.
4. Ο χρόνος που χρειάζεται να τρέξει ένας αλγόριθμος για να λύσει ένα πρόβλημα (π.χ. την ταξινόμηση των αριθμών μιας λίστας) αν θεωρήσουμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή n το μέγεθος του προβλήματος (π.χ. το πλήθος των αριθμών στη λίστα.)
5. Όλα τα σήματα (ηχητικά, οπτικά, κ.ο.κ.) τα οποία αποθηκεύουν και επεξεργάζονται ψηφιακές συσκευές είναι ακολουθίες που συνήθως δημιουργούνται από τη δειγματοληψία μιας συνάρτησης. Περισσότερα επί του θέματος σε μαθήματα επεξεργασίας σήματος.

Οι ακολουθίες, όπως και οι άλλες συναρτήσεις, έχουν και αυτές όρια. Επειδή όμως το πεδίο ορισμού τους είναι οι θετικοί φυσικοί, δεν έχει νόημα να εξετάσουμε την περίπτωση το n να τείνει στο $-\infty$, αφού η μικρότερη τιμή όπου ορίζεται μια ακολουθία το $n = 1$. (Θα μπορούσαμε, πάντως, να ορίσουμε ακολουθίες με πεδίο ορισμού τους ακέραιους, αλλά δεν θα το κάνουμε εδώ.) Επίσης δεν έχει νόημα να εξετάσουμε το όριο μιας ακολουθίας καθώς το n τείνει σε κάποιο n_0. Οι πλησιέστερες τιμές στο n_0 είναι οι $n_0 - 1$ και $n_0 + 1$, χωρίς να μπορούμε να πλησιάσουμε αυθαίρετα κοντά στο n_0 μένοντας στο πεδίο ορισμού. Τα πράγματα, λοιπόν, είναι πιο απλά· υπάρχουν μόνο τα ακόλουθα τρία όρια:

Ορισμός 3.6. ***(Όριο ακολουθίας)***

1. *Έστω $L \in \mathbb{R}$. Μια ακολουθία $a(n)$ **έχει όριο το** L ή **τείνει στο** L ή **συγκλίνει στο** L, καλείται **συγκλίνουσα**, και γράφουμε $\lim_{n\to\infty} a(n) = L$, αν*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}^* : \quad \forall n > N_0, \quad |a(n) - L| < \epsilon.$$

Ισοδύναμα:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}^* : \quad n > N_0 \Rightarrow |a(n) - L| < \epsilon.$$

*Αν η $a(n)$ δεν είναι συγκλίνουσα, καλείται **αποκλίνουσα**.*

2. *Μια ακολουθία $a(n)$ **έχει όριο το** ∞ ή **τείνει στο** ∞ και γράφουμε $\lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$, αν*

$$\forall M, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}^* : \quad \forall n > N_0, \quad a(n) > M.$$

Ισοδύναμα:

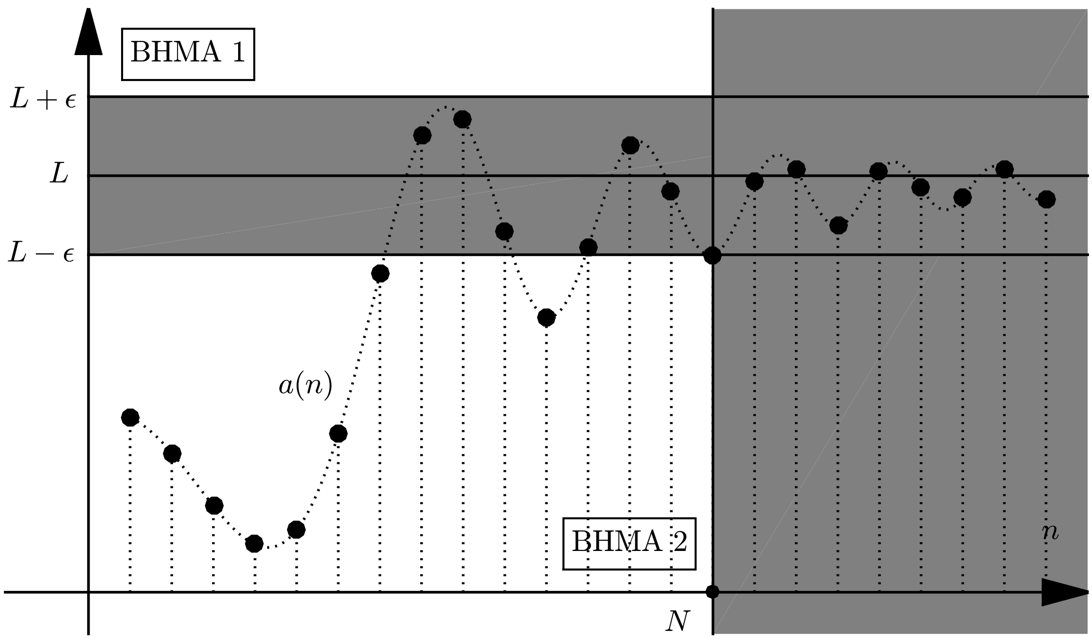
$$\forall M, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}^* : \quad n > N_0 \Rightarrow a(n) > M.$$

3. *Μια ακολουθία $a(n)$ **έχει όριο το** $-\infty$ ή **τείνει στο** $-\infty$ και γράφουμε $\lim_{n\to\infty} a(n) = -\infty$, αν*

$$\forall M, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}^* : \quad \forall n > N_0, \quad a(n) < M.$$

Ισοδύναμα:

$$\forall M, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}^* : \quad n > N_0 \Rightarrow a(n) < M.$$



Σχήμα 3.15: Γραφική απεικόνιση του ορισμού του ορίου $\lim_{n\to\infty} a(n) = L$.

Σύμβαση: *Όταν θα λέμε ότι μια ακολουθία έχει όριο, χωρίς να διευκρινίζουμε ποιο είναι αυτό, θα εννοούμε ότι έχει* πεπερασμένο *όριο, δηλαδή θα ισχύει η πρώτη από τις τρεις περιπτώσεις του ορισμού, εκτός αν δίνουμε κάποια διαφορετική διευκρίνιση.*

Με λόγια, η πρώτη περίπτωση του ορισμού σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε κάποιο N_0 ώστε όποτε $n > N_0$, να εξασφαλίζεται ότι $|f(x) - L| < \epsilon$. Δηλαδή, μπορούμε να κάνουμε την ακολουθία να είναι όσο κοντά θέλουμε στο L (δηλαδή $|a(n) - L| < \epsilon$ για οσοδήποτε μικρό $\epsilon > 0$), αρκεί να επιλέξουμε αρκούντως μεγάλα n (δηλαδή $n > N_0$ για αρκούντως μεγάλο N_0). Όπως και με τα όρια των συναρτήσεων, μπορούμε να φανταστούμε την εφαρμογή του ορισμού ως ένα παιχνίδι εναντίον ενός αντιπάλου. Στο πρώτο βήμα, ο αντίπαλός μας επιλέγει κάποιο $\epsilon > 0$, και στο δεύτερο βήμα πρέπει να αποκριθούμε με κάποιο N_0 προκειμένου να ισχύει η συνεπαγωγή του ορισμού. Δείτε το Σχήμα 3.15 για μια περίπτωση ακολουθίας που έχει όριο. Μπορείτε να φανταστείτε τι αντίστοιχα συμβαίνει αν προσπαθούμε να εφαρμόσουμε τον ορισμό στην περίπτωση μιας ακολουθίας που δεν έχει όριο.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ερμηνεύσουμε και τις άλλες δύο περιπτώσεις του Ορισμού 3.6.

Παράδειγμα 3.22. Θα δείξουμε με χρήση του ορισμού ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Έχουμε

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon^2 \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon^2}.$$

Θέτουμε λοιπόν $N_0 = \lfloor \frac{1}{\epsilon^2} \rfloor + 1$, όπου με $\lfloor x \rfloor$ συμβολίζουμε το **ακέραιο μέρος** του x, δηλαδή τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος του x. Επομένως,

$$n > N_0 \Rightarrow n > \lfloor \frac{1}{\epsilon^2} \rfloor + 1 \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon^2} \Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \epsilon,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Τα όρια ακολουθιών έχουν όλες τις ιδιότητες των ορίων συναρτήσεων, όπως τις έχουμε δει σε προηγούμενες παραγράφους, κατάλληλα τροποποιημένες κατά περίπτωση και τις οποίες από εδώ και πέρα μπορούμε να χρησιμοποιούμε. Επομένως, δεν εμφανίζουν κάποια ιδιαιτερότητα στο χειρισμό τους. Στο επόμενο παράδειγμα χρησιμοποιούμε το Κριτήριο της Παρεμβολής:

Παράδειγμα 3.23. Θα δείξουμε ότι
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0.$$
Πράγματι,
$$-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$
και το ζητούμενο προκύπτει με χρήση του Παραδείγματος 3.22 και του Κριτηρίου της Παρεμβολής.

Επιπλέον, λόγω της ακόλουθης πρότασης, πολλά προβλήματα υπολογισμού ορίων ακολουθιών ανάγονται εύκολα σε προβλήματα υπολογισμού ορίων συναρτήσεων.

Πρόταση 3.9. ***(Όριο συνάρτησης $\Rightarrow$ όριο ακολουθίας)*** *Έστω $f(x) : [1,\infty) \Rightarrow \mathbb{R}$. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, τότε υπάρχει και το $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ και είναι ίσο με το $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Η ιδιότητα ισχύει είτε το όριο είναι πεπερασμένο, είτε το $\pm\infty$.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε την απόδειξη για την περίπτωση που το όριο $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ είναι πεπερασμένο. Δείτε την Άσκηση 3.59 για την περίπτωση που το όριο είναι $\pm\infty$.

Έστω $\epsilon > 0$. Από την ύπαρξη του ορίου υπάρχει κάποιο X τέτοιο ώστε
$$x > X \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$
Θέτουμε $N_0 = \lfloor X \rfloor + 1$. Επομένως,
$$n > N_0 \Rightarrow n > X \Rightarrow |f(n) - L| < \epsilon$$
και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Επομένως, *όλα* τα όρια που έχουμε υπολογίσει μέχρι τώρα στα οποία $x \to \infty$ μας δίνουν και αντίστοιχα όρια για $n \to \infty$.

Ασκήσεις

3.59. (Όριο συνάρτησης $\Rightarrow$ όριο ακολουθίας) Αποδείξτε την Πρόταση 3.9 για την περίπτωση που $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$.

3.60. [Σ/Λ, Π] (Όριο ακολουθίας $\Rightarrow$ όριο συνάρτησης) Έστω $f(x) : [1,\infty) \Rightarrow \mathbb{R}$. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$, τότε υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ και είναι ίσο με το $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$. Η ιδιότητα ισχύει είτε το όριο είναι πεπερασμένο, είτε το $\pm\infty$.

3.61. (Αύξουσα και φραγμένη άνω ακολουθία) Να δείξετε ότι αν μια ακολουθία $a(n)$ είναι αύξουσα και φραγμένη άνω, τότε υπάρχει το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} a(n)$. *(Υπόδειξη: πρέπει να χρησιμοποιήσετε την έννοια του supremum.)*

3.62. (Αύξουσα και μη φραγμένη άνω ακολουθία) Να δείξετε ότι αν μια ακολουθία $a(n)$ είναι αύξουσα και μη φραγμένη άνω, τότε $\lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$. *(Υπόδειξη: πρέπει να χρησιμοποιήσετε την έννοια του supremum.)*

3.63. (Σύγκλιση $\Rightarrow$ φράγμα) Να δείξετε ότι αν μια ακολουθία $a(n)$ έχει πεπερασμένο όριο $\lim_{n\to\infty} a(n)$, τότε είναι φραγμένη.

3.64. (Αύξουσες ακολουθίες) Να δείξετε ότι αν μια ακολουθία είναι αύξουσα, τότε είτε έχει πεπερασμένο όριο L είτε τείνει στο ∞.

3.65. (Φθίνουσες ακολουθίες) Να δείξετε ότι αν μια ακολουθία είναι φθίνουσα, τότε είτε έχει πεπερασμένο όριο L είτε τείνει στο $-\infty$.

3.66. (Ισοδύναμα όρια) Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty} a(n) = L \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a(n) - L) = 0$.

3.67. (Όριο ακολουθίας με φραγμένους όρους) Έστω ακολουθία $a(n)$ με $a(n) \geq K$ όπου $K \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} a(n)$, τότε πρέπει $\lim_{n\to\infty} a(n) \geq K$.

3.68. (Ακολουθίες που συγκλίνουν στο supremum) Έστω μη κενό φραγμένο σύνολο A με supremum $\sup A$. Να δείξετε ότι υπάρχουν ακολουθίες $a(n) \to \sup A$ με $a(n) \in A$ για κάθε n και $b(n) \to \sup A$ με $b(n) \notin A$ για κάθε n.

3.69. (Φραγμένη κάτω ακολουθία) Έστω ακολουθίες $a(n)$ και $b(n)$ τέτοιες ώστε $a(n) \geq b(n)$ για κάθε $n \geq N$, όπου η σταθερά $N \in \mathbb{N}^*$. Δίνεται, επίσης, ότι $\lim_{n\to\infty} b(n) = \infty$. Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$.

3.70. Έστω $L \in \mathbb{R}$ ή $L = \pm\infty$, και $K \in \mathbb{N}^*$. Να δείξετε ότι το όριο $\lim_{n\to\infty} a(n)$ υπάρχει και είναι ίσο με L αν και μόνο αν το όριο $\lim_{n\to\infty} a(n+K)$ υπάρχει και είναι ίσο με L.

3.71. (Σύγκλιση ακολουθίας $\Rightarrow$ σύγκλιση μέσου όρου) Έστω ακολουθία $b(n)$ με $\lim_{n\to\infty} b(n) = l \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι τότε θα έχουμε και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} b(i)}{n} = l.$$

3.72. Να επαναλάβετε την Άσκηση 3.71 στην περίπτωση που $l = \infty$ ή $l = -\infty$.

3.73. [Σ/Λ, Π] Έστω ακολουθίες $a(n), b(n)$ τέτοιες ώστε $a(n) - b(n) \to 0$. Οι $a(n), b(n)$ συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

3.74. Έστω ακολουθίες $a(n), b(n)$ τέτοιες ώστε η $a(n)$ είναι αύξουσα, η $b(n)$ είναι φθίνουσα, και $a(n) - b(n) \to 0$. Να δείξετε ότι οι $a(n), b(n)$ συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

3.75. [$\star$] Έστω ακολουθία $a(n)$ με $\lim_{n\to\infty} a(n) = L$. Να βρείτε μια συνάρτηση $f(x)$ τέτοια ώστε $f(n) = a(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επίσης $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

3.6 Περαιτέρω Μελέτη

Η παρουσίαση του υλικού σε αυτό το κεφάλαιο ακολούθησε τη συνηθισμένη οδό που ακολουθούν σχεδόν όλα τα βιβλία Λογισμού της βιβλιογραφίας. Στο βιβλίο του Spivak [SPIE], [SPIG] υπάρχει μια αρκετά εκτενής συζήτηση για το πώς προέκυψε ο ορισμός του ορίου. Στα βιβλία Λογισμού του Thomas [THOE], [THOG], του Stewart [STEW] και των Varberg et al. [VARB] μπορείτε να βρείτε πολύ εκτενείς εισαγωγικές παρουσιάσεις του ορίου, κατάλληλες περισσότερο για σπουδαστές που δεν έχουν δει την έννοια του ορίου στο Λύκειο.

Κεφάλαιο 4

Συνέχεια

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε την έννοια της συνέχειας. Η έννοια αυτή είναι στενά συνδεδεμένη με το όριο: όπως ξέρουμε και από το Λύκειο, μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 αν έχει όριο σε εκείνο το σημείο και αυτό ισούται με την τιμή της συνάρτησης $f(x_0)$. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής παντού σε ένα διάστημα, τότε μπορούμε να αποδείξουμε ότι έχει πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες, οι οποίες δεν είναι καθόλου προφανές ότι θα μπορούσαν να προκύψουν από τον ορισμό του ορίου. Οι ιδιότητες αυτές είναι η πρώτη ένδειξη της ισχύος αυτού του ορισμού.

Στην Παράγραφο 4.1 παρουσιάζουμε τον ορισμό της συνέχειας και τις βασικές ιδιότητές της. Στην Παράγραφο 4.2 εξετάζουμε τις συνέπειες της συνέχειας σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα. Στην Παράγραφο 4.3 μελετούμε την ύπαρξη και συνέχεια αντίστροφων συναρτήσεων. Στην Παράγραφο 4.4 παρουσιάζουμε την πρώτη αριθμητική μας μέθοδο, τη Μέθοδο της Διχοτόμησης. Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο με την Παράγραφο 4.5 όπου παρουσιάζεται ένα ελαφρώς διαφορετικό είδος συνέχειας, η συνέχεια Lipschitz.

4.1 Ορισμός Συνέχειας και Βασικές Ιδιότητες

4.1.1 Ορισμός

Ορισμός 4.1. ***(Ορισμός συνέχειας σε σημείο και διάστημα)***

1. *Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται **συνεχής** στο $x_0 \in A$ αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*
2. *Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται **δεξιά συνεχής** στο $x_0 \in A$ αν $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.*
3. *Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται **αριστερά συνεχής** στο $x_0 \in A$ αν $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.*
4. *Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται **συνεχής** στο διάστημα I αν είναι συνεχής για κάθε εσωτερικό $x_0 \in I$, αριστερά συνεχής στο δεξί άκρο του I (εφόσον το δεξί άκρο ανήκει στο I) και δεξιά συνεχής στο αριστερό άκρο του I (εφόσον το αριστερό άκρο ανήκει στο).*
5. *Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται **ασυνεχής** στο $x_0 \in A$, και λέμε πως έχει **ασυνέχεια** στο x_0, αν δεν είναι συνεχής στο x_0.*
6. *Αν η συνάρτηση f είναι ασυνεχής στο x_0 αλλά μπορούμε να ορίσουμε την $f(x)$ στο x_0 έτσι ώστε να γίνει συνεχής, τότε η ασυνέχεια καλείται **επουσιώδης**, αλλιώς καλείται **ουσιώδης**.*

Παρατηρήστε πως έχουμε ρητώς επιτρέψει στο όριο μιας συνάρτησης στο x_0 να υπάρχει ακόμα και όταν η συνάρτηση δεν ορίζεται σε εκείνο το σημείο. Όμως η συνέχεια σε ένα σημείο σημαίνει ότι *(i)* η συνάρτηση ορίζεται στο x_0, *(ii)* το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει, και *(iii)* το όριο ισούται με την τιμή της συνάρτησης $f(x_0)$ σε εκείνο το σημείο.

Η συνέχεια σε ένα σημείο έχει μια ξεκάθαρη γεωμετρική ερμηνεία: κοντά στο σημείο αυτό, το γράφημα της συνάρτησης είναι μια συνεχής γραμμή. Παρόμοια, η συνέχεια σε ένα διάστημα σημαίνει γεωμετρικά ότι το γράφημα της συνάρτησης σε όλο αυτό το διάστημα είναι μια συνεχής γραμμή. Αν, για παράδειγμα, το διάστημα είναι κλειστό και φραγμένο, έχει δηλαδή τη μορφή $[a, b]$, τότε το γράφημα της συνάρτησης μπορεί να σχεδιαστεί αν βάλουμε το μολύβι μας στο σημείο $(a, f(a))$ και το μετακινήσουμε κατάλληλα, *χωρίς να το σηκώσουμε από το χαρτί*, μέχρι να φτάσουμε στο σημείο $(b, f(b))$. Όπως θα δούμε στην Παράγραφο 4.2, ο περιορισμός αυτός συνεπάγεται πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες.

Σχετικά με τα δύο είδη ασυνέχειας (ουσιώδους και επουσιώδους), παραδείγματα ουσιώδους ασυνέχειας είναι η ασυνέχεια στο 0 που έχει η συνάρτηση $\sin\frac{1}{x}$ του Σχήματος 3.2 και η ασυνέχεια στο 0 που έχει η συνάρτηση Heaviside του Σχήματος 3.1. Και στις δύο περιπτώσεις, δεν υπάρχει όριο στο σημείο ασυνέχειας, επομένως η συνάρτηση δεν μπορεί να γίνει συνεχής αν της δώσουμε κάποια τιμή σε εκείνο το σημείο. Αντιθέτως, η συνάρτηση $\frac{\sin x}{x}$ του Σχήματος 3.1 είναι μεν ασυνεχής στο 0 διότι δεν ορίζεται εκεί, μπορούμε όμως να επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού της ώστε να περιλαμβάνει το 0, και να θέσουμε την τιμή της συνάρτησης εκεί ίση με το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, που έχει υπολογιστεί στο Παράδειγμα 3.12, κάνοντάς την έτσι συνεχή σε εκείνο το σημείο.

Παράδειγμα 4.1. (Οι πολυωνυμικές και οι ρητές είναι συνεχείς) Στα Παραδείγματα 3.13 και 3.14 έχουμε δείξει ότι για κάθε πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει ότι

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0),$$

και ότι για κάθε ρητή συνάρτηση $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ με $Q(x_0) \neq 0$ ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Επομένως, οι πολυωνυμικές και οι ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς παντού στο πεδίο ορισμού τους.

Παράδειγμα 4.2. (Οι $\sin x$, $\cos x$ είναι συνεχείς) Θα δείξουμε ότι το ημίτονο $\sin x$ και το συνημίτονο $\cos x$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Καταρχάς παρατηρούμε πως, από την Πρόταση 2.2, έχουμε

$$|\sin x| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq \sin x \leq |x|.$$

Έστω λοιπόν $x_0 \in \mathbb{R}$. Από την Άσκηση 2.19 έχουμε ότι

$$\sin\phi - \sin\theta = 2\cos\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi-\theta}{2}\right),$$

επομένως

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \leq 2\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \leq |x-x_0|$$

$$\Rightarrow -|x-x_0| \leq \sin x - \sin x_0 \leq |x-x_0|,$$

και τελικά, από το Κριτήριο της Παρεμβολής, επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0| = \lim\limits_{x\to x_0}(-|x-x_0|) = 0$, προκύπτει πως

$$\lim_{x\to x_0}|\sin x - \sin x_0| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}(\sin x - \sin x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\sin x = \sin x_0.$$

Η πρώτη συνεπαγωγή προέκυψε από την Άσκηση 3.10. Η δεύτερη από την Άσκηση 3.9. Επομένως, η συνάρτηση του ημιτόνου είναι συνεχής παντού στο πεδίο ορισμού της.

Σχετικά με τη συνέχεια του συνημιτόνου, παρατηρούμε πως $\cos x = \sin(x - \pi/2)$, επομένως

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \lim_{x\to x_0} \sin(x - \pi/2) = \lim_{x\to x_0 - \pi/2} \sin x = \sin(x_0 - \pi/2) = \cos(x_0).$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την Άσκηση 3.11.

Σε αποδείξεις που εμπλέκουν τη συνέχεια μιας συνάρτησης και καταλήγουν σε χρήση επιχειρημάτων με ϵ και δ συνήθως εξυπηρετεί να χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο εναλλακτικό ορισμό της συνέχειας, που ενσωματώνει τον ορισμό του ορίου:

Πρόταση 4.1. ***(Ισοδύναμος ορισμός συνέχειας)*** *Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 ανν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{4.1}$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε καταρχάς το ευθύ. Έστω λοιπόν πως η f είναι συνεχής στο x_0, επομένως έχει όριο το $f(x_0)$. Από τον ορισμό του ορίου, έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Όμως, ειδικά στην περίπτωση που $x = x_0$, η δεξιά ανισότητα είναι βέβαιο πως θα ισχύει, γιατί τότε $|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0$. Μπορούμε επομένως να απαλείψουμε τον περιορισμό $0 < |x - x_0|$, φτάνοντας έτσι στη συνεπαγωγή (4.1).

Αποδεικνύουμε τώρα το αντίστροφο. Έστω πως ισχύει η (4.1). Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ θα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει και η

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

που είναι πιο περιοριστική από την (4.1), αφού εισάγει τον επιπλέον περιορισμό $0 < |x - x_0|$, και επομένως ικανοποιείται ο ορισμός του ορίου για $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. ■

Παρόμοια μπορούμε να δώσουμε έναν ορισμό βασιζόμενοι στα ϵ και δ για την περίπτωση της αριστερής και δεξιάς συνέχειας. Δείτε την Άσκηση 4.1.

4.1.2 Βασικές Ιδιότητες

Ο ορισμός της συνέχειας είναι στενά συνδεδεμένος με τον ορισμό του ορίου, με αποτέλεσμα να μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα τις ακόλουθες τρεις προτάσεις (η απόδειξή τους βασίζεται στις Προτάσεις 3.2 και 3.6 και ζητείται στις Ασκήσεις 4.2 και 4.3).

Πρόταση 4.2. ***(Πλευρική συνέχεια $\Leftrightarrow$ συνέχεια)*** *Μια συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 ανν είναι αριστερά συνεχής και δεξιά συνεχής στο x_0.*

Πρόταση 4.3. ***(Συνέχεια γινομένου/πηλίκου συνεχών συναρτήσεων σε σημείο)***

1. *Αν οι $f(x)$, $g(x)$ είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχής και η $f(x)g(x)$ στο x_0.*

2. *Αν οι $f(x)$, $g(x)$ είναι συνεχείς στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε είναι συνεχής και η $f(x)/g(x)$ στο x_0.*

3. *Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο x_0, τότε είναι συνεχής και η $f^n(x)$ στο x_0, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

4. *Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο x_0, με $f(x_0) \neq 0$, τότε είναι συνεχής και η $1/f^n(x)$ στο $x = x_0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.*

Πρόταση 4.4. ***(Συνέχεια γινομένου/πηλίκου συνεχών συναρτήσεων σε διάστημα)*** *Έστω διάστημα I.*

1. *Αν οι $f(x)$, $g(x)$ είναι συνεχείς στο I, τότε είναι συνεχής και η $f(x)g(x)$ στο I.*

2. *Αν οι $f(x)$, $g(x)$ είναι συνεχείς στο I και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, τότε είναι συνεχής και η $f(x)/g(x)$ στο I.*

3. *Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο I, τότε είναι συνεχής και η $f^n(x)$ στο I, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

4. *Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο I, με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in I$, τότε είναι συνεχής και η $1/f^n(x)$ στο I, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.*

Παράδειγμα 4.3. (Οι $\tan x$, $\cot x$ είναι συνεχείς) Από την Πρόταση 4.4 και το Παράδειγμα 4.2 προκύπτει πως οι

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού τους.

Παράδειγμα 4.4. (Συνέχεια της $\frac{\sin x}{x}$ στο 0) Από την Πρόταση 4.3 προκύπτει πως η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ του Σχήματος 3.1 είναι παντού συνεχής στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}^*$. Επιπλέον, στο Παράδειγμα 3.12 έχουμε δει πως

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Όπως έχουμε αναφέρει, ορίζοντας τη νέα συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

μπορούμε να αφαιρέσουμε την επουσιώδη ασυνέχεια στο 0, και η συνάρτηση $g(x)$ είναι συνεχής παντού στο $\mathbb{R}$.

Η επόμενη πρόταση είναι πολύ ισχυρή, καθώς μας επιτρέπει, εφόσον ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις της, να αλλάζουμε τη σειρά μιας *συνεχούς* συνάρτησης και ενός ορίου. Πρέπει όμως να είμαστε προσεκτικοί στη χρήση της. Η απόδειξή της κάνει χρήση του εναλλακτικού ορισμού της συνέχειας που δώσαμε στην Πρόταση 4.1.

Πρόταση 4.5. ***(Εναλλαγή ορίου με συνεχή συνάρτηση)*** *Έστω $g : A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $L \in A$. Έστω επίσης $f : B \to \mathbb{R}$ με $f(B) \subseteq A$ και $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Τότε*

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) = g(L).$$

Απόδειξη: Έστω δοσμένο $\epsilon > 0$. Λόγω της συνέχειας της g, υπάρχει κάποιο $\epsilon_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$|x - L| < \epsilon_1 \Rightarrow |g(x) - g(L)| < \epsilon.$$

Η δεξιά ανισότητα ισχύει για όλα τα x που ικανοποιούν την αριστερή ανισότητα, άρα και για τα x της μορφής $f(x)$. Επομένως,

$$|f(x) - L| < \epsilon_1 \Rightarrow |g(f(x)) - g(x_0)| < \epsilon.$$

Όμως $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, επομένως για το συγκεκριμένο $\epsilon_1 > 0$ θα υπάρχει κάποιο $\epsilon_2 > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < |x - x_0| < \epsilon_2 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon_1$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω συνεπαγωγές, έχουμε

$$0 < |x - x_0| < \epsilon_2 \Rightarrow |g(f(x)) - g(L)| < \epsilon.$$

■

Παράδειγμα 4.5. (Παραδείγματα εναλλαγής ορίου με συνεχή συνάρτηση) Με εφαρμογή της Πρότασης 4.5 έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1.$$

Όμως, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση για να γράψουμε

$$\lim_{x\to 0} u(\sin x) = u(\lim_{x\to 0}\sin x) = u(0) = 1,$$

όπου u είναι η συνάρτηση Heaviside του Σχήματος 3.1. Το λάθος βρίσκεται στην πρώτη ισότητα. Ο λόγος είναι ότι η συνάρτηση u δεν είναι συνεχής στο 0, όπου τείνει η $\sin x$ καθώς $x \to 0$. Πράγματι, παρατηρήστε πως η $u(\sin x)$ ισούται με τη μονάδα στο διάστημα $(0, \pi)$, και με 0 στο διάστημα $(-\pi, 0)$. Επομένως, δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} u(\sin x)$.

Πάντως, μπορούμε να γράψουμε, χωρίς πρόβλημα, πως

$$\lim_{x\to\pi/2} u(\sin x) = u(\lim_{x\to\pi/2}\sin x) = u(1) = 1,$$

καθώς η συνάρτηση u είναι συνεχής στο όριο 1 όπου τείνει η $\sin x$ καθώς $x \to \pi/2$.

Μια σημαντική ειδική περίπτωση της Πρότασης 4.5 είναι όταν *και* οι δύο συναρτήσεις της σύνθεσης είναι συνεχείς. Έχουμε, τότε, την ακόλουθη πρόταση, που μπορεί να αποδειχθεί άμεσα με χρήση της Πρότασης 4.5.

Πρόταση 4.6. ***(Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων)*** *Έστω $f : B \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0 και $g : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $f(x_0)$. Έχουμε*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0)),$$

δηλαδή η σύνθεση $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

Ασκήσεις

4.1. (Ισοδύναμος ορισμός αριστερής/δεξιάς συνέχειας) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε μια πρόταση α-νάλογη της Πρότασης 4.1 για την περίπτωση της αριστερής και της δεξιάς συνέχειας.

4.2. Να αποδείξετε την Πρόταση 4.2.

4.3. Να αποδείξετε την Πρόταση 4.3 και την Πρόταση 4.4.

4.4. (Υπολογισμός ορίων) Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \sin\sin x$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \cos\sin x$.
3. $\lim\limits_{x\to 1} \tan\frac{x^2+1}{x^3+2}$.

4.5. (Κοινό πρόσημο σε ανοικτή γειτονιά) Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 με $f(x_0) > 0$ (εναλλακτικά, $f(x_0) < 0$), τότε υπάρχει ένα διάστημα της μορφής $I = (a,b)$ με $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f(x) > 0$ (εναλλακτικά, $f(x) < 0$) παντού στο I.

4.6. [⋆] (Σύνθεση συνεχούς συνάρτησης με ακολουθία) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής σε κάποιο x_0. Έστω ακολουθία $a_n \to x_0$ με $\{f(a_n) : n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq A$. Να δείξετε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ και μάλιστα $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = f(x_0)$. Να χρησιμοποιήσετε αποκλειστικά ορισμούς ορίων.

4.7. [⋆⋆] (Ισοδύναμος ορισμός συνέχειας) Να αποδείξετε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $x_n \to x_0$ ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$. Παρατηρήστε ότι η μία συνεπαγωγή έχει ήδη αποδειχθεί στην Άσκηση 4.6.

4.8. [⋆⋆] Έστω συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} U(x) &\triangleq \sup\{\min\{f(y), f(a)+1\} : y \in [a,x]\}, \\ L(x) &\triangleq \inf\{\max\{f(y), f(a)-1\} : y \in [a,x]\}. \end{aligned}$$

με πεδίο ορισμού το $[a,b]$. Να δείξετε ότι η $U(x)$ είναι αύξουσα, η $L(x)$ είναι φθίνουσα, και ότι τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x\to a^+} U(x)$ και $\lim\limits_{x\to a^+} L(x)$ υπάρχουν με

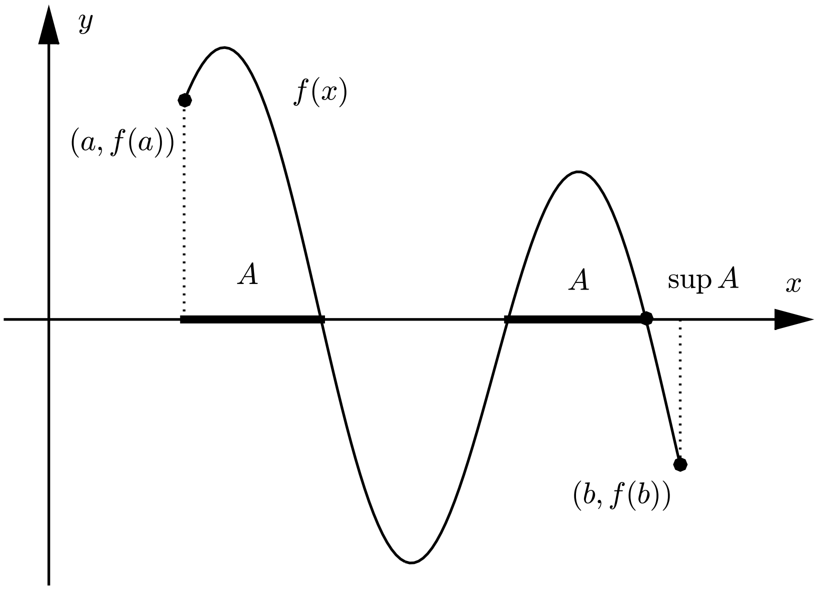
$$\lim_{x\to a^+} U(x) \geq \lim_{x\to a^+} L(x).$$

Κατόπιν, να δείξετε ότι η $f(x)$ είναι δεξιά συνεχής στο a ανν η παραπάνω ανισότητα ισχύει ως ισότητα.

4.9. [⋆⋆] Να αποδείξετε ότι αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα I, η $g : J \to \mathbb{R}$ στο διάστημα J, και $f(I) \subseteq J$, τότε η σύνθεση $g \circ f$ είναι συνεχής στο I. Η αυστηρή απόδειξη αυτής της άσκησης απαιτεί να εξετάσετε τι συμβαίνει στα άκρα των I, J.

4.2 Συνέχεια σε Κλειστά και Φραγμένα Διαστήματα

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε μερικές βασικές συνέπειες της συνέχειας μιας συνάρτησης σε διαστήματα που είναι κλειστά και φραγμένα. Καταρχάς θα παρουσιάσουμε και θα αποδείξουμε το Θεώρημα του Bolzano. Το θεώρημα δείχνει κάτι προφανές, ότι, δηλαδή, αν μια *συνεχής* συνάρτηση είναι μικρότερη του μηδενός σε μια τιμή του ορίσματός της και μεγαλύτερη του μηδενός σε μια άλλη τιμή, τότε θα πρέπει να μηδενίζεται κάπου στο ενδιάμεσο αυτών των τιμών. Παρότι προφανές, το θεώρημα χρειάζεται απόδειξη.



Σχήμα 4.1: Θεώρημα Bolzano.

Θεώρημα 4.1. ***(Θεώρημα Bolzano)*** *Έστω συνάρτηση f συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ με $f(a)f(b) < 0$. Τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.*

Απόδειξη: Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα, το ενδεχόμενο $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, και το ενδεχόμενο $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Θα υποθέσουμε το πρώτο ενδεχόμενο. (Η απόδειξη για το δεύτερο ενδεχόμενο είναι εντελώς αντίστοιχη, και αποτελεί την Άσκηση 4.10). Δείτε το Σχήμα 4.1.

Έστω το σύνολο

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) > 0\}.$$

Παρατηρήστε πως $b \notin A$, αφού $f(b) < 0$. Το A είναι φραγμένο άνω από το b και μη κενό, αφού $a \in A$, επομένως έχει supremum, $\sup A = x_0$.

Θα δείξουμε ότι $f(x_0) = 0$. Το μυστικό είναι να παρατηρήσουμε ότι το x_0 είναι αυθαίρετα κοντά σε σημεία εντός του A, όπου η συνάρτηση είναι θετική, και ταυτοχρόνως αυθαιρέτως κοντά σε σημεία εκτός του A, όπου η συνάρτηση είναι μη θετική. Λόγω της συνέχειας της f, αυτό είναι εφικτό μόνο αν $f(x_0) = 0$.

Αναλυτικότερα, αφενός μεν μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία $a_n \to x_0$, τέτοια ώστε $a_n \in A$, επομένως $f(a_n) > 0$. Αυτό προκύπτει από την ιδιότητα που έχει το supremum ενός συνόλου να υπάρχουν στοιχεία του συνόλου αυθαίρετα κοντά του. Αφετέρου, μπορούμε επίσης να κατασκευάσουμε ακολουθία $b_n \notin A$, επομένως $f(b_n) \leq 0$, με $b_n \to x_0$. Για παράδειγμα, μπορούμε να θέσουμε $b_n = \min\{b, x_0 + \frac{1}{n}\}$. Δείτε την Άσκηση 3.68.

Παρατηρήστε πως

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim_{n\to\infty} b_n) = f(x_0).$$

Όμως, $f(b_n) \leq 0$ για κάθε n (αλλιώς το $b_n \in A$, που είναι άτοπο γιατί $b_n > x_0 = \sup A$) άρα και $\lim_{n\to\infty} f(b_n) \leq 0$, χρησιμοποιώντας την Άσκηση 3.67, επομένως $f(x_0) \leq 0$.

Με ανάλογο τρόπο, αλλά χρησιμοποιώντας την ακολουθία a_n, έχουμε $f(x_0) \geq 0$. (Παρατηρήστε μόνο πως $f(a_n) > 0 \Rightarrow f(a_n) \geq 0$, άρα και πάλι η Άσκηση 3.67 μπορεί να εφαρμοστεί.)

Άρα, αφού και $f(x_0) \geq 0$ και $f(x_0) \leq 0$, θα πρέπει $f(x_0) = 0$.

■

Το Θεώρημα Bolzano είναι εξαιρετικά χρήσιμο για πολλούς λόγους. Καταρχάς, εμφανίζεται στην απόδειξη άλλων βασικών θεωρημάτων. Σε πιο πρακτικό επίπεδο, μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε την ύπαρξη ριζών, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.6. (Απόδειξη ύπαρξης ρίζας) Έστω η συνάρτηση

$$f(\theta) = \cos^{10}\theta + \cos^8\theta - \cos^6\theta + \cos^3\theta - \cos^2\theta + \cos\theta - 1.$$

Επειδή η συνάρτηση αυτή έχει πολύπλοκη μορφή, δεν μπορούμε να βρούμε έναν τύπο που να μας δίνει ποιες είναι οι ρίζες της. Όμως, επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής, και επειδή $f(0) = 1$, $f(\pi) = -1$, προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $[0, \pi]$. Στην Παράγραφο 4.4 θα δείξουμε πώς, και πάλι χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Bolzano, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη ρίζα αυτής της συνάρτησης με όση ακρίβεια θέλουμε.

Θεώρημα 4.2. ***(Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής)*** *Έστω συνεχής συνάρτηση f στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ με $f(a) \neq f(b)$. Η συνάρτηση λαμβάνει, εντός του (a, b), οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των $f(a), f(b)$.*

Δείτε το Σχήμα 4.2 για μια διαισθητική ερμηνεία του θεωρήματος στην περίπτωση $f(a) > f(b)$. Για να μεταβληθεί η τιμή της συνάρτησης από την τιμή $f(a)$ στην τιμή $f(b)$, είναι απαραίτητο η τιμή της να περάσει από όλες τις ενδιάμεσες τιμές. Οι τιμές αυτές συγκροτούν το σύνολο B που εμφανίζεται επί του άξονα y. Ενδεχομένως, βέβαια, η συνάρτηση να λαμβάνει και άλλες τιμές, εκτός του συνόλου αυτού.

Απόδειξη: Έστω πως $f(a) > f(b)$. (Αν $f(a) < f(b)$, η απόδειξη είναι ανάλογη, και παραλείπεται.) Έστω λοιπόν $y_0 \in (f(b), f(a))$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - y_0$, και παρατηρούμε πως $g(a) = f(a) - y_0 > 0$, και $g(b) = f(b) - y_0 < 0$. Θα υπάρχει λοιπόν, από το Θεώρημα Bolzano, κάποιο x_0 τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = y_0$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Στην απόδειξη του επόμενου θεωρήματος θα χρειαστούμε την έννοια του σημείου συσσώρευσης και μια βασική ιδιότητά του.

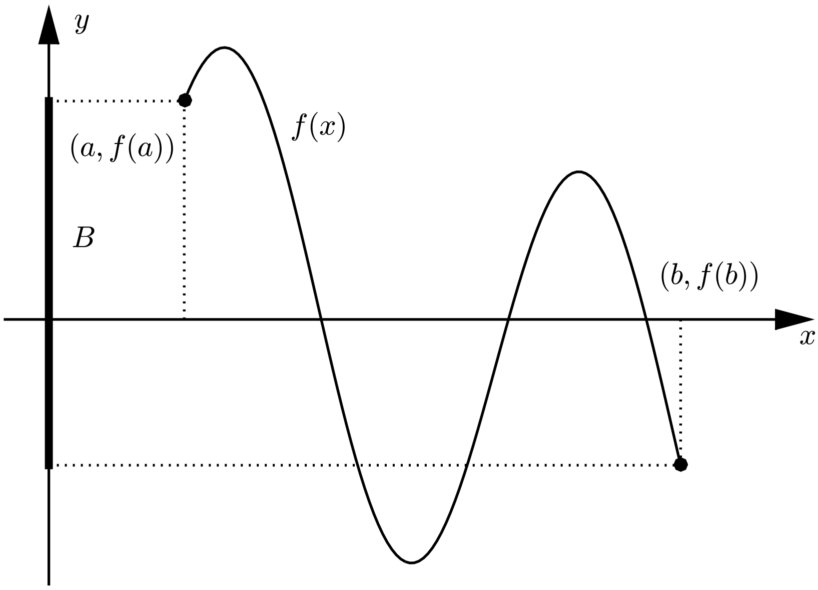
Ορισμός 4.2. ***(Σημείο συσσώρευσης)*** *Έστω ακολουθία $\{a_n\}$. Η ακολουθία έχει **σημείο συσσώρευσης** το $A \in \mathbb{R}$ αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν άπειροι φυσικοί n_1, n_2, $\dots$ τέτοιοι ώστε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $a_{n_k} \in (A - \delta, A + \delta)$.*

Επομένως, μια ακολουθία έχει σημείο συσσώρευσης το A αν υπάρχουν άπειροι όροι της όσο κοντά θέλουμε στο A. Δεν είναι απαραίτητο οι όροι αυτοί να είναι διακριτοί! Για παράδειγμα, η σταθερή ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = 10$ έχει σημείο συσσώρευσης το 10.

Θεώρημα 4.3. ***(Φραγμένη ακολουθία ⇒ σημείο συσσώρευσης)*** *Κάθε φραγμένη στο $[a, b]$ ακολουθία $\{a_n\}$ έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης εντός του $[a, b]$.*

Απόδειξη: [★] Ορίζουμε τη βοηθητική ακολουθία

$$b_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}.$$



Σχήμα 4.2: Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής.

Παρατηρήστε ότι τα infimum υπάρχουν, γιατί τα αντίστοιχα σύνολα είναι μη κενά και φραγμένα κάτω (από το κάτω φράγμα της $\{a_n\}$). Παρατηρήστε επίσης ότι η ακολουθία b_n είναι αύξουσα, γιατί τα infima είναι σε ολοένα και μικρότερα σύνολα, και φραγμένη άνω από το b. Επομένως, υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} b_n = A$ (Άσκηση 3.61).

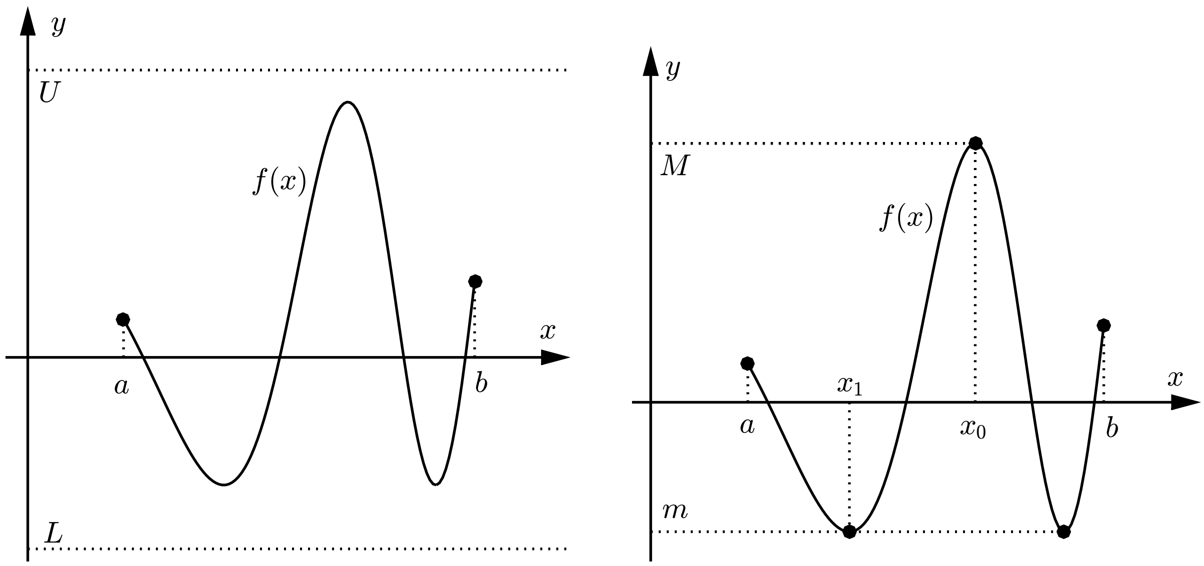
Θα δείξουμε ότι το A είναι σημείο συσσώρευσης. Έστω $\delta > 0$. Θα δείξουμε ότι εντός του $(A-\delta, A+\delta)$ υπάρχουν άπειρα μέλη της ακολουθίας $\{a_n\}$, κατασκευάζοντάς τα. Πράγματι, αφού $b_n \to A$, θα υπάρχει $b_{k_1} \in (A-\delta, A+\delta)$, και επειδή το $b_{k_1} = \inf\{a_{k_1}, a_{k_1+1}, \dots\}$ θα υπάρχει $n_1 > k_1$ τέτοιο ώστε $a_{n_1} \in (A-\delta, A+\delta)$. Για αυτό το n_1 θα υπάρχει $k_2 > n_1$ τέτοιο ώστε $b_{k_2} \in (A-\delta, A+\delta)$, και επειδή το $b_{k_2} = \inf\{a_{k_2}, a_{k_2+1}, \dots\}$ θα υπάρχει $n_2 > k_2$ τέτοιο ώστε $a_{n_2} \in (A-\delta, A+\delta)$. Η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί για πάντα, επομένως υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας $\{a_n\}$, και συγκεκριμένα οι a_{n_1}, $a_{n_2}, \dots$ εντός του διαστήματος $(A-\delta, A+\delta)$, επομένως το A είναι σημείο συσσώρευσης. ∎

Θεώρημα 4.4. ***(Θεώρημα Φράγματος)*** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Η $f(x)$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχουν U, L, τέτοια ώστε $f(x) \le U$, $f(x) \ge L$ για κάθε $x \in [a,b]$.*

Δείτε το Σχήμα 4.3. Το θεώρημα μας λέει ότι, αν βάλουμε κάτω το μολύβι στο $(a, f(a))$ και φτάσουμε μέχρι το $(b, f(b))$ με μια συνεχόμενη γραμμή, δεν μπορούμε να περάσουμε από το άπειρο.

Απόδειξη: [★] Θα υποθέσουμε ότι η $f(x)$ δεν είναι φραγμένη, και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έστω πως η $f(x)$ λαμβάνει αυθαίρετα μεγάλες τιμές, δηλαδή για κάθε M υπάρχει $x \in [a,b]$ με $f(x) > M$. Η απόδειξη για την περίπτωση που η $f(x)$ λαμβάνει αυθαίρετα μικρές τιμές είναι ανάλογη και παραλείπεται.

Κατασκευάζουμε μια ακολουθία a_n ως εξής. Επιλέγουμε το $a_1 = a$, και επιλέγουμε τα επόμενα a_n τέτοια ώστε $f(a_n) > \max\{f(a_{n-1}), n-1\}$. Η ακολουθία $\{a_n\}$ μπορεί να κατασκευαστεί λόγω της υπόθεσης ότι η f δεν είναι φραγμένη άνω. Επίσης, όλα τα a_n είναι διαφορετικά μεταξύ τους, και η ακολουθία $f(a_n) \to \infty$. Παρατηρήστε ότι το σύνολο $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο. Πράγματι, είναι φραγμένο άνω από το b και φραγμένο κάτω από το a. Θα έχει, λοιπόν, από το Θεώρημα 4.3, ένα



Σχήμα 4.3: Θεώρημα Φράγματος και Θεώρημα Ακροτάτων.

σημείο συσσώρευσης, έστω $x_0 \in [a, b]$. Υποθέτουμε ότι $x_0 \in (a, b)$. (Αν $x_0 = a$ ή $x_0 = b$, η απόδειξη τροποποιείται εύκολα.) Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, επιλέγοντας $\epsilon = 1$ στον ορισμό της συνέχειας, προκύπτει ότι υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0| < 1 \Rightarrow f(x) < f(x_0) + 1.$$

Αυτό είναι άτοπο, διότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης της $\{a_n\}$, επομένως υπάρχουν άπειρα a_n για τα οποία $|a_n - x_0| < \delta$, και, λόγω της κατασκευής της ακολουθίας a_n οι τιμές $f(a_n)$ γίνονται αυθαίρετα μεγάλες και δεν μπορούν να είναι φραγμένες από το $f(x_0) + 1$. ■

Θεώρημα 4.5. ***(Θεώρημα Ακροτάτων)*** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Υπάρχουν $x_0, x_1 \in [a, b]$ τέτοια ώστε $f(x_0) \geq f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $f(x_1) \leq f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.*

Από το Θεώρημα 4.4 προκύπτει πως κάθε συνάρτηση συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα είναι φραγμένη. Άρα, αφού το πεδίο τιμών της δεν είναι κενό, θα έχει supremum, $\sup_{[a,b]} f$, και infimum, $\inf_{[a,b]} f$. Το Θεώρημα 4.5 μάς εξασφαλίζει και κάτι ακόμα, ότι δηλαδή η συνάρτηση λαμβάνει κάπου ως τιμή της και το supremum και το infimum. Αυτή η ιδιότητα δεν ισχύει γενικά. Για παράδειγμα,

1. Η συνάρτηση $f(x) = 1/x$ έχει infimum το 0 στο διάστημα $[1, \infty)$, όπου η συνάρτηση είναι συνεχής. Το διάστημα είναι μεν κλειστό αλλά όχι φραγμένο, και η συνάρτηση δεν λαμβάνει πουθενά την τιμή 0.

2. Η συνάρτηση $f(x) = 1/x$ έχει infimum το $1/2$ στο διάστημα $[1, 2)$, όπου η συνάρτηση είναι συνεχής. Το διάστημα είναι μεν φραγμένο, αλλά όχι κλειστό, και η συνάρτηση δεν λαμβάνει πουθενά την τιμή $1/2$.

3. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in (1, 2], \\ 1/2, & x = 1, \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο $[1, 2]$, και δεν λαμβάνει πουθενά την τιμή $1 = \sup_{[1,2]} f$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.5: [★] Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η συνάρτηση λαμβάνει μέγιστο. Η απόδειξη είναι σε μεγάλο βαθμό ανάλογη της απόδειξης του Θεωρήματος 4.4. Έστω καταρχάς πως δεν υπάρχει x_0 με τη δοσμένη ιδιότητα, δηλαδή υπάρχει μεν το supremum της συνάρτησης, έστω

$$A = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\},$$

δεν υπάρχει όμως $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = A$. Παρατηρήστε ότι η ύπαρξη του supremum εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 4.4. Ορίζουμε μια ακολουθία $\{a_n\} \in [a, b]$ ως εξής: Θέτουμε $a_1 = a$. Θέτουμε επίσης a_n κάποιον αριθμό x τέτοιον ώστε $f(x)$ αυστηρώς μεγαλύτερο και του $f(a_{n-1})$ και του $A - \frac{1}{n}$. Αν για κάποιο a_n έχουμε $f(a_n) = A$, τότε η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Αλλιώς, μπορούμε να συνεχίσουμε επ' άπειρον, καθώς, αν $f(a_{n-1}) < A$, τότε ο a_n είναι βέβαιο ότι υπάρχει, αφού το A είναι supremum και επομένως μπορούμε να το πλησιάσουμε όσο κοντά θέλουμε. (Η περίπτωση $f(a_n) > A$ αποκλείεται αφού το A είναι supremum.) Αν η διαδικασία συνεχίσει επ' άπειρον, η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι φραγμένη, άρα έχει σημείο συγκεντρώσεως, έστω $x_0 \in [a, b]$. Θα δείξουμε ότι $f(x_0) = A$. Καταρχάς, δεν μπορεί να έχουμε $f(x_0) > A$, διότι το A είναι supremum της f στο $[a, b]$. Έστω πως $f(x_0) < A$. Έστω $m = \frac{f(x_0)+A}{2}$ το ενδιάμεσό τους. Από τον ορισμό της συνέχειας μπορούμε να βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, να έχουμε $f(x) < m$. Όμως, το x_0 είναι σημείο συγκεντρώσεως της $\{a_n\}$, άρα υπάρχουν άπειροι όροι της εντός του $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, και, από την κατασκευή της, άπειροι εξ αυτών θα είναι μεγαλύτεροι του m. Έχουμε, λοιπόν, άτοπο, επομένως προκύπτει πως θα πρέπει $f(x_0) = A$.

Έχοντας αποδείξει την ύπαρξη του σημείου μεγίστου x_0, η ύπαρξη του σημείου ελαχίστου x_1 εξασφαλίζεται από την ύπαρξη του μεγίστου για τη συνεχή συνάρτηση $g = -f$ στο κλειστό και φραγμένο $[a, b]$. ■

Ασκήσεις

4.10. (Απόδειξη Θεωρήματος Bolzano) Να αποδείξετε το Θεώρημα Bolzano για την περίπτωση $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

4.11. [⋆] (Πολυώνυμα περιττού βαθμού) Να αποδείξετε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

4.12. [⋆] (Πολυώνυμα άρτιου βαθμού) Να αποδείξετε ότι κάθε πολυώνυμο άρτιου βαθμού έχει είτε ελάχιστη είτε μέγιστη τιμή, αλλά όχι και μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

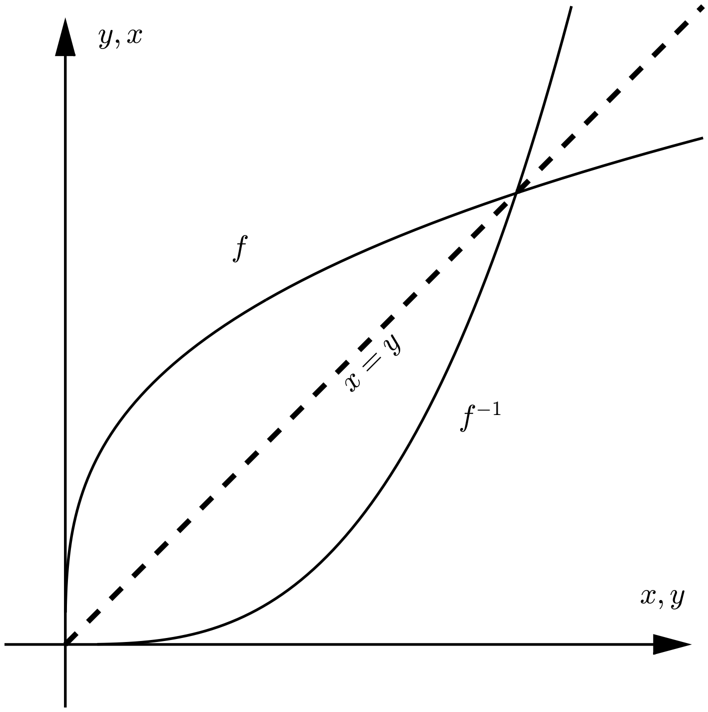
4.13. [Σ/Λ, Π] (Παραβίαση συνθηκών) Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα, τότε δεν λαμβάνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

4.14. [⋆] (Συνεχής συνάρτηση με πεπερασμένο όριο στο άπειρο) Να δείξετε ότι αν μια συνεχής συνάρτηση $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ έχει το πεπερασμένο όριο $L = \lim_{x\to\infty} f(x)$, τότε είναι φραγμένη άνω και κάτω.

4.3 Αντίστροφη Συνάρτηση

Ορισμός 4.3. ***(Αντίστροφη συνάρτηση)*** *Έστω 1-1 συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε την* ***αντίστροφη*** *$f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$ ως τη συνάρτηση που απεικονίζει σε κάθε $y \in f(A)$ το μοναδικό x για το οποίο $f(x) = y$. Επομένως, $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.*

Από τον ορισμό εύκολα προκύπτουν οι ιδιότητες που αναφέρονται στην ακόλουθη πρόταση. Η απόδειξή της ζητείται στην Άσκηση 4.15.



Σχήμα 4.4: Τα γραφήματα της f και της f^{-1}.

Πρόταση 4.7. ***(Βασικές ιδιότητες αντίστροφης συνάρτησης)*** *Έστω 1-1 συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και η αντίστροφή της $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$.*

1. *Ισχύει η ισοδυναμία*
$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

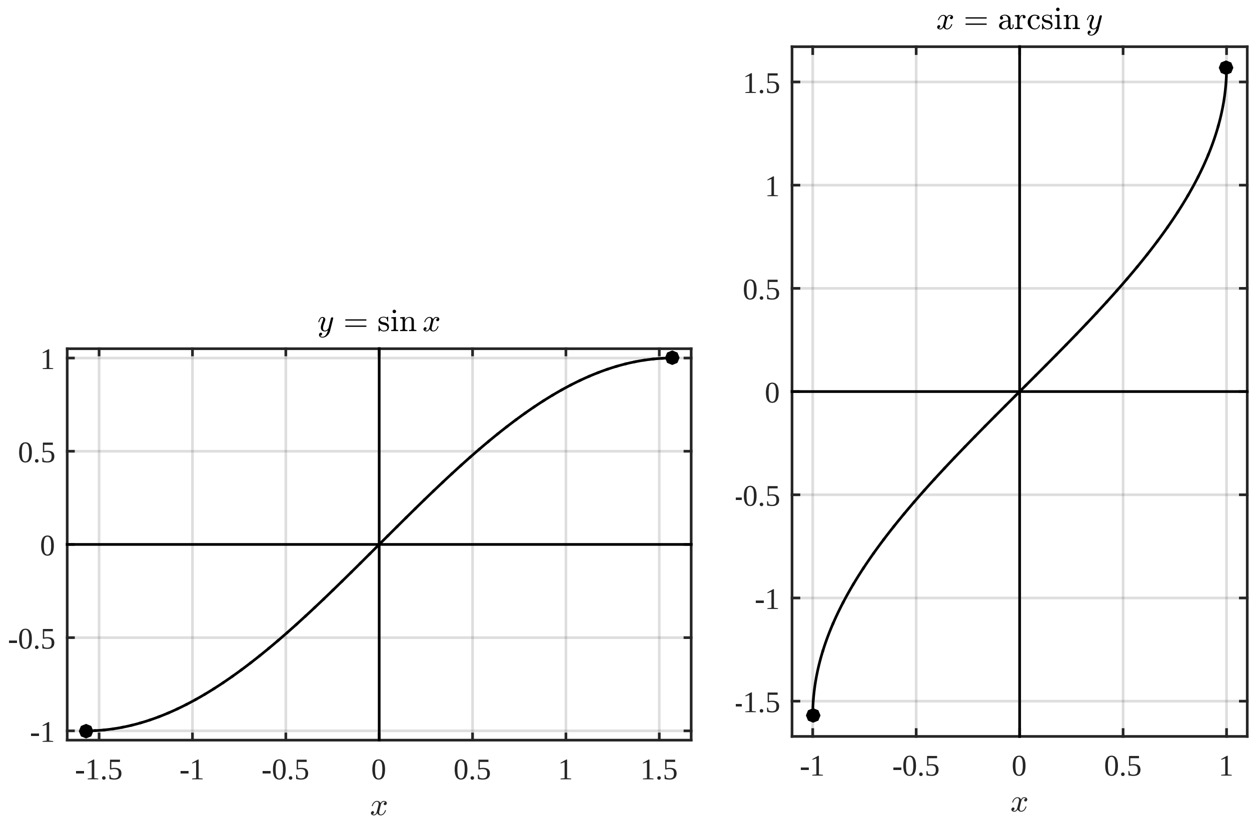
2. *Η αντίστροφη f^{-1} είναι επίσης 1-1, και έχει ως αντίστροφη την $f(x)$, επομένως και $f(f^{-1}(y)) = y$*

3. *Αν η f είναι γνησίως αύξουσα (φθίνουσα), τότε είναι και η f^{-1} γνησίως αύξουσα (φθίνουσα).*

Αν έχουμε στη διάθεσή μας το γράφημα της $f(x)$, μπορούμε εύκολα να απεικονίσουμε το γράφημα της $f^{-1}(y)$ με τον συνήθη τρόπο (δηλαδή, ώστε ο άξονας της ανεξάρτητης μεταβλητής y να δείχνει προς τα δεξιά και ο άξονας της εξαρτημένης μεταβλητής x να δείχνει προς τα πάνω), παίρνοντας το συμμετρικό του γραφήματος της f γύρω από την ευθεία $y = x$. Δείτε το Σχήμα 4.4. Αυτό συμβαίνει διότι η συμμετρία περί την ευθεία αυτή αντιστοιχεί τα σημεία (x_0, y_0) στα σημεία (y_0, x_0). (Δείτε την Άσκηση 4.16). Πάντως, αν έχουμε μπροστά μας το γράφημα της f, ουσιαστικά έχουμε και το γράφημα της f^{-1}, με τη διαφορά ότι (σε σχέση με το συνηθισμένο τρόπο που παρουσιάζουμε γραφήματα), ο άξονας της ανεξάρτητης μεταβλητής y κοιτάζει προς τα πάνω, και ο άξονας της εξαρτημένης μεταβλητής x κοιτάζει προς τα δεξιά. Αυτός ο τρόπος απεικόνισης μιας συνάρτησης είναι εξίσου διαισθητικός με τον συνηθισμένο, απλώς δεν είναι ο συνηθισμένος! Αν, πάντως, επιμένετε να θέλετε να δείτε το γράφημα της αντίστροφης συνάρτησης με τον συνηθισμένο τρόπο, φανταστείτε ότι κοιτάζετε το αρχικό γράφημα μέσα από τη σελίδα, και έχοντας γείρει το κεφάλι σας αριστερά κατά 90 μοίρες.

Θεώρημα 4.6. ***(Συνέχεια αντίστροφης συνάρτησης)*** *Έστω 1-1 συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και η αντίστροφή της $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$.*

1. *Αν η f είναι συνεχής στο a, τότε και η f^{-1} είναι συνεχής στο $b = f(a)$.*



Σχήμα 4.5: Η συνάρτηση του ημιτόνου $y = \sin x$ στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$ και η αντίστροφή της τόξο ημιτόνου $x = \arcsin y$ στο διάστημα $[-1, 1]$.

2. *Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα I, τότε και η f^{-1} είναι συνεχής στο διάστημα $J = f(I)$.*

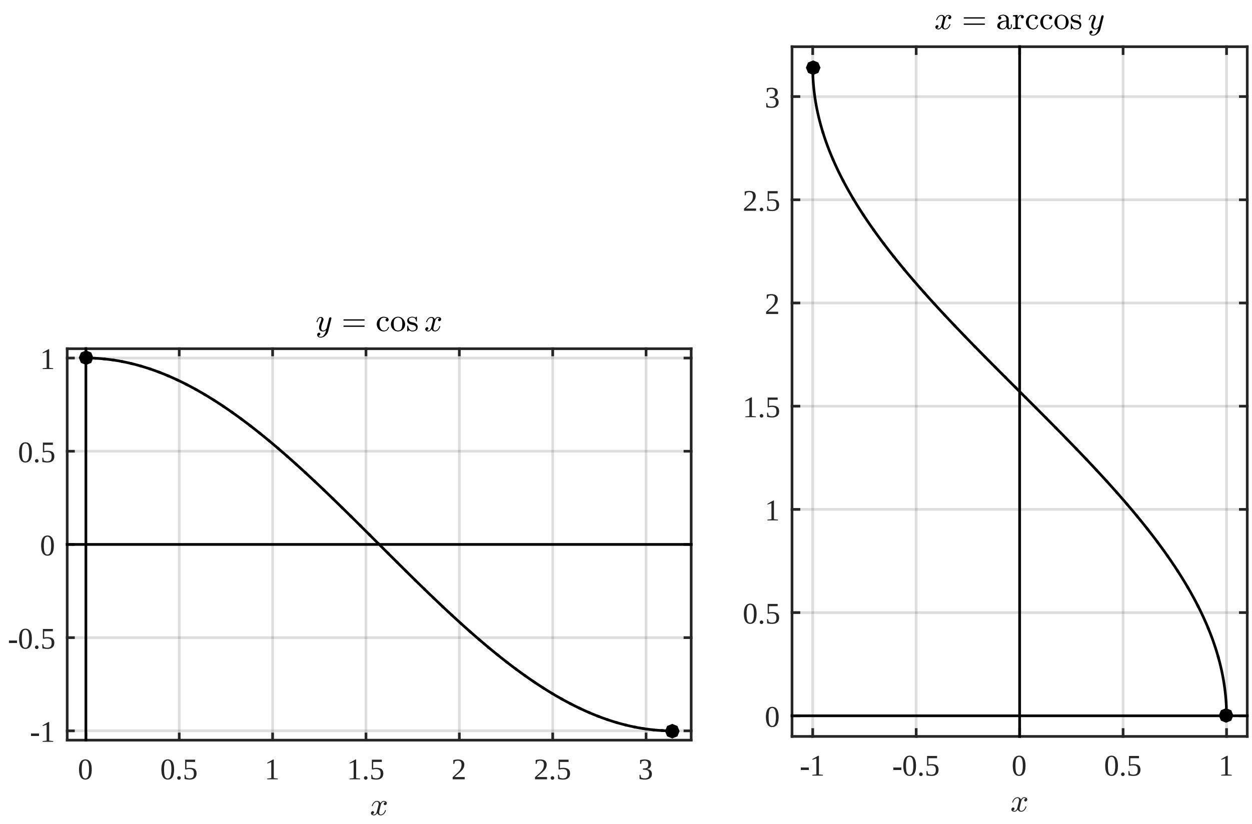
Η απόδειξη του θεωρήματος είναι αρκετά μεγάλη, και γι' αυτό θα την παραλείψουμε. Πάντως, το θεώρημα είναι διαισθητικά εντελώς αναμενόμενο. Πράγματι, συνέχεια σημαίνει να μπορούμε να γράψουμε το γράφημα της συνάρτησης με μια συνεχή γραμμή. Όμως, η συνάρτηση και η αντίστροφή της έχουν ουσιαστικά το ίδιο γράφημα.

Παράδειγμα 4.7. (Αντίστροφες τριγωνομετρικών συναρτήσεων) Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού τους. Μπορούμε όμως να τις ορίσουμε σε ένα μικρότερο πεδίο ορισμού, και να ορίσουμε έτσι τις αντίστροφές τους:

1. Έστω η συνάρτηση του ημίτονου $\sin x$ στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$. Σε αυτό το διάστημα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, επομένως είναι 1-1 και έχει αντίστροφη, την οποία καλούμε **τόξο ημιτόνου** $\arcsin y$. Οι δύο συναρτήσεις εμφανίζονται στο Σχήμα 4.5.

2. Έστω η συνάρτηση του συνημιτόνου $\cos x$ στο διάστημα $[0, \pi]$. Σε αυτό το διάστημα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, επομένως είναι 1-1 και έχει αντίστροφη, την οποία καλούμε **τόξο συνημιτόνου** $\arccos y$. Οι δύο συναρτήσεις εμφανίζονται στο Σχήμα 4.6.

3. Έστω η συνάρτηση της εφαπτομένης $\tan x$ στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$. Σε αυτό το διάστημα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, επομένως είναι 1-1 και έχει αντίστροφη, την οποία καλούμε **τόξο εφαπτομένης** $\arctan y$. Οι δύο συναρτήσεις εμφανίζονται στο Σχήμα 4.7.



Σχήμα 4.6: Η συνάρτηση του συνημιτόνου $y = \cos x$ στο διάστημα $[0, \pi]$ και η αντίστροφή της τόξο συνημιτόνου $x = \arccos y$ στο διάστημα $[-1, 1]$.

4. Έστω η συνάρτηση της συνεφαπτομένης $\cot x$ στο διάστημα $(0, \pi)$. Σε αυτό το διάστημα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, επομένως είναι 1-1 και έχει αντίστροφη, την οποία καλούμε **τόξο συνεφαπτομένης** $\operatorname{arccot} y$. Οι δύο συναρτήσεις εμφανίζονται στο Σχήμα 4.8.

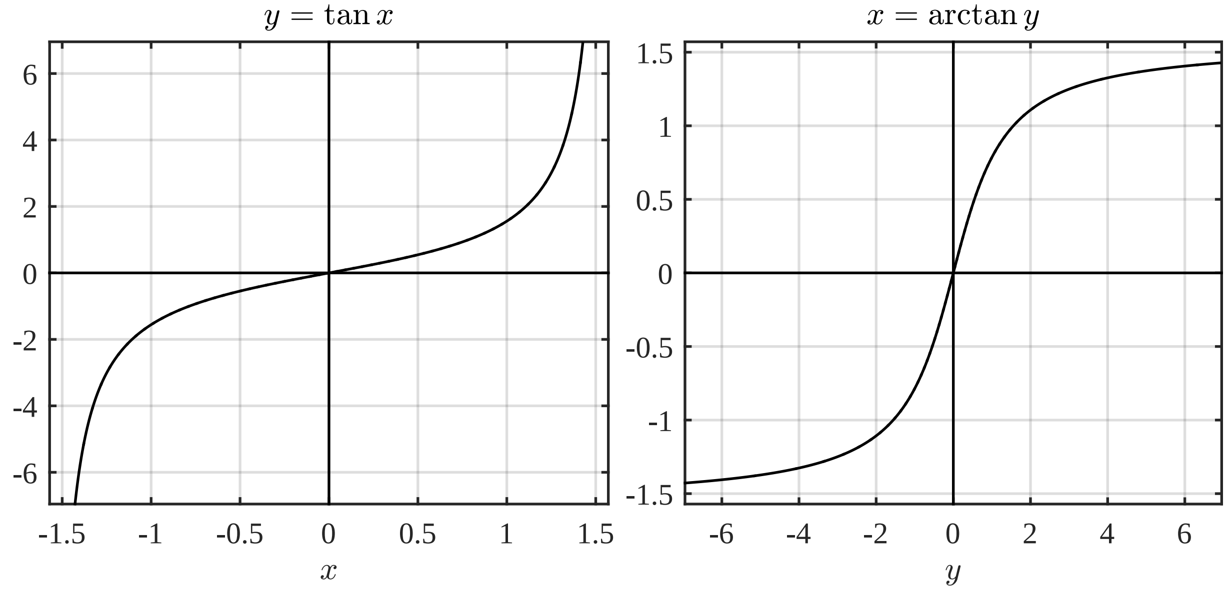
Από το Θεώρημα 4.6, όλες οι παραπάνω αντίστροφες τριγωνομετρικές είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού τους.

Θα μπορούσαμε να είχαμε ορίσει τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις διαφορετικά, επιλέγοντας διαφορετικά πεδία ορισμού για τις αρχικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Δείτε την Άσκηση 4.17. Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις καλούνται τόξα (ημίτονου, κ.ο.κ.), διότι εκφράζουν ακριβώς αυτή την έννοια. Για παράδειγμα, $\arcsin 1 = \pi/2$ σημαίνει ότι το τόξο ημίτονου 1, δηλαδή με ημίτονο 1 (εννοείται στο πεδίο ορισμού του ημίτονου όπως ορίστηκε παραπάνω) είναι το $\pi/2$.

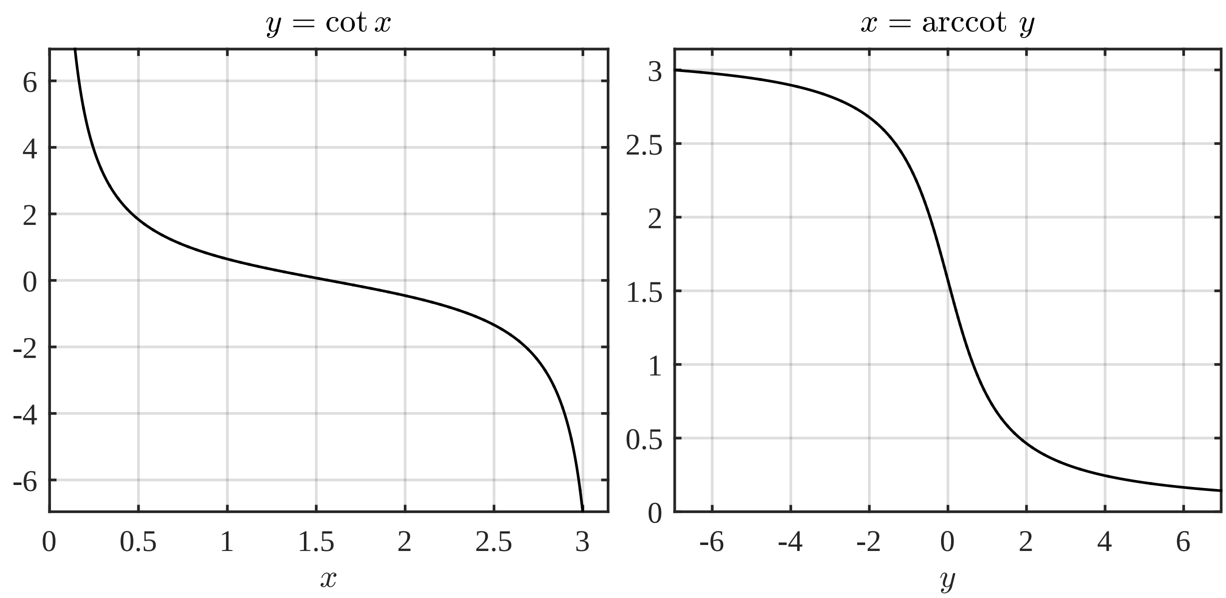
Παράδειγμα 4.8. (Συνάρτηση ρίζας) Θυμηθείτε ότι στο Θεώρημα 1.1 ορίσαμε την n-οστή ρίζα $y^{\frac{1}{n}}$ ενός αριθμού y.

1. Έστω η συνάρτηση $y = f(x) = x^n$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με n περιττό φυσικό. Επειδή η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα παντού στο πεδίο ορισμού της (Άσκηση 1.15), προκύπτει πως η αντίστροφή της $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{n}}$ είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

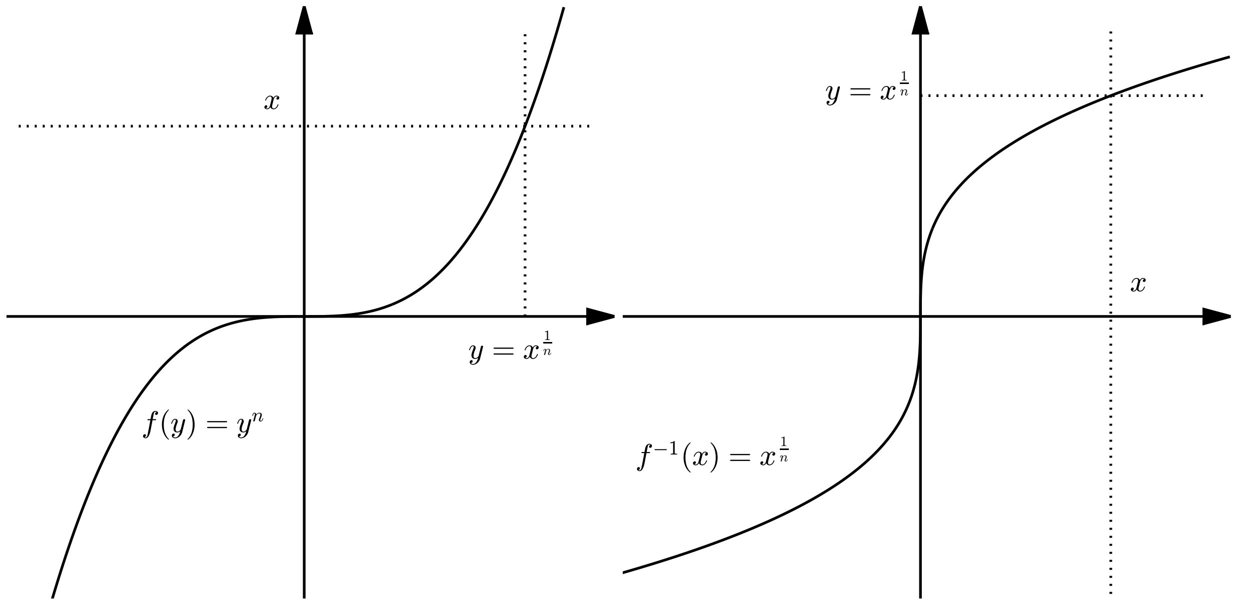
2. Έστω η συνάρτηση $y = f(x) = x^n$ ορισμένη στο $[0, \infty)$, με n άρτιο φυσικό. Επειδή η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα παντού στο πεδίο ορισμού της (Άσκηση 1.15), προκύπτει πως η αντίστροφή της



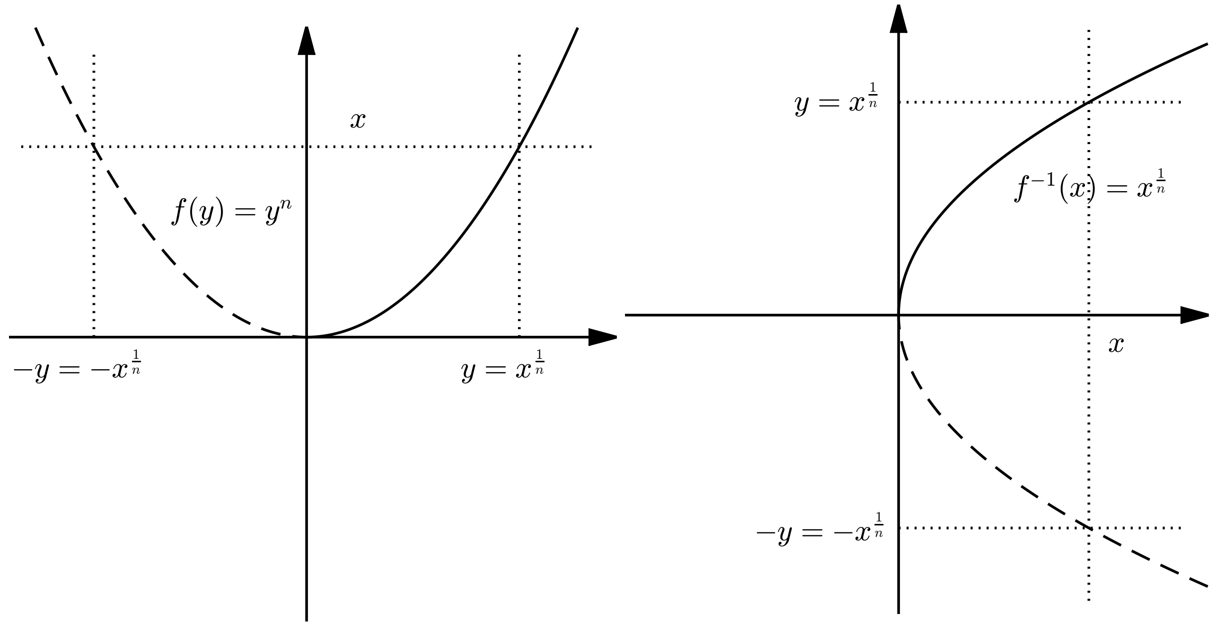
Σχήμα 4.7: Η συνάρτηση της εφαπτόμενης $y = \tan x$ στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$ και η αντίστροφή της τόξο εφαπτόμενης $x = \arctan y$ στο διάστημα $(-\infty, \infty)$.



Σχήμα 4.8: Η συνάρτηση της συνεφαπτομένης $y = \cot x$ στο διάστημα $(0, \pi)$ και η αντίστροφή της τόξο συνεφαπτομένης $x = \arctan y$ στο διάστημα $(-\infty, \infty)$.



Σχήμα 4.9: Η συνάρτηση $x = f(y) = y^n$ για n περιττό στο διάστημα $(-\infty, \infty)$ και η αντίστροφή της $y = f^{-1}(x)$.



Σχήμα 4.10: Η συνάρτηση $x = f(y) = y^n$ για n άρτιο στο διάστημα $[0, \infty)$ και η αντίστροφή της $y = f^{-1}(x)$.

$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{n}}$ είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

Δείτε τα Σχήματα 4.9, 4.10. Από το Θεώρημα 4.6, οι παραπάνω αντίστροφες είναι επίσης συνεχείς στα πεδία ορισμού τους.

Ασκήσεις

4.15. (Βασικές ιδιότητες αντίστροφης συνάρτησης) Αποδείξτε την Πρόταση 4.7. Για το τελευταίο σκέλος, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις Ασκήσεις 2.6 και 2.7.

4.16. (Συμμετρία περί την ευθεία $x = y$) Να δείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου (x_0, y_0) ως προς την ευθεία $x = y$ είναι το (y_0, x_0).

4.17. (Εναλλακτικός ορισμός τριγωνομετρικών συναρτήσεων) Ορίστε διαφορετικά τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις του Παραδείγματος 4.7 χρησιμοποιώντας τα ακόλουθα πεδία ορισμού:

1. Το $[\pi/2, 3\pi/2]$ για το ημίτονο $\sin x$.

2. Το $[-\pi, 0]$ για το συνημίτονο $\cos x$.

3. Το $(\pi/2, 3\pi/2)$ για την εφαπτομένη $\tan x$.

4. Το $(-\pi, 0)$ για τη συνεφαπτομένη $\cot x$.

Τι μονοτονία έχουν σε αυτή την περίπτωση;

4.4 Μέθοδος της Διχοτόμησης

Το Θεώρημα του Bolzano μας δίνει την ευκαιρία να παρουσιάσουμε την πρώτη μας μέθοδο Αριθμητικής Ανάλυσης, και συγκεκριμένα τη Μέθοδο της Διχοτόμησης. Με αυτήν τη μέθοδο μπορούμε να προσδιορίζουμε με όσο μεγάλη ακρίβεια θέλουμε ρίζες συναρτήσεων.

Ορισμός 4.4. ***(Ρίζα συνάρτησης)*** *Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Κάθε x^* για το οποίο $f(x^*) = 0$ καλείται* ***ρίζα*** *της f.*

Η εύρεση των ριζών μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι εξαιρετικά χρήσιμη διαδικασία, καθώς σε αυτήν ανάγονται πολλά προβλήματα των επιστημών του μηχανικού και άλλων εφαρμοσμένων επιστημών. Δυστυχώς, εκτός από λίγες ειδικές περιπτώσεις για τη συνάρτηση $f(x)$ (για παράδειγμα τις περιπτώσεις που η $f(x)$ είναι πολυώνυμο μέχρι τετάρτου βαθμού), δεν υπάρχει τύπος που να μας δίνει τις ρίζες μιας συνάρτησης. Γι' αυτόν το λόγο, έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι με τις οποίες μπορούμε να προσδιορίσουμε μια *προσέγγιση* μιας ρίζας *οποιασδήποτε* συνάρτησης, *με όση ακρίβεια θέλουμε*. Η πιο απλή από αυτές τις μεθόδους είναι η Μέθοδος της Διχοτόμησης.

Η μέθοδος βασίζεται στην παρατήρηση ότι για $f(x)$ συνεχή, αν έχουμε βρει δύο σημεία a, b που να μην είναι ρίζες και τέτοια ώστε $f(a)f(b) < 0$ (δηλαδή οι τιμές της συνάρτησης στα a, b είναι ετερόσημες), τότε το Θεώρημα του Bolzano μας εξασφαλίζει ότι μεταξύ των a, b θα υπάρχει σίγουρα κάποια ρίζα. Επιπλέον, αν ορίσουμε το ενδιάμεσο σημείο $m = (a + b)/2$, τότε υπάρχουν τρία ενδεχόμενα:

1. Αν $f(m) = 0$, τότε το m είναι ρίζα της f.

2. Αν το $f(m)$ έχει το ίδιο πρόσημο με το $f(a)$, θα έχει διαφορετικό πρόσημο με το $f(b)$ (αφού εξ υποθέσεως τα $f(a)$, $f(b)$ είναι ετερόσημα), και επομένως υπάρχει ρίζα στο διάστημα (m, b) που έχει *το μισό* του μήκους του αρχικού διαστήματος (a, b) όπου αναζητούσαμε ρίζα.

3. Ανάλογα, αν το $f(m)$ έχει το ίδιο πρόσημο με το $f(b)$, θα έχει διαφορετικό πρόσημο με το $f(a)$, και επομένως υπάρχει ρίζα στο διάστημα (a, b) που και πάλι έχει *το μισό* του αρχικού μήκους.

Η Μέθοδος της Διχοτόμησης είναι ο ακόλουθος αλγόριθμος: ξεκινώντας από ένα αρχικό διάστημα (a, b) με $f(a)f(b) < 0$, σε κάθε βήμα εξετάζουμε το $m = (a + b)/2$ και έτσι είτε βρίσκουμε μια ρίζα, είτε βρίσκουμε ένα μικρότερο διάστημα όπου υπάρχει η ρίζα. Τελικά, είτε θα βρούμε τη ρίζα, είτε θα την προσεγγίσουμε με όση ακρίβεια θέλουμε, δηλαδή θα βρούμε ένα x_0 τέτοιο ώστε $|x_0 - x^*| < E_x$ όπου η **ανοχή** E_x είναι ένας θετικός αριθμός, όσο μικρός θέλουμε.

Στην πράξη, συνήθως αρκεί να βρούμε κάποιο x_0 τέτοιο ώστε το $f(x_0)$ να είναι πολύ μικρό, κατ' απόλυτη τιμή, δηλαδή $|f(x_0)| < E_f$ όπου η **ανοχή** E_f είναι ένας θετικός αριθμός, όσο μικρός θέλουμε.

Στον ακόλουθο ψευδοκώδικα έχουμε κωδικοποιήσει τη Μέθοδο της Διχοτόμησης λαμβάνοντας υπόψη την τελευταία παρατήρηση:

```
/* BISECTION METHOD */

function bisection(f,a,b,Ex,Ef)

/* INPUT:                                                */
/* f: A function whose root is needed                    */
/* a,b: Root inside (a,b) will be returned, f(a)f(b)<0   */
/* Ex:  Maximum tolerance in value of root               */
/*      Initially b-a>Ex                                 */
/* Ef:  Maximum tolerance in value of function           */
/*      at estimated root location.                      */
/*      Initially  |f(a)|>Ef, |f(b)|>Ef                  */

m=(a+b)/2;  /* Initialization */

WHILE (b-a)/2>Ex AND |f(m)|>Ef, /* We halve the interval */
    IF f(m)f(a)<0,
       b=m;
    ELSEIF f(m)f(b)<0,
       a=m;
    END;
    m=(a+b)/2;
END;

RETURN m /* m is estimate of root x*. |f(m)|<Ef or |m-x*|<Ex */
```

Σε αυτό το σημείο πρέπει να γίνουν αρκετές σημαντικές παρατηρήσεις.

Καταρχάς, μια αφελής ερώτηση είναι γιατί ασχολούμαστε με την ανάπτυξη τέτοιων αλγορίθμων, τη στιγμή που θα μπορούσαμε απλώς να τυπώσουμε, με τη βοήθεια υπολογιστή, το γράφημα της συνάρτησης με αρκετά μεγάλη ακρίβεια, και να προσδιορίσουμε έτσι τη ρίζα. Η απάντηση είναι ότι με αυτήν τη μέθοδο θα χρειαστούμε να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης *πολύ* περισσότερες φορές (μία για κάθε σημείο του γραφήματος που προσδιορίζουμε!) απ' ό,τι με τη Μέθοδο της Διχοτόμησης, για να προσδιορίσουμε τη ρίζα με την ίδια ακρίβεια. Ενδεχομένως το κόστος του να τυπώσουμε ένα γράφημα να μοιάζει πολύ μικρό, αλλά στην πραγματικότητα είναι πολύ μεγάλο, διότι πολύ συχνά για να λύσουμε ένα μαθηματικό πρόβλημα (όπως για παράδειγμα η εύρεση της ελάχιστης τιμής μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών) πρέπει να υπολογίσουμε ένα τεράστιο πλήθος ριζών. Σε πολλές περιπτώσεις, μάλιστα, προκειμένου να βρούμε την τιμή της συνάρτησης σε ένα σημείο πρέπει να λύσουμε ένα άλλο μαθητικό πρόβλημα, που ενδεχομένως και αυτό να χρειάζεται μεγάλο αριθμό πράξεων. Γι' αυτούς τους λόγους, η προσέγγιση που υιοθετούμε στην Αριθμητική Ανάλυση είναι ότι *κάθε* υπολογισμός της τιμής μιας συνάρτησης κοστίζει, και ο στόχος είναι να τους ελαχιστοποιήσουμε.

Ένα θετικό σημείο της Μεθόδου της Διχοτόμησης είναι ότι εγγυημένα θα μας επιστρέψει κάποια ρίζα. Υπάρχουν αλγόριθμοι οι οποίοι *δεν* εξασφαλίζουν την εύρεση μιας ρίζας, έχουν όμως άλλα πλεονεκτήματα, είναι για παράδειγμα πιο γρήγοροι. Η Μέθοδος του Νεύτωνα, που θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου αλγόριθμου. Ένα άλλο θετικό της Μεθόδου της Διχοτόμησης είναι ότι ναι μεν απαιτεί τη συνέχεια της $f(x)$, κάτι που στην πράξη ικανοποιείται εύκολα, αλλά τίποτα άλλο, όπως για παράδειγμα την παραγωγισιμότητά της. (Η Μέθοδος του Νεύτωνα απαιτεί την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης.)

Παρατηρήστε ότι ο αλγόριθμος δεν επιστρέφει *όλες* τις ρίζες που υπάρχουν στο διάστημα $[a, b]$, αλλά μόνο *μία*. Στα παραδείγματα που θα εξετάσουμε στη συνέχεια, θα δούμε ότι μπορεί κάλλιστα ξεκινώντας από δύο επικαλυπτόμενα και ελαφρώς διαφορετικά διαστήματα εντός των οποίων υπάρχουν δύο ρίζες, τη μια φορά να βρούμε τη μια ρίζα και την άλλη φορά την άλλη!

Σχετικά με την ταχύτητα σύγκλισης, παρατηρήστε ότι σε κάθε επανάληψη του αλγόριθμου η αβεβαιότητα που έχουμε για τη θέση της ρίζας μειώνεται στο μισό. Για παράδειγμα, μετά από δέκα επαναλήψεις, η αβεβαιότητα έχει μειωθεί στο $\frac{1}{2^{10}}$, δηλαδή περίπου στο ένα χιλιοστό της αρχικής. Για τα δεδομένα της Αριθμητικής Ανάλυσης, ο ρυθμός αυτός είναι σχετικά μικρός.

Τέλος, ένα πρόβλημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε με αυτήν τη μέθοδο είναι ότι για να τη χρησιμοποιήσουμε πρέπει να προσδιορίσουμε το αρχικό διάστημα $[a, b]$ για το οποίο χρειαζόμαστε $f(a)f(b) < 0$. Στην περισσότερες περιπτώσεις, η φύση της $f(x)$ και του προβλήματος από το οποίο προέρχεται είναι αρκετά για να μας δώσουν σχετικά εύκολα τις τιμές a, b.

Παράδειγμα 4.9. (Εφαρμογή Μεθόδου Διχοτόμησης) Προκειμένου να κατανοήσουμε τη Μέθοδο της Διχοτόμησης, θα μελετήσουμε την εφαρμογή της στις τρεις περιπτώσεις του ακόλουθου πίνακα:

Συνάρτηση $f(x)$	$x - \cos x$	$\frac{x}{8} - \sin(x-3)$	$\frac{x}{8} - \sin(x-3)$
Αρχικό αριστερό άκρο a	0	-5	-5
Αρχικό δεξί άκρο b	π	5	4
Συνολικός αριθμός επαναλήψεων N	10	10	10
Εκτίμηση ρίζας x_0	0.7394	3.4473	-3.7783
Μέγιστο σφάλμα E	0.0031	0.0195	0.0176

Και στις τρεις περιπτώσεις, επιλέξαμε τέτοιες ανοχές E_x, E_f, ώστε να γίνουν ακριβώς 10 επαναλήψεις. Παρατηρήστε πως η δεύτερη και η τρίτη περίπτωση αφορούν την ίδια συνάρτηση, αλλά η εκκίνηση της μεθόδου γίνεται από ελαφρώς διαφορετικά διαστήματα. Το αποτέλεσμα είναι ότι εντοπίζονται διαφορετικές ρίζες! Δείτε στη συνέχεια προσεκτικά τις επαναλήψεις αυτών των περιπτώσεων και βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε γιατί γίνεται αυτό.

Ακολούθως, εξετάζουμε με λεπτομέρεια την εκτέλεση της μεθόδου σε κάθε περίπτωση. Στους ακόλουθους πίνακες έχουμε συγκεντρώσει τις τιμές a, b, m, $f(a)$, $f(b)$, $f(m)$ της μεθόδου στην αρχή της κάθε επανάληψης n του παραπάνω ψευδοκώδικα.

n	a	b	m	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1	0	3.1416	1.5708	-1.0000	4.1416	1.5708
2	0	1.5708	0.7854	-1.0000	1.5708	0.0783
3	0	0.7854	0.3927	-1.0000	0.0783	-0.5312
4	0.3927	0.7854	0.5890	-0.5312	0.0783	-0.2424
5	0.5890	0.7854	0.6872	-0.2424	0.0783	-0.0858
6	0.6872	0.7854	0.7363	-0.0858	0.0783	-0.0046
7	0.7363	0.7854	0.7609	-0.0046	0.0783	0.0366
8	0.7363	0.7609	0.7486	-0.0046	0.0366	0.0159
9	0.7363	0.7486	0.7424	-0.0046	0.0159	0.0056
10	0.7363	0.7424	0.7394	-0.0046	0.0056	0.0005

n	a	b	m	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1	-5.0000	5.0000	0	0.3644	-0.2843	0.1411
2	0	5.0000	2.5000	0.1411	-0.2843	0.7919
3	2.5000	5.0000	3.7500	0.7919	-0.2843	-0.2129
4	2.5000	3.7500	3.1250	0.7919	-0.2129	0.2660
5	3.1250	3.7500	3.4375	0.2660	-0.2129	0.0060
6	3.4375	3.7500	3.5938	0.0060	-0.2129	-0.1103
7	3.4375	3.5938	3.5156	0.0060	-0.1103	-0.0536
8	3.4375	3.5156	3.4766	0.0060	-0.0536	-0.0242
9	3.4375	3.4766	3.4570	0.0060	-0.0242	-0.0092
10	3.4375	3.4570	3.4473	0.0060	-0.0092	-0.0016

n	a	b	m	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1	-5.0000	4.0000	-0.5000	0.3644	-0.3415	-0.4133
2	-5.0000	-0.5000	-2.7500	0.3644	-0.4133	-0.8520
3	-5.0000	-2.7500	-3.8750	0.3644	-0.8520	0.0735
4	-3.8750	-2.7500	-3.3125	0.0735	-0.8520	-0.3848
5	-3.8750	-3.3125	-3.5938	0.0735	-0.3848	-0.1436
6	-3.8750	-3.5938	-3.7344	0.0735	-0.1436	-0.0308
7	-3.8750	-3.7344	-3.8047	0.0735	-0.0308	0.0226
8	-3.8047	-3.7344	-3.7695	0.0226	-0.0308	-0.0038
9	-3.8047	-3.7695	-3.7871	0.0226	-0.0038	0.0095
10	-3.7871	-3.7695	-3.7783	0.0095	-0.0038	0.0029

Στα Σχήματα 4.11, 4.12, και 4.13 εμφανίζουμε την εκτέλεση της μεθόδου για τις τρεις περιπτώσεις. Σε κάθε σχήμα, τα σημεία 0, 1, 2 είναι τα a, b, m αντιστοίχως, ενώ τα σημεία $3, \ldots, 13$ είναι τα m που βρίσκει η μέθοδος στο τέλος της κάθε επανάληψης (γραμμή 8 του ψευδοκώδικα).

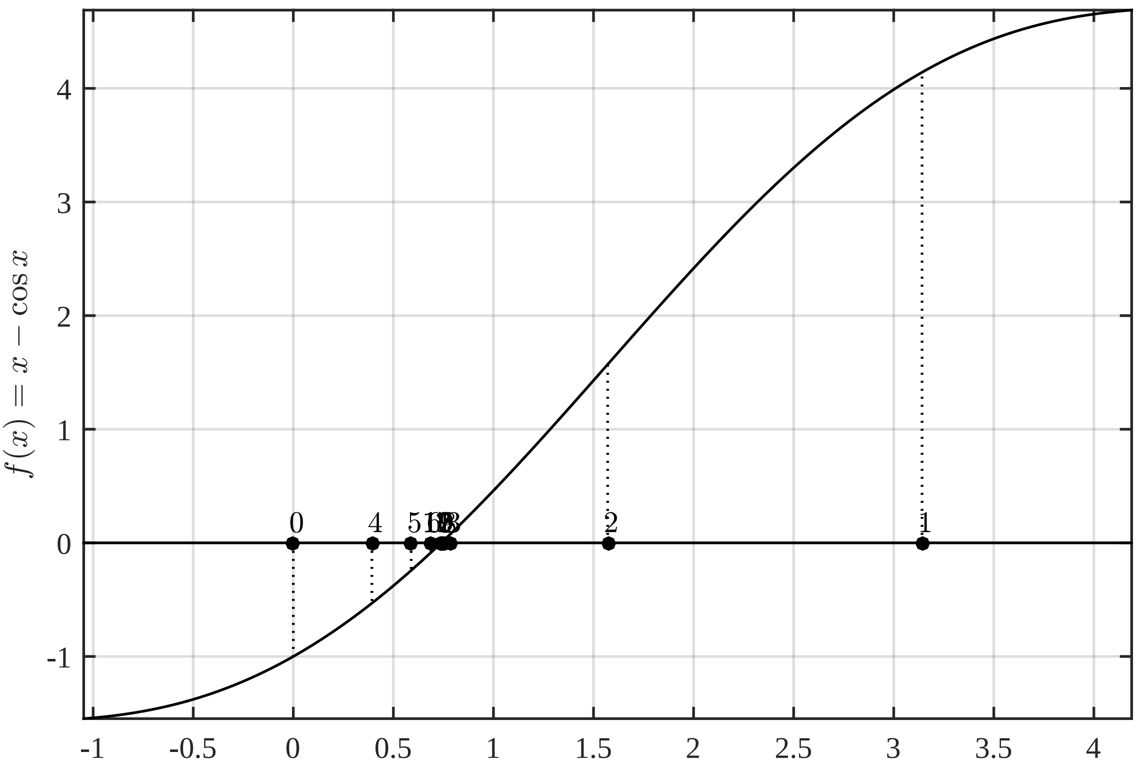
Ασκήσεις

4.18. [$\star\star$] (Υλοποίηση Μεθόδου Διχοτόμησης) Να υλοποιήσετε τη Μέθοδο της Διχοτόμησης σε μια γλώσσα προγραμματισμού της επιλογής σας. Το πρόγραμμα που θα υλοποιήσετε θα πρέπει να δέχεται ως είσοδο ένα αρχικό διάστημα στο οποίο είναι γνωστό ότι υπάρχει μια ρίζα, και το πλήθος των επαναλήψεων. Η συνάρτηση της οποίας αναζητείται η ρίζα μπορεί να δίνεται είτε σαν όρισμα, είτε να υλοποιείται εντός του προγράμματος. Το πρόγραμμα πρέπει να παρέχει ως έξοδο την εκτίμηση για τη ρίζα, καθώς και να εκτυπώνει ενδιάμεσα αποτελέσματα, σε τέσσερις στήλες, ως εξής:

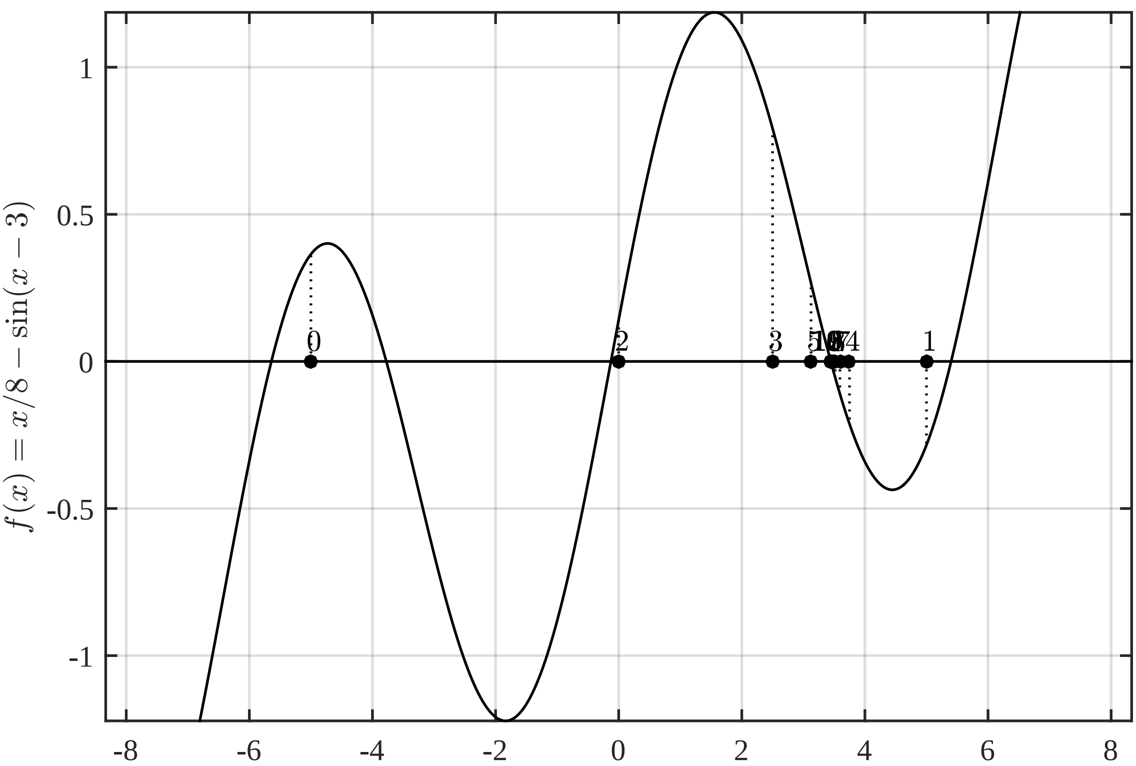
1. Η πρώτη στήλη να δείχνει την επανάληψη.
2. Η δεύτερη στήλη να δείχνει το αριστερό άκρο του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης,
3. Η τρίτη στήλη να δείχνει το δεξί άκρο του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης,
4. Η τέταρτη στήλη να δείχνει την τιμή της συνάρτησης στο μέσου του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης,

4.19. (Αριθμητικός υπολογισμός ρίζας) Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 4.18 για να προσδιορίσετε μια ρίζα της συνάρτησης $f(x) = x - \cos x$, ξεκινώντας από το αρχικό διάστημα $[0, \pi]$ και εκτελώντας 20 επαναλήψεις.

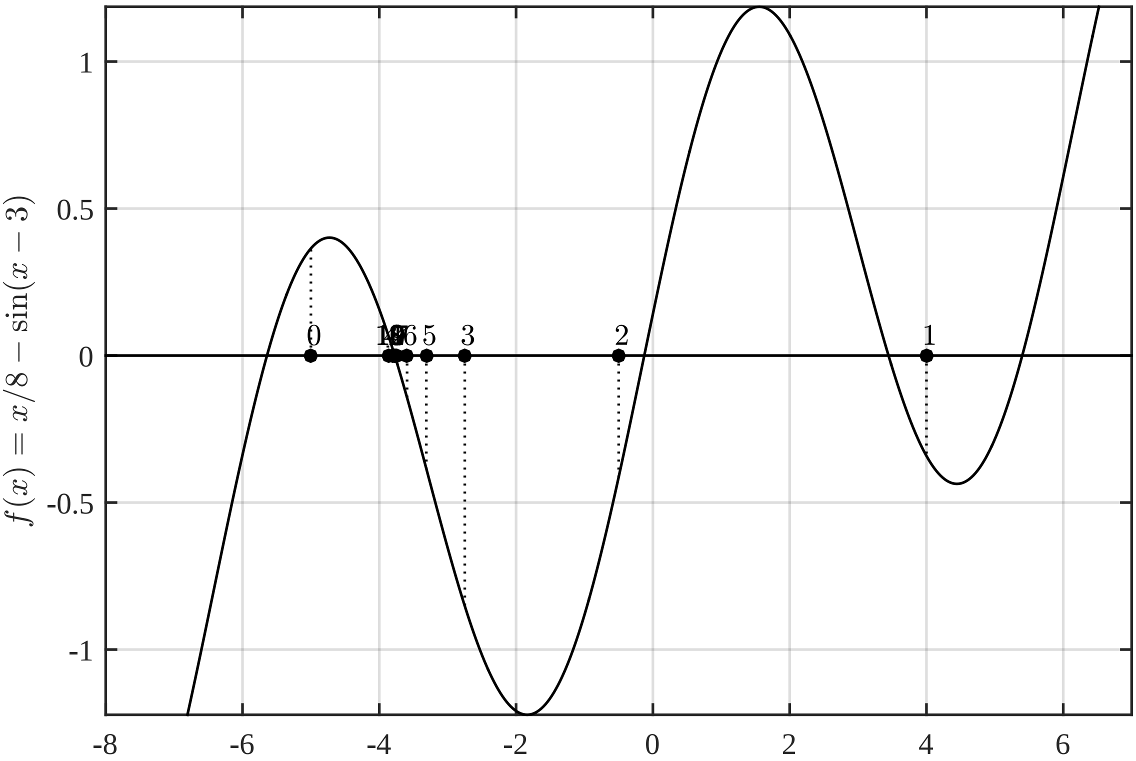
4.20. [Σ/Λ, Π] (Άπειρες ρίζες 1) Υπάρχει συνάρτηση με άπειρες ρίζες.



Σχήμα 4.11: Εκτέλεση της Μεθόδου της Διχοτόμησης για τη συνάρτηση $f(x) = x - \cos x$ με αρχικά σημεία $a = 0$, $b = \pi$.



Σχήμα 4.12: Εκτέλεση της Μεθόδου της Διχοτόμησης για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{8} - \sin(x - 3)$ με αρχικά σημεία $a = -5$, $b = 5$.



Σχήμα 4.13: Εκτέλεση της Μεθόδου της Διχοτόμησης για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{8} - \sin(x-3)$ με αρχικά σημεία $a = -5$, $b = 4$.

4.21. [Σ/Λ, Π] (Άπειρες ρίζες 2) Υπάρχει μη σταθερή συνάρτηση με άπειρες ρίζες.

4.22. [Σ/Λ, Π] (Άπειρες ρίζες 3) Υπάρχει μη σταθερή συνεχής συνάρτηση με άπειρες ρίζες.

4.23. [Σ/Λ, Π] (Άπειρες ρίζες 4) Υπάρχει μη σταθερή συνεχής συνάρτηση με άπειρες ρίζες σε φραγμένο διάστημα.

4.24. [Σ/Λ, Π] (Άπειρες ρίζες 5) Υπάρχει μη σταθερή συνεχής συνάρτηση με άπειρες ρίζες σε φραγμένο κλειστό διάστημα.

4.25. [Σ/Λ, $\star$, Π] (Άπειρες ρίζες 6) Υπάρχει συνεχής συνάρτηση που δεν είναι σταθερή σε κανένα διάστημα που είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, η οποία έχει άπειρες ρίζες σε κάποιο φραγμένο κλειστό διάστημα.

4.5 Συνέχεια Lipschitz

Θα ολοκληρώσουμε το κεφάλαιο με μια σύντομη αναφορά στη συνέχεια (κατά) Lipschitz, για την ακρίβεια σε μια απλή μορφή της.

Ορισμός 4.5. ***(Συνέχεια Lipschitz)*** *Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται Lipschitz (συνεχής) στο διάστημα I αν υπάρχει κάποια σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος $x, y \in A$ να ισχύει*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|.$$

Η συνέχεια Lipschitz ουσιαστικά σημαίνει ότι η συνάρτηση δεν μπορεί να μεταβάλλεται πολύ γρήγορα: η μεταβολή στην τιμή της συνάρτησης, κατ’ απόλυτο τιμή, δηλαδή το $|f(x) - f(y)|$, μπορεί να είναι το πολύ ένα πολλαπλάσιο $C|x-y|$ της μεταβολής του ορίσματος κατ' απόλυτο τιμή, δηλαδή του $|x-y|$. Ο συντελεστής C είναι κοινός για όλα τα ζεύγη x, y, αλλιώς ο ορισμός δεν θα ήταν πολύ χρήσιμος!

Θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε τη συνέχεια Lipschitz γραφικά. Ας επικεντρωθούμε σε ένα συγκεκριμένο σημείο $(y, f(y))$ του γραφήματος της συνάρτησης. Παρατηρήστε πως

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| \leq C|x-y| &\Leftrightarrow -C|x-y| \leq f(x)-f(x) \leq C|x-y| \\ &\Leftrightarrow f(y)-C|x-y| \leq f(x) \leq f(y)+C|x-y| \Leftrightarrow \\ &\left\{ \begin{array}{ll} x \geq y, & f(y)-C(x-y) \leq f(x) \leq f(y)+C(x-y) \\ x \leq y, & f(y)-C(y-x) \leq f(x) \leq f(y)+C(y-x) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Ας ορίσουμε τις γραμμικές συναρτήσεις

$$g(x) = f(y) + C(x-y), \quad h(x) = f(y) - C(x-y),$$

οι οποίες διέρχονται από το σημείο $(x, f(x))$, η πρώτη αυξάνοντας με ρυθμό C, και η δεύτερη μειούμενη με ρυθμό C. Εισάγοντας τους ορισμούς αυτούς στην τελευταία διπλή συνθήκη, προκύπτει πως ο ορισμός της συνέχειας Lipschitz είναι ισοδύναμος της ακόλουθης συνθήκης:

$$\begin{aligned} x \geq y &\Rightarrow h(x) \leq f(x) \leq g(x), \\ x \leq y &\Rightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x). \end{aligned}$$

Επομένως, η συνάρτηση πρέπει να παραμένει συνεχώς εντός του χωρίου που ορίζεται από δύο ευθείες που διέρχονται από το σημείο $(x, f(x))$, εκ των οποίων η πρώτη αυξάνει με κλίση C, και η δεύτερη μειώνεται με κλίση $-C$. Ας φανταστούμε ότι καθώς το y διατρέχει όλο το διάστημα I, το χωρίο κινείται μαζί του ώστε οι δύο ευθείες να τέμνονται συνεχώς στο $(y, f(y))$. Αν όλο το γράφημα της συνάρτησης βρίσκεται συνεχώς εντός του χωρίου, για κάποιο C (που επηρεάζει το σχήμα του χωρίου), τότε η συνάρτηση είναι Lipschitz συνεχής, αλλιώς δεν είναι.

Στα Σχήματα 4.14 και 4.15 εμφανίζουμε δύο συναρτήσεις με σκιασμένο το εν λόγω χωρίο, για μια επιλογή του σημείου y. Οι συναρτήσεις ορίζονται στο διάστημα I. Η πρώτη από τις συναρτήσεις είναι Lipschitz συνεχής στο I, η δεύτερη όμως όχι, διότι υπάρχει ένα σημείο γύρω από το οποίο η συνάρτηση αυξάνεται αυθαίρετα γρήγορα.

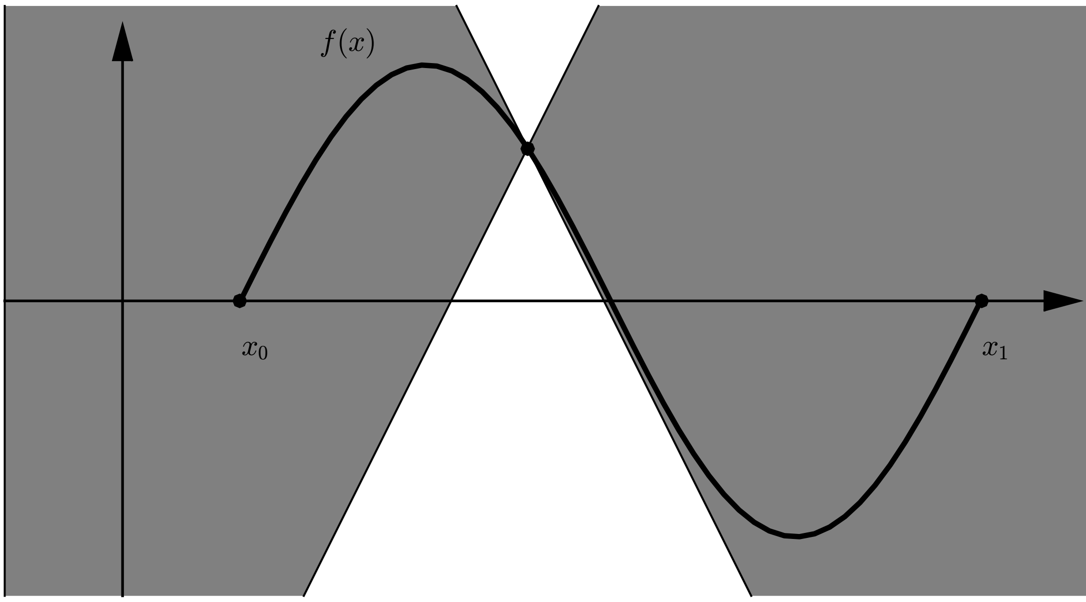
Μια σημαντική παρατήρηση που πρέπει να κάνουμε είναι ότι η συνέχεια Lipschitz, όπως την ορίσαμε εδώ, ορίζεται σε *διάστημα*, όχι σε *σημείο*. Δεν έχει, επομένως, νόημα, να λέμε ότι μια συνάρτηση είναι Lipschitz συνεχής *σε ένα σημείο*. Αντίθετα, η έννοια της συνέχειας ορίστηκε τόσο σε σημείο όσο και σε διάστημα.

Η συνέχεια Lipschitz έχει πολλές εφαρμογές. Όπως θα δούμε παρακάτω, κάθε συνάρτηση Lipschitz συνεχής σε ένα διάστημα είναι και συνεχής σε αυτό το διάστημα, άρα η συνέχεια Lipschitz μπορεί να χρησιμεύει για την απόδειξη της συνέχειας συναρτήσεων. Πιο σημαντικό όμως είναι πως η συνέχεια Lipschitz εμφανίζεται ως απαίτηση σε πολλά θεωρήματα της Αριθμητικής Ανάλυσης που εξασφαλίζουν τη σύγκλιση διαφόρων αλγορίθμων.

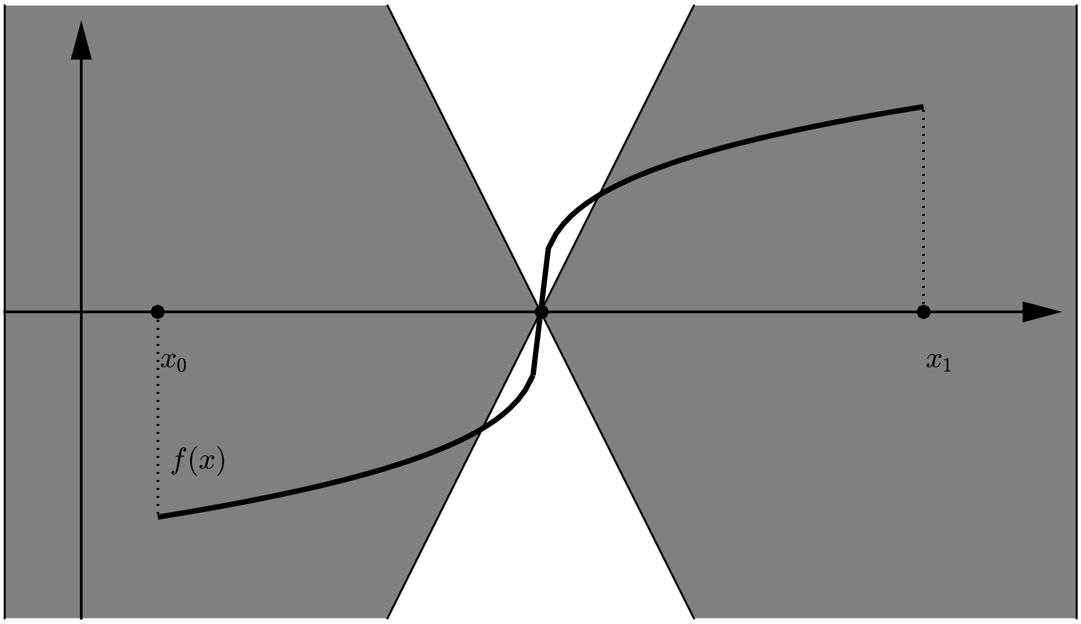
Ένα βασικό πρόβλημα είναι να προσδιορίσουμε κατά πόσο μια δοσμένη συνάρτηση είναι Lipschitz συνεχής σε ένα δοσμένο διάστημα. Η γενική μεθοδολογία που χρησιμοποιούμε είναι η εξής:

1. Στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι Lipschitz συνεχής, πρέπει ξεκινώντας από την έκφραση $|f(x) - f(y)|$ να καταλήξουμε, με αλγεβρικούς μετασχηματισμούς, σε μια μεγαλύτερη ή ίση έκφραση της μορφής $C|x-y|$.

2. Στην περίπτωση που η συνάρτηση δεν είναι Lipschitz συνεχής, πρέπει να δείξουμε ότι η ανισότητα του ορισμού δεν μπορεί να ισχύει για κανένα C, συνήθως με χρήση απαγωγής στο άτοπο.



Σχήμα 4.14: Γραφική ερμηνεία του ορισμού της συνέχειας Lipschitz στην περίπτωση μιας συνάρτησης που είναι Lipschitz συνεχής.



Σχήμα 4.15: Γραφική ερμηνεία του ορισμού της συνέχειας Lipschitz στην περίπτωση μιας συνάρτησης που δεν είναι Lipschitz συνεχής.

Ευτυχώς, για τις περισσότερες δοσμένες συναρτήσεις, είναι εύκολο να μαντέψουμε αν είναι Lipschitz συνεχείς ή όχι, χρησιμοποιώντας τη διαίσθηση που μας παρέχουν τα Σχήματα 4.14 και 4.15. Δείτε τα ακόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.10. (Συνέχεια Lipschitz της x^2) Σαν ένα απλό πρώτο παράδειγμα, θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι Lipschitz συνεχής σε όλα τα φραγμένα διαστήματα και δεν είναι Lipschitz συνεχής σε όλα τα μη φραγμένα διαστήματα. Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο: σε κάθε φραγμένο διάστημα, υπάρχει ένα φράγμα στο πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η συνάρτηση. Αυτό δεν ισχύει όμως για μη φραγμένα διαστήματα.

Έστω, καταρχάς, το φραγμένο διάστημα I για το οποίο έχουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $I \subseteq [-M, M]$ για κάποιο $M \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq |x - y|(|x| + |y|) \leq |x - y|(M + M) = 2M|x - y|.$$

Επομένως, η συνάρτηση είναι Lipschitz συνεχής με $C = 2M$.

Έστω τώρα ένα μη φραγμένο διάστημα I, και έστω ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι Lipschitz συνεχής για κάποιο συντελεστή C. Το διάστημα I είτε θα είναι το $\mathbb{R}$, είτε θα έχει τη μορφή $I = (a, \infty)$, είτε τη μορφή $I = (-\infty, a)$. Θα υποθέσουμε ότι έχει τη μορφή $I = (a, \infty)$. Η απόδειξη για τις άλλες περιπτώσεις είναι ανάλογη. Θα έχουμε, λοιπόν, για κάθε ζεύγος x, y

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \Leftrightarrow |x - y||x + y| \leq C|x - y| \Leftrightarrow |x + y| \leq C.$$

Η τελευταία ανισότητα όμως είναι άτοπο. Πράγματι, αφού $I = (a, \infty)$, μπορούμε να επιλέξουμε $x = y = C$, που με εφαρμογή στην ανισότητα δίνουν $2C \leq C$, που είναι άτοπο αφού $C > 0$.

Παράδειγμα 4.11. (Συνέχεια Lipschitz της $|x|$) Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι Lipschitz συνεχής στο $\mathbb{R}$, με $C = 1$. Πράγματι,

$$|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

λόγω της τριγωνικής ανισότητας.

Παράδειγμα 4.12. (Συνέχεια Lipschitz της $\sin x$) Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ είναι Lipschitz συνεχής στο $\mathbb{R}$, με $C = 1$. Πράγματι, από την Άσκηση 2.19 έχουμε

$$\sin\phi - \sin\theta = 2\cos\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi-\theta}{2}\right),$$

επομένως

$$|\sin x - \sin y| = \left|2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq \left|2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq 2\frac{|x-y|}{2} = |x - y|.$$

Παράδειγμα 4.13. (Συνέχεια Lipschitz της $\sqrt{x}$) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι Lipschitz συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $[a, \infty)$ με $a > 0$, αλλά όχι και στο $[0, \infty)$.

Πράγματι, έστω καταρχάς δύο σημεία $x, y \in [a, \infty)$ με $a > 0$. Παρατηρήστε πως

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}||\sqrt{x} + \sqrt{y}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} = \frac{|x - y|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}|x - y|,$$

και επομένως η συνάρτηση είναι Lipschitz συνεχής με $C = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Έστω τώρα $x, y \in [0, \infty)$. Δεν μπορούμε να γράψουμε πλέον την παραπάνω ανισότητα. Επιπλέον, έστω πως η συνάρτηση είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά C. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Θα έχουμε, για κάθε $x, y \in [0, \infty)$,

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \Leftrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq C|x - y| \Leftrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq C|\sqrt{x} - \sqrt{y}||\sqrt{x} + \sqrt{y}|$$
$$\Rightarrow 1 \leq C|\sqrt{x} + \sqrt{y}| \Rightarrow \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \leq C.$$

Στην πρώτη συνεπαγωγή υποθέσαμε επιπλέον ότι $x \neq y$. Η τελευταία ανισότητα, όμως δεν μπορεί να ισχύει για κάθε ζεύγος x, y με $x \neq y$. Δεν ισχύει, για παράδειγμα, αν επιλέξουμε $x = 0$ και $y = \frac{1}{4C^2}$. Επομένως, έχουμε άτοπο και η συνάρτηση δεν είναι Lipschitz συνεχής στο διάστημα $[0, \infty)$.

Αναφέρουμε, πάντως, ότι, ανεξάρτητα από τις παραπάνω τεχνικές, σε περίπτωση που η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, τότε εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παράγωγό της για να αποφανθούμε σχετικά με το αν είναι Lipschitz συνεχής ή όχι. Δείτε, σχετικά, την Πρόταση 5.7 (την οποία δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε για να λύσετε τις ασκήσεις αυτής της παραγράφου).

Μια βασική ιδιότητα των Lipschitz συνεχών συναρτήσεων είναι ότι όλες είναι συνεχείς. Αυτό μας το εξασφαλίζει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 4.8. ***(Συνέχεια Lipschitz $\Rightarrow$ συνέχεια)*** *Έστω συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής στο διάστημα I. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο I.*

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο της Παρεμβολής. Έστω, λοιπόν, ένα $y \in I$ για το οποίο θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \to y} f(x) = f(y)$. Θα υποθέσουμε ότι το y είναι εσωτερικό του συνόλου . Αν το y είναι άκρο του I, τότε η παρακάτω απόδειξη πρέπει να τροποποιηθεί, με προφανή τρόπο. Έχουμε, λόγω της συνέχειας Lipschitz, ότι

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \Rightarrow f(y) - C|x - y| \leq f(x) \leq f(y) + C|x - y|.$$

Παρατηρήστε όμως ότι $\lim_{x \to y}(f(y) + C|x - y|) = f(y)$ και $\lim_{x \to y}(f(y) - C|x - y|) = f(y)$, επομένως και $\lim_{x \to y} f(x) = f(y)$. ■

Το αντίστροφο δεν ισχύει! Δηλαδή, μπορεί μια συνάρτηση να είναι μεν συνεχής, όχι όμως και Lipschitz συνεχής. Δείτε το Παράδειγμα 4.13. Επομένως, μπορούμε να φανταζόμαστε τη συνέχεια Lipschitz σαν ένα πιο αυστηρό είδος συνέχειας.

Παρατηρήστε, επίσης, ότι η συνέχεια του $\sin x$ και των άλλων συναρτήσεων που εμφανίζοντα στα παραδείγματα αυτής της παραγράφου μπορεί να προκύψει πλέον και με εφαρμογή της Πρότασης 4.8.

Ασκήσεις

4.26. (Συνέχεια Lipschitz σε υποδιάστημα) Να δείξετε ότι, αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι Lipschitz συνεχής σε κάποιο διάστημα I, τότε είναι Lipschitz συνεχής και σε κάθε υποδιάστημα $J \subseteq I$.

4.27. (Συνέχεια Lipschitz σε μεγαλύτερο διάστημα) Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f(x)$ δεν είναι Lipschitz συνεχής σε κάποιο διάστημα I, τότε δεν είναι Lipschitz συνεχής και σε κάθε διάστημα J για το οποίο $I \subseteq J$.

4.28. (Συνέχεια Lipschitz φυσικών δυνάμεων) Γενικεύστε το Παράδειγμα 4.10. Δείξτε ότι η $f(x) = x^n$, όπου $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, είναι Lipschitz συνεχής σε κάθε φραγμένο διάστημα και όχι Lipschitz συνεχής σε κάθε μη φραγμένο διάστημα.

4.29. (Συνέχεια Lipschitz τριγωνομετρικών συναρτήσεων) Γενικεύστε το Παράδειγμα 4.12. Δείξτε ότι η $f(x) = A\cos(ax+b)$ όπου $A, a, b \in \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής στο $\mathbb{R}$.

4.30. (Συνέχεια Lipschitz συνημιτόνου) Δείξτε ότι η $f(x) = A\cos(ax+b)$ όπου $A, a, b \in \mathbb{R}$, είναι Lipschitz συνεχής στο $\mathbb{R}$.

4.31. (Συνέχεια Lipschitz ριζών) Γενικεύστε το Παράδειγμα 4.13. Δείξτε ότι η $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ όπου $n \in \mathbb{N}^*$ είναι Lipschitz συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $[a, \infty)$ με $a > 0$, αλλά όχι στο $[0, \infty)$.

4.32. [Σ/Λ, Π] (Αντίστροφη Lipschitz συνεχούς συνάρτησης) Αν μια συνάρτηση f είναι Lipschitz συνεχής σε κάποιο διάστημα I, τότε θα είναι Lipschitz συνεχής και η αντίστροφή της στο διάστημα $f(I)$.

4.6 Περαιτέρω Μελέτη

Εναλλακτικοί Ορισμοί Συνέχειας Ο ορισμός της συνέχειας που δώσαμε δεν είναι ο μοναδικός. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να είχαμε ορίσει τη συνέχεια μέσω της έννοιας της συγκλίνουσας ακολουθίας. Συγκεκριμένα, μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση f ως συνεχή αν για κάθε ακολουθία $a_n \to x_0$ ισχύει και $f(a_n) \to f(x_0)$. Μπορείτε να δείτε το βιβλίο του Παντελίδη [ΠΑΝΤ] για περισσότερες λεπτομέρειες. Δείτε επίσης τις Ασκήσεις 4.6 και 4.7.

Επίσης, μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ως συνεχή αν έχει την ιδιότητα η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$ κάθε ανοικτού συνόλου $B \subseteq f(A)$ να είναι επίσης ανοικτή. Ο εναλλακτικός αυτός ορισμός αναπτύσσεται διεξοδικά στο βιβλίο των Marsden και Hoffman [MARS].

Οι ορισμοί αυτοί, και ιδιαίτερα ο δεύτερος, έχουν το πλεονέκτημα ότι γενικεύονται και σε άλλους χώρους πλην των πραγματικών αριθμών.

Αριθμητική Ανάλυση Ο κλάδος των Μαθηματικών που μελετά την αριθμητική επίλυση μαθηματικών προβλημάτων με χρήση υπολογιστή είναι η Αριθμητική Ανάλυση. Ο συγκεκριμένος κλάδος βρίσκεται στην τομή των Μαθηματικών και της Πληροφορικής, έχει τεράστιο εύρος και καταπιάνεται με μια πολύ μεγάλη ποικιλία προβλημάτων, για παράδειγμα την εύρεση ριζών, την επίλυση διαφορικών εξισώσεων όλων των ειδών, τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων, την επίλυση γραμμικών συστημάτων, την ελαχιστοποίηση συναρτήσεων, κ.ο.κ.

Η Μέθοδος της Διχοτόμησης είναι ίσως η απλούστερη μέθοδος της Αριθμητικής Ανάλυσης και αποτελεί μια καλή πρώτη εισαγωγή σε αυτό τον κλάδο. Στη συνέχεια του μαθήματος θα δούμε μερικές ακόμα μεθόδους.

Εξαιρετικές εισαγωγές στην Αριθμητική Ανάλυση μπορείτε να βρείτε στα βιβλία των Ακρίβη και Δουγαλή [ΑΚΡΙ] και Forsythe et al. [FORE], [FORG]. Το βιβλίο των Press et al. [PRES] είναι κλασικό σύγγραμμα με πλήθος υλοποιημένων μεθόδων τις οποίες εξετάζει από την προγραμματιστική τους και όχι τόσο από τη θεωρητική τους σκοπιά.

Κεφάλαιο 5

Παράγωγοι

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τη δεύτερη βασική έννοια του Λογισμού, την παράγωγο μιας συνάρτησης. Η παράγωγος είναι ένα όριο, κάτι που επαληθεύει την χρησιμότητα των ορίων και κάνει τη θεωρία μας εξαιρετικά συνεκτική. Η παράγωγος εκφράζει το ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0. Η έννοια του ρυθμού μεταβολής είναι εξαιρετικά χρήσιμη στις φυσικές επιστήμες: σχεδόν όλοι οι φυσικοί νόμοι μπορούν να διατυπωθούν μόνο με χρήση παραγώγων ή ισοδύναμων εννοιών.

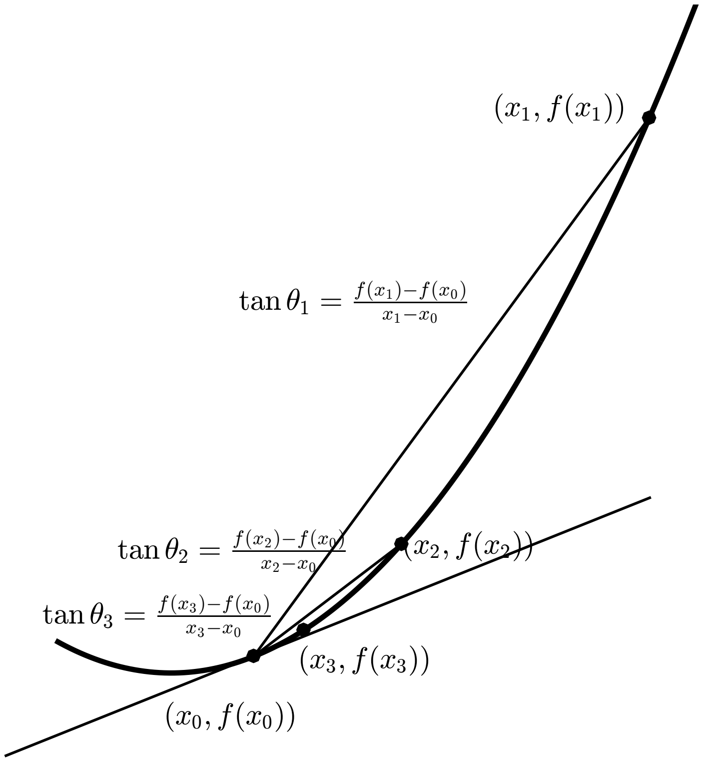
Στην Παράγραφο 5.1 παρουσιάζουμε τον ορισμό της παραγώγου, και στην Παράγραφο 5.2 τις βασικές ιδιότητές της. Στην Παράγραφο 5.3 προσδιορίζουμε την παράγωγο της αντίστροφης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης. Όπως και με την περίπτωση της συνέχειας, αν μια συνάρτηση έχει παράγωγο σε ένα ολόκληρο διάστημα, αποκτά ορισμένες πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες, εκ των οποίων η βασικότερη περιγράφεται από το Θεώρημα Μέσης Τιμής. Η σχετική θεωρία παρουσιάζεται στην Παράγραφο 5.4. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται στην Παράγραφο 5.5 με μια πρόγευση Ολοκληρωτικού Λογισμού, και συγκεκριμένα με την παρουσίαση της έννοιας της παράγουσας συνάρτησης.

5.1 Ορισμός Παραγώγου

Ορισμός 5.1. ***(Παράγωγος)*** *Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$.*

1. *Έστω ότι το x_0 είναι εσωτερικό του A. Ορίζουμε την **παράγωγο της συνάρτησης** f **στο σημείο** x_0 ως το όριο*
$$f'(x_0) \triangleq \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$
*εφόσον το όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Καλούμε, τότε, την f **παραγωγίσιμη στο σημείο** x_0.*

2. *Ορίζουμε την **αριστερή παράγωγο** και τη **δεξιά παράγωγο** της f **στο σημείο** x_0 ως το αριστερό και το δεξί πλευρικό όριο, αντίστοιχα,*
$$f'(x_0^-) \triangleq \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad f'(x_0^+) \triangleq \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$
*εφόσον το όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Αν η αριστερή (δεξιά) παράγωγος υπάρχει, η f καλείται **αριστερά (δεξιά) παραγωγίσιμη** στο x_0.*



Σχήμα 5.1: Γραφική απεικόνιση του ορισμού της παραγώγου, σε περίπτωση που αυτή υπάρχει. Αν μια ακολουθία $x_1, x_2, x_3, \ldots$ τείνει στο x_0, τότε η ακολουθία των κλίσεων $\frac{f(x_i)-f(x_0)}{x_i-x_0}$ των ευθυγράμμων τμημάτων μεταξύ των σημείων $(x_i, f(x_i))$ και του $(x_0, f(x_0))$ τείνει στην παράγωγο $f'(x_0)$.

3. *Μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ καλείται* ***παραγωγίσιμη στο διάστημα*** *I αν είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα εσωτερικά του σημεία, δεξιά παραγωγίσιμη στο αριστερό του άκρο (αν υπάρχει) και αριστερά παραγωγίσιμη στο δεξί του άκρο (επίσης αν υπάρχει). Η συνάρτηση f' καλείται* ***παράγωγος της*** *f.*

Επομένως, η παράγωγος και οι πλευρικές παράγωγοι, όπου υπάρχουν, είναι πραγματικοί αριθμοί. Συχνά, πάντως, χρησιμοποιείται και η σύμβαση να λέμε ότι μια (πλευρική) παράγωγος είναι ∞ ή $-\infty$, εφόσον το όριο του ορισμού της είναι το ∞ ή το $-\infty$. Θα χρησιμοποιήσουμε και εδώ αυτή τη σύμβαση, μόνο όμως σε σημεία που κάνουμε ρητή αναφορά σε (πλευρική) παράγωγο ίση με το $\pm\infty$.

Με χρήση της Άσκησης 3.11 προκύπτει πως ένας ισοδύναμος ορισμός της παραγώγου είναι ο

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Θα χρησιμοποιούμε και τους δύο ορισμούς, κατά περίπτωση.

Λόγω του ορισμού της παραγώγου ως πηλίκο δύο ποσοτήτων που τείνουν στο μηδέν, όταν $y = f(x)$ χρησιμοποιούμε και το συμβολισμό

$$f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Το dy ερμηνεύεται σαν μια απειροστή ποσότητα στην οποία τείνει ο αριθμητής $f(x) - f(x_0)$ του ορισμού της παραγώγου, ενώ το dx ερμηνεύεται ως μια απειροστή ποσότητα στην οποία τείνει ο παρονομαστής $x - x_0$. Ο συμβολισμός αυτός καλείται **συμβολισμός Leibniz**.

Η παράγωγος έχει μια ξεκάθαρη φυσική ερμηνεία. Εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης στη συνάρτηση ευθείας στο σημείο $((x_0), f(x_0))$. Πράγματι, παρατηρήστε ότι ο λόγος εντός του ορίου του ορισμού είναι η κλίση του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία $(x, f(y))$ και $(x_0, f(x_0))$. Καθώς $x \to x_0$, το ευθύγραμμο αυτό τμήμα συγκλίνει προς την εφαπτομένη ευθεία, και η αντίστοιχη κλίση του προς την κλίση αυτής της εφαπτομένης ευθείας. Δείτε το Σχήμα 5.1. Αντιστρόφως, η εφαπτομένη δεν υπάρχει, για παράδειγμα επειδή το γράφημα εμφανίζει γωνία, ανν δεν υπάρχει η παράγωγος.

Η παράγωγος ως έννοια είναι κεφαλαιώδους σημασίας για τον Λογισμό, όχι μόνο λόγω αυτής της γεωμετρικής της ερμηνείας, αλλά και για δύο ακόμα λόγους. Πρώτον, διότι σχεδόν όλα τα φυσικά φαινόμενα περιγράφονται μέσω νόμων που εμπεριέχουν την παράγωγο φυσικών ποσοτήτων, είτε στη μορφή που την ορίσαμε είτε σε ανάλογες. Δεύτερον, διότι η παράγωγος είναι κατά κάποιον τρόπο η αντίστροφη έννοια του ολοκληρώματος, όπως θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια, και η σχέση που έχουν αυτές οι δύο έννοιες καθορίζει σε μεγάλο βαθμό όλη τη θεωρία του Λογισμού.

Μια σημαντική ιδιότητα της παραγωγισιμότητας είναι ότι συνεπάγεται τη συνέχεια. Επομένως, οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα σημείο (ή διάστημα) είναι υποσύνολο των συνεχών συναρτήσεων σε αυτό το σημείο (ή διάστημα).

Πρόταση 5.1. ***(Παραγωγισιμότητα $\Rightarrow$ συνέχεια)*** *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$.*

1. *Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο $x_0 \in A$ (ή σε κάποιο διάστημα $I \subseteq A$), τότε είναι και συνεχής στο x_0 (ή στο I).*
2. *Αν η f είναι αριστερά (δεξιά) παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο $x_0 \in A$ (ή σε κάποιο διάστημα $I \subseteq A$, τότε είναι και αριστερά (δεξιά) συνεχής στο x_0 (ή στο I).*

Απόδειξη: Παρατηρήστε πως

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

επομένως

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} \left(f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= \lim_{x\to x_0} f(x_0) + \lim_{x\to x_0} (x - x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= f(x_0) + 0 \cdot f'(x_0) = f(x_0).
\end{aligned}$$

Αντίστοιχη είναι η απόδειξη για την περίπτωση των πλευρικών παραγώγων, ενώ το αποτέλεσμα για την περίπτωση των διαστημάτων προκύπτει άμεσα. ■

Στη συνέχεια θα δούμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο μερικών χαρακτηριστικών συναρτήσεων με χρήση του ορισμού της παραγώγου. Παρατηρήστε ότι, σε κάθε περίπτωση που η παράγωγος υπάρχει, στον υπολογισμό του ορίου υπάρχει μια απροσδιοριστία που πρέπει να αφαιρεθεί. Πράγματι, όταν $x \to x_0$, τότε και ο παρονομαστής $x - x_0 \to 0$, και ο αριθμητής $f(x) - f(x_0) \to 0$, λόγω συνέχειας.

Στα επόμενα παραδείγματα πέραν του συμβολισμού $f'(x)$ για τη συνάρτηση της παραγώγου, θα χρησιμοποιούμε και το συμβολισμό $(f(x))'$, ιδιαιτέρως όταν το $f(x)$ είναι μαθηματική έκφραση.

Παράδειγμα 5.1. (Παράγωγος των $\sin x$**,** $\cos x$**)** Σχετικά με την παράγωγο του ημιτόνου, από την Άσκηση 2.19 έχουμε

$$\sin\phi - \sin\theta = 2\cos\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi-\theta}{2}\right),$$

επομένως

$$\begin{aligned}\sin' x_0 &= \lim_{x\to x_0}\frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\\ &= \lim_{x\to x_0}\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} = \cos(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = \cos(x_0).\end{aligned}$$

Η τρίτη ισότητα προέκυψε με την αλλαγή μεταβλητής $h = \frac{x-x_0}{2}$. Η τελευταία ισότητα προέκυψε με χρήση του Παραδείγματος 3.12.

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο του συνημιτόνου, μπορούμε να εφαρμόσουμε μια ανάλογη μέθοδο, ή, εναλλακτικά, να παρατηρήσουμε πως το συνημίτονο είναι μια μετατόπιση του ημιτόνου αριστερά κατά $\pi/2$, επομένως

$$\begin{aligned}\cos' x_0 &= \lim_{x\to x_0}\frac{\cos x - \cos x_0}{x-x_0} = \lim_{h\to x_0+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(h-\pi/2) - \cos(x_0+\pi/2-\pi/2)}{h-(x_0+\pi/2)}\\ &= \lim_{h\to x_0+\pi/2}\frac{\sin h - \sin(x_0+\pi/2)}{h-(x_0+\pi/2)} = \sin'(x_0+\pi/2) = \cos(x_0+\pi/2) = -\sin x_0.\end{aligned}$$

Για την αλλαγή του ορίου βασιστήκαμε στην Άσκηση 3.10.

Παράδειγμα 5.2. (Παράγωγος της $f(x) = x^n$**)** Θα υπολογίσουμε την παράγωγο της $f(x) = x^n$, όπου $n \in \mathbb{N}^*$. Έχουμε, για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{x^n - x_0^n}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x^{n-1} + x^{n-1}x_0 + \cdots + x\cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}(x^{n-1} + x^{n-1}x_0 + \cdots + x\cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1})\\ &= \lim_{x\to x_0}x^{n-1} + \lim_{x\to x_0}x^{n-1}x_0 + \cdots + \lim_{x\to x_0}x\cdot x_0^{n-2} + \lim_{x\to x_0}x_0^{n-1}\\ &= (n-1)x_0^{n-1}.\end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα της Άσκησης 1.10. Επομένως, $(x^n)' = (n-1)x^{n-1}$ για $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.3. (Παράγωγος της $f(x) = \sqrt{x}$**)** Θα υπολογίσουμε την παράγωγο της $f(x) = \sqrt{x}$ για $x_0 > 0$.

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.\end{aligned}$$

Επομένως, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Σχετικά με την πλευρική παράγωγο της $\sqrt{x}$ στο 0, έχουμε

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty,$$

όπως προκύπτει από την Άσκηση 3.56, επομένως $f'(0^+) = \infty$.

Ασκήσεις

5.1. (Παράγωγος γραμμικής συνάρτησης) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = ax + b$ έχει παράγωγο $f'(x) = a$, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου.

5.2. (Παράγωγος απόλυτης τιμής) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ είναι παραγωγίσιμη παντού εκτός του σημείου $x = 0$, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου.

5.3. (Πάλι η Dirichlet) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $x^2 f_D(x)$, όπου η συνάρτηση Dirichlet $f_D(x)$ έχει οριστεί στο Παράδειγμα 3.11, είναι παραγωγίσιμη στο 0 αλλά πουθενά αλλού.

5.4. (Χρήση ορισμού) Υπολογίστε την παράγωγο της εφαπτομένης $\tan x$ και της συνεφαπτομένης $\cot x$ με χρήση του ορισμού της παραγώγου και γνωστών τριγωνομετρικών ορίων, χωρίς να χρησιμοποιήσετε τύπο για την παράγωγο πηλίκου συναρτήσεων.

5.5. (Χρήση ορισμού) Υπολογίστε παντού την παράγωγο της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $f(x) = \sqrt{|x|}$ με χρήση του ορισμού της παραγώγου.

5.6. Να αποδείξετε ότι το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 5.2, δηλαδή η ιδιότητα $(x^n)' = nx^{n-1}$ ισχύει και όταν το n είναι ακέραιος με $n \le 0$.

5.7. [Σ/Λ, Π] (Ύπαρξη δεύτερης παραγώγου) Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη παντού στο $\mathbb{R}$ τότε πρέπει να έχει και δεύτερη παράγωγο, επίσης παντού στο $\mathbb{R}$.

5.8. [Π] (Παράγωγοι) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή, ενώ αν η f είναι περιττή τότε η f' είναι άρτια.

5.2 Βασικές Ιδιότητες της Παραγώγου

Όπως και με τα όρια, ο υπολογισμός παραγώγων με χρήση αποκλειστικά του ορισμού είναι αργή διαδικασία. Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε θεωρήματα με τα οποία ο υπολογισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης μπορεί να γίνει πολύ εύκολα ακόμα και σε περιπτώσεις που αυτή η συνάρτηση έχει αρκετά σύνθετη μορφή.

Πρόταση 5.2. ***(Παράγωγοι αλγεβρικών συνδυασμών παραγωγίσιμων συναρτήσεων)*** *Έστω f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο x_0. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$.*

1. *Ο γραμμικός συνδυασμός $af(x) + bg(x)$ είναι παραγωγίσιμος στο x_0 με*

$$(af(x_0) + bg(x_0))' = af'(x_0) + bg'(x_0).$$

2. *Το γινόμενο fg είναι παραγωγίσιμο στο x_0 με*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

3. *Αν $g(x_0) \neq 0$, τότε*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

4. *Αν $g(x_0) \neq 0$, τότε*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Απόδειξη:

1. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό έχουμε
$$\begin{aligned}(af+bg)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{af(x)+bg(x)-af(x_0)-bg(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}\left[a\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} b\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right] \\ &= a\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + b\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = af'(x_0)+bg'(x_0).\end{aligned}$$

2. Παρόμοια με το προηγούμενο σκέλος έχουμε
$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)(f(x)-f(x_0))}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} g(x)\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= g(x_0)f'(x_0)+f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

3. Έχουμε
$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)} \\ &= -\frac{1}{g(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= -\frac{1}{g(x_0)}\left(\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}\right)\left(\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.\end{aligned}$$

Στον υπολογισμό του ορίου χρησιμοποιήσαμε τόσο την παραγωγισιμότητα της g στο x_0 όσο και τη συνέχεια στο x_0 που αυτή συνεπάγεται.

4. Τέλος, χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα δύο σκέλη, έχουμε
$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} \\ &= \frac{f'(x_0)g(x)-g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}.\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 5.4. (Παράγωγοι $\tan x$ και $\cot x$) Με χρήση της Πρότασης 5.2 έχουμε

$$\begin{aligned} \tan' x &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

παντού στο πεδίο ορισμού της $\tan x$ και

$$\begin{aligned} \cot' x &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

παντού στο πεδίο ορισμού της $\cot x$.

Παρατηρήστε ότι οι παραπάνω υπολογισμοί είναι πολύ απλούστεροι αυτών της Άσκησης 5.4.

Το παραπάνω θεώρημα επεκτείνεται με τον προφανή τρόπο στην περίπτωση συναρτήσεων που είναι παραγωγίσιμες σε κάποιο διάστημα. Αναφέρουμε την αντίστοιχη πρόταση χωρίς απόδειξη:

Πρόταση 5.3. ***(Παράγωγοι αλγεβρικών συνδυασμών παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε διάστημα)*** *Έστω f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο διάστημα I. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$.*

1. *Ο γραμμικός συνδυασμός $af + bg$ είναι παραγωγίσιμος στο I με*
$$(af + bg)' = af' + bg'$$

2. *Το γινόμενο fg είναι παραγωγίσιμο στο I με*
$$(fg)' = f'g + fg'.$$

3. *Αν $g \neq 0$ στο I, τότε η $1/g$ είναι παραγωγίσιμη σε αυτό με*
$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

4. *Αν $g \neq 0$ στο I, τότε η f/g είναι παραγωγίσιμη σε αυτό με*
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Το επόμενο θεώρημα είναι εξαιρετικά χρήσιμο καθώς μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε παραγώγους συναρτήσεων αρκετά σύνθετης μορφής.

Θεώρημα 5.1. ***(Κανόνας Αλυσίδας)*** *Έστω $g : A \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο x_0 και $f : B \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$. Τότε η σύνθεση $f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με*

$$(f(g(x_0)))' = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Απόδειξη: Επειδή η πλήρης απόδειξη είναι αρκετά μεγάλη/εκτενής, θα δώσουμε την απόδειξη περιληπτικά υπό την επιπλέον συνθήκη ότι η $g(x)$ είναι 1-1. Σε αυτή την περίπτωση:

$$
\begin{aligned}
(f(g(x_0)))' &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}
\end{aligned}
$$

Σχετικά με το πρώτο κλάσμα, όταν $g(x) \to g(x_0)$, το κλάσμα προσεγγίζει την παράγωγο f' στη θέση $g(x_0)$, δηλαδή το $f'(g(x_0))$. Το δεύτερο κλάσμα είναι η παράγωγος g' στη θέση x_0, δηλαδή το $g'(x_0)$.

Παρατηρήστε ότι αν η $g(x)$ δεν είναι $1-1$, τότε ενδέχεται να μην μπορούμε να διαιρέσουμε με το $g(x) - g(x_0)$, και η παραπάνω απόδειξη είναι λάθος. ■

Ο συλλογισμός που χρησιμοποιήθηκε στην παραπάνω (μερική) απόδειξη μάς δίνει και τη διαισθητική ερμηνεία του θεωρήματος. Ας τον επαναλάβουμε πιο αναλυτικά, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένους αριθμούς. Έστω πως όταν το x μεταβάλλεται από το x_0 κατά Δx, το $g(x)$ μεταβάλλεται κατά $2\Delta x$, δηλαδή η παράγωγος της g στο x_0 είναι 2. Έστω επίσης ότι, όταν το όρισμα της f, δηλαδή η g, μεταβάλλεται κατά Δg από τη θέση $g(x_0)$, η f μεταβάλλεται κατά $3\Delta g$, δηλαδή $f'(g(x_0)) = 3$. Είναι προφανές ότι, όταν το x μεταβάλλεται κατά Δx γύρω από το x_0, η σύνθετη συνάρτηση $f(g(x))$ μεταβάλλεται κατά $2 \times 3 = 6\Delta x$. Το επιχείρημα γενικεύεται για οποιεσδήποτε τιμές των παραγώγων $f'(g(x_0))$, $g'(x_0)$: σε κάθε περίπτωση, αν μεταβάλλουμε το x κατά Δx από το x_0, τότε η σύνθετη συνάρτηση $f(g(x))$ θα μεταβληθεί από το $f(g(x_0))$ κατά Δx επί το γινόμενο $f'(g(x_0))g'(x_0)$.

Ο βασικός αυτός μηχανισμός του Κανόνα της Αλυσίδας εμφανίζεται πιο καθαρά αν τον γράψουμε χρησιμοποιώντας τον Συμβολισμό Leibniz. Πράγματι, έστω $y = g(x)$, με $y_0 = g(x_0)$. Έστω επίσης $z = f(y)$, με $z_0 = f(y_0)$. Σχετικά με τη συνάρτηση $z = f(g(x))$ ο Κανόνος της Αλυσίδας γίνεται

$$
\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x_0} = \left.\frac{dz}{dy}\right|_{y_0} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0},
$$

ή, πιο απλά,

$$
\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.
$$

Μοιάζει δηλαδή σαν να απλοποιούνται τα dy! Στην πραγματικότητα, τα dx, dy, dz είναι συμβολισμοί και όχι αριθμοί που μπορούμε να απλοποιήσουμε. Η παραπάνω μορφή όμως του κανόνα και η φαινομενική δυνατότητα απλοποίησης του dy οφείλονται στη φυσική του ερμηνεία, όπως την περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Ο Κανόνας της Αλυσίδας είναι εξαιρετικά χρήσιμος γιατί μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την παράγωγο συναρτήσεων με αρκετά σύνθετη μορφή. Πρακτικά, χρησιμοποιώντας τον Κανόνα της Αλυσίδας και τα υπόλοιπα θεωρήματα αυτής της παραγράφου, μπορούμε να υπολογίσουμε οποιαδήποτε παράγωγο προκύψει από ένα φυσικό πρόβλημα. Δείτε το ακόλουθο (επιβεβλημένο) παράδειγμα. Δυστυχώς, όπως θα δούμε σε κατοπινά κεφάλαια, ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων είναι αρκετά πιο δύσκολος!

Παράδειγμα 5.5. (Υπολογισμός παραγώγων με τον κανόνα της αλυσίδας) Έστω πως μας ζητείται να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης

$$
\tan\left(\sin^{10} x + 5\sin^5 x + x^3 + 1\right).
$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
&\left(\tan\left(\sin^{10} x + 5\sin^5 x + x^3 + 1\right)\right)' \\
&\qquad = \tan'\left(\sin^{10} x + 5\sin^5 x + x^3 + 1\right) \times \left(\sin^{10} x + 5\sin^5 x + x^3 + 1\right)' \\
&\qquad = \frac{1}{\cos^2\left(\sin^{10} x + 5\sin^5 x + x^3 + 1\right)} \times \left(10\sin^9 x\cos x + 25\sin^4 x + 3x^2\right).
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε αυτή την παράγραφο με τον ακόλουθο αναδρομικό ορισμό των παραγώγων ανώτερης τάξης.

Ορισμός 5.2. ***(Παράγωγοι ανώτερης τάξης)*** *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε τις παραγώγους n τάξης της f στο διάστημα I ως εξής, αν υπάρχουν: η παράγωγος 1ης τάξεως ή πρώτη παράγωγος της f είναι η παράγωγος της f στο I, και η παράγωγος n-στης τάξεως ή n-οστή παράγωγος της f είναι η πρώτη παράγωγος της παραγώγου $(n-1)$-στης τάξεως. Η παράγωγος n-στης τάξεως συμβολίζεται ως $f^{(n)}(x)$. Ειδικά η δεύτερη, η τρίτη, κ.ο.κ. παράγωγος συμβολίζονται ως $f''(x)$, $f'''(x)$, κ.ο.κ.*

Τέλος, σε ορισμένες περιπτώσεις θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $f^{(0)}$ για την ίδια τη συνάρτηση f. Αυτό θα μας επιτρέπει να γράφουμε ορισμένες εκφράσεις με κάπως πιο συνοπτικό τρόπο. Δείτε, για παράδειγμα, την Άσκηση 5.10.

Ασκήσεις

5.9. [Π] (Παράγωγοι αρτίων/περιττών συναρτήσεων) Να επαναλάβετε την Άσκηση 5.8, χρησιμοποιώντας, αυτή τη φορά, τον Κανόνα της Αλυσίδας.

5.10. (Παράγωγοι n-οστής τάξεως τριγωνομετρικών συναρτήσεων) Να δείξετε ότι ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις για τις παραγώγους του ημίτονου $\sin x$ και συνημίτονου $\cos x$.

$$\begin{aligned}
&\sin^{(4n)} x = \sin x, \quad \sin^{(4n+1)} x = \cos x, \quad \sin^{(4n+2)} x = -\sin x, \quad \sin^{(4n+3)} x = -\cos x, \\
&\cos^{(4n)} x = \cos x, \quad \cos^{(4n+1)} x = -\sin x, \quad \cos^{(4n+2)} x = -\cos x, \quad \cos^{(4n+3)} x = \sin x,
\end{aligned}$$

όπου $n \in \mathbb{N}$.

5.3 Παράγωγος Αντιστροφής Συνάρτησης

Το επόμενο θεώρημα είναι κάπως δύσκολο στη χρήση του, αλλά μας επιτρέπει να εξάγουμε πολλά σημαντικά αποτελέσματα, ορισμένα εκ των οποίων είναι μη αναμενόμενα.

Θεώρημα 5.2. ***(Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης)*** *Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ η οποία είναι $1-1$ και έχει αντίστροφη την $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$. Έστω σημείο x_0 εσωτερικό του A.*

1. *Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με παράγωγο $f'(x_0) \neq 0$, τότε είναι παραγωγίσιμη και η f^{-1} στο $y_0 = f(x_0)$ με παράγωγο*
$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$
2. *Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με παράγωγο $f'(x_0) = 0$, τότε είναι παραγωγίσιμη και η f^{-1} στο $y_0 = f(x_0)$ με παράγωγο ίση με ∞, αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, και $-\infty$, αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.*

Σε περίπτωση που το x_0 είναι δεν είναι εσωτερικό στο πεδίο ορισμού A, αλλά υπάρχει κάποιο $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε είτε $(x_0 - \epsilon, x_0) \subseteq A$ είτε $(x_0, x_0 + \epsilon) \subseteq A$, τότε ισχύουν ανάλογα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας, όμως, πλευρικές παραγώγους. Δείτε την Άσκηση 5.12.

Καθώς η απόδειξη του θεωρήματος είναι αρκετά εκτενής, θα την παραλείψουμε. (Η απόδειξη ζητείται στην Άσκηση 5.11.) Θα πρέπει να γίνουν όμως μερικές σημαντικές παρατηρήσεις. Καταρχάς, είναι αναμενόμενο, αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, να είναι και η αντίστροφή της. Αυτό ισχύει διότι το να είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σημαίνει ότι η συνάρτηση δεν εμφανίζει γωνίες στο γράφημά της. Αφού μια συνάρτηση και η αντίστροφή της έχουν πρακτικά το ίδιο γράφημα, αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη το ίδιο θα ισχύει και για την αντίστροφή της.

Επίσης, η τιμή για την παράγωγο που δίνει το θεώρημα είναι η αναμενόμενη. Πράγματι, θυμηθείτε το μοντέλο μιας συνάρτησης σαν μια μηχανή με γρανάζια που έχουμε δει στην Παράγραφο 2.1. Έστω πως γυρνάμε το γρανάζι της εισόδου κατά Δx, όταν $x = x_0$, και βλέπουμε το γρανάζι της εξόδου να γυρνά κατά $2\Delta x$ σε σχέση με τη θέση y_0, δηλαδή η παράγωγος της f στο x_0 είναι $f(x_0) = 2$. Αν τώρα πιάσουμε το γρανάζι *εξόδου* και το γυρίσουμε κατά Δy, το γρανάζι της *εισόδου* θα γυρίσει κατά $\frac{1}{2}\Delta y$, δηλαδή η παράγωγος της f^{-1} στο y_0 είναι $\frac{1}{2}$, δηλαδή το αντίστροφο του 2. Ο συλλογισμός μπορεί να επεκταθεί για οποιαδήποτε τιμή της παραγώγου $f'(x_0)$. Ένας αντίστοιχος συλλογισμός ισχύει για την περίπτωση που $f'(x_0) = 0$.

Η ερμηνεία αυτή του θεωρήματος αποτυπώνεται και στη μορφή που έχει το θεώρημα αν χρησιμοποιήσουμε συμβολισμό Leibniz. Πράγματι, αν $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, τότε το θεώρημα γίνεται

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y_0} = \frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}},$$

ή, πιο απλά,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Αν τα σύμβολα dy και dx ήταν αριθμοί, η παραπάνω εξίσωση θα ίσχυε αυτομάτως. Η ομοιότητα του νόμου με μια ταυτότητα οφείλεται στη φυσική ερμηνεία που έχουν τα σύμβολα και στη φυσική ερμηνεία του θεωρήματος.

Παρατηρήστε ακόμα ότι το αποτέλεσμα είναι συμβατό με τον Κανόνα της Αλυσίδας. Για την ακρίβεια, αν υποθέσουμε ότι η παράγωγος της αντίστροφης υπάρχει, τότε η τιμή της προσδιορίζεται από τον Κανόνα της Αλυσίδας. Πράγματι, δείτε πως

$$f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow \left(f^{-1}(f(x))\right)' = (x)' \Rightarrow (f^{-1}(f(x)))'f'(x) = 1 \Rightarrow \left(f^{-1}(f(x))\right)' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Φυσικά, το παραπάνω δεν είναι πλήρης απόδειξη του Θεωρήματος 5.2, διότι υποθέτει την ύπαρξη της παραγώγου της αντίστροφής, για να υπολογίσει την τιμή της.

Η εφαρμογή του Θεωρήματος 5.2 θέλει λίγη προσοχή, γιατί χειριζόμαστε δύο συναρτήσεις ταυτόχρονα, την $y = f(x)$ και την αντίστροφή της $x = f^{-1}(y)$. Πρέπει να είμαστε προσεκτικοί ώστε όταν δίνουμε ένα τύπο για την παράγωγο της f^{-1} αυτός να εμφανίζει το σωστό όρισμα, δηλαδή το y και όχι το x. Το συγκεκριμένο σημείο μπορεί να δημιουργήσει δυσκολίες. Δείτε τα ακόλουθα παραδείγματα για να εμπεδώσετε τη μεθοδολογία.

Παράδειγμα 5.6. (Παράγωγος αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων) Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις ορίστηκαν στο Παράδειγμα 4.7. Σε αυτό το παράδειγμα θα υπολογίσουμε την παράγωγο του αντίστροφου ημιτόνου (Σχήμα 4.5) και της αντίστροφης εφαπτομένης (Σχήμα 4.7). Οι παράγωγοι του αντίστροφου συνημιτόνου και της αντίστροφης συνεφαπτομένης ζητούνται στις Ασκήσεις 5.13 και 5.14 αντίστοιχα.

Σχετικά με την παράγωγο του αντίστροφου ημίτονου, έχουμε

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{1-y^2}, \quad y \in (-1,1).$$

Ας δούμε τα παραπάνω βήματα προσεκτικά. Στο πρώτο βήμα χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα 5.2. Στο δεύτερο βήμα υπολογίσαμε απλώς την παράγωγο του ημίτονου. Παρατηρήστε ότι το συνημίτονο είναι 0 στα $x = \pm\pi/2$, επομένως η παραπάνω ισότητα ισχύει για $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, άρα για $y \in (-1,1)$. Τα επόμενα βήματα χρειάζονται διότι πρέπει να δώσουμε την παράγωγο της $\arcsin y$ συναρτήσει του ορίσματός της y, και όχι του $x = f^{-1}(y)$. Το τρίτο βήμα ισχύει γιατί στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$ το συνημίτονο είναι θετικό, άρα έχουμε $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ και όχι (την άλλη επιλογή) $\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x}$. Στο τελευταίο βήμα απλώς λάβαμε υπόψη πως $y = \sin x$. Σχετικά με τις τιμές τις παραγώγου στο $y = \pi/2$ και στο $y = -\pi/2$, με εφαρμογή του Θεωρήματος 5.2 προκύπτει πως είναι ∞ και στα δύο σημεία.

Προέκυψε, λοιπόν, κάτι πολύ ενδιαφέρον. Συγκεκριμένα, μπορούμε να αποδείξουμε (η απόδειξη παραλείπεται) ότι η συνάρτηση του αντίστροφου συνημιτόνου *δεν* μπορεί να γραφεί συναρτήσει άλλων γνωστών συναρτήσεων, όπως των τριγωνομετρικών, των πολυωνυμικών, κτλ. Όμως, η παράγωγός της *μπορεί*. Παρατηρήστε, τέλος, πως ο τύπος που βρήκαμε για την παράγωγο του $\arcsin y$ συμβαδίζει πλήρως με την εικόνα που έχουμε για το γράφημά του στο Σχήμα 4.5.

Σχετικά με την παράγωγο της εφαπτομένης, αντίστοιχα έχουμε

$$(\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 + \cos^2 x} = \frac{1}{\tan^2 x + 1} = \frac{1}{y^2+1}.$$

Βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε κάθε ένα από τα παραπάνω βήματα.

Παράδειγμα 5.7. (Παράγωγος της $x^{\frac{1}{n}}$) Έστω η συνάρτηση $y = f(x) = x^n$ και η αντίστροφή της $x = f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{n}}$. Το $n \in \mathbb{N}^*$. Αν το $n = 2k$, τότε έστω $x > 0$, $y > 0$. Αν το $n = 2k+1$, τότε έστω $x, y \in \mathbb{R}^*$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$\left(y^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{(x^n)'} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{ny^{1-1/n}} = \frac{1}{n}y^{1/n-1}.$$

Επομένως, ο τύπος $(x^a)' = ax^{a-1}$ ισχύει και όταν αντί για $a = n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε τον αντίστροφο ενός φυσικού $n \in \mathbb{N}^*$, $a = 1/n$.

Παράδειγμα 5.8. (Παράγωγος της $x^{\frac{p}{q}}$) Έστω η συνάρτηση $x^{\frac{p}{q}}$ με $x > 0, p, q \in \mathbb{Z}^*$. Με χρήση του Κανόνα της Αλυσίδας και της Άσκηση 5.6 έχουμε

$$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)' = p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Επομένως, ο τύπος $(x^r)' = rx^{r-1}$ ισχύει για οποιονδήποτε ρητό $r \in \mathbb{Q}$.

Ασκήσεις

5.11. (Θεώρημα 5.2) Να αποδείξετε το Θεώρημα 5.2.

5.12. (Πλευρικές παράγωγοι) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ένα θεώρημα ανάλογο του Θεωρήματος 5.2 για την περίπτωση που το x_0 είναι δεν είναι εσωτερικό στο πεδίο ορισμού A αλλά υπάρχει κάποιο $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε είτε $(x_0 - \epsilon, x_0) \subseteq A$ είτε $(x_0, x_0 + \epsilon) \subseteq A$.

5.13. (Παράγωγος της $\arccos(y)$**)** Υπολογίστε την παράγωγο της συνάρτησης του αντίστροφου συνημιτόνου, που ορίζεται στο Παράδειγμα 4.7 (Σχήμα 4.6).

5.14. (Παράγωγος της $\operatorname{arccot}(y)$**)** Υπολογίστε την παράγωγο της συνάρτησης της αντίστροφης συνεφαπτομένης, που ορίζεται στο Παράδειγμα 4.7. (Σχήμα 4.8)

5.4 Θεώρημα Μέσης Τιμής

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής και θα δείξουμε μερικές βασικές εφαρμογές του. Ξεκινάμε με ένα κριτήριο που είναι αναγκαίο προκειμένου να έχει μια συνάρτηση ακρότατο.

Θεώρημα 5.3. ***(Θεώρημα Fermat)*** *Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, σημείο x_0 εσωτερικό του A, και f παραγωγίσιμη στο x_0.*

1. *Αν $f'(x_0) > 0$, τότε υπάρχει μια ανοικτή γειτονιά (a, b) γύρω από το x_0 και εντός του A τέτοια ώστε δεξιά του x_0 οι τιμές της συνάρτησης να είναι μεγαλύτερες του $f(x_0)$ και αριστερά του x_0 οι τιμές της συνάρτησης να είναι μικρότερες του $f(x_0)$.*

2. *Αν $f'(x_0) < 0$, τότε υπάρχει μια ανοικτή γειτονιά (a, b) γύρω από το x_0 και εντός του A τέτοια ώστε δεξιά του x_0 οι τιμές της συνάρτησης να είναι μικρότερες του $f(x_0)$ και αριστερά του x_0 οι τιμές της συνάρτησης να είναι μεγαλύτερες του $f(x_0)$.*

3. *Αν η $f(x)$ έχει τοπικό ακρότατο στο x_0, τότε πρέπει $f'(x_0) = 0$.*

Απόδειξη:

1. Από την Άσκηση 3.26 προκύπτει πως υπάρχει μια ανοικτή γειτονιά (a, b) γύρω από το x_0 τέτοια ώστε
$$\frac{f(x) - x(x_0)}{x - x_0} > P > 0.$$
Έστω τώρα $x_1 \in (a, b)$ με $x_1 > x_0$. Αφού $x_1 > x_0 \Rightarrow x_1 - x_0 > 0$, θα πρέπει και ο αριθμητής του παραπάνω λόγου να είναι θετικός, δηλαδή $f(x_1) > f(x_0)$, προκειμένου το κλάσμα να είναι θετικό. Επίσης, αν $x_1 < x_0$, τότε και $x_1 - x_0 < 0$, επομένως θα πρέπει και ο αριθμητής να είναι αρνητικός, προκειμένου το κλάσμα να είναι θετικό, επομένως $f(x_1) < f(x_0)$.

2. Η απόδειξη είναι ανάλογη.

3. Αν $f'(x_0) > 0$ ή $f'(x_0) < 0$, τότε από τα προηγούμενα σκέλη προκύπτει άτοπο. Το μόνο ενδεχόμενο που μένει, λοιπόν, είναι να έχουμε $f'(x_0) = 0$. ∎

Η επόμενη πρόταση μάς δίνει τη δυνατότητα να περιορίσουμε τα σημεία στα οποία ενδέχεται να έχουμε ακρότατο.

Πρόταση 5.4. ***(Ορισμός κρίσιμων σημείων)*** *Έστω I διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$. Τα τοπικά ακρότατα της f εμφανίζονται απαραιτήτως μεταξύ των ακόλουθων* ***κρίσιμων σημείων****:*

1. *Τα άκρα του πεδίου ορισμού I, εφόσον αυτά ανήκουν στο διάστημα.*

2. *Άλλα σημεία $x_0 \in I$ (εκτός των άκρων) για τα οποία δεν υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)$.*

3. *Σημεία $x_0 \in I$ για τα οποία υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)$ και ισούται με το 0.*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι πολύ απλή. Παρατηρήστε ότι τα σημεία που δεν είναι κρίσιμα είναι εσωτερικά του A και έχουν παράγωγο μη μηδενική, επομένως από το Θεώρημα του Fermat προκύπτει πως δεν είναι σημεία τοπικού ακρότατου. ■

Η πρόταση μάς δίνει αυτόματα μια μεθοδολογία εντοπισμού ακροτάτων. Αν μας δοθεί μια συνάρτηση f και μας ζητηθεί να εντοπίσουμε τα ακρότατά της, καταρχάς εντοπίζουμε τα κρίσιμα σημεία, και κατόπιν είτε επιβεβαιώνουμε ότι αυτά είναι ακρότατα είτε όχι. Δυστυχώς, το θεώρημα δεν μας λέει πώς θα κάνουμε την επιβεβαίωση αυτή, και θα χρειαστούμε και άλλα εργαλεία.

Παράδειγμα 5.9. (Παράδειγμα προσδιορισμού κρίσιμων σημείων) Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - 10x^2 + 27x - 18$$

ορισμένη στο διάστημα $[0, 7)$. Τα κρίσιμα σημεία της είναι το άκρο $x_0 = 0$ του πεδίου ορισμού, και τα σημεία τυχόν μηδενισμού της παραγώγου. Παρατηρήστε ότι το 7 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού, επομένως δεν είναι άκρο του, και η συνάρτηση δεν μπορεί να λαμβάνει εκεί ακρότατο. Επίσης, εκτός των άκρων της η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη. Η παράγωγος ισούται με $f'(x) = 3x^2 - 20x + 27$, και έχει ρίζες τις

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{19}}{3}.$$

Τα σημεία x_0, x_1, x_2 είναι τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης.

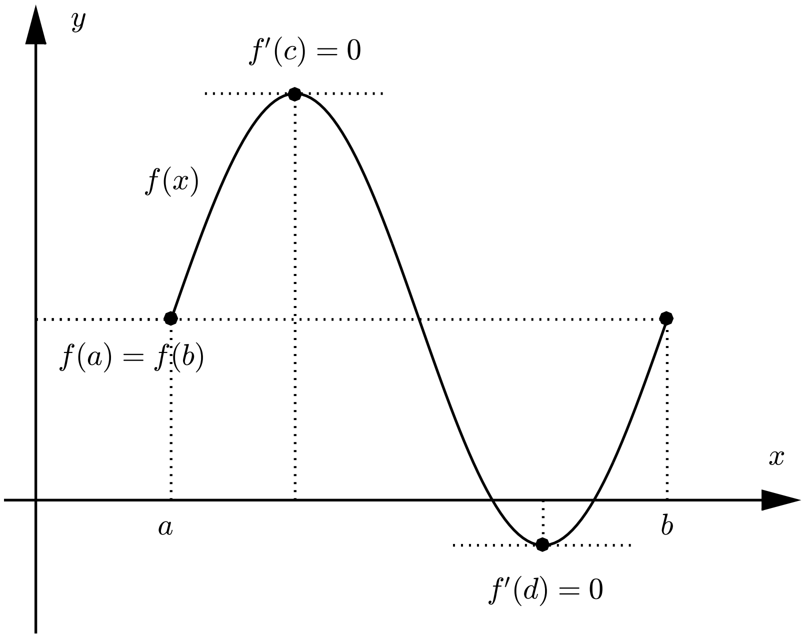
Θεώρημα 5.4. ***(Θεώρημα του Rolle)*** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο ανοικτό (a, b) και συνεχής στο κλειστό $[a, b]$, με $f(a) = f(b) = 0$. Υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη βασίζεται στο Θεώρημα Ακροτάτων του Κεφαλαίου 4 (Θεώρημα 4.5). Αφού η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, θα έχει κάποιο μέγιστο και κάποιο ελάχιστο στο $[a, b]$. Αν το σημείο ελαχίστου $c \in (a, b)$, τότε από το Θεώρημα του Fermat έχουμε $f'(c) = 0$, και βρήκαμε το σημείο που ζητούσαμε. Αν το σημείο μεγίστου $c \in (a, b)$, τότε και πάλι από το Θεώρημα του Fermat έχουμε $f'(c) = 0$, και βρήκαμε το σημείο που ζητούσαμε. Τέλος, αν και το σημείο ελαχίστου και το σημείο μεγίστου είναι εκτός του (a, b), δηλαδή βρίσκονται στα a, b, τότε προφανώς η συνάρτηση είναι σταθερή στο (a, b), αφού $f(a) = f(b)$, επομένως υπάρχουν άπειρα $c \in (a, b)$ με $f'(c) = 0$. ■

Το Θεώρημα Rolle έχει μια ξεκάθαρη γεωμετρική ερμηνεία: αν πρέπει να χαράξουμε το γράφημα της f με ένα μολύβι ξεκινώντας από το σημείο $(a, f(a))$ και καταλήγοντας στο σημείο $(b, f(b) = f(a))$ με μια συνεχή γραμμή χωρίς γωνίες, τότε σε κάποιο σημείο πρέπει αυτή η γραμμή να έχει οριζόντια εφαπτομένη. Αυτό γίνεται είτε γιατί η γραμμή έχει παντού οριζόντια εφαπτομένη, είτε γιατί σε κάποιο σημείο η συνάρτηση έγινε είτε μεγαλύτερη είτε μικρότερη της $f(a) = f(b)$, και θα πρέπει να επιστρέψει προς την αντίθετη κατεύθυνση. Στο σημείο x_0 που η συνάρτηση κάνει αυτή την επιστροφή, έχουμε $f'(x_0) = 0$. Δείτε το Σχήμα 5.2 για μια περίπτωση που υπάρχουν δύο σημεία c, d όπου μηδενίζεται η παράγωγος εντός του (a, b). Βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνεται πότε υπάρχει μόνο ένα σημείο.

Θεώρημα 5.5. ***(Θεώρημα Μέσης Τιμής)*** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο ανοικτό (a, b) και συνεχής στο κλειστό $[a, b]$. Υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Σχήμα 5.2: Θεώρημα του Rolle.

Απόδειξη: Το θεώρημα είναι άμεση απόρροια του Θεωρήματος Rolle. Πράγματι, ας εξετάσουμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) x.$$

Παρατηρούμε πως

$$g(a) = f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) a, \qquad g(b) = f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) b,$$

επομένως

$$g(a) - g(b) = [f(a) - f(b)] + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(b - a) = 0.$$

Από το Θεώρημα Rolle, λοιπόν, θα υπάρχει κάποιο c τέτοιο ώστε

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

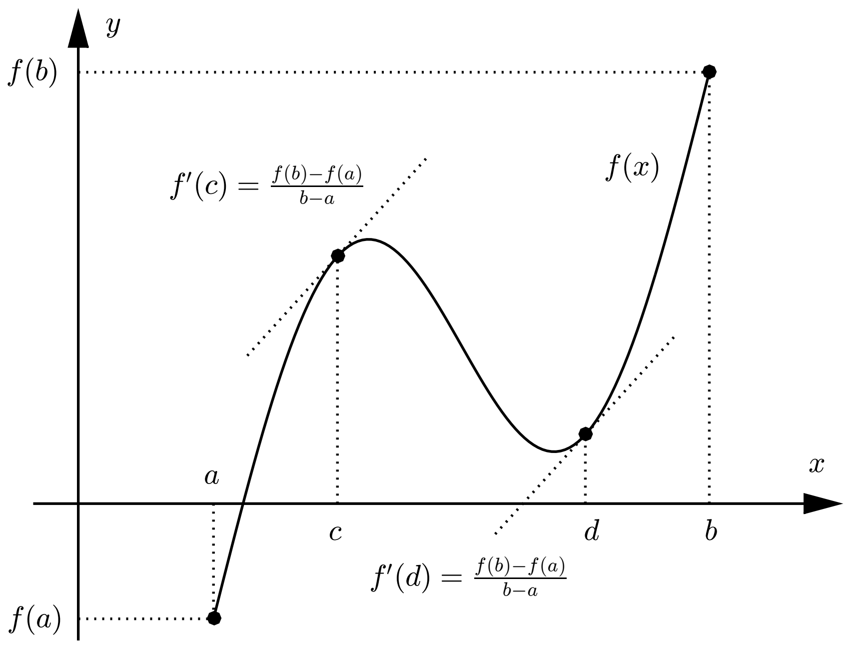
Η φυσική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής είναι ανάλογη αυτής του Θεωρήματος του Rolle. Δείτε το Σχήμα 5.3.

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής μάς επιτρέπει να συνάγουμε με λίγο κόπο αρκετά ισχυρά συμπεράσματα σχετικά με τη συμπεριφορά συναρτήσεων σε διαστήματα. Η επόμενη πρόταση είναι χαρακτηριστική.

Πρόταση 5.5. ***(Ικανά κριτήρια μονοτονίας)*** *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I.*

1. *Αν $f'(x) \geq 0$ στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι αύξουσα στο I.*

2. *Αν $f'(x) > 0$ στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο I.*



Σχήμα 5.3: Θεώρημα Μέσης Τιμής.

3. *Αν $f'(x) \leq 0$ στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι φθίνουσα στο I.*

4. *Αν $f'(x) < 0$ στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο I.*

5. *Αν $f'(x) = 0$ στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι σταθερά στο I.*

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε καταρχάς το πρώτο σκέλος. Οι αποδείξεις των Σκελών 2-4 είναι ανάλογες και ζητούνται στην Άσκηση 5.20. Έστω δύο $x_1, x_2 \in I$. Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2), άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής θα έχουμε

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1).$$

Η ανισότητα $f'(c) \geq 0$ προκύπτει από το ότι για *όλα* τα $x \in (a, b)$, άρα και για το c, εξ' υποθέσεως έχουμε $f'(x) \geq 0$.

Σχετικά με το τελευταίο σκέλος, έστω και πάλι δύο $x_1, x_2 \in I$. Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2), άρα, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής θα έχουμε

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Αφού για δύο οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in I$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$, προκύπτει πως η $f(x)$ είναι σταθερά στο I. ■

Τα Σκέλη 1 και 3 ισχύουν και αντιστρόφως. Δείτε, σχετικά, την Άσκηση 5.21.

Παράδειγμα 5.10. (Παράδειγμα προσδιορισμού μονοτονίας) Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - 10x^2 + 27x - 18$$

ορισμένη στο διάστημα $[0, 7)$, του Παραδείγματος 5.9, με $f'(x) = 3x^2 - 20x + 27$, που έχει ρίζες τις

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{19}}{3}.$$

Κατά τα γνωστά από τη θεωρία για τα τριώνυμα, η $f'(x)$ είναι αρνητική στο διάστημα (x_1, x_2), άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$, και θετική στα διαστήματα $[0, x_1)$ και $(x_2, 7)$, άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα σε αυτά.

Πρόταση 5.6. ***(Ικανά κριτήρια ακροτάτων)*** *Έστω συνεχής $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

1. *Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, c) με $f'(x) \geq 0$ για $x \in (a, c)$ και παραγωγίσιμη στο (c, b) με $f'(x) \leq 0$ στο (c, b), τότε η f έχει ολικό μέγιστο στο c.*

2. *Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, c) με $f'(x) \leq 0$ για $x \in (a, c)$ και παραγωγίσιμη στο (c, b) με $f'(x) \geq 0$ στο (c, b), τότε η f έχει ολικό ελάχιστο στο c.*

3. *Αν στο $c \in (a, b)$ έχουμε $f'(c) = 0$ και $f''(c) < 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο c.*

4. *Αν στο $c \in (a, b)$ έχουμε $f'(c) = 0$ και $f''(c) > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο c.*

Απόδειξη:

1. Από την Πρόταση 5.5 προκύπτει πως η f είναι αύξουσα στο $[a, c]$ και φθίνουσα στο $[c, b]$, άρα η f έχει τοπικό μέγιστο στο c. Δείτε την Άσκηση 2.11.

2. Η απόδειξη είναι παρόμοια με του προηγούμενου σκέλους και παραλείπεται.

3. Αφού $f''(c) < 0$, από το Θεώρημα 5.3, θα υπάρχει κάποια ανοικτή γειτονιά (a_0, b_0) γύρω από το c τέτοια ώστε η $f'(x)$ να είναι μικρότερη του $f'(x) = 0$, δηλαδή αρνητική, στο (c, b_0), και $f'(x)$ να είναι μεγαλύτερη του $f'(x) = 0$, δηλαδή θετική, στο (a_0, c). Άρα, από το πρώτο σκέλος η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο στο c.

4. Η απόδειξη είναι παρόμοια με του προηγούμενου σκέλους και παραλείπεται. ■

Παράδειγμα 5.11. (Παράδειγμα προσδιορισμού ακροτάτων) Συνεχίζοντας με το Παράδειγμα 5.10, η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης είναι η

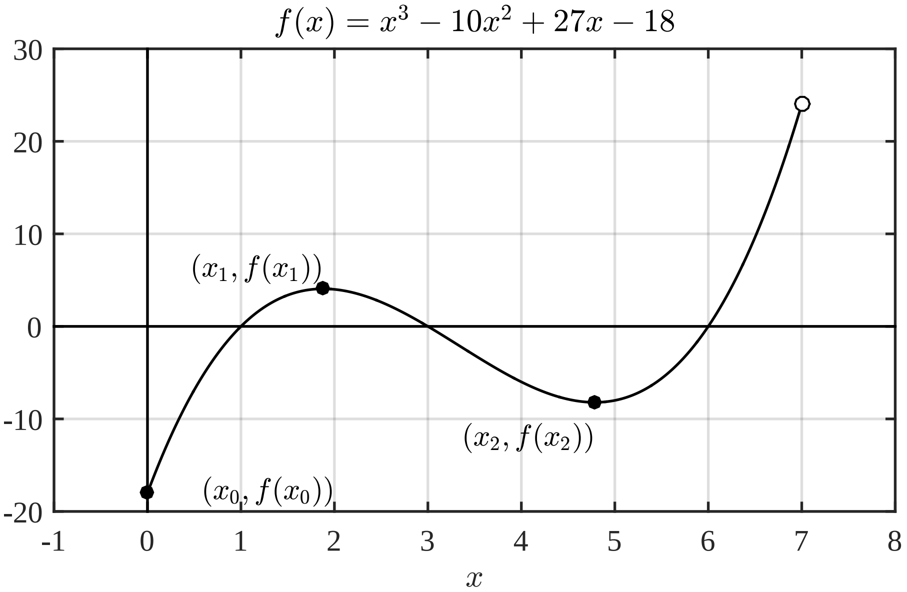
$$f''(x) = 6x - 20,$$

για την οποία έχουμε

$$f''(x_1) = -2\sqrt{19} < 0, \qquad f''(x_2) = 2\sqrt{19} > 0.$$

Επομένως, η $f(x)$ έχει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2. Σχετικά με το τελευταίο κρίσιμο σημείο, x_0, παρατηρούμε πως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα δεξιά του και δεν ορίζεται στα αριστερά του, άρα το x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. Η $f(x)$ έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 5.4. Παρατηρήστε πως η συνάρτηση έχει supremum το 24, αλλά δεν λαμβάνει πουθενά αυτή την τιμή. Έχει επίσης σημείο ολικού ελαχίστου το $x_0 = 0$, όπου λαμβάνει την τιμή $f(0) = -18$.

Κλείνουμε την παράγραφο με μια πρόταση που απλοποιεί σημαντικά, σε πολλές περιπτώσεις, την απόδειξη ότι μια συνάρτηση είναι Lipschitz συνεχής.



Σχήμα 5.4: Η συνάρτηση $f(x)$ των Παραδειγμάτων 5.9, 5.10, 5.11.

Πρόταση 5.7. ***(Ικανό κριτήριο συνέχειας Lipschitz)*** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ με φραγμένη παράγωγο στο (a, b), δηλαδή υπάρχει K τέτοιο ώστε $|f'(x)| \leq K$ για κάθε $x \in (a, b)$. Η f είναι Lipschitz συνεχής.*

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής. Πράγματι, έστω δύο οποιαδήποτε σημεία $x, y \in [a, b]$. Η f είναι συνεχής στο $[x, y]$ και παραγωγίσιμη στο (x, y), άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής θα υπάρχει κάποιο x_0 τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \Rightarrow |f'(x_0)| = \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}$$
$$\Rightarrow \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq K \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq K|x - y|.$$

■

Ασκήσεις

5.15. (Ανισότητα παραγώγων) Έστω συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε $f(a) = g(a)$ και $f'(x) \geq g'(x)$ παντού σε ένα διάστημα $I = [a, b]$, $I = [a, b)$, ή $I = [a, \infty)$. Να δείξετε ότι $f(x) \geq g(x)$ παντού στο I.

5.16. [Σ/Λ, Π] (Κριτήριο ακρότατου) Αν $f'(x_0) = 0$, τότε η συνάρτηση $f(x)$ έχει τοπικό ακρότατο στο x_0.

5.17. [Σ/Λ, Π] (Μονοτονία ⇒ Συνέχεια) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, b]$ τότε είναι συνεχής σε αυτό.

5.18. [Σ/Λ, Π] (Γνησίως αύξουσα συνάρτηση ⇒ θετική παράγωγος) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b), τότε $f(x) > 0$ παντού στο (a, b).

5.19. [Σ/Λ, Π] (Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ⇒ αρνητική παράγωγος) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b), τότε $f(x) < 0$ παντού στο (a, b).

5.20. **(Ικανά κριτήρια μονοτονίας)** Να αποδείξετε τα Σκέλη 2-4 της Πρότασης 5.5.

5.21. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I. Να δείξετε ότι αν η f είναι αύξουσα (εναλλακτικά, φθίνουσα) στο I, τότε $f'(x) \geq 0$ (εναλλακτικά $f'(x) \leq 0$) στο εσωτερικό του.

5.22. Σε ποιο σημείο μεγιστοποιείται η συνάρτηση $f(x) = \cos x + \sin x$;

5.23. **(Ικανό κριτήριο ώστε μια συνάρτηση να μην είναι Lipschitz συνεχής)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα και η παράγωγός της δεν είναι φραγμένη άνω, τότε δεν μπορεί να είναι Lipschitz συνεχής.

5.24. Να επαναλάβετε τις Ασκήσεις 4.28, 4.29, 4.30 και 4.31, και το Παράδειγμα 4.11 χρησιμοποιώντας, αυτή τη φορά, την Πρόταση 5.7 και την Άσκηση 5.23.

5.5 Παράγουσες

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με μια σύντομη εισαγωγή σε μια έννοια, την παράγουσα, που κατά κάποιο τρόπο είναι αντίστροφη της παραγώγου.

Ορισμός 5.3. ***(Παράγουσα)*** *Έστω διάστημα I και έστω $f : I \to \mathbb{R}$. Κάθε συνάρτηση $F : I \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα I και για την οποία $F' = f$ καλείται **παράγουσα** της f στο I.*

Για παράδειγμα, μια παράγουσα της $\cos x$ στο $\mathbb{R}$ είναι η $\sin x$, αφού $(\sin x)' = \cos x$, ενώ μια παράγουσα της $\sin x$ είναι η $-\cos x$, αφού $(-\cos x)' = \sin x$.

Πρέπει να τονιστεί ότι δεν έχουν όλες οι συναρτήσεις παράγουσα. Μια κατηγορία συναρτήσεων που σίγουρα έχουν παράγουσα είναι οι συνεχείς, όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο. Πάντως, αν μια συνάρτηση έχει παράγουσα, τότε έχει και άπειρες άλλες, όπως δείχνει το επόμενο θεώρημα, που θα χρησιμεύσει και σαν ορισμός μιας πολύ σημαντικής έννοιας, αυτής του αόριστου ολοκληρώματος.

Πρόταση 5.8. ***(Ορισμός αόριστου ολοκληρώματος)*** *Έστω συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ με παράγουσα $F : I \to \mathbb{R}$. Το σύνολο των παραγουσών συναρτήσεων της f είναι το*

$$\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}.$$

*Το σύνολο αυτό καλείται **αόριστο ολοκλήρωμα**, και συμβολίζεται με τους ακόλουθους τρόπους:*

$$\int f, \qquad \int f(x)\,dx.$$

Για λόγους συνοπτικότητας, θα γράφουμε $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Συνεπώς

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

και

$$\int (f(x))'\,dx = f(x) + C.$$

Απόδειξη: Καταρχάς, παρατηρήστε ότι για κάθε C, η συνάρτηση $F(x)+C$ είναι επίσης παράγουσα της f. Πράγματι, για $x \in I$ έχουμε

$$(F(x)+C)' = F'(x) + C = f(x).$$

Αντιστρόφως, *κάθε* παράγουσα της f είναι της μορφής $F(x)+C$. Πράγματι, έστω $G(x)$ παράγουσα της f, δηλαδή $G'(x) = f(x)$. Παρατηρήστε πως παντού στο I έχουμε

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

και από το τελευταίο σκέλος της Πρότασης 5.5 προκύπτει πως $F(x) - G(x) = C$ για κάποιο $C \in \mathbb{R}$, άρα πράγματι $G(x) = F(x) + C$. ■

Ο συμβολισμός $\int f$ για το αόριστο ολοκλήρωμα, καθώς και η επιλογή της ονομασίας «αόριστο ολοκλήρωμα» οφείλονται στη στενή σχέση που έχει αυτό με το *ορισμένο* ολοκλήρωμα. Τη σχέση αυτή θα ερευνήσουμε σε κατοπινά κεφάλαια όπου θα ορίσουμε και το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Στο υπόλοιπο της παραγράφου θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα του υπολογισμού του αόριστου ολοκληρώματος μιας δοσμένης συνάρτησης $f(x)$, δηλαδή του προσδιορισμού μιας παράγουσας $F(x)$ που θα δίνεται χρησιμοποιώντας γνωστές μας συναρτήσεις, ώστε ένα δοσμένο $\int f(x)\,dx$ να ισούται με $F(x)+C$. Πρακτικά, δηλαδή, ο προσδιορισμός ενός αόριστου ολοκληρώματος ισοδυναμεί με τον προσδιορισμό μιας παράγουσας.

Μια βασική αρχή είναι ότι κάθε παραγώγιση $F'(x) = f(x)$ αυτόματα μας δίνει και ένα αόριστο ολοκλήρωμα, το $\int f$. Δείτε το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.12. (Μερικά αόριστα ολοκληρώματα) Από προηγούμενα παραδείγματα παραγωγίσεων προκύπτουν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned}
\int \sin x\,dx &= -\cos x + C,\\
\int \cos x\,dx &= \sin x + C,\\
\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \tan x + C,\\
\int r x^{r-1}\,dx &= x^r + C, \quad r \in \mathbb{Q}^*,\\
\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx &= \sqrt{x} + C.
\end{aligned}$$

Μια σημαντική λεπτομέρεια που πρέπει να θυμόμαστε σε σχέση με τύπους της μορφής $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, είναι ότι συνήθως δεν αναφέρεται το διάστημα I στο οποίο ισχύει η ισότητα. Συχνά, όπως στα αόριστα ολοκληρώματα του προηγούμενου παραδείγματος, αυτό υπονοείται.

Φυσικά, όταν μας ζητείται ένα αόριστο ολοκλήρωμα, δεν μπορούμε πάντα να αναμένουμε ότι θα το έχουμε δει προηγουμένως, έχοντας κάνει την παραγώγιση μιας παράγουσας. Στη συνέχεια θα δούμε μερικά βασικά εργαλεία με τα οποία θα μπορούμε να προσδιορίζουμε αόριστα ολοκληρώματα βάσει άλλων, γνωστών μας αόριστων ολοκληρωμάτων.

Πρόταση 5.9. ***(Γραμμικότητα ολοκληρώματος)*** *Έστω συναρτήσεις f, g με*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad \int g(x)\,dx = G(x) + C,$$

σε ένα διάστημα I. Έστω επίσης $a, b \in \mathbb{R}^*$. Θα έχουμε

$$\int (af(x) + bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx. \tag{5.1}$$

Πριν προχωρήσουμε με την απόδειξη, πρέπει να συζητήσουμε την ισότητα του θεωρήματος. Καταρχάς, αν δεν σας φαίνεται τίποτα ασυνήθιστο στην παραπάνω ισότητα, δεν προσέχατε αρκετά! Το αόριστο ολοκλήρωμα είναι σύνολο συναρτήσεων. Άρα, η παραπάνω ισότητα είναι ισότητα μεταξύ συνόλων συναρτήσεων και περιέχει πράξεις μεταξύ συνόλων συναρτήσεων. Επομένως, διαφέρει από όλες τις άλλες ισότητες που είδαμε μέχρι τώρα.

Το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνουμε λοιπόν είναι να δώσουμε κάποιους ορισμούς. Έστω, λοιπόν, $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ δύο σύνολα συναρτήσεων.

1. Ορίζουμε ως $a\mathcal{V}$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων του $\mathcal{V}$ πολλαπλασιασμένο επί a, δηλαδή
$$a\mathcal{V} = \{af : f \in \mathcal{V}\}.$$
Ειδικά για την περίπτωση που $\mathcal{V} = \{f + C : C \in \mathbb{R}\}$, παρατηρήστε ότι αν $a \neq 0$, τότε
$$a\mathcal{V} = \{af + aC : C \in \mathbb{R}\} = \{af + C\},$$
αφού αν το C διατρέχει όλο το $\mathbb{R}$, τότε και το aC διατρέχει όλο το $\mathbb{R}$, αφού $a \neq 0$.

2. Ορίζουμε επίσης το άθροισμα δύο συνόλων συναρτήσεων $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ ως το σύνολο των συναρτήσεων που μπορούν να γραφούν ως το άθροισμα μιας συνάρτησης από το $\mathcal{V}$ και μιας συνάρτησης από το $\mathcal{W}$:
$$\mathcal{V} + \mathcal{W} = \{f + g : f \in \mathcal{V},\ g \in \mathcal{W}\}. \tag{5.2}$$

3. Τέλος, λέμε ότι τα σύνολα συναρτήσεων $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι ίσα αν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

Λαμβάνοντας υπόψη όλους τους παραπάνω ορισμούς, μπορούμε πλέον να ερμηνεύσουμε επακριβώς το θεώρημα, και να προχωρήσουμε στην απόδειξή του.

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.9: Γνωρίζουμε ότι $(aF(x) + bG(x))' = af(x) + bg(x)$, επομένως
$$\int (af(x) + bg(x))\,dx = \{aF(x) + bG(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$$

Επίσης παρατηρήστε πως
$$\begin{aligned} a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx &= \{aF + C : C \in \mathbb{R}\} + \{bG + C : C \in \mathbb{R}\} \\ &= \{aF + bG + C : C \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα συνόλων προκύπτει πολύ απλά δείχνοντας ότι το ένα σύνολο είναι υποσύνολο του άλλου και αντιστρόφως.

Άρα, τα δύο μέλη της ισότητα (5.1) είναι ίσα. ■

Μπορούμε, επίσης, να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα που διευκολύνει τις πράξεις μεταξύ αορίστων ολοκληρωμάτων. Σε περίπτωση που το θεώρημα σας φαίνεται προφανές, θυμηθείτε πως έχουμε αποδείξει τον κανόνα της απαλοιφής για αριθμούς, όχι για σύνολα, όπως είναι τα αόριστα ολοκληρώματα.

Πρόταση 5.10. ***(Κανόνας απαλοιφής για αόριστα ολοκληρώματα)***

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \int h(x)\,dx \Rightarrow \int f(x)\,dx = \int h(x)\,dx - \int g(x)\,dx.$$

Απόδειξη: Έστω

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad \int g(x)\,dx = G(x) + C, \qquad \int h(x)\,dx = H(x) + C.$$

Θα δείξουμε, καταρχάς, πως

$$\int f(x)\,dx \subseteq \int h(x)\,dx - \int g(x)\,dx.$$

Αν η παραπάνω έκφραση σας μπερδεύει, θυμηθείτε πως τα αόριστα ολοκληρώματα δεν είναι ούτε συναρτήσεις, ούτε αριθμοί. Είναι *σύνολα*. Έστω λοιπόν $(F(x) + C_1) \in \int f(x)\,dx$. Παρατηρήστε πως

$$F(x) + C_1 = (F(x) + G(x)) - (G(x) - (-C_1)).$$

Επειδή ο πρώτος όρος ανήκει στο $\int h(x)\,dx = \int (f(x) + g(x))\,dx$, και ο δεύτερος στο $\int g(x)\,dx$, προκύπτει ότι η $F(x)+C_1$ ανήκει στο σύνολο $\int h(x)\,dx - \int g(x)\,dx$, επομένως πράγματι το $\int f(x)\,dx$ είναι υποσύνολο του $\int h(x)\,dx - \int g(x)\,dx$.

Θα δείξουμε, στη συνέχεια, ότι και

$$\int h(x)\,dx - \int g(x)\,dx \subseteq \int f(x)\,dx.$$

Έστω $H(x) - G(x) + C_1$ που ανήκει στο $\int h(x)\,dx - \int g(x)\,dx$. Όμως εξ υποθέσεως $H(x) = F(x) + G(x) + C_2$, και με αντικατάσταση προκύπτει πως

$$H(x) - G(x) + C_1 = F(x) + G(x) + C_2 - G(x) + C_1 = (F(x) + C_3) \in \int f(x)\,dx,$$

επομένως πράγματι το $\int h(x)\,dx - \int g(x)\,dx$ είναι υποσύνολο του $\int f(x)\,dx$.

Αφού τα $\int f(x)\,dx$ και $\int h(x)\,dx - \int g(x)\,dx$ είναι υποσύνολα το ένα του άλλου, θα είναι και ίσα, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Θεώρημα 5.6. ***(Παραγοντική ολοκλήρωση)*** *Έστω συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε να υπάρχουν τα αόριστα ολοκληρώματα των fg' και $f'g$ στο διάστημα I. Έχουμε:*

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
&\Rightarrow \int (f(x)g(x))'\,dx = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx \\
&\Rightarrow \{f(x)g(x) + C\} = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx \\
&\Rightarrow \int f'(x)g(x)\,dx = \{f(x)g(x) + C\} - \int f(x)g'(x)\,dx \\
&\Rightarrow \int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Η δεύτερη συνεπαγωγή προκύπτει από την Πρόταση 5.10. Η τελευταία ισότητα προκύπτει εύκολα, δείχνοντας ότι και και τα δύο σύνολα εκατέρωθεν της ισότητας ισούνται με το σύνολο $\{f(x)g(x) - H(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$, όπου $H'(x) = f(x)g'(x)$. ■

Η εφαρμογή του θεωρήματος καλείται **παραγοντική ολοκλήρωση** ή ολοκλήρωση **κατά παράγοντες**.

Παράδειγμα 5.13. (Παραγοντική ολοκλήρωση) Θα υπολογίσουμε με ολοκλήρωση κατά παράγοντες τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int x \sin x\, dx, \qquad \int x \cos x\, dx.$$

Σχετικά με το πρώτο ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\begin{aligned} \int x \sin x\, dx &= \int x(-\cos x)'\, dx = -x\cos x - \int x'(-\cos x)\, dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

Πράγματι, παρατηρήστε πως

$$(-x\cos x + \sin x + C)' = -x'\cos x - x(\cos x)' + (\sin x)' = -\cos x + x\sin x + \cos x = x\sin x.$$

Με ανάλογο τρόπο, έχουμε για το δεύτερο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \int x \cos x\, dx &= \int x(\sin x)'\, dx = x\sin x - \int x'\sin x\, dx \\ &= x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

Πράγματι, μπορούμε και πάλι να επαληθεύσουμε πως

$$(x\sin x + \cos x + C)' = x'\sin x + x(\sin x)' + (\cos x)' = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x.$$

Όπως φαίνεται και στο παραπάνω παράδειγμα, παγίως όταν καλούμαστε να βρούμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα, μπορούμε να επαληθεύσουμε τους υπολογισμούς μας απλώς παραγωγίζοντας το αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5.7. ***(Ολοκλήρωση με αντικατάσταση)*** *Έστω $f : J \to \mathbb{R}$ με παράγουσα F (δηλαδή, $F' = f$) στο J. Έστω επίσης παραγωγίσιμη $g : I \to \mathbb{R}$ με $g(I) \subseteq J$. Έχουμε*

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = F(g(x)) + C.$$

Απόδειξη: Το αποτέλεσμα προκύπτει απλά παραγωγίζοντας την $F(g(x))$ και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας:

$$(F(g(x))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

■

Επομένως, αν καταφέρουμε να φέρουμε ένα δοσμένο ολοκλήρωμα στη μορφή $\int f(g(x))g'(x)\, dx$ ώστε να γνωρίζουμε την παράγουσα F του f, τότε αυτόματα έχουμε λύσει το ολοκλήρωμα. Στην πράξη, διευκολύνει να ακολουθήσουμε την ακόλουθη μεθοδολογία:

1. Έστω $\int k(x)\,dx$ το δοσμένο ολοκλήρωμα.

2. Θέτουμε στο ολοκλήρωμα $u = g(x)$, όπου $g(x)$ οποιαδήποτε συνάρτηση πιστεύουμε ότι είναι η κατάλληλη και η οποία εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα, ή μπορούμε να την κάνουμε να εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα, με αλγεβρικές πράξεις.

3. Αντικαθιστούμε, επίσης, το dx με το $\frac{1}{g'(x)}\,du$.

4. Αν το ολοκλήρωμα έχει έρθει στη μορφή $\int f(u)\,du$ για κάποιο f, τότε αυτό σημαίνει ότι είχε τη μορφή $\int f(g(x))g'(x)\,dx$. Μαντεύοντας λοιπόν την g, ανακαλύπτουμε την f. Αν δεν τα καταφέρουμε, τότε πρέπει να βρούμε άλλη αντικατάσταση $u = g(x)$.

5. Αν ο έλεγχος του προηγούμενου βήματος ήταν επιτυχής, και επιπλέον γνωρίζουμε την παράγουσα F της f, τότε με χρήση του Θεωρήματος 5.7 προκύπτει πως

$$\int k(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C.$$

Η μεθοδολογία δεν είναι απλή στη χρήση. Χρειάζεται μάλιστα ιδιαίτερη εξάσκηση για να μπορούμε να μαντεύουμε ποια αντικατάσταση $u = g(x)$ πρέπει να χρησιμοποιούμε κάθε φορά. Πολλές φορές πρέπει να κάνουμε αρκετές προσπάθειες μέχρι να βρούμε μια αντικατάσταση που να δουλεύει. Δείτε και τα επόμενα παραδείγματα και ασκήσεις.

Παράδειγμα 5.14. (Ολοκλήρωση με αντικατάσταση) Θα χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση με αντικατάσταση για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int x \sin x^2\,dx.$$

Θέτουμε $u = x^2$, επομένως $du = 2x\,dx$, και με αντικατάσταση στην παραπάνω έχουμε

$$\int x \sin x^2\,dx = \int \frac{1}{2}\sin u\,du = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C.$$

Πάντως, σε αντίθεση με το πρόβλημα του προσδιορισμού παραγώγων, ο υπολογισμός του αόριστου ολοκληρώματος είναι αρκετά πιο σύνθετος, και σε πολλές περιπτώσεις είναι αδύνατο να βρούμε έναν τύπο για μια παράγουσα της συνάρτησης, παρότι αυτή υπάρχει. Για παράδειγμα, μπορεί να αποδειχθεί οτι η συνάρτηση e^{-x^2} έχει παράγουσες στο $\mathbb{R}$, είναι όμως αδύνατο να τις γράψουμε χρησιμοποιώντας γνωστές μας συναρτήσεις.

Ασκήσεις

5.25. (Άθροισμα συνόλων) Ορίζουμε το άθροισμα δύο συνόλων $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ως το σύνολο

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\},$$

δηλαδή το σύνολο όλων των αριθμών που μπορούν να γραφτούν ως άθροισμα ενός αριθμού στο A και ενός αριθμού στο B. Προσδιορίστε ποια είναι τα ακόλουθα αθροίσματα:

1. $(0, 1) + (0, 1)$.

2. $(0, 1) + \mathbb{Z}$.

3. $\mathbb{N} + \mathbb{N}$.

5.26. **[Σ/Λ, Π] (Ειδική περίπτωση)** Η Πρόταση 5.9 ισχύει και όταν $a = b = 0$.

5.27. **[Σ/Λ, Π] (Κανόνας απαλοιφής για σύνολα συναρτήσεων)** Έστω $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$, και $\mathcal{Y}$ σύνολα συναρτήσεων. Ισχύει $\mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathcal{Y} \Rightarrow \mathcal{V} = \mathcal{Y} - \mathcal{W}$.

5.28. **(Υπολογισμοί αόριστων ολοκληρωμάτων)** Υπολογίστε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

1. $\int x^2 \sin x \, dx$.
2. $\int x^2 \cos x \, dx$.

5.29. **[$\star\star$] (Ένωση διαστημάτων)** Έστω δύο διαστήματα $I_1 = [a, b]$ και $I_2 = [c, d]$, με $a < b < c < d$. Έστω συνάρτηση $f : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει $F : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $F' = f$ στο $I_1 \cup I_2$. Να προσδιορίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα της f, δηλαδή το σύνολο των συναρτήσεων των οποίων η παράγωγος στο $I_1 \cup I_2$ ισούται με την f.

5.6 Περαιτέρω Μελέτη

Εφαρμογές Παραγώγου Στο κεφάλαιο αυτό δεν θίξαμε καθόλου το τεράστιο εύρος εφαρμογών της παραγώγου στις φυσικές επιστήμες. Πολλές ποσότητες που εμφανίζονται στη Φυσική είναι παράγωγοι ως προς το χρόνο, για παράδειγμα

1. η ταχύτητα είναι παράγωγος της απόστασης,
2. η επιτάχυνση είναι παράγωγος της ταχύτητας,
3. η ένταση (τάση) στα άκρα ενός πυκνωτή (πηνίου) είναι η παράγωγος της τάσης (έντασης) ως προς το χρόνο.

Στο Λογισμό του Thomas [THOE], [THOG] μπορείτε να βρείτε μια μεγάλη ποικιλία εφαρμογών της παραγώγου στις φυσικές αλλά και σε άλλες επιστήμες (για παράδειγμα στην Οικονομία).

Μερική Παράγωγος Δεν είχαμε επίσης την ευκαιρία να μελετήσουμε την έννοια της *μερικής* παραγώγου, της παραγώγου δηλαδή μιας συνάρτησης *πολλών* μεταβλητών ως προς *μια* από αυτές. Η έννοια αυτή είναι βασική σε μαθήματα Λογισμού πολλών μεταβλητών. Σύντομες εισαγωγές στο Λογισμό συναρτήσεων πολλών μεταβλητών υπάρχουν στα περισσότερα εκτενή συγγράμματα Λογισμού, για παράδειγμα στα βιβλία των Thomas [THOE], [THOG], Apostol [APE2], [APG1], Stewart [STEW], κ.ο.κ. Πολλοί φυσικοί νόμοι εμφανίζουν μερικές παραγώγους. Για παράδειγμα, και οι τέσσερις εξισώσεις του Maxwell εμφανίζουν μερικές παραγώγους των φυσικών ποσοτήτων που εκφράζουν την ισχύ του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου ως προς μεταβλητές οι οποίες περιγράφουν θέση στο χώρο. Περισσότερα μπορείτε να μάθετε σε μαθήματα Φυσικής.

Κεφάλαιο 6

Εφαρμογές της Παραγώγου

Λόγω της φυσικής της ερμηνείας ως ρυθμός μεταβολής, η παράγωγος εμφανίζεται πολύ συχνά στις φυσικές επιστήμες και τα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε εν συντομία μερικές χαρακτηριστικές εφαρμογές της.

Στην Παράγραφο 6.1 δείχνουμε πώς μπορούμε με λίγο κόπο να υπολογίσουμε προσεγγιστικά τις τιμές μιας συνάρτησης γύρω από ένα σημείο. Η εφαρμογή δεν είναι πολύ σημαντική, αλλά μας βοηθά να ξεκαθαρίσουμε τι σημαίνει η παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα σημείο και η εφαπτομένη ευθεία. Στην Παράγραφο 6.2 αναφέρουμε εν συντομία τον Κανόνα του L'Hôpital και ορισμένες παγίδες στη χρήση του. Στην Παράγραφο 6.3 κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή στις κυρτές συναρτήσεις, δείχνοντας κριτήρια κυρτότητας που βασίζονται στο Θεώρημα Μέσης Τιμής. Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο με την Παράγραφο 6.4 και ακόμα ένα θέμα Αριθμητικής Ανάλυσης, και συγκεκριμένα με μια σύντομη εισαγωγή στη Μέθοδο του Νεύτωνα για τον υπολογισμό των ριζών μιας συνάρτησης.

6.1 Προσεγγιστικοί Υπολογισμοί

Θυμηθείτε ότι, σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

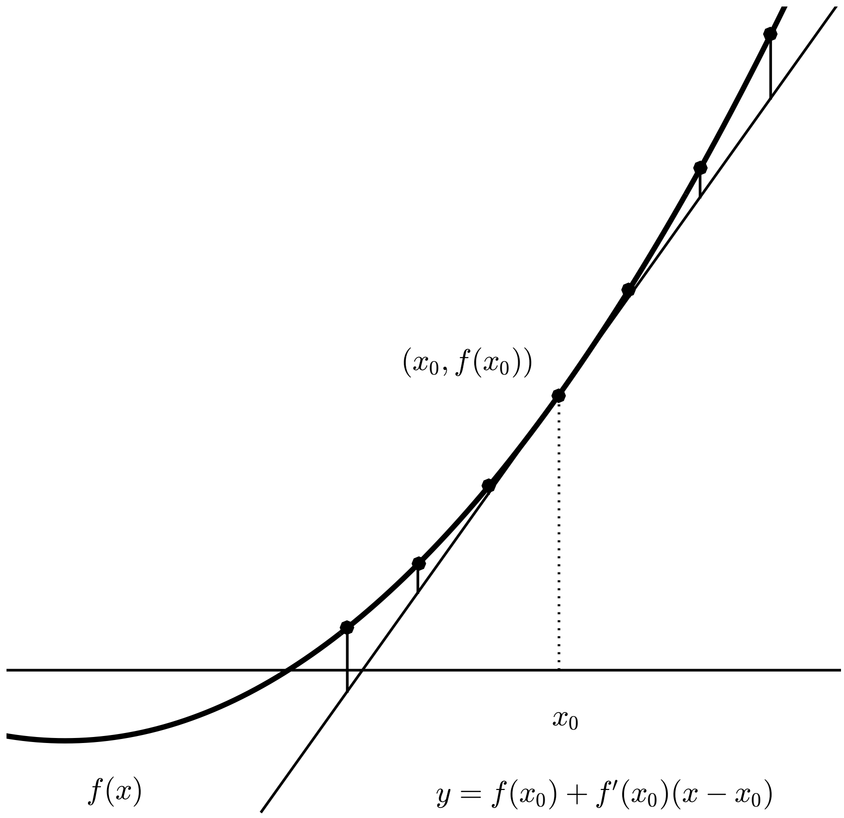
Επομένως, και σύμφωνα με τη διαισθητική ερμηνεία του ορίου, όταν το x είναι κοντά στο x_0, θα έχουμε, κατά προσέγγιση, ότι

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{6.1}$$

Η προσέγγιση αυτή, στη δεύτερη μορφή της, έχει μια απλή γεωμετρική ερμηνεία. Συγκεκριμένα, μας δείχνει ότι όταν το x είναι κοντά στο x_0, τότε και η τιμή της συνάρτησης στο $f(x)$, δηλαδή το αριστερό μέλος της προσέγγισης, είναι κοντά στην τιμή της γραμμικής συνάρτησης που περιγράφει την εφαπτομένη ευθεία, δηλαδή το δεξί μέλος. Δείτε το Σχήμα 6.1. Στο σχήμα έχουμε σχεδιάσει, για διάφορες τιμές του x, ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τη συνάρτηση με την εφαπτομένη ευθεία σε αυτά τα σημεία.Το μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων ισούται με το σφάλμα

$$E(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \tag{6.2}$$

της προσέγγισης. Παρατηρήστε ότι καθώς το x πλησιάζει το x_0, το σφάλμα γίνεται ολοένα και μικρότερο.



Σχήμα 6.1: Προσέγγιση της f περί το $(x_0, f(x_0))$ από την ευθεία $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Επιπλέον, η προσέγγιση αυτή μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε προσεγγιστικά τις τιμές μιας συνάρτησης με λιγότερο κόπο από ό,τι αν χρησιμοποιούσαμε την ίδια την τιμή της συνάρτησης. Δείτε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.1. (Προσδιορισμός τρίτης ρίζας) Σαν μια απλή εφαρμογή της προσέγγισης (6.1), θα προσδιορίσουμε προσεγγιστικά την τιμή της τρίτης ρίζας $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ των αριθμών x που εμφανίζονται στην πρώτη στήλη του ακόλουθου πίνακα. Η επακριβής τιμή εμφανίζεται στη δεύτερη στήλη. Η προσεγγιστική τιμή εμφανίζεται στην τρίτη στήλη. Οι τιμές βρίσκονται όλες γύρω από την τιμή $x_0 = 1000$, επομένως η προσέγγιση σε αυτή την περίπτωση είναι η ακόλουθη:

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = x_0^{\frac{1}{3}} + \frac{x - x_0}{3x_0^{\frac{2}{3}}} = 1000^{\frac{1}{3}} + \frac{x - 1000}{3 \times 1000^{\frac{2}{3}}} = 10 + \frac{1}{300}(x - x_0). \quad (6.3)$$

Στην τέταρτη στήλη εμφανίζουμε την τιμή $x - x_0$, και τέλος στην πέμπτη στήλη εμφανίζουμε το σφάλμα στην προσέγγιση, δηλαδή την τιμή $E(x)$ της (6.2).

x	$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$	$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$	$x - x_0$	$E(x)$
900	9.6549	9.6667	-100	0.0118
990	9.9666	9.9667	-10	1.1×10^{-4}
999	9.9967	9.9967	-1	1.1×10^{-6}
1000	10	10	0	0
1001	10.0033	10.0033	1	1.1×10^{-6}
1010	10.0332	10.0333	10	1.1×10^{-4}
1100	10.3228	10.333	100	0.0115

Παρατηρήστε ότι, όσο πιο κοντά είναι το x στο x_0, τόσο πιο μικρό γίνεται το σφάλμα $E(x)$, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 6.1.

Παρατηρήστε, επίσης, ότι οι πράξεις που χρειάστηκε να κάνουμε για να υπολογίσουμε τα στοιχεία της τρίτης στήλης ήταν πολύ λιγότερες. Πράγματι, παρατηρήστε ότι οποιαδήποτε και αν ήταν η συνάρτηση $f(x)$, σίγουρα θα αρκούσε να υπολογίσουμε μια φορά μόνο την παράγωγό της, στη θέση x_0, και μετά το κάθε σημείο υπολογίζεται με λίγες αριθμητικές πράξεις. Αντίθετα, για τον υπολογισμό των επακριβών τιμών, που εμφανίζονται στη δεύτερη στήλη, οι πράξεις που ενδέχεται να χρειαστούν είναι πολύ πιο σύνθετες. Στο παράδειγμά μας, χρειάζεται ο υπολογισμός μιας κυβικής ρίζας ανά στοιχείο του πίνακα.

Ασκήσεις

6.1. (Υπολογισμός των τιμών της εφαπτομένης) Επαναλάβετε το Παράδειγμα 6.1 για τη συνάρτηση $\tan x$. Συγκεκριμένα, υπολογίστε προσεγγιστικά τις τιμές $\tan x$ για τις ακόλουθες τιμές του x:

$$\pi/4 - 0.1, \quad \pi/4 - 0.01, \quad \pi/4 - 0.001, \quad \pi/4, \quad \pi/4 + 0.001, \quad \pi/4 + 0.01, \quad \pi/4 + 0.1.$$

Χρησιμοποιήστε μόνο την τιμή της $\tan x$ και της παραγώγου της στη θέση $x_0 = \pi/4$. Συγκρίνετε, με χρήση ενός αναλυτικού πίνακα, όπως και στο Παράδειγμα 6.1, τις τιμές που βρήκατε με τις ακριβείς.

6.2 Κανόνας L'Hôpital

Ορισμός 6.1. *(Απροσδιοριστίες)*

1. *Το όριο* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ *εμφανίζει* ***απροσδιοριστία*** $0 \times \infty$ *αν* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ *και* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$.
2. *Το όριο* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *εμφανίζει* ***απροσδιοριστία*** $\frac{0}{0}$ *αν* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$.
3. *Το όριο* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *εμφανίζει* ***απροσδιοριστία*** $\frac{\infty}{\infty}$ *αν* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.
4. *Το όριο* $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x))$ *εμφανίζει* ***απροσδιοριστία*** $\infty - \infty$ *αν* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

Οι ίδιοι ορισμοί ισχύον και στην περίπτωση που τα παραπάνω όρια είναι πλευρικά ή στο $\pm\infty$.

Σε επόμενα κεφάλαια θα δούμε και άλλες μορφές απροσδιοριστίας.

Σε περιπτώσεις απροσδιοριστίας δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες που έχουμε δει μέχρι τώρα για τον υπολογισμό ορίων. Δεν υπάρχει κάποιος γενικός κανόνας που να μας δίνει την τιμή ενός ορίου που εμφανίζει απροσδιοριστία, και κατά περίπτωση μπορεί το όριο να έχει οποιαδήποτε τιμή ή και να μην υπάρχει. Για παράδειγμα, δείτε την Άσκηση 6.2.

Παρατηρήστε, επίσης, ότι ορισμένα όρια εμφανίζουν διαφορετικά είδη απροσδιοριστίας, ανάλογα με τον τρόπο που τα γράφουμε. Για παράδειγμα, το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \sin^2 x \times \frac{1}{x^2}$$

εμφανίζει απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$ αν το γράψουμε με τον πρώτο τρόπο και απροσδιοριστία $0 \times \infty$ αν το γράψουμε σύμφωνα με τον δεύτερο τρόπο.

Μια τελευταία παρατήρηση που πρέπει να γίνει είναι ότι απροσδιοριστία έχουμε, για παράδειγμα, αν πολλαπλασιάσουμε κάτι που *τείνει* στο 0 με κάτι που *τείνει* στο άπειρο. Αν, όμως, πολλαπλασιάσουμε *το* 0 με κάτι που απλώς τείνει στο άπειρο, το γινόμενο είναι το 0, και δεν υπάρχει απροσδιοριστία.

Μπορούμε τώρα να δούμε τον αγαπημένο κανόνα όλων των φοιτητών, τον Κανόνα του L'Hôpital. Η χρησιμότητα του κανόνα είναι ότι μας επιτρέπει να αντιμετωπίζουμε απροσδιοριστίες της μορφής $\frac{0}{0}$ και της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$.

Θεώρημα 6.1. ***(Κανόνας του L'Hôpital)*** *Έστω συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Τότε έχουμε και

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Το αποτέλεσμα ισχύει και αν όλα τα όρια είναι πλευρικά ή είναι στο $\pm\infty$, αν το $L = \pm\infty$, και, τέλος, αν το κοινό όριο των f, g είναι το ∞ ή το $-\infty$.

Επειδή ο Κανόνας του L'Hôpital περιλαμβάνει πολλά σκέλη, δεν θα δούμε την απόδειξή του. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε ορισμένα παραδείγματα σωστής και λάθος χρήσης του κανόνα. Σε επόμενα κεφάλαια θα δούμε αρκετά παραδείγματα ακόμα.

Παράδειγμα 6.2. (Χρήση του Κανόνα του L'Hôpital) Θα υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x + \sin x},$$

για το οποίο έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $0/0$, με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital. Πολύ απλά,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{\frac{1}{1} - 1}{1 + 1} = 0.$$

Παράδειγμα 6.3. (Λάθος χρήση του Κανόνα L'Hôpital) Θα υπολογίσουμε το ακόλουθο όριο με δύο διαφορετικές μεθόδους. Παρατηρήστε ότι τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρανομαστής τείνουν στο 0:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 3x - 4}{x^3 + x^2 - 2}.$$

Καταρχάς, έχουμε, με διπλή χρήση του Κανόνα του L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 3x - 4}{x^3 + x^2 - 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 3}{3x^2 + 2x} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{6x} = 1.$$

Εναλλακτικά, έχουμε, με μία μόνο χρήση του Κανόνα του L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 3x - 4}{x^3 + x^2 - 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 3}{3x^2 + 2x} = \frac{\lim_{x\to 1}(3x^2 + 3)}{\lim_{x\to 1}(3x^2 + 2x)} = \frac{6}{5}.$$

Το σωστό αποτέλεσμα είναι, βέβαια, το δεύτερο. Στην πρώτη λύση, ήταν λάθος η δεύτερη εφαρμογή του κριτηρίου, διότι τότε δεν υπήρχε απροσδιοριστία. Για να εφαρμόσουμε τον Κανόνα του L'Hôpital *πρέπει* να υπάρχει απροσδιοριστία.

Παράδειγμα 6.4. (Μη υπάρχον όριο) Σαν ένα άλλο παράδειγμα των προβλημάτων που μπορεί να κρύβει η χρήση του Κανόνα του L'Hôpital, θα υπολογίσουμε το ακόλουθο όριο, με δύο διαφορετικές μεθόδους:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}.$$

Παρατηρούμε, καταρχάς, πως

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Σχετικά με το πρώτο όριο, παρατηρούμε πως είναι ίσο με 1, αφού $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (δείτε το Παράδειγμα 3.12). Σχετικά με το δεύτερο όριο, στο Παράδειγμα 3.10 έχουμε υπολογίσει ότι είναι 0. Επομένως, με την πρώτη μέθοδο υπολογίζουμε πως το όριο είναι 0.

Σχετικά με τη δεύτερη μέθοδο, χρησιμοποιώντας τον Κανόνα του L'Hôpitalπροκύπτει πως

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x}.\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω όρια, το πρώτο είναι εύκολο να δείξουμε ότι ισούται με 0, και πάλι χρησιμοποιώντας το Παράδειγμα 3.10. Το δεύτερο όμως όριο, δεν υπάρχει, διότι δεν υπάρχει το όριο της $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (δείτε το Παράδειγμα 3.16). Επομένως, δεν υπάρχει και το όριο του αριστερού μέλους. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι το όριο αυτό υπάρχει, εύκολα μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα άτοπο. Δείτε σχετικά την Άσκηση 3.24.

Επομένως, βρήκαμε δύο διαφορετικά αποτελέσματα. Το λάθος αποτέλεσμα είναι το δεύτερο: για να εφαρμόσουμε τον Κανόνα του L'Hôpital, *πρέπει* να υπάρχει το όριο του πηλίκου των παραγώγων. Αν δεν υπάρχει, ο κανόνας δεν εφαρμόζεται, και, όπως είδαμε και με αυτό το αντιπαράδειγμα, μπορεί κάλλιστα να υπάρχει το όριο του πηλίκου των αρχικών συναρτήσεων, όχι όμως και το όριο του πηλίκου των παραγώγων της.

Παράδειγμα 6.5. (Όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$) Τυπικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον Κανόνα του L'Hôpital για να γράψουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$$

Το συγκεκριμένο όριο έχει ήδη υπολογιστεί στο Παράδειγμα 3.12. Τυπικά, δεν έχουμε κάνει κάποιο λάθος. Όμως, στην εφαρμογή του Κανόνα, χρησιμοποιήσαμε την παράγωγο $(\sin x)'=\cos x$, που υπολογίσαμε στο Παράδειγμα 5.1 χρησιμοποιώντας το όριο που ζητούμε! Επομένως, αν και η συγκεκριμένη εφαρμογή του Κανόνα είναι σωστή, μπορεί να χρησιμεύσει μόνο ως επαλήθευση, και όχι για να αποδείξουμε ότι ισχύει το δοσμένο όριο.

Ασκήσεις

6.2. (Απροσδιοριστίες $0/0$) Παρατηρήστε ότι τα ακόλουθα όρια εμφανίζουν, και τα τρία, απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^4},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}.$$

Να υπολογίσετε τα παραπάνω όρια ή να δείξετε ότι δεν υπάρχουν. Να χρησιμοποιήσετε γνωστά τριγωνομετρικά όρια και τον ορισμό του ορίου, αλλά όχι παραγώγους.

6.3. (Χρήση Κανόνα L'Hôpital) Να υπολογίσετε το ακόλουθο όριο της Άσκησης 3.32 με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x+\sin^2 x+\sin x}{x^3+x^2+x}.$$

6.3 Κυρτές Συναρτήσεις

Την έννοια της κυρτότητας μιας συνάρτησης την έχουμε ήδη συναντήσει στο Λύκειο. Σε αυτή την παράγραφο θα την ξαναδούμε σε μια διαφορετική μορφή, η οποία είναι πολύ πιο γενική. Συγκεκριμένα, ο ορισμό που θα δώσουμε, πρώτον, καλύπτει και μη παραγωγίσιμες συναρτήσεις και, δεύτερον, μπορεί να επεκταθεί εύκολα και σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Ορισμός 6.2. ***(Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις)*** *Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f καλείται* ***κυρτή στο διάστημα*** *I αν*

$$\forall x_0,\ x_1 \in I,\ \forall\theta\in[0,1],\qquad f((1-\theta)x_0+\theta x_1)\le(1-\theta)f(x_0)+\theta f(x_1).$$

Η συνάρτηση f καλείται ***κοίλη στο διάστημα*** *I αν η $-f$ είναι κυρτή στο διάστημα αυτό.*

Σύμβαση: *Στη συνέχεια, αν μια συνάρτηση ορίζεται ως κυρτή ή κοίλη σε κάποιο σύνολο I, θα υπονοείται ότι το σύνολο I είναι διάστημα.*

Ο ορισμός φαίνεται αρκετά σύνθετος, όμως η γεωμετρική του ερμηνεία είναι αρκετά απλή: μια συνάρτηση είναι κυρτή αν όλες οι χορδές (δηλαδή όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που ξεκινούν από το γράφημα της συνάρτησης και καταλήγουν σ' αυτό) βρίσκονται πάνω από το γράφημα της συνάρτησης (δηλαδή για κάθε τετμημένη x η αντίστοιχη τεταγμένη επί της χορδής είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη τεταγμένη επί του γραφήματος) ή το πολύ επί του γραφήματος (δηλαδή οι τεταγμένες είναι ίσες).

Στη συνέχεια, θα δείξουμε τη σχέση ανάμεσα στον παραπάνω ορισμό και τη γεωμετρική ερμηνεία που αναφέραμε. Δείτε το Σχήμα 6.2. Έστω δύο σημεία $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ επί του γραφήματος, με $x_0, x_1 \in I$. Έστω η ευθεία που ενώνει τα δύο αυτά σημεία. Κατά τα γνωστά από τη γεωμετρία, η ευθεία αυτή έχει εξίσωση

$$y=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0).$$

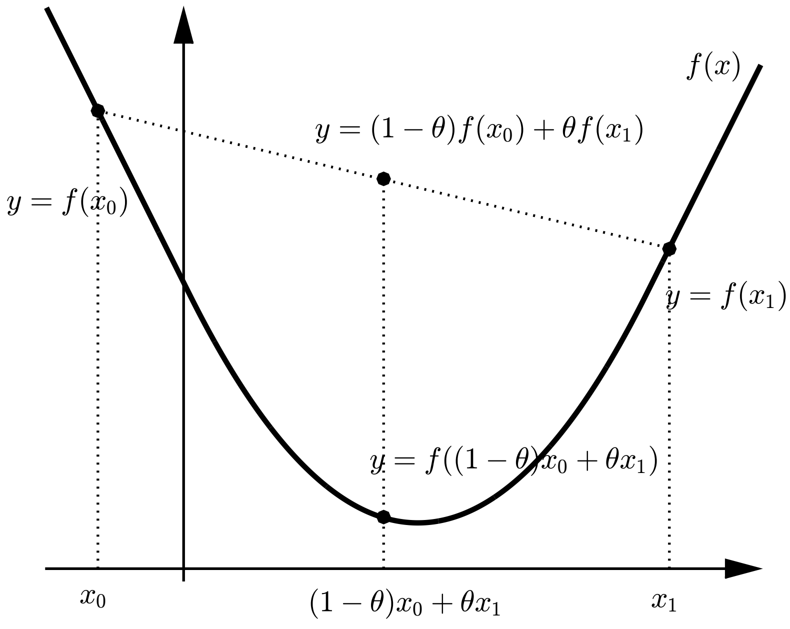
(Μπορείτε να θέσετε $x = x_1$ και $x = x_2$ για να επιβεβαιώσετε ότι πράγματι η ευθεία αυτή διέρχεται από τα $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$.)

Ακολούθως, παρατηρήστε πως τα σημεία επί του άξονα x που βρίσκονται μεταξύ του x_0 και του x_1 είναι ακριβώς τα $x = \theta x_0 + (1-\theta)x_0$ όπου $\theta \in [0, 1]$. Πράγματι, όταν $\theta \in [0, 1]$, τότε έχουμε $\theta \ge 0$ και $1-\theta \ge 0$, επομένως

$$x_0=\theta x_0+(1-\theta)x_0\le\theta x_0+(1-\theta)x_1\le\theta x_1+(1-\theta)x_1=x_1.$$

Για $\theta = 0$ το $x = x_0$, για $\theta = 1$ το $x = x_1$, για $\theta = 1/2$ το $x = (x_0 + x_1)/2$, κ.ο.κ.

Παρατηρήστε επίσης ότι η τεταγμένη y της ευθείας που αντιστοιχεί στην τετμημένη $x = (1 -$



Σχήμα 6.2: Γραφική απεικόνιση του ορισμού της κυρτότητας.

$\theta)x_0 + \theta x_1$ είναι η

$$\begin{aligned} y &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(1-\theta)x_0 + \theta x_1 - x_0}(x - x_0) \\ &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}((1-\theta)x_0 + \theta x_1 - x_0) \\ &= f(x_0) + \theta\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) \\ &= (1-\theta)f(x_0) + \theta f(x_1). \end{aligned}$$

Επομένως, πράγματι η ανισότητα του ορισμού απαιτεί το ευθύγραμμο τμήμα, στο σημείο που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο θ, να είναι πάνω από το γράφημα της συνάρτησης στο αντίστοιχο σημείο ή το πολύ να συμπίπτει με αυτό. Ο ορισμός απαιτεί η ανισότητα να ισχύει για κάθε $\theta \in [0,1]$, άρα πρέπει όλο το ευθύγραμμο τμήμα να είναι πάνω από το γράφημα ή, το πολύ, να εφάπτεται με αυτό. Πρέπει επίσης η ανισότητα να ισχύει και για κάθε $x_0, x_1 \in I$, άρα πράγματι ο ορισμός έχει τη γεωμετρική ερμηνεία που διατυπώσαμε.

Παρατηρήστε ότι στον ορισμό δεν γίνεται πουθενά αναφορά στην παράγωγο της f. Πράγματι, μπορεί μια συνάρτηση να είναι κυρτή σε ένα διάστημα ακόμα και αν δεν είναι παραγωγίσιμη παντού σε αυτό. Δείτε και μερικά από τα ακόλουθα παραδείγματα. Επομένως, ο ορισμός που δώσαμε είναι πιο γενικός από τον ορισμό που είδαμε στο Λύκειο.

Στη συνέχεια, θα δούμε μερικά παραδείγματα προσδιορισμού της κυρτότητας μιας συνάρτησης χρησιμοποιώντας τον ορισμό της κυρτότητας.

Παράδειγμα 6.6. (Οι γραμμικές συναρτήσεις είναι κυρτές και κοίλες) Έστω μια γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = ax + b$ όπου οι σταθερές $a, b \in \mathbb{R}$. Παρατηρήστε πως

$$\begin{aligned} f((1-\theta)x_0 + \theta x_1) = a(1-\theta)x_0 + a\theta x_1 + b &= (1-\theta)(ax_0 + b) + \theta(ax_1 + b) \\ &= (1-\theta)f(x_0) + \theta f(x_1). \end{aligned}$$

Επομένως, η ανισότητα του ορισμού ισχύει με ισότητα, και η $f(x)$ είναι κυρτή. Επειδή όμως, αν η f είναι γραμμική, τότε είναι γραμμική και η $-f$, από τον ορισμό της κοιλότητας ισχύει ότι η f είναι *και* κοίλη.

Μπορούμε να δείξουμε (Άσκηση 6.5) ότι οι μόνες συναρτήσεις που είναι κυρτές *και* κοίλες είναι οι γραμμικές.

Εκ πρώτης όψεως το να είναι μια συνάρτηση και κυρτή και κοίλη φαίνεται λάθος. Το αποτέλεσμα όμως ισχύει διότι στον ορισμό της κυρτότητας χρησιμοποιήσαμε μια ανισοϊσότητα και όχι μια αυστηρή ανισότητα, διότι αυτό εξυπηρετούσε την ανάπτυξη της θεωρίας. Ουσιαστικά, οι γραμμικές συναρτήσεις έχουν όλες τις υπόλοιπες ιδιότητες των κυρτών συναρτήσεων, επομένως θέλουμε να τις συμπεριλάβουμε σε αυτές.

Παράδειγμα 6.7. (Η $f(x) = |x|$ είναι κυρτή) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$. Θα δείξουμε ότι η $f(x)$ είναι κυρτή. Πράγματι, η ανισότητα του ορισμού γίνεται

$$\begin{aligned} f((1-\theta)x_0 + \theta x_1) \leq (1-\theta)f(x_0) + \theta f(x_1) &\Leftrightarrow |(1-\theta)x_0 + \theta x_1| \leq (1-\theta)|x_0| + \theta|x_1| \\ &\Leftrightarrow |(1-\theta)x_0 + \theta x_1| \leq |(1-\theta)x_0| + |\theta x_1|, \end{aligned}$$

που ισχύει λόγω της τριγωνικής ανισότητας $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Παράδειγμα 6.8. (Η x^2 είναι κυρτή) Θα δείξουμε ότι η $f(x) = x^2$ όπου $x \in \mathbb{R}$ είναι κυρτή παντού στο $\mathbb{R}$ με χρήση του ορισμού.

Η ανισότητα του ορισμού μας δίνει

$$\begin{aligned} & f((1-\theta)x_0 + \theta x_1) \leq (1-\theta)f(x_0) + \theta f(x_1) \\ & \Leftrightarrow (1-\theta)^2 x_0^2 + \theta^2 x_1^2 + 2\theta(1-\theta)x_0x_1 \leq (1-\theta)x_0^2 + \theta x_1^2 \\ & \Leftrightarrow x_0^2[(1-\theta)(1-(1-\theta))] + x_1^2[\theta(1-\theta)] + 2\theta(1-\theta)x_0x_1 \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \theta(1-\theta)(x_0+x_1)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

που ισχύει για κάθε $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\theta \in [0,1]$.

Όπως μπορείτε να διαπιστώσετε από τα παραπάνω παραδείγματα, ο ορισμός της κυρτότητας δεν είναι ιδιαίτερα εύχρηστος. Ευτυχώς, υπάρχει μια σειρά από αποτελέσματα που μας εξασφαλίζουν ότι μια συνάρτηση που έχει δημιουργηθεί χρησιμοποιώντας άλλες που είναι κυρτές, είναι και αυτή κυρτή. Δείτε τα παρακάτω.

Λήμμα 6.1. ***(Μέγιστο κυρτών συναρτήσεων)*** *Έστω συναρτήσεις $f, g : I \to \mathbb{R}$ κυρτές στο I. Τότε είναι κυρτή και η συνάρτηση $h = \max\{f, g\}$ που ορίζεται ως $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$.*

Απόδειξη: Θα επαληθεύσουμε τον ορισμό. Έστω, λοιπόν, δύο σημεία $x_0, x_1 \in I$ και ένα $\theta \in [0,1]$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} h((1-\theta)x_0 + \theta x_1) &= \max\{f((1-\theta)x_0 + \theta x_1), g((1-\theta)x_0 + \theta x_1)\} \\ &\leq \max\{(1-\theta)f(x_0) + \theta f(x_1), (1-\theta)g(x_0) + \theta g(x_1),\} \\ &\leq \max\{(1-\theta)f(x_0), (1-\theta)g(x_0)\} + \max\{\theta f(x_1), \theta g(x_1)\} \\ &= (1-\theta)\max\{f(x_0), g(x_0)\} + \max\{f(x_1), g(x_1)\} \\ &= (1-\theta)h(x_0) + \theta h(x_1). \end{aligned}$$

Στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι αν μεγαλώσουμε δύο αριθμούς, θα μεγαλώσει και το μέγιστό τους. Στη δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα της Άσκησης 6.7. ■

Πρόταση 6.1. ***(Γραμμικός συνδυασμός κυρτών συναρτήσεων)*** *Αν οι $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτές, τότε είναι κυρτή συνάρτηση και κάθε γραμμικός συνδυασμός τους με θετικούς συντελεστές*

$$g = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i, \qquad a_i \geq 0.$$

Απόδειξη: Θα εφαρμόσουμε τον ορισμό της κυρτότητας. Παρατηρήστε πως

$$\begin{aligned} g((1-\theta)x_0 + \theta x_1) &= \sum_{i=1}^{n} a_i f_i((1-\theta)x_0 + \theta x_1) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} a_i((1-\theta)f_i(x_0) + \theta f(x_1)) \\ &= (1-\theta)\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x_0) + \theta \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x_i) \\ &= (1-\theta)g(x_0) + \theta \sum_{i=1}^{n} g(x_1), \end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Παρατηρήστε ότι, για να ισχύει η ανισότητα, είναι απαραίτητο να έχουμε $a_i \geq 0$. ■

Λήμμα 6.2. ***(Κριτήρια κυρτότητας για παραγωγίσιμες συναρτήσεις)*** *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$.*

1. *Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο I και η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι κυρτή στο I.*

2. *Αν η f είναι διπλά παραγωγίσιμη στο I και $f'' \geq 0$ στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι κυρτή στο I.*

Απόδειξη:

1. Έστω δύο οποιαδήποτε $x_0, x_1 \in I$ και έστω $\theta \in [0,1]$ με $x_2 = (1-\theta)x_0 + \theta x_1$. Στα διαστήματα $[x_0, x_2]$ και $[x_2, x_1]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (Θεώρημα 5.5), επομένως υπάρχουν a, b τέτοια ώστε

$$f'(a) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}, \qquad f'(b) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Επειδή όμως η f' είναι αύξουσα, έχουμε $f'(a) \leq f'(b)$, επομένως

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &\Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_0)}{\theta(x_1 - x_0)} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(1-\theta)(x_1 - x_0)} \\ &\Leftrightarrow f(x_2) - f(x_0) \leq \theta f(x_1) - \theta f(x_0) \Leftrightarrow f(x_2) \leq (1-\theta)f(x_0) + \theta f(x_1) \\ &\Leftrightarrow f((1-\theta)x_0 + \theta x_1) \leq (1-\theta)f(x_0) + \theta f(x_1), \end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

2. Αν η $f'' \geq 0$ στο εσωτερικό του I, τότε από την Πρόταση 5.5 η f' είναι αύξουσα, άρα από το προηγούμενο σκέλος η f είναι κυρτή. ■

Παράδειγμα 6.9. (Παράδειγμα προσδιορισμού κυρτότητας) Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - 10x^2 + 27x - 18,$$

ορισμένη στο διάστημα $[0, 7)$, των Παραδειγμάτων 5.9, 5.10, 5.11. Αφού

$$f'(x) = 3x^2 - 20x + 27, \quad f''(x) = 6x - 20,$$

προκύπτει πως η συνάρτηση είναι κυρτή στο διάστημα $[10/3, 7)$ και κοίλη στο διάστημα $[0, 10/3]$. Δείτε το Σχήμα 5.4.

Ασκήσεις

6.4. (Ορισμός κοιλότητας) Να δώσετε έναν ορισμό της κοίλης συνάρτησης χωρίς να χρησιμοποιήσετε την έννοια της κυρτότητας αλλά βάσει μιας ανισότητας ανάλογης του ορισμού της κυρτής συνάρτησης. Να δείξετε ότι ο νέος ορισμός είναι ισοδύναμος με αυτόν που έχει δοθεί.

6.5. (Κυρτές *και* κοίλες συναρτήσεις) Να δείξετε ότι οι μόνες συναρτήσεις που είναι και κυρτές και κοίλες σε ένα διάστημα I είναι οι γραμμικές, δηλαδή οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = ax + b$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

6.6. Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα I, τότε είναι αδύνατο να βρεθούν τρία σημεία $x_0 < x_1 < x_2$ εντός του I τέτοια ώστε $f(x_1) > f(x_0)$ και $f(x_1) > f(x_2)$.

6.7. (Ιδιότητες μέγιστου και ελάχιστου) Να δείξετε ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\max\{a + b, c + d\} \leq \max\{a, c\} + \max\{b, d\},$$

$$-\min\{a, b\} = \max\{-a, -b\}.$$

6.8. [Σ/Λ, Π] (Μέγιστο κοίλων συναρτήσεων) Το μέγιστο δύο κοίλων συναρτήσεων είναι κοίλη συνάρτηση.

6.9. [Σ/Λ, Π] (Ελάχιστο κοίλων συναρτήσεων) Το ελάχιστο δύο κοίλων συναρτήσεων είναι κοίλη συνάρτηση.

6.10. [Σ/Λ, Π] (Ελάχιστο κυρτών συναρτήσεων) Το ελάχιστο δύο κυρτών συναρτήσεων είναι κυρτή συνάρτηση.

6.11. (Κυρτή σύνθεση) Έστω η συνάρτηση $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, κυρτή στο $[a, b]$. Έστω η συνάρτηση $g : [c, d] \to \mathbb{R}$, αύξουσα και κυρτή στο $[c, d]$, με $h([a, b]) \subseteq [c, d]$. Να δείξετε ότι η σύνθεση $g \circ h$ είναι κυρτή παντού στο $[a, b]$. Μην υποθέσετε παραγωγισιμότητα των g, h!

6.12. [⋆⋆] (Κυρτότητα ⇒ Συνέχεια) Να δείξετε ότι αν η g είναι κυρτή σε κάποιο ανοικτό διάστημα I τότε είναι και συνεχής σε αυτό. Να δείξετε επίσης ότι αν η g είναι κυρτή σε κάποιο όχι ανοικτό διάστημα I τότε ενδέχεται η g να μην είναι συνεχής.

6.13. (Κυρτά σύνολα) Ένα σύνολο S στο $\mathbb{R}^n$ λέγεται κυρτό όταν για οποιαδήποτε σημεία x_0, x_1 που ανήκουν στο σύνολο S, θα ανήκουν στο σύνολο και όλα τα σημεία που βρίσκονται επί του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα δύο αυτά σημεία, δηλαδή

$$\forall x_0, x_1 \in S, \ \forall \theta \in [0, 1], \qquad (1 - \theta)x_0 + \theta x_1 \in S.$$

Να δείξετε ότι, αν δύο σύνολα S_1, S_2 είναι κυρτά, τότε είναι και η τομή τους $S_1 \cap S_2$. Ποιες πατάτες καθαρίζονται πιο εύκολα, οι κυρτές ή οι μη κυρτές;

6.14. (Τοπικό ελάχιστο $=$ ολικό ελάχιστο) Να δείξετε ότι κάθε τοπικό ελάχιστο μιας κυρτής συνάρτησης είναι και ολικό ελάχιστο.

6.4 Μέθοδος του Νεύτωνα

Στην παράγραφο αυτή θα επανέλθουμε στο πρόβλημα του εντοπισμού των ριζών μιας συνάρτησης, που πρωτοείδαμε στην Παράγραφο 4.4, κάνοντας μια επιπλέον υπόθεση, και συγκεκριμένα ότι έχουμε στη διάθεσή μας την παράγωγο της συνάρτησης σε κάθε σημείο. Θα δούμε περιληπτικά τη λεγόμενη Μέθοδο του Νεύτωνα (Newton), γνωστή και ως μέθοδο Newton-Raphson.

Ας φανταστούμε, λοιπόν, ότι μας έχουν δοθεί δύο ρουτίνες, οι οποίες δέχονται ως είσοδο μια τιμή του x και δίνουν ως έξοδο τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $f(x)$ και της παραγώγου $f'(x)$ για εκείνο το x. Θέλουμε να εντοπίσουμε μια ρίζα της συνάρτησης, δηλαδή ένα σημείο x^* για το οποίο $f(x^*) = 0$. Για την ακρίβεια, επειδή οι υπολογιστές έχουν περιορισμένη ακρίβεια, αρκεί να βρούμε ένα σημείο x^* για το οποίο $|f(x^*)| < E_f$, όπου η ανοχή E_f είναι ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός.

Θυμίζουμε ότι η αφελής προσέγγιση να σχεδιάσουμε το γράφημα της συνάρτησης και να εντοπίσουμε γραφικά το σημείο της ρίζας δεν είναι αποτελεσματική, διότι τότε θα πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης σε πολλά σημεία. Το «παιχνίδι» που παίζουμε είναι πώς να εντοπίσουμε το σημείο της ρίζας με όσο το δυνατόν λιγότερες πράξεις.

Η βασική ιδέα της Μεθόδου του Νεύτωνα είναι η ακόλουθη. Έστω πως βρισκόμαστε σε ένα σημείο x_0 για το οποίο γνωρίζουμε την τιμή της συνάρτησης $f(x_0)$ καθώς και την τιμή της παραγώγου $f'(x_0)$. Φανταστείτε ένα μυρμήγκι που βρίσκεται πάνω σε ένα δρόμο (το γράφημα της συνάρτησης) του οποίου την κατεύθυνση σε σχέση με τον άξονα ανατολή-δύση (δηλαδή την παράγωγο) γνωρίζει, και θέλει μια εκτίμηση για το σημείο στο οποίο ο δρόμος αυτός θα διασταυρωθεί με μια μεγάλη λεωφόρο με κατεύθυνση ανατολή-δύση (τον άξονα των x) από την οποία ξέρει πόσο απέχει επί τον άξονα βορράς-νότος (αφού γνωρίζει την τιμή $f(x)$). Το μυρμήγκι είναι πολύ μικρό, και γι' αυτό δεν μπορεί να αντιληφθεί την καμπυλότητα του δρόμου (αυτό σημαίνει ότι δεν γνωρίζει την τιμή της δεύτερης παραγώγου $f''(x)$.) ή κάποιο άλλο στοιχείο πέραν αυτών που αναφέραμε. Η καλύτερη εκτίμηση που μπορεί να κάνει το μυρμήγκι είναι ότι το σημείο τομής των δύο δρόμων είναι αυτό όπου θα τέμνονταν οι δρόμοι αν ο δρόμος πάνω στον οποίο βρίσκεται το μυρμήγκι είναι *ευθύς*.

Η Μέθοδος του Νεύτωνα, λοιπόν, είναι η ακόλουθη: Ξεκινάμε από ένα σημείο x_0, για το οποίο γνωρίζουμε τα $f(x_0)$, $f'(x_0)$, και το οποίο αποτελεί την πρώτη μας εκτίμηση για το σημείο όπου βρίσκεται η ρίζα της συνάρτησης. Προσδιορίζουμε το σημείο x_1 στο οποίο θα έτεμνε η συνάρτηση τον άξονα των x αν ήταν ευθεία, δηλαδή το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη στο x_0 τέμνει τον άξονα των x. Αυτό το σημείο είναι η νέα μας εκτίμηση για τη ρίζα της συνάρτησης. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία από αυτό το σημείο, βρίσκοντας ένα νέο σημείο x_2, κ.ο.κ. Η διαδικασία θα μας δώσει τελικά μια ακολουθία η οποία (ελπίζουμε ότι) θα συγκλίνει στη ρίζα x^*.

Σχετικά με τον επακριβή υπολογισμό του σημείου x_{n+1} αν έχουμε το σημείο x_n, παρατηρήστε πως η εφαπτομένη ευθεία στο σημείο x_n είναι η

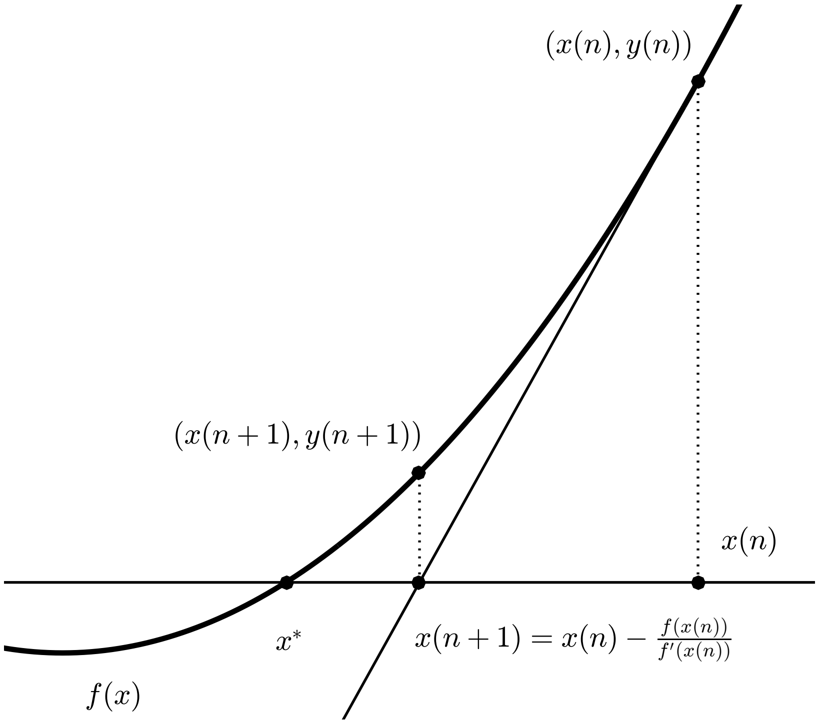
$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n),$$

επομένως θέτοντας $y = 0$, $x = x_{n+1}$, και λύνοντας ως προς x_{n+1}, προκύπτει η βασική επανάληψη της μεθόδου

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Δείτε το Σχήμα 6.3.

Σε αντίθεση με τη Μέθοδο της Διχοτόμησης, η Μέθοδος του Νεύτωνα δεν εγγυάται ότι θα βρει μια ρίζα, ακόμα και αν αυτή υπάρχει. Ο λόγος είναι ότι ενδέχεται οι παράγωγοι που χρησιμοποιούμε να μας απομακρύνουν συνεχώς από τη ρίζα. Υπάρχει επίσης και η ειδική περίπτωση σε κάποιο σημείο η παράγωγος να είναι μηδενική, οπότε η εφαπτόμενη να μην τέμνει τον άξονα των x. Παρ' όλα αυτά, μπορεί να αποδειχτεί ότι



Σχήμα 6.3: Η επανάληψη της Μεθόδου του Νεύτωνα, που δίνει το σημείο x_{n+1} χρησιμοποιώντας το σημείο x_n.

1. Αν το σημείο x_0 είναι αρκετά κοντά στη ρίζα x^*, τότε σίγουρα η μέθοδος θα συγκλίνει σε αυτό.

2. Σε κάθε επανάληψη το σφάλμα, δηλαδή η απόσταση $x_{n+1} - x^*$, θα είναι το τετράγωνο του προηγούμενου, δηλαδή του $x_n - x^*$. Αν, για παράδειγμα, το σφάλμα σε μια επανάληψη είναι 10^{-3}, σε δύο μόνο επαναλήψεις ακόμα το σφάλμα είναι 10^{-12}!

Επομένως, η μέθοδος δεν συγκλίνει πάντα, και αυτό λαμβάνεται υπόψη στον ακόλουθο ψευδοκώδικα, αφού ορίζουμε ένα μέγιστο πλήθος επαναλήψεων και ελέγχουμε για την περίπτωση να είναι μηδενική η παράγωγος. Όταν όμως συγκλίνει, είναι πολύ γρήγορη.

```
/* NEWTON-RAPHSON METHOD */

function newton_raphson(f,f',x(0),M,Ef)

/* INPUT:                                              */
/* f: A function whose root is needed                  */
/* f': The derivative of the function                  */
/* x(0): Starting location of the iterations           */
/* M: Maximum number of iterations                     */
/* Ef:  Maximum tolerance in value of function         */
/*      at estimated root location.                    */

1:  n=0;   /* Initialization */

2:  WHILE n<M & |f(x(n))|>Ef & |f'(x(n))|>0,
```

```
        x(n+1)=x(n)-f(x(n))/f'(x(n));
        n=n+1;
    END;

    RETURN x(n) /* x(n) is an estimate of the root */
```

Δείτε τα επόμενα παραδείγματα. Παντού τα αποτελέσματα αναφέρονται με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων, και έχουν προσδιοριστεί υλοποιώντας τον παραπάνω ψευδοκώδικα.

Παράδειγμα 6.10. ($f(x) = x - \cos x$, $x_0 = 0$) Σαν ένα πρώτο παράδειγμα της μεθόδου, εξετάζουμε τη μέθοδο στην περίπτωση της συνάρτησης $f(x) = x - \cos x$, με αρχικό σημείο το $x_0 = 0$. Η μέθοδος ανακαλύπτει διαδοχικά τα ακόλουθα σημεία:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	0	-1.0000	1.0000
1	1.0000	0.4597	1.8415
2	0.7504	0.0189	1.6819
3	0.7391	0.0000	1.6736
4	0.7391	0.0000	1.6736
5	0.7391	0	1.6736

Μετά από μόλις 3 επαναλήψεις, η ρίζα έχει εντοπιστεί με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων, ενώ μετά από συνολικά 5 επαναλήψεις η ρίζα έχει εντοπιστεί επακριβώς και με την ακρίβεια που χρησιμοποιεί ο υπολογιστής. Μπορείτε να συγκρίνετε αυτή την επίδοση με την αντίστοιχη επίδοση της Μεθόδου της Διχοτόμησης, που χρησιμοποιείται στο Παράδειγμα 4.9 για την ίδια συνάρτηση.

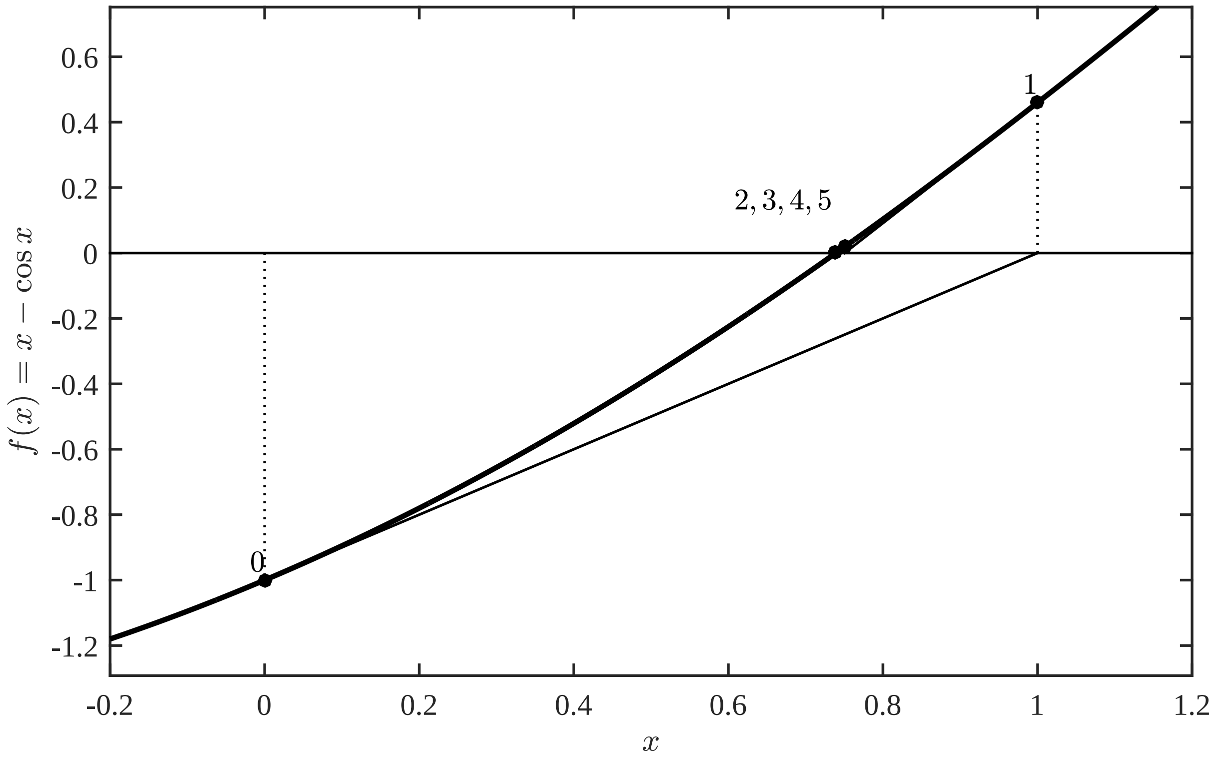
Στο Σχήμα 6.4 έχουμε απεικονίσει γραφικά την εξέλιξη της μεθόδου.

Παράδειγμα 6.11. ($f(x) = x - \cos x$, $x_0 = 4$) Σαν ένα δεύτερο παράδειγμα, εξετάζουμε τη μέθοδο στην περίπτωση της συνάρτησης $f(x) = x - \cos x$, αλλά τώρα με αρχικό σημείο το $x_0 = 4$. Η μέθοδος ανακαλύπτει διαδοχικά τα ακόλουθα σημεία:

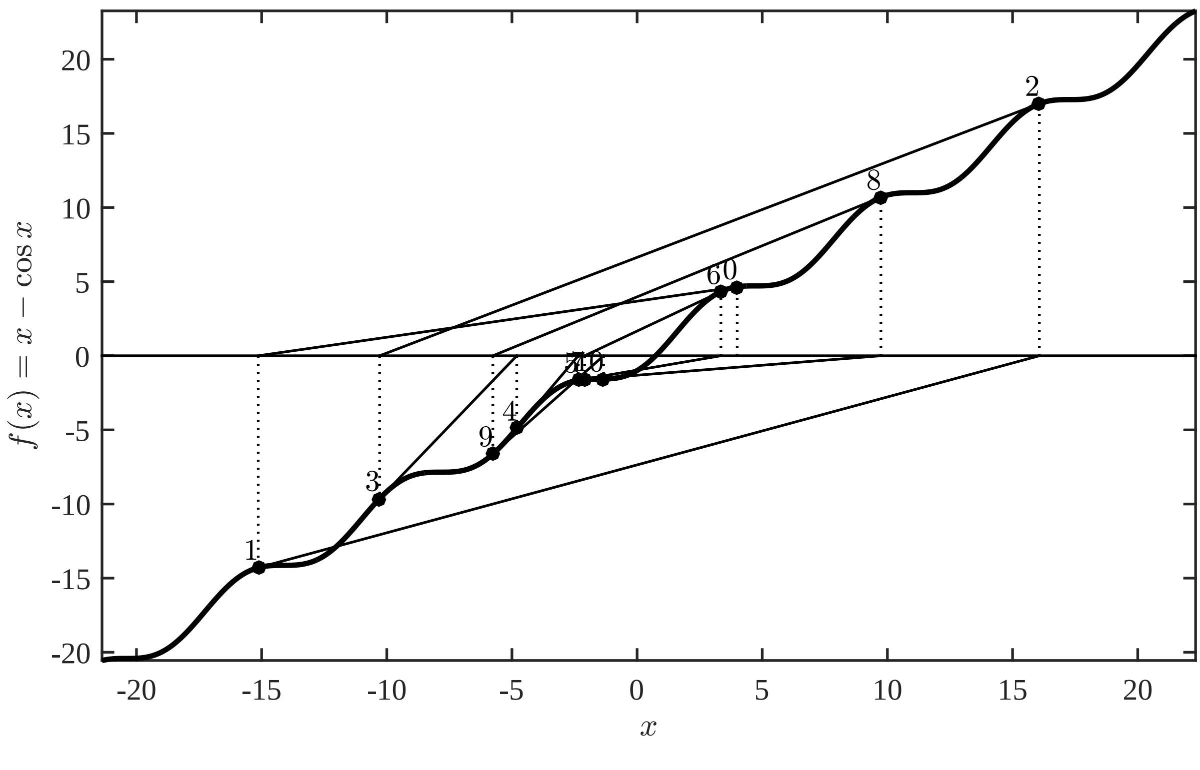
n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	4.0000	4.6536	0.2432
1	-15.1352	-14.2948	0.4581
2	16.0706	17.0056	0.6452
3	-10.2856	-9.6338	1.7584
4	-4.8068	-4.9011	1.9955
5	-2.3508	-1.6475	0.2891
6	3.3483	4.3270	0.7948
7	-2.0959	-1.5946	0.1347
8	9.7403	10.6909	0.6897
9	-5.7613	-6.6282	1.4985
10	-1.3381	-1.5687	0.0269

Η κατάσταση τώρα είναι πολύ διαφορετική απ' ότι στο προηγούμενο παράδειγμα. Επειδή το αρχικό μας σημείο ήταν αρκετά μακριά από τη ρίζα, η μέθοδος αδυνατεί να την προσεγγίσει, και πραγματοποιεί ταλαντώσεις γύρω από αυτή. Αν και οι λεπτομέρειες παραλείπονται, τελικά η μέθοδος συγκλίνει μετά από περίπου 30 επαναλήψεις καθώς, περίπου τυχαία, σε μια από αυτές επιλέγεται ένα σημείο αρκετά κοντά στη λύση.

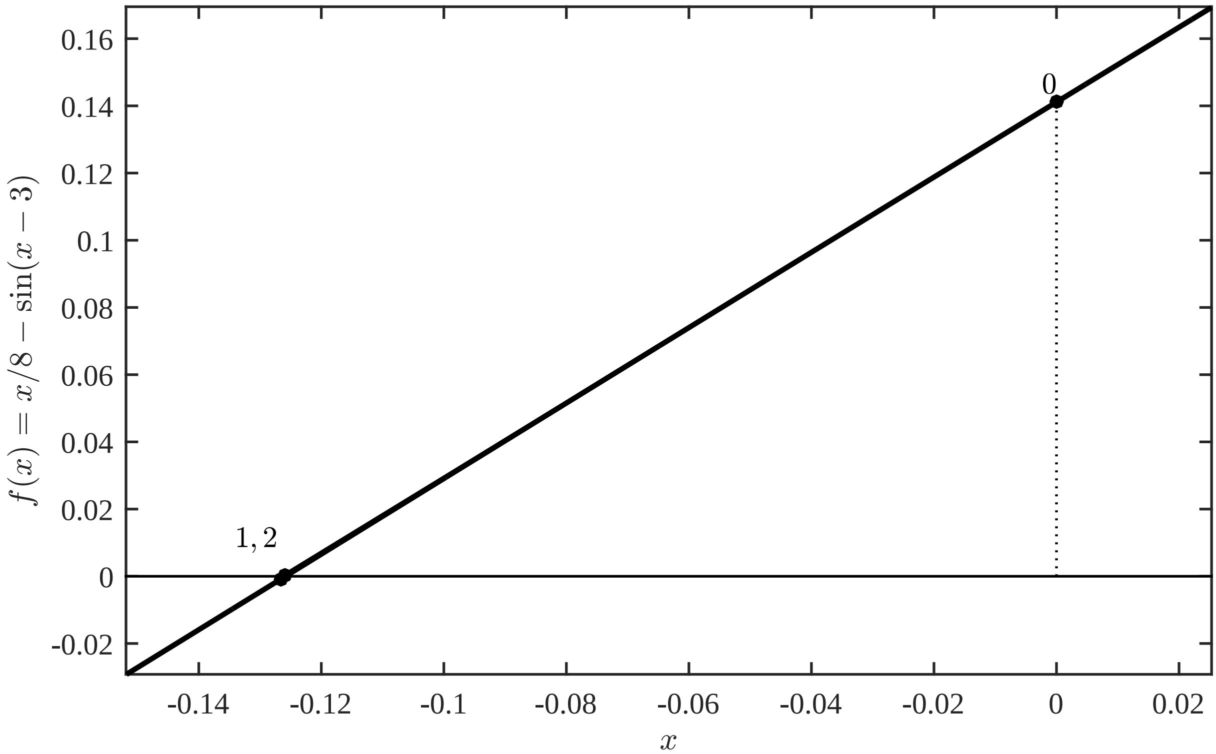
Στο Σχήμα 6.5 έχουμε απεικονίσει γραφικά την εξέλιξη της μεθόδου.



Σχήμα 6.4: Επαναλήψεις της Μεθόδου του Νεύτωνα για τη συνάρτηση $f(x) = x - \cos x$ με $x_0 = 0$ του Παραδείγματος 6.10. Η μέθοδος πρακτικά συγκλίνει μετά από 3 επαναλήψεις.



Σχήμα 6.5: Επαναλήψεις της Μεθόδου του Νεύτωνα για τη συνάρτηση $f(x) = x - \cos x$ με $x_0 = 4$ του Παραδείγματος 6.11. Η ρίζα δεν εντοπίζεται ακόμα και μετά από 10 επαναλήψεις.



Σχήμα 6.6: Επαναλήψεις της Μεθόδου του Νεύτωνα για τη συνάρτηση $f(x) = x/8 - \sin(x-3)$ με $x_0 = 0$ του Παραδείγματος 6.12. Η ρίζα εντοπίζεται πρακτικά μετά από 3 επαναλήψεις.

Παράδειγμα 6.12. ($f(x) = x/8 - \sin(x-3)$, $x_0 = 0$) Σαν ένα τελευταίο παράδειγμα, εξετάζουμε τη μέθοδο στην περίπτωση της συνάρτησης $f(x) = x/8 - \sin(x-3)$, αλλά τώρα με αρχικό σημείο το $x_0 = 0$. Η μέθοδος ανακαλύπτει διαδοχικά τα ακόλουθα σημεία:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	0	0.1411	1.1150
1	-0.1266	-0.0008	1.1249
2	-0.1259	-0.0000	1.1249
3	-0.1259	0.0000	1.1249

Η σύγκλιση επιτυγχάνεται πρακτικά μετά από 3 επαναλήψεις. Μπορείτε να συγκρίνετε την ταχύτητα σύγκλισης εδώ με την ταχύτητα σύγκλισης της Μεθόδου Διχοτόμησης, που εφαρμόζεται για την ίδια συνάρτηση στο Παράδειγμα 4.9. Παρατηρήστε ότι η μέθοδος εντοπίζει μια ρίζα της συνάρτησης διαφορετική από αυτές που εντόπισε η Μέθοδος της Διχοτόμησης.

Στο Σχήμα 6.6 έχουμε απεικονίσει γραφικά την εξέλιξη της μεθόδου.

Ασκήσεις

6.15. [$\star\star$] (Υλοποίηση Μεθόδου Νεύτωνα) Υλοποιήστε τη Μέθοδο του Νεύτωνα σε μια γλώσσα προγραμματισμού της προτίμησής σας. Η ρουτίνα που θα δημιουργήσετε πρέπει, κατ' ελάχιστον, να επιστρέφει αριθμητικά δεδομένα για κάθε επανάληψη της μεθόδου και την τελική εκτίμηση για τη ρίζα της δοσμένης συνάρτησης, δεν είναι όμως απαραίτητο να παράγει κάποιο σχήμα. Τα ορίσματα εισόδου πρέπει να περιλαμβάνουν τουλάχιστον το αρχικό σημείο όπου υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης, το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων, και την ανοχή

E_f στην τιμή της συνάρτησης. (Επομένως, η ρουτίνα θα διακόπτεται όταν βρεθεί x_n με $|f(x_n) \leq E_f$.) Δεν είναι απαραίτητο να δίνεται ως όρισμα η συνάρτηση της οποία ζητείται η ρίζα και η παράγωγός της. Επομένως, μπορείτε για κάθε συνάρτηση της οποίας τη ρίζα θέλετε να υπολογίσετε να τροποποιείτε ανάλογα τον κώδικά σας.

6.16. (Αριθμητικό παράδειγμα) Χρησιμοποιήστε την υλοποίηση της Άσκησης 6.15 για να εντοπίσετε μια ρίζα της συνάρτησης $f(x) = 2 - \cos x + x^3$ με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.

6.17. [$\star$] (Υπολογισμός τόξου εφαπτόμενης) Χρησιμοποιήστε την υλοποίηση της Άσκησης 6.15 για να εντοπίσετε την τιμή του τόξου εφαπτόμενης arctan 1 με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων. Μην χρησιμοποιήσετε στην υλοποίησή σας έτοιμη ρουτίνα που να υπολογίζει το τόξο εφαπτομένης. (Η άσκηση δεν έχει νόημα αν υποθέσουμε ότι υπάρχει τέτοια ρουτίνα στη διάθεσή μας.) Παρατηρήστε ότι δεν χρειάζεται να εκτελέσουμε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να βρούμε την απάντηση. Πράγματι, $\tan \pi/4 = 1 \Rightarrow \arctan 1 = \pi/4$. Ο ουσιαστικός στόχος της άσκησης είναι να επιβεβαιώσουμε ότι η σύγκλιση γίνεται στο σημείο που αναμένουμε!

6.18. [$\star\star$] (Αποτυχία της Μεθόδου του Νεύτωνα) Σχεδιάστε μια συνάρτηση τέτοια ώστε αν εκτελέσουμε για αυτήν τη συνάρτηση τη Μέθοδο του Νεύτωνα με κατάλληλα επιλεγμένο αρχικό σημείο x_0, η μέθοδος θα ταλαντώνεται επ' άπειρον μεταξύ αυτού του σημείου και ενός άλλου, x_1, παρότι υπάρχει ρίζα ανάμεσά τους.

6.5 Περαιτέρω Μελέτη

Κυρτότητα Η έννοια της κυρτότητας είναι κεφαλαιώδους σημασίας στα εφαρμοσμένα μαθηματικά και αποτελεί αντικείμενο τρέχουσας έρευνας. Ο λόγος είναι ότι αν θέλουμε να βρούμε το σημείο στο οποίο ελαχιστοποιείται μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών, τότε το πρόβλημά μας είναι κατά βάση εύκολο αν η συνάρτηση είναι κυρτή, και δύσκολο αν η συνάρτηση δεν είναι κυρτή. Είναι απλό να καταλάβουμε το λόγο που συμβαίνει αυτό στην ειδική περίπτωση των συναρτήσεων μίας μεταβλητής. Πράγματι, όπως είναι διαισθητικά αναμενόμενο, μια κυρτή συνάρτηση θα ελαχιστοποιείται σε ένα μόνο σημείο, ή έστω σε ένα διάστημα. Επομένως, κάθε τοπικό ελάχιστο είναι και ολικό. Επιπλέον, εξετάζοντας τη συμπεριφορά της συνάρτησης γύρω από ένα σημείο μπορούμε να μαντέψουμε προς τα πού πρέπει να μετακινηθούμε για να βρούμε το σημείο (ή διάστημα) ελάχιστου. Αυτές οι ιδιότητες δεν ισχύουν στην περίπτωση που η συνάρτηση δεν είναι κυρτή. Οι παραπάνω συλλογισμοί επεκτείνονται και στην περίπτωση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.

Προβλήματα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων εμφανίζονται πολύ συχνά στις εφαρμοσμένες επιστήμες, καθώς πολλά προβλήματα μπορούν να αναχθούν σε αυτά, ακόμα και κάποια που είναι φαινομενικά άσχετα με την ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης, όπως η βελτιστοποίηση του πρωτοκόλλου TCP/IP, η επιλογή των ισχύων με τις οποίες εκπέμπουν τα κινητά τηλέφωνα σε ένα δίκτυο κινητής τηλεφωνίας, η επιλογή των παραμέτρων της λειτουργίας ενός δικτύου διανομής ηλεκτρικής ενέργειας, και η επιλογή των τιμών των στοιχείων σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα (για παράδειγμα, οι νόμοι του Kirchhoff μπορούν να προκύψουν ως λύση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης μιας συνάρτησης, που συχνά είναι κυρτή). Επομένως, αν η συνάρτηση που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί είναι κυρτή, ή μπορεί να γίνει κυρτή με κάποια κατάλληλη προσέγγιση ή κάποιο μετασχηματισμό, τότε το πρόβλημα είναι πολύ πιο εύκολο να λυθεί από τη γενική περίπτωση.

Λόγω αυτής της σπουδαιότητας της έννοιας της κυρτότητας, κάναμε μια μικρή εισαγωγή σε αυτήν στην Παράγραφο 6.3. Παρατηρήστε ότι τυπικά η σύνδεση της παραγράφου με το Κεφάλαιο 5 είναι σχετικά μικρή, και βασίζεται στην επίκληση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στην απόδειξη του Λήμματος 6.2.

Περισσότερα για προβλήματα κυρτής βελτιστοποίησης μπορείτε να μελετήσετε στα κλασικά βιβλία των Boyd και Vandenberghe [BOYD] (που διατίθεται στο διαδίκτυο) και του Μπερτσεκά [BERT].

Μέθοδος του Νεύτωνα Στην πράξη, η Μέθοδος του Νεύτωνα μπορεί να συνδυαστεί με άλλες μεθόδους (όπως η Μέθοδος της Διχοτόμησης) που πλησιάζουν αρκετά κοντά στη ρίζα, την οποία στη συνέχεια αναλαμβάνει να εντοπίσει ακριβώς και με μεγάλη ταχύτητα η Μέθοδος του Νεύτωνα. Μπορούμε έτσι να συνδυάσουμε τα καλύτερα στοιχεία της κάθε μεθόδου.

Η ιδέα να χρησιμοποιήσουμε την παράγωγο για να προσεγγίσουμε τη ρίζα της συνάρτησης μπορεί να επεκταθεί, με τη χρησιμοποίηση παραγώγων μεγαλύτερης τάξης. Σε αυτή την περίπτωση η προσέγγιση είναι ακόμα ταχύτερη.

Η Μέθοδος του Νεύτωνα, πάντως, δεν είναι η μόνη με την οποία μπορούμε να εντοπίσουμε τις ρίζες μιας συνάρτησης. Το πρόβλημα είναι πολύ παλιό, και υπάρχει μια μεγάλη σειρά από πολύ όμορφες μεθόδους, καθεμία εκ των οποίων κάνει διαφορετικές παραδοχές για τη συνάρτηση της οποίας ψάχνουμε τις ρίζες. Μπορείτε να δείτε περισσότερα στα βιβλία Αριθμητικής Ανάλυσης που αναφέρουμε στη βιβλιογραφία [FORE], [FORG], [PRES], [AKPI].

Κεφάλαιο 7

Το Ολοκλήρωμα

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε την τρίτη, μετά το όριο και την παράγωγο, βασική έννοια του Λογισμού, δηλαδή το ολοκλήρωμα. Στο επόμενο κεφάλαιο η παράγωγος και το ολοκλήρωμα θα συνδεθούν μέσω των δύο Θεμελιωδών Θεωρημάτων του Λογισμού.

Στην Παράγραφο 7.1 δίνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος, όπως τον έδωσε ο Darboux, βάσει κάτω και άνω αθροισμάτων. Στην Παράγραφο 7.2 δίνουμε μερικά παραδείγματα της εφαρμογής του ορισμού, δείχνοντας ότι ορισμένες απλές συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες και υπολογίζοντας το ολοκλήρωμά τους. Στις Παραγράφους 7.3 και 7.4 έχουμε συγκεντρώσει όλες τις βασικές ιδιότητες που έχουν τα ολοκληρώματα, με εξαίρεση αυτές που προκύπτουν από τη σχέση τους με την παράγωγο, που θα εξετάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Οι δύο αυτές παράγραφοι, δεδομένου του εύρους που πραγματεύονται, είναι αρκετά συνοπτικές. Στην Παράγραφο 7.5 παρουσιάζουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος όπως τον έδωσε ο Riemann, και αναφέρουμε ότι οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

7.1 Ορισμός

Στην παράγραφο αυτή θα αναπτύξουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος «κατά Darboux», όπως τον έδωσε δηλαδή ο Darboux. Ο ορισμός βασίζεται στην έννοια των άνω και κάτω αθροισμάτων Darboux, που ορίζονται ακολούθως.

Ορισμός 7.1. ***(Άνω/κάτω άθροισμα Darboux)***

1. *Έστω διάστημα $[a, b]$. Καλούμε **διαμέριση** του διαστήματος $[a, b]$ κάθε πεπερασμένο σύνολο σημείων $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\} \subset [a, b]$ με $n \in \mathbb{N}^*$ και*

$$a = p_0 < p_1 < \cdots < p_{n-1} < p_n = b.$$

2. *Έστω φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και διαμέριση $P = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n\}$. Συμβολίζουμε τα infimum και supremum της συνάρτησης σε κάθε διάστημα της διαμέρισης ως εξής:*

$$m_i = \inf\{f(x) : p_{i-1} \le x \le p_i\}, \quad M_i = \sup\{f(x) : p_{i-1} \le x \le p_i\}, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

*Ορίζουμε το **κάτω άθροισμα Darboux** $s(f; P)$ και το **άνω άθροισμα Darboux** $S(f; P)$ της συνάρτησης f για τη διαμέριση P ως*

$$s(f; P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(p_i - p_{i-1}), \qquad S(f; P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(p_i - p_{i-1}).$$

Παρατηρήστε ότι κάθε διαμέριση $n+1$ σημείων διαμερίζει το αρχικό σύνολο $[a, b]$ σε n διαστήματα. Επίσης, σε αντίθεση με τη θεωρία όπως την είδαμε στο Λύκειο, δεν έχουμε απαιτήσει η συνάρτηση f να είναι συνεχής!

Ορισμένα στοιχεία του παραπάνω ορισμού είναι κρίσιμα για την ανάπτυξη της θεωρίας στη συνέχεια. Πρώτον, πρέπει το διάστημα στο οποίο εξετάζουμε τη συνάρτηση να είναι φραγμένο, δηλαδή δεν μπορούμε να έχουμε $a = -\infty$ ή $b = \infty$. Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση κάποια από τα μήκη που εμφανίζονται στους ορισμούς των κάτω/άνω αθροισμάτων θα είναι άπειρα. Δεύτερον, είναι απαραίτητο η συνάρτηση να είναι φραγμένη στο $[a, b]$. Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση τα m_i, M_i είναι εγγυημένο ότι υπάρχουν, με βάση το Αξίωμα της Πληρότητας, διότι αφού η f είναι φραγμένη, τα σύνολα στα οποία λαμβάνονται τα infimum και supremum είναι και αυτά φραγμένα (και προφανώς μη κενά). Αν, για παράδειγμα, η f δεν ήταν άνω φραγμένη, τότε το supremum δεν θα υπήρχε για κάποιο υποδιάστημα, ή, καταχρηστικά, θα ήταν ∞. Θα δούμε, πάντως, σε επόμενο κεφάλαιο, πώς μπορούμε να παρακάμψουμε εν μέρει τους δύο αυτούς περιορισμούς, χρησιμοποιώντας την έννοια του καταχρηστικού ολοκληρώματος.

Παρατηρήστε ότι τα αθροίσματα Darboux έχουν μια ξεκάθαρη φυσική ερμηνεία. Στην περίπτωση που $f \geq 0$, το κάτω (άνω) άθροισμα Darboux είναι το εμβαδόν μιας κλιμακωτής, δηλαδή τμηματικά σταθερής συνάρτησης, που βρίσκεται κάτω (πάνω) από το γράφημα της συνάρτησης f. Επομένως, το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από το γράφημα της συνάρτησης, τον άξονα των x, και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$ είναι μεταξύ του κάτω και του άνω αθροίσματος Darboux, και προσεγγίζεται από αυτά. Στην περίπτωση που η συνάρτηση λαμβάνει και αρνητικές τιμές, τότε το ίδιο ισχύει για το *προσημασμένο* εμβαδόν του ίδιου χωρίου, που ορίζεται ως το εμβαδόν του τμήματος του χωρίου άνω του άξονα των x, μείον το εμβαδόν του τμήματος του χωρίου που βρίσκεται κάτω από τον άξονα των x. Ουσιαστικά τα κάτω και άνω αθροίσματα ορίζουν κλιμακωτές συναρτήσεις που προσεγγίζουν την f, από κάτω και από πάνω από το γράφημα της f αντίστοιχα. Δείτε το Σχήμα 7.1, όπου έχουν σχεδιάσει τις κλιμακωτές συναρτήσεις που αντιστοιχούν σε κάτω και άνω αθροίσματα Darboux για τις συναρτήσεις x^2 και $2 \sin x$.

Για να προχωρήσουμε με τη θεωρία, θα χρειαστούμε τρία απλά λήμματα που δίνουν βασικές ιδιότητες των άνω και κάτω αθροισμάτων.

Λήμμα 7.1. ***(Κάτω άθροισμα $\leq$ άνω άθροισμα)*** *Για οποιαδήποτε διαμέριση P ισχύει ότι*

$$s(f; P) \leq S(f; P).$$

Η απόδειξη είναι απλή και ζητείται στην Άσκηση 7.1. Ουσιαστικά, αν συγκρίνουμε τα δύο αθροίσματα όρο προς όρο θα δούμε ότι ο κάθε όρος του κάτω αθροίσματος είναι μικρότερος ή ίσος του αντίστοιχου όρου του άνω αθροίσματος.

Λήμμα 7.2. ***(Πυκνότερες διαμερίσεις)*** *Έστω διαμερίσεις P, P' τέτοιες ώστε $P \subseteq P'$. Τότε,*

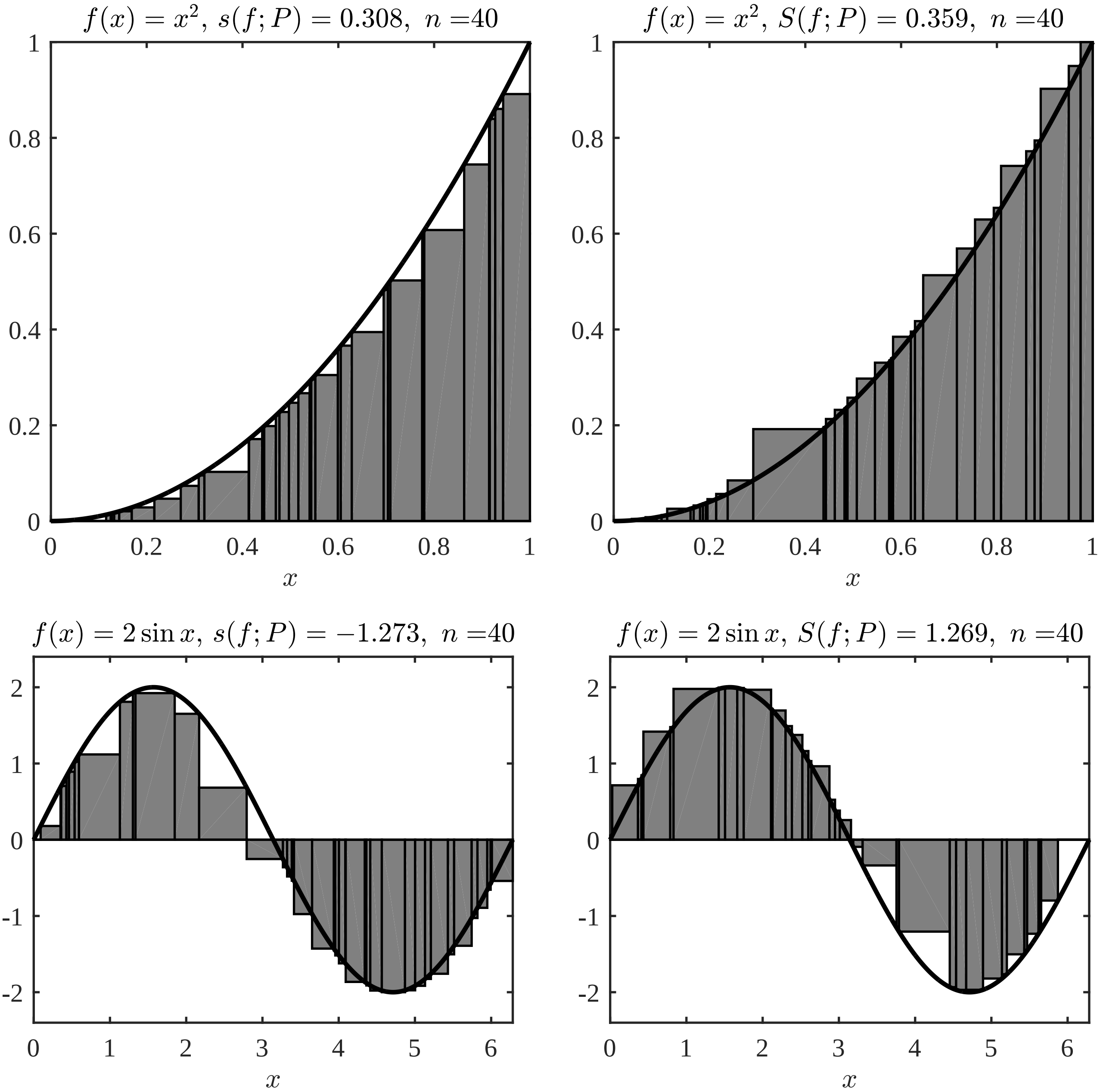
$$s(f; P) \leq s(f; P'), \qquad S(f; P) \geq S(f; P').$$

Και αυτή η απόδειξη είναι απλή και ζητείται στην Άσκηση 7.2. Η φυσική ερμηνεία του λήμματος είναι ξεκάθαρη: αν αυξήσουμε τα σημεία μιας διαμέρισης, η προσέγγιση του εμβαδού από το κάτω άθροισμα γίνεται καλύτερη, και επομένως αυτό μεγαλώνει. Αντίστοιχα, το άνω άθροισμα μικραίνει.

Έχοντας αυτά τα δύο λήμματα, εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε το επόμενο.

Λήμμα 7.3. ***(Βασική ιδιότητα διαμερίσεων)*** *Έστω δύο οποιεσδήποτε διαμερίσεις P, Q. Έχουμε*

$$s(f; P) \leq S(f; Q).$$



Σχήμα 7.1: Κλιμακωτές συναρτήσεις που αντιστοιχούν στα κάτω και άνω αθροίσματα Darboux για τις συναρτήσεις $f(x) = x^2$ στο διάστημα $[0, 1]$ και $f(x) = 2\sin x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ για την περίπτωση διαμερίσεων με $n = 40$ σημεία. Τα κάτω και άνω αθροίσματα ισούνται με το προσημασμένο εμβαδόν των σκιασμένων χωρίων.

Απόδειξη: Παρατηρήστε πως η διαφορά $S(f;P)-s(f;P)$ ισούται με το εμβαδόν μιας μη αρνητικής κλιμακωτής συνάρτησης στο διάστημα $[a,b]$, που είναι το ίδιο μη αρνητικό, επομένως πράγματι πρέπει να ισχύει το λήμμα.

Αυστηρά, έστω η διαμέριση $R = P \cup Q$ για την οποία έχουμε $P \subseteq R$ και $Q \subseteq R$. Επομένως, από Λήμμα 7.2 έχουμε

$$s(f;P) \leq s(f;R), \qquad S(f;R) \leq S(f;Q).$$

Επιπλέον, με χρήση του Λήμματος 7.1 έχουμε

$$s(f;R) \leq S(f;R).$$

Συνδυάζοντας τα άνω, προκύπτει το ζητούμενο. ■

Επομένως, το σύνολο των κάτω αθροισμάτων είναι μη κενό και φραγμένο άνω (από οποιοδήποτε άνω άθροισμα). Έχει λοιπόν supremum. Ομοίως, το σύνολο των άνω αθροισμάτων έχει infimum. Μπορούμε λοιπόν να προχωρήσουμε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 7.2. ***(Άνω και κάτω ολοκλήρωμα, ολοκλήρωμα κατά Darboux)*** *Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Έστω $[a,b] \subseteq A$ και έστω $\mathcal{P}[a,b]$ το σύνολο όλων των διαμερίσεων του διαστήματος $[a,b]$.*

1. *Ορίζουμε το **κάτω ολοκλήρωμα** και το **άνω ολοκλήρωμα** της f στο $[a,b]$ ως, αντιστοίχως,*

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} s(f;P), \qquad \overline{\int_a^b} f = \inf_{P\in\mathcal{P}[a,b]} S(f;P),$$

2. *Αν τα άνω και κάτω ολοκληρώματα μιας συνάρτησης είναι ίσα, καλούμε την κοινή τιμή τους **ολοκλήρωμα** ή **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνάρτησης f, και τη συμβολίζουμε με*

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{ή} \quad \int_a^b f.$$

*Καλούμε, επίσης, την f **ολοκληρώσιμη** στο $[a,b]$.*

3. *Αν το κάτω και το άνω ολοκλήρωμα διαφέρουν, τότε η f καλείται **μη ολοκληρώσιμη**.*

Στο εξής, αν καλούμε μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη χωρίς να διευκρινίζουμε το διάστημα στο οποίο είναι ολοκληρώσιμη, αυτό εννοείται πως είναι το πεδίο ορισμού της.

Παρατηρήστε ότι, αφού για όλα τα ζεύγη διαμερίσεων P, Q έχουμε $s(f;P) \leq S(f;Q)$, από το Παράδειγμα 1.4 προκύπτει ότι το κάτω ολοκλήρωμα είτε θα είναι ίσο με το άνω ολοκλήρωμα, είτε μικρότερό του. Επομένως, αν μια συνάρτηση δεν είναι ολοκληρώσιμη, τότε έχουμε

$$\underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f.$$

Αναφέρουμε, εν συντομία, τη βασική ορολογία των ολοκληρωμάτων.

Ορισμός 7.3. ***(Ορολογία ολοκληρωμάτων)*** *Αν εξετάζουμε ένα εκ των*

$$\int_a^b f, \ \underline{\int_a^b} f, \ \overline{\int_a^b} f,$$

τότε, ανεξάρτητα από το αν αυτά τελικά υπάρχουν ή όχι, καλούμε:

1. *την f **ολοκληρωτέα** συνάρτηση*
2. *το $[a, b]$ **διάστημα ολοκλήρωσης**,*
3. *το a **κάτω όριο ολοκλήρωσης**, το b **άνω όριο ολοκλήρωσης**, και*
4. *τα a, b, από κοινού, **όρια ολοκλήρωσης**.*

Θυμηθείτε ότι το supremum ενός συνόλου πραγματικών αριθμών έχει την ιδιότητα να βρίσκονται αυθαίρετα κοντά του στοιχεία του συνόλου μικρότερα από αυτό. Ομοίως, το infimum ενός συνόλου έχει την ιδιότητα να βρίσκονται αυθαίρετα κοντά του στοιχεία του συνόλου μεγαλύτερα από αυτό. Επομένως, αν υπάρχει το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f \geq 0$, τότε αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση *και* με κλιμακωτές συναρτήσεις μικρότερες από αυτή με εμβαδά όσο κοντά θέλουμε στο ολοκλήρωμα, *και* με κλιμακωτές συναρτήσεις μεγαλύτερες από αυτή με εμβαδά όσο κοντά θέλουμε σε αυτό. Επομένως, το ολοκλήρωμα είναι η μόνη εύλογη τιμή που μπορούμε να θέσουμε για το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης, του άξονα x, και των ευθειών $x = a$ και $x = b$. Αν η συνάρτηση f λαμβάνει και αρνητικές τιμές, τότε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης είναι η μόνη εύλογη τιμή που μπορούμε να θέσουμε για το *προσημασμένο* εμβαδόν της συνάρτησης. Αν, από την άλλη, δεν υπάρχει το ολοκλήρωμα, τότε δεν μας είναι ξεκάθαρο ποιο είναι το εμβαδόν της συνάρτησης! Πράγματι, προσεγγίζοντας τη συνάρτηση από κάτω και από πάνω, καταλήγουμε σε διαφορετικές εκτιμήσεις για την τιμή του.

Παρατηρήστε ότι το πλήθος των συναρτήσεων με τις οποίες προσπαθούμε να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση από κάτω και από πάνω είναι εξαιρετικά μεγάλο: υπάρχει μια κλιμακωτή συνάρτηση που προσεγγίζει τη συνάρτηση από κάτω (και η αντίστοιχη προσέγγιση από πάνω) για καθεμία δυνατή διαμέριση του διαστήματος $[a, b]$. Όλες αυτές οι κλιμακωτές συναρτήσεις θα πρέπει να μπορούν να μας δώσουν μια τιμή για το εμβαδόν, για όλες τις περιπτώσεις εκτός από τις πολύ παθολογικές (δείτε το Παράδειγμα 7.2).

Σε αυτό το σημείο ενδεχομένως να δημιουργείται μια εύλογη ερώτηση: γιατί το ολοκλήρωμα εξ ορισμού αντιστοιχεί σε προσημασμένο εμβαδόν, με δεδομένο ότι αυτή η έννοια δεν φαίνεται να έχει καμία ιδιαίτερη φυσική σημασία; Υπάρχουν δύο λόγοι: πρώτον, ο συγκεκριμένος ορισμός μπορεί να μας οδηγήσει σε πολύ πλούσια θεωρία, και ιδιαιτέρως στα δύο Θεμελιώδη Θεωρήματα του Λογισμού, που θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Δεύτερον, ο συγκεκριμένος ορισμός μας επιτρέπει να περιγράψουμε πολλές φυσικές ποσότητες ως ολοκλήρωμα. Για παράδειγμα, η απόσταση που διανύει ένα στερεό ισούται με το *προσημασμένο* εμβαδόν που δημιουργείται από το γράφημα της συνάρτησης της ταχύτητάς του, και όχι με το απλό εμβαδόν.

Ολοκληρώνουμε την παράγραφο με μια γενίκευση του Ορισμού 7.3 του ολοκληρώματος.

Ορισμός 7.4. ***(Επέκταση ορισμού ολοκληρώματος)***

1. *Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με $a \in A$ ορίζουμε*
$$\int_a^a f = 0.$$
2. *Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάποιο διάστημα $[a, b]$ με $a < b$ ορίζουμε*
$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

Το πρώτο σκέλος έχει μια προφανή φυσική ερμηνεία, όχι όμως και το δεύτερο. Και στις δύο περιπτώσεις, πάντως, η επέκταση του ορισμού γίνεται για λόγους συνοπτικότητας, καθώς βάσει αυτής της επέκτασης μπορούμε να κάνουμε υπολογισμούς χωρίς να μας απασχολεί η σχετική διάταξη των a, b.

Σύμβαση: *Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε ένα ολοκλήρωμα, χωρίς να διευκρινίζουμε αν είναι ορισμένο ή αόριστο, αυτό θα εννοείται ότι είναι ορισμένο, εκτός αν προκύπτει από τα συμφραζόμενα ότι είναι αόριστο.*

Ασκήσεις

7.1. (Απόδειξη Λήμματος 7.1) Να αποδείξετε το Λήμμα 7.1 συγκρίνοντας τα $s(f;P)$, $S(f;P)$ όρο προς όρο.

7.2. (Απόδειξη Λήμματος 7.2) Να αποδείξετε το Λήμμα 7.2. Μπορείτε να αποδείξετε το ζητούμενο υποθέτοντας, καταρχάς, ότι $P' = P \cup \{q\}$, όπου $q \notin P$, και κατόπιν γενικεύοντας.

7.2 Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων με Χρήση του Ορισμού

Σε αυτή την παράγραφο θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα μερικών συναρτήσεων με χρήση του Ορισμού 7.2. Θα δείξουμε, επίσης, και την περίπτωση μιας συνάρτησης που δεν έχει ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα 7.1. (Σταθερή συνάρτηση) Έστω η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = c$ παντού στο $[a,b]$. Ας εξετάσουμε ένα οποιοδήποτε κάτω άθροισμα:

$$s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(p_i - p_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c(p_i - p_{i-1}) = c\sum_{i=1}^{n}(p_i - p_{i-1}) = c(b-a).$$

Η τελευταία ισότητα προέκυψε διότι

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i - p_{i-1}) = (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \cdots + (p_n - p_{n-1}) = p_n - p_0.$$

Αθροίσματα αυτής της μορφής καλούνται **τηλεσκοπικά**.

Επομένως, στην ειδική αυτή περίπτωση, *όλα* τα κάτω αθροίσματα, άρα και το supremum τους, έχουν την τιμή $c(b-a)$, επομένως προφανώς έχουμε

$$\underline{\int_a^b} f = c(b-a).$$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο, για οποιοδήποτε άνω άθροισμα έχουμε

$$S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(p_i - p_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c(p_i - p_{i-1}) = c\sum_{i=1}^{n}(p_i - p_{i-1}) = c(b-a),$$

επομένως

$$\overline{\int_a^b} f = c(b-a),$$

και επειδή τα άνω και κάτω αθροίσματα είναι ίσα, υπάρχει το ολοκλήρωμα και είναι ίσο με $\int_a^b f = c(b-a)$.

Στον αντίποδα έχουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 7.2. (Συνάρτηση Dirichlet) Έστω η συνάρτηση Dirichlet περιορισμένη στο διάστημα $[a, b]$:

$$f_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [a,b], \\ 0, & x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [a,b]. \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι σε οποιοδήποτε διάστημα, οσοδήποτε μικρό, υπάρχει πάντα ένας ρητός, όπου η συνάρτηση λαμβάνει την τιμή 1, και ένας άρρητος, όπου η συνάρτηση λαμβάνει την τιμή 0. Επομένως, για οποιαδήποτε κάτω και άνω αθροίσματα, έχουμε

$$\begin{aligned} s(f;P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(p_i - p_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (p_i - p_{i-1}) = 0, \\ S(f;P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(p_i - p_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (p_i - p_{i-1}) = (b-a). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$0 = \underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f = (b-a),$$

και το ολοκλήρωμα της συνάρτησης δεν υπάρχει. Ουσιαστικά, η συνάρτηση είναι τόσο «μπερδεμένη», ώστε να μην υπάρχει λογικός τρόπος να αποφασίσουμε ποιο είναι το εμβαδόν του χωρίου που δημιουργεί, αν βασιζόμαστε σε προσεγγίσεις της συνάρτησης που είναι κλιμακωτές συναρτήσεις μεγαλύτερες ή μικρότερές της.

Παράδειγμα 7.3. (Σχεδόν σταθερή συνάρτηση) Έστω η συνάρτηση $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Έστω, καταρχάς, οποιοδήποτε κάτω άθροισμα $s(f; P)$. Παρατηρήστε πως

$$s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(p_i - p_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (p_i - p_{i-1}) = 0.$$

Πράγματι, είτε το διάστημα $[p_i, p_{i-1}]$ περιλαμβάνει το $x = 0$, είτε όχι, η τιμή $m_i = 0$, γιατί το διάστημα θα περιλαμβάνει σίγουρα και άλλες τιμές του x. Επομένως, για όλα τα κάτω αθροίσματα έχουμε $s(f; P) = 0$, επομένως

$$\underline{\int_{-1}^{1}} f = 0.$$

Αντίθετα, οι τιμές των άνω αθροισμάτων δεν είναι πάντα οι ίδιες. Για παράδειγμα, εύκολα μπορούμε να δούμε πως

$$S(f; \{-1, 1\}) = 2, \quad S(f; \{-1, -1/2, 1/2, 1\}) = 1.$$

(Ο παραπάνω συμβολισμός δεν πρέπει να σας μπερδεύει, θυμηθείτε ότι οι διαμερίσεις είναι ορισμένες ως σύνολα.) Για να υπολογίσουμε την τιμή του άνω ολοκληρώματος, παρατηρούμε καταρχάς πως όλα τα άνω αθροίσματα είναι θετικά. Πράγματι, για οποιαδήποτε διαμέριση P, η συνεισφορά των διαστημάτων της διαμέρισης στα οποία δεν ανήκει το $x = 0$ είναι μηδενική, αφού σε αυτά τα διαστήματα η συνάρτηση είναι 0, ενώ η συνεισφορά των διαστημάτων της διαμέρισης στα οποία ανήκει το $x = 0$ (υπάρχουν το πολύ δύο τέτοια διαστήματα) είναι αυστηρώς θετική, αφού εκεί $M_i = 1$. Από την άλλη, μπορούμε να δημιουργήσουμε άνω αθροίσματα όσο κοντά στο 0 θέλουμε. Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$, με $\epsilon < 2$. Παρατηρήστε πως

$$S(f; \{-1, -\epsilon/2, \epsilon/2, 1\}) = \epsilon.$$

Επομένως, το 0 είναι κάτω φράγμα όλων των $S(f;P)$, και επιπλέον είναι και το μεγαλύτερο κάτω φράγμα, γιατί αν το μεγαλώσουμε έστω και κατά ϵ, παύει να είναι άνω φράγμα. Είναι, δηλαδή το infimum των $S(f;P)$. Επομένως, έχουμε $\overline{\int_{-1}^{1}} f = 0$, άρα τελικά η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη με ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} f = 0$.

Παράδειγμα 7.4. (Εμβαδόν παραβολής) Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x) = x^2$ στο διάστημα $[0, a]$. Κατά τα γνωστά από την αναλυτική γεωμετρία, η συγκεκριμένη συνάρτηση περιγράφει μια παραβολή. Θα δημιουργήσουμε μια ακολουθία από διαμερίσεις P_n, και θα υπολογίσουμε τα κάτω και άνω αθροίσματά τους $s(f;P_n)$, $S(f;P_n)$ αντίστοιχα. Έστω, λοιπόν, η διαμέριση

$$P_n = \left\{p_0 = 0,\ p_1 = \frac{a}{n},\ p_2 = \frac{2a}{n}, \dots,\ p_n = \frac{na}{n} = a\right\},$$

για την οποία γενικά έχουμε

$$p_i = \frac{ia}{n}, \qquad i = 0,\ 1,\ \dots,\ n.$$

Καθώς η συνάρτηση είναι αύξουσα, για να υπολογίσουμε το κάτω άθροισμα $s(f;P_n)$ αρκεί να πάρουμε την τιμή της συνάρτησης στο αριστερό άκρο του κάθε υποδιαστήματος, επομένως $m_i = f(p_{i-1}) = p_{i-1}^2$, και

$$\begin{aligned} s(f;P_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(p_i - p_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} p_{i-1}^2 \cdot (p_i - p_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2 a^2}{n^2} \cdot \frac{a}{n} \\ &= a^3 \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^3} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} a^3 = \frac{a^3}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right). \end{aligned}$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την Άσκηση 1.12. Παρατηρήστε ότι η ακολουθία $s(f;P_n)$ είναι αύξουσα και συγκλίνει στο $\frac{a^3}{3}$.

Ακολούθως, υπολογίζουμε, με εντελώς ανάλογο τρόπο, το άνω άθροισμα $S(f;P_n)$, λαμβάνοντας για κάθε υποδιάστημα της διαμέρισης την τιμή της συνάρτησης στο δεξί άκρο, αφού η συνάρτηση είναι αύξουσα. Έχουμε $M_i = f(p_i) = p_i^2$, και

$$\begin{aligned} S(f;P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(p_i - p_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \cdot (p_i - p_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2 a^2}{n^2} \cdot \frac{a}{n} \\ &= a^3 \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} a^3 = \frac{a^3}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right). \end{aligned}$$

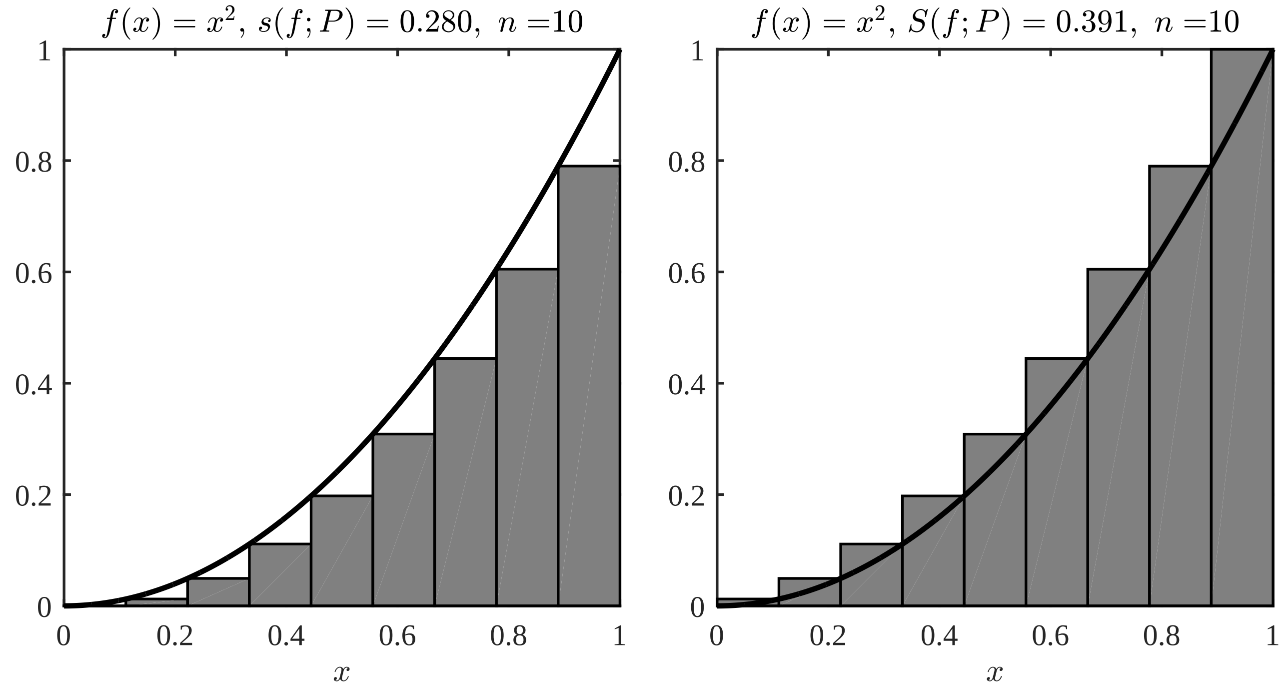
Παρατηρήστε πως η ακολουθία $S(f;P_n)$ είναι φθίνουσα και συγκλίνει και αυτή στο ίδιο όριο, $a^3/3$.

Στο Σχήμα 7.2 έχουμε σχεδιάσει τις κλιμακωτές συναρτήσεις που αντιστοιχούν στο κάτω άθροισμα και στο άνω άθροισμα Darboux για την περίπτωση $a = 1, n = 10$.

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, ότι η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη. Πράγματι, το κάτω ολοκλήρωμα $\underline{\int_0^a} f$είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $a^3/3$, γιατί, αν ήταν μικρότερο, θα δημιουργούσαμε άτοπο επιλέγοντας ένα κάτω άθροισμα μεγαλύτερό του, αφού μπορούμε να βρούμε κάτω αθροίσματα όσο κοντά θέλουμε στο $a^3/3$. Με εντελώς ανάλογο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι και το άνω ολοκλήρωμα $\overline{\int_0^a} f$ είναι μικρότερο ή ίσο του $a^3/3$. Επίσης, γνωρίζουμε πως το άνω ολοκλήρωμα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του κάτω ολοκληρώματος. Άρα, συγκεντρωτικά,

$$\underline{\int_0^a} f \geq \frac{a^3}{3}, \qquad \overline{\int_0^a} f \leq \frac{a^3}{3}, \qquad \underline{\int_0^a} f \leq \overline{\int_0^a} f,$$

από τα οποία προκύπτει πως το κάτω και το άνω ολοκλήρωμα είναι ίσα με $a^3/3$, και τελικά η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη με ολοκλήρωμα $a^3/3$.



Σχήμα 7.2: Κλιμακωτές συναρτήσεις που αντιστοιχούν στο κάτω και το άνω άθροισμα Darboux των διαμερίσεων του Παραδείγματος 7.4 για την περίπτωση $a = 1$ και για $n = 10$.

Παράδειγμα 7.5. [★] (Κλιμακωτή συνάρτηση) Σαν ένα τελευταίο παράδειγμα, έστω η διαμέριση $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ με $n \in \mathbb{N}, n > 2$, και

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_n$$

και έστω η κλιμακωτή συνάρτηση $f : [a_0, a_n] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} s_i, & a_{i-1} \le x < a_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ s_n, & a_{n-1} \le x \le a_n. \end{cases}$$

η οποία είναι κατά διαστήματα σταθερή και έχει ασυνέχειες στα σημεία της διαμέρισης. Παρατηρήστε ότι στα σημεία όπου η συνάρτηση είναι ασυνεχής την έχουμε επιλέξει δεξιά συνεχή. Όπως θα γίνει τελικά κατανοητό, θα μπορούσαμε να είχαμε κάνει διαφορετική επιλογή όσον αφορά τις τιμές της συνάρτησης στα σημεία ασυνέχειας, χωρίς αυτό να αλλάξει το αποτέλεσμα. (Γενικώς, καλούμε μια συνάρτηση **κλιμακωτή** αν το πεδίο ορισμού της είναι μια ένωση μη επικαλυπτόμενων διαστημάτων σε κάθε ένα από τα οποία η συνάρτηση είναι σταθερή.)

Θα δείξουμε ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} s_i (a_i - a_{i-1}). \tag{7.1}$$

Έστω k η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σημείων της διαμέρισης A και M η μέγιστη διαφορά μεταξύ δύο οποιονδήποτε κλιμάκων, δηλαδή,

$$k = \min_{i=1,\ldots,n} \{a_i - a_{i-1}\}, \qquad M = \max_{i,j=1,\ldots,n} |s_i - s_j|.$$

Έστω, τέλος, ένα οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Ορίζουμε

$$\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{2M(n-1)}, k\right\}.$$

Επειδή $\delta \leq k$, για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$ θα έχουμε

$$a_{i-1} < a_i - \delta < a_i < a_i + \delta < a_{i+1}.$$

Ορίζουμε τη διαμέριση

$$P = \{a_0,\ a_1 - \delta, a_1,\ a_1 + \delta,\ a_2 - \delta,\ a_2\ , a_2 + \delta, \ldots, a_n - \delta,\ a_{n-1}, a_{n-1} + \delta, a_n\}.$$

Παρατηρήστε πως

$$S(f;P) - \sum_{i=1}^{n} s_i(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} 2\delta |s_{i+1} - s_i| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\epsilon}{M(n-1)} M = \epsilon$$

$$\Rightarrow S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} s_i(a_i - a_{i-1}) + \epsilon. \quad (7.2)$$

Η πρώτη ισότητα μπορεί να γίνει κατανοητή αν κάνετε ένα προσεκτικό σχήμα. (Δείτε την Άσκηση 7.4.) Παρατηρήστε επίσης ότι

$$S(f;P) - \sum_{i=1}^{n} s_i(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \delta |s_{i+1} - s_i| \geq 0 \Rightarrow S(f;P) \geq \sum_{i=1}^{n} s_i(a_i - a_{i-1}).$$

Επομένως, αφού το $\epsilon > 0$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό, για το infimum των άνω αθροισμάτων θα πρέπει να ισχύει

$$\overline{\int_{a_0}^{a_n}} f = \sum_{i=1}^{n} s_i(a_i - a_{i-1}),$$

αλλιώς εύκολα φτάνουμε σε άτοπο. Με ανάλογο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\underline{\int_{a_0}^{a_n}} f = \sum_{i=1}^{n} s_i(a_i - a_{i-1}),$$

επομένως πράγματι ισχύει η (7.1).

Όπως προέκυψε από τα παραδείγματα αυτής της παραγράφου, και ιδιαίτερα από τα τελευταία, ο ορισμός του ολοκληρώματος είναι αρκετά δύσχρηστος. Στην επόμενη παράγραφο θα παρουσιάσουμε ορισμένα θεωρήματα με τα οποία μπορούμε να διαπιστώσουμε πιο εύκολα καταρχάς αν μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη, και δευτερευόντως ποιο είναι το ολοκλήρωμά της. Για τα πραγματικά ισχυρά εργαλεία, όμως, θα πρέπει να περιμένουμε μέχρι το επόμενο κεφάλαιο όπου παρουσιάζουμε τα δύο Θεμελιώδη Θεωρήματα του Λογισμού και τις απόρροιές τους.

Ασκήσεις

7.3. (Μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in \mathbb{Q} \cap [-1,1], \\ -\frac{1}{2}, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [-1,1]. \end{cases}$$

δεν είναι ολοκληρώσιμη, υπολογίζοντας το κάτω και το άνω ολοκλήρωμά της.

7.4. (Άνω/κάτω αθροίσματα κλιμακωτής συνάρτησης) Κάντε ένα σχήμα που να απεικονίζει τα άνω και κάτω αθροίσματα του Παραδείγματος 7.5 ως εμβαδά αντίστοιχων κλιμακωτών συναρτήσεων, και επιβεβαιώστε ότι ισχύει η (7.2).

7.5. (Εμβαδόν τριγώνου) Να επαναλάβετε τη μεθοδολογία του Παραδείγματος 7.4 προκειμένου να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, a]$ με ολοκλήρωμα $a^2/2$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Άσκηση 1.11.

7.6. [Σ/Λ, Π] (Ιδιότητα ολοκληρωμάτων) Αν η $f \geq 0$ και $\int_a^b f = 0$, τότε $f = 0$ στο $[0, 1]$.

7.7. [$\star$] (Ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης) Να δείξετε ότι αν η $f \geq 0$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, και επιπλέον $\int_a^b f = 0$, τότε υποχρεωτικά $f = 0$ παντού στο $[a, b]$.

7.3 Κριτήρια Ολοκληρωσιμότητας

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε γενικά κριτήρια ολοκληρωσιμότητας, δηλαδή κριτήρια που εξασφαλίζουν ότι μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη. Τα κριτήρια αυτά βασίζονται στον ορισμό του ολοκληρώματος, που είναι δύσχρηστος, και για αυτό το λόγο οι αποδείξεις τους είναι μακροσκελείς και δύσκολες. Χάριν συντομίας, θα παραλείψουμε αρκετά σημεία των αποδείξεων.

Καταρχάς θα ορίσουμε ένα βασικό κριτήριο ολοκληρωσιμότητας που θα χρησιμοποιήσουμε επανειλημμένα στη συνέχεια. Το κριτήριο είναι γενίκευση του συλλογισμού που χρησιμοποιήσαμε στο δεύτερο μέρος του Παραδείγματος 7.4.

Πρόταση 7.1. ***(Βασικό κριτήριο ολοκληρωσιμότητας)*** *Έστω συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και έστω πως υπάρχει αριθμός I τέτοιος ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ να υπάρχουν διαμερίσεις P, Q τέτοιες ώστε*

$$I - \epsilon < s(f; P) \leq I \leq S(f; Q) < I + \epsilon. \tag{7.3}$$

Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, με ολοκλήρωμα ίσο με I.

Απόδειξη: Πρώτα θα δείξουμε ότι

$$\underline{\int_a^b} f \geq I$$

χρησιμοποιώντας απαγωγή σε άτοπο. Πράγματι, έστω πως ισχύει $\underline{\int_a^b} f < I$. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να επιλέξουμε $\epsilon = I - \underline{\int_a^b} f$, και να βρούμε, από την υπόθεση, διαμέριση P για την οποία $s(f; P) > \underline{\int_a^b} f$. Αυτό είναι άτοπο διότι το $\underline{\int_a^b} f$ είναι το supremum των κάτω αθροισμάτων.

Με εντελώς ανάλογο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\overline{\int_a^b} f \leq I.$$

Οι λεπτομέρειες ζητούνται στην Άσκηση 7.8.

Γνωρίζουμε, επίσης, ότι $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Συγκεντρωτικά,

$$\underline{\int_a^b} f \geq I, \qquad \overline{\int_a^b} f \leq I, \qquad \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f,$$

από τα οποία προκύπτει πως το κάτω και το άνω ολοκλήρωμα είναι ίσα με I, και τελικά η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ με ολοκλήρωμα $\int_a^b f = I$. ■

Παρατηρήστε ότι, από τον ορισμό των κάτω και άνω ολοκληρωμάτων ως supremum και infimum αντίστοιχα, ισχύει και το αντίστροφο της πρότασης, δηλαδή αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη με ολοκλήρωμα I, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν διαμερίσεις P, Q τέτοιες ώστε να ισχύει η (7.3).

Πρόταση 7.2. ***(Ολοκληρωσιμότητα σε μικρότερο διάστημα)*** *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη και σε οποιοδήποτε υποσύνολό του $[c, d] \subseteq [a, b]$.*

Απόδειξη: Έστω $I = \int_a^b f$. Έστω $\epsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε δύο διαμερίσεις P, Q τέτοιες ώστε

$$s(f; P) > I - \epsilon/2, \quad S(f; Q) < I + \epsilon/2 \Rightarrow S(f; Q) - s(f; P) < \epsilon.$$

Ακολούθως, προσθέτουμε στις Q, P τα σημεία c, d του μικρότερου διαστήματος, αν αυτά δεν υπάρχουν ήδη, δημιουργώντας έτσι νέες διαμερίσεις P', Q'. Από την Άσκηση 7.2 έχουμε $s(f; P') \geq s(f; P)$ και $S(f; Q') \leq S(f; Q)$, επομένως θα έχουμε και

$$S(f; Q') - s(f; P') < \epsilon. \tag{7.4}$$

Έστω τώρα οι διαμερίσεις P'' και Q'' που δημιουργούνται αν κρατήσουμε τα σημεία των P', Q' που βρίσκονται εντός του $[c, d]$, δηλαδή

$$P'' = P' \cap [c, d], \qquad Q'' = Q' \cap [c, d].$$

Παρατηρήστε ότι αφού ισχύει η (7.4), θα πρέπει να ισχύει και

$$S(f; Q'') - s(f; P'') < \epsilon.$$

Πράγματι, το μεν $S(f; Q') - s(f; P')$ είναι το εμβαδόν μιας μη-αρνητικής κλιμακωτής συνάρτησης σε ένα διάστημα $[a, b]$, ενώ το $S(f; Q'') - s(f; P'')$ είναι το εμβαδόν της ίδιας κλιμακωτής συνάρτησης σε ένα υποσύνολο $[c, d] \subseteq [a, b]$. Επειδή μπορούμε για κάθε $\epsilon > 0$ να βρούμε P'', Q'' ώστε να ισχύει η παραπάνω ανισότητα, από την Άσκηση 1.26 προκύπτει ότι

$$\sup_{P \in \mathcal{P}[c,d]} s(f; P) = \inf_{P \in \mathcal{P}[c,d]} S(f; P) \Leftrightarrow \underline{\int_c^d} f = \overline{\int_c^d} f,$$

επομένως υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_c^d f$.

■

Πρόταση 7.3. ***(Ολοκληρωσιμότητα σε Ένωση Διαστημάτων)***

1. *Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $a < b < c$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και στο $[b, c]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη και στο $[a, c]$, με*
$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f. \tag{7.5}$$

2. *Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$. Η (7.5) ισχύει, εφόσον υπάρχουν και τα τρία ολοκληρώματα, ανεξαρτήτως της σχετικής σειράς των a, b, c.*

Απόδειξη: [★] Σχετικά με το πρώτο σκέλος, έστω $\epsilon > 0$. Από τον ορισμό των κάτω και άνω ολοκληρωμάτων, θα υπάρχουν διαμερίσεις P_1, Q_1 του $[a, b]$ και P_2, Q_2 του $[b, c]$ τέτοιες ώστε

$$\int_a^b f - \epsilon/2 < s(f; P_1) \leq \int_a^b f \leq S(f; Q_1) < \int_a^b f + \epsilon/2.$$

και

$$\int_b^c f - \epsilon/2 < s(f; P_2) \leq \int_b^c f \leq S(f; Q_2) < \int_b^c f + \epsilon/2.$$

Προσθέτοντας τις δύο παραπάνω κατά μέλη, προκύπτει

$$\begin{aligned}\int_a^b f + \int_b^c f - \epsilon < s(f; P_1) + s(f; P_2) & \\ \leq \int_a^b f + \int_b^c f & \\ \leq S(f; Q_1) + S(f; Q_2) < \int_a^b f + \int_b^c f + \epsilon. &\end{aligned}$$

Παρατηρήστε, όμως, ότι

$$s(f; P_1) + s(f; P_2) = s(f; P_1 \cup P_2), \qquad S(f; Q_1) + S(f; Q_2) = S(f; Q_1 \cup Q_2). \tag{7.6}$$

Οι παραπάνω είναι διαισθητικά προφανείς και μπορούν να δειχθούν και εύκολα γράφοντας αναλυτικά τους ορισμούς των άνω και κάτω αθροισμάτων (δείτε σχετικά την Άσκηση 7.10). Αντικαθιστώντας στις άνω ανισότητες έχουμε

$$\int_a^b f + \int_b^c f - \epsilon < s(f; P_1 \cup P_2) \leq \int_a^b f + \int_b^c f \leq S(f; Q_1 \cup Q_2) < \int_a^b f + \int_b^c f + \epsilon.$$

Από την παραπάνω προκύπτει, με εφαρμογή της Πρότασης 7.1, ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα της f στο διάστημα $[a, c]$ και ισούται με το άθροισμα $\int_a^b f + \int_b^c f$.

Σχετικά με το δεύτερο σκέλος, αρκεί να εξετάσουμε όλες τις πιθανές διατάξεις των a, b, c, λαμβάνοντας υπόψη το ενδεχόμενο κάποια να είναι ίσα. Για κάθε περίπτωση το ζητούμενο προκύπτει χρησιμοποιώντας το προηγούμενο σκέλος και τον Ορισμό 7.4. Οι αναλυτικές πράξεις ζητούνται στην Άσκηση 7.10. ■

Πρόταση 7.4. ***(Γραμμικότητα ολοκληρώματος)*** *Έστω $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Αν οι $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη και η $c_1 f + c_2 g$ στο $[a, b]$, και μάλιστα*

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_a^b f + c_2 \int_a^b g.$$

Απόδειξη: [★] Πρώτα θα αποδείξουμε την πρόταση για την περίπτωση $c_1 = c_2 = 1$. Θα δείξουμε, δηλαδή, ότι

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Κατόπιν η γενίκευση γίνεται εύκολα, και ζητείται στην Άσκηση 7.11. Έστω, λοιπόν, πως οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ με ολοκληρώματα $\int_a^b f$ και $\int_a^b g$. Έστω ένα οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Από τον ορισμό του κάτω και του άνω αθροίσματος, θα υπάρχουν διαμερίσεις P_1, P_2, Q_1, Q_2, τέτοιες ώστε

$$\int_a^b f - \epsilon/2 < s(f; P_1) \leq \int_a^b f \leq S(f; Q_1) < \int_a^b f + \epsilon/2$$

και

$$\int_a^b g - \epsilon/2 < s(g; P_1) \leq \int_a^b g \leq S(f; Q_1) < \int_a^b g + \epsilon/2.$$

Δημιουργούμε τις διαμερίσεις $P = P_1 \cup P_2$ και $Q = Q_1 \cup Q_2$, για τις οποίες προκύπτει, με χρήση της Άσκησης 7.2, ότι

$$\int_a^b f - \epsilon/2 < s(f; P) \leq \int_a^b f \leq S(f; Q) < \int_a^b f + \epsilon/2$$

και

$$\int_a^b g - \epsilon/2 < s(g; P) \leq \int_a^b g \leq S(g; Q) < \int_a^b g + \epsilon/2.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη,

$$\begin{aligned} \int_a^b f + \int_a^b g - \epsilon < s(f; P) + L(g; P) & \\ \leq \int_a^b f + \int_a^b g & \\ & \leq S(f; Q) + S(g; Q) < \int_a^b f + \int_a^b g + \epsilon. \end{aligned}$$

Ακόμη έχουμε

$$s(f; P) + s(g; P) \leq s(f + g; P) \leq S(f + g; Q) \leq S(f; Q) + S(f; Q).$$

Η πρώτη ανισότητα ισχύει γιατί το infimum του αθροίσματος των f, g σε κάθε υποδιάστημα της διαμέρισης P είναι τουλάχιστον ίσο με το άθροισμα των infima των f, g (δείτε την Άσκηση 2.12). Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από το Λήμμα 7.3. Η τρίτη ανισότητα προκύπτει ανάλογα με την πρώτη (δείτε την Άσκηση 2.13). Επομένως,

$$\int_a^b f + \int_a^b g - \epsilon < s(f + g; P) \leq S(f + g; Q) < \int_a^b f + \int_a^b g + \epsilon.$$

Από την πρώτη ανισότητα, προκύπτει πως

$$\underline{\int_a^b} (f + g) \geq \int_a^b f + \int_a^b g,$$

διαφορετικά, επιλέγοντας μια αρκούντως μικρή τιμή για το ϵ, θα είχαμε άτοπο. Με εντελώς ανάλογο τρόπο από την τελευταία ανισότητα προκύπτει πως

$$\overline{\int_a^b} (f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g,$$

Επειδή όμως $\underline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b}(f+g)$, τελικά το μόνο ενδεχόμενο που υπάρχει είναι το κάτω και το άνω ολοκλήρωμα να είναι ίσα με το $\int_a^b f + \int_a^b g$, και επομένως η συνάρτηση $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη με

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

■

Θεώρημα 7.1. ***(Συνέχεια ⇒ ολοκληρωσιμότητα)*** *Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής παντού στο $[a,b]$ με εξαίρεση ίσως ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων του $[a,b]$ όπου παρουσιάζει ασυνέχεια, τότε είναι και ολοκληρώσιμη σε αυτό.*

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι μακροσκελής και ζητείται στην Άσκηση 7.12. Το θεώρημα είναι εξαιρετικά ισχυρό, και μας εξασφαλίζει ότι ακόμα και πολύ ασυνήθιστες συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες. Για παράδειγμα η

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη σε όλα τα κλειστά και φραγμένα διαστήματα, ακόμα και αυτά που περιλαμβάνουν το 0.

Το ακόλουθο θεώρημα έχει χρησιμότητα κυρίως σε περιπτώσεις όπου δεν αντιμετωπίζουμε συγκεκριμένες περιπτώσεις συναρτήσεων, οπότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο θεώρημα.

Θεώρημα 7.2. ***(Πράξεις που διατηρούν την ολοκληρωσιμότητα)***

1. *Αν οι $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη και η fg στο $[a,b]$.*
2. *Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη και η $|f|$ στο $[a,b]$.*
3. *Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ με $f(x)\neq 0$ και η $1/f(x)$ είναι φραγμένη, τότε είναι ολοκληρώσιμη και η $1/f$ στο $[a,b]$.*

Οι αποδείξεις των σκελών του Θεωρήματος ζητούνται στις Ασκήσεις 7.13, 7.14, 7.15.

Ασκήσεις

7.8. **(Απόδειξη κριτηρίου ολοκληρωσιμότητας)** Να ολοκληρώσετε την απόδειξη της Πρότασης 7.1 δείχνοντας ότι $\overline{\int_a^b} f \leq I$.

7.9. **[⋆] (Ιδιότητα κάτω/άνω αθροισμάτων)** Αποδείξτε τις ισότητες (7.6) γράφοντας αναλυτικά τους ορισμούς των εμπλεκόμενων κάτω/άνω αθροισμάτων.

7.10. **[⋆] (Ολοκλήρωμα σε ένωση διαστημάτων)** Αποδείξτε το Σκέλος 2 της Πρότασης 7.3.

7.11. **[⋆] (Ολοκλήρωμα γραμμικού συνδυασμού συναρτήσεων)** Να ολοκληρώσετε την απόδειξη της Πρότασης 7.4. Αρχικά αποδείξτε την πρόταση για την περίπτωση $c_2 = 0$, και κατόπιν συνδυάστε τα αποτελέσματά σας.

7.12. **[⋆⋆] (Grand Guignol)** Να αποδείξετε το Θεώρημα 7.1.

7.13. [$\star\star$] (Ολοκλήρωμα γινομένου συναρτήσεων) Να αποδείξετε το Σκέλος 1 του Θεωρήματος 7.2.

7.14. [$\star\star$] (Ολοκλήρωμα απόλυτου συνάρτησης) Να αποδείξετε το Σκέλος 2 του Θεωρήματος 7.2.

7.15. [$\star\star$] (Ολοκλήρωμα πηλίκου συναρτήσεων) Να αποδείξετε το Σκέλος 3 του Θεωρήματος 7.2.

7.16. [$\star\star$] (Μετατόπιση συνάρτησης) Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Να δείξετε, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον ορισμό του ολοκληρώματος, ότι αν είναι ολοκληρώσιμη η $f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη και η $f(x-c)$ στο διάστημα $[a+c, b+c]$, με

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

7.17. [$\star$] (Επέκταση συνάρτησης) Έστω $c \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετε, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον ορισμό του ολοκληρώματος, ότι αν είναι ολοκληρώσιμη η $f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη και η $f(sx)$ στο διάστημα $[a/s, b/s]$, με

$$\int_{a/s}^{b/s} f(sx)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

7.18. [$\star\star$] (Ολοκληρωσιμότητα μονότονων συναρτήσεων) Να δείξετε ότι κάθε $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ αν είναι μονότονη. Χρησιμοποιήστε αποκλειστικά τον ορισμό του ολοκληρώματος.

7.19. [Σ/Λ, Π] (Κριτήριο ολοκληρωσιμότητας) Αν είναι ολοκληρώσιμη η $|f|$, τότε είναι ολοκληρώσιμη και η f.

7.20. [$\star$] (Ολοκληρωσιμότητα σε αυθαίρετο υποσύνολο) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι φραγμένη στο $[a, b]$ και είναι ολοκληρώσιμη για κάθε $[h, b]$ με $h > a$, τότε είναι και ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

7.21. [Σ/Λ, Π] (Ολοκλήρωμα γινόμενου) Ισχύει η ισότητα

$$\int_a^b fg = \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b g\right)$$

όταν τα ολοκληρώματα υπάρχουν.

7.22. [Σ/Λ, Π] (Ολοκλήρωμα πηλίκου) Ισχύει η ισότητα

$$\int_a^b \frac{f}{g} = \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b g\right)^{-1}$$

όταν τα ολοκληρώματα υπάρχουν.

7.4 Ανισότητες

Πρόταση 7.5. ***(Φράγμα ολοκληρώματος)*** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, με $m \le f(x) \le M$. Τότε*

$$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a).$$

Απόδειξη: Έστω μια οποιαδήποτε διαμέριση $P = \{p_0 = a, p_1, \ldots, p_n = b\}$ του $[a, b]$, και έστω το κάτω άθροισμα $s(f; P)$. Έχουμε

$$s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(p_i - p_{i-1}) \geq m \sum_{i=1}^{n}(p_i - p_{i-1}) = m(p_n - p_0) = m(b - a).$$

Το ολοκλήρωμα είναι το supremum των κάτω αθροισμάτων, άρα μεγαλύτερο του $s(f; P)$, επομένως προκύπτει η πρώτη ανισότητα. Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει ανάλογα (δείτε την Άσκηση 7.23.) ■

Η Πρόταση 7.5 έχει άμεση εφαρμογή σε περιπτώσεις που θέλουμε να φράξουμε την τιμή ενός ολοκληρώματος και γνωρίζουμε φράγματα για την ολοκληρωτέα συνάρτηση. Δείτε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 7.6. (Φράγμα ολοκληρώματος) Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 1}$$

στο διάστημα $[0, \pi/2]$. Παρατηρήστε πως η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη, ως συνεχής. Στο συγκεκριμένο διάστημα ο αριθμητής είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση και ο παρονομαστής είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (Δείτε την Άσκηση 2.5.) Συνεπώς, λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της στο $x = 0$ και τη μέγιστη τιμή της στο $x = \pi/2$. Άρα,

$$f(0)(\pi/2 - 0) \leq \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx \leq f(\pi/2)(\pi/2 - 0) \Rightarrow 0 \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + 1} \leq \pi/2.$$

Επιπλέον, όμως, η Πρόταση 7.5 μας δίνει τη δυνατότητα να εξάγουμε μια σειρά από ενδιαφέροντα θεωρητικά αποτελέσματα. Δείτε για παράδειγμα την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 7.6. ***(Ανισότητες ολοκληρωμάτων)***

1. *Έστω συναρτήσεις $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Αν $f \leq g$ στο $[a, b]$, θα έχουμε και*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

2. *Έστω $f : [a, b] \to$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τότε*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Απόδειξη:

1. Εφόσον $f \leq g$, θα έχουμε και $g - f \geq 0$, επομένως από την Πρόταση 7.5 και κατόπιν από την Πρόταση 7.4 θα έχουμε

$$\int_a^b (g - f) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g - \int_a^b f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

2. Παρατηρήστε πως $-|f| \leq f \leq |f|$, επομένως με διπλή εφαρμογή του προηγούμενου σκέλους έχουμε

$$\int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Rightarrow -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

■

Με τη σειρά της, η τελευταία πρόταση μάς επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε μια συνάρτηση που θα εμφανίζεται συχνά στη συνέχεια.

Πρόταση 7.7. ***(Συνάρτηση του ολοκληρώματος)*** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Η συνάρτηση*

$$F(x) = \int_a^x f$$

είναι Lipschitz συνεχής και, επομένως, συνεχής στο $[a, b]$.

Απόδειξη: Έστω $x, y \in [a, b]$. Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left|\int_a^x f - \int_a^y f\right| = \left|\int_y^x f\right| \\ &\leq \int_x^y |f| \leq M|x - y|. \end{aligned}$$

Στην τελευταία ανισότητα υποθέσαμε $|f| \leq M$. Παρατηρήστε ότι η f, ως ολοκληρώσιμη, θα είναι σίγουρα φραγμένη, επομένως θα υπάρχει σίγουρα κάποιο M ώστε $|f| \leq M$. ■

Παράδειγμα 7.7. (Ανισότητα Cauchy-Schwarz) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες. Θα δείξουμε ότι ισχύει η ακόλουθη ανισότητα, γνωστή ως ανισότητα των Cauchy-Schwarz.

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \left[\int_a^b f^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b g^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Καταρχάς, θα δείξουμε ότι ισχύει η ακόλουθη:

$$\int_a^b fg \leq \left[\int_a^b f^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b g^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7.7}$$

Προφανώς θα εξετάσουμε την ακόλουθη συνάρτηση του θ:

$$F(\theta) = \int_a^b (f + \theta g)^2 = \int_a^b (f^2 + \theta^2 g^2 + 2\theta fg) = \theta^2 \int_a^b g^2 + 2\theta \int_a^b fg + \int_a^b f^2.$$

Η συνάρτηση αυτή είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός, όπως προκύπτει από την αρχική της έκφραση ως ολοκλήρωμα μη αρνητικής συνάρτησης.

Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα. Το πρώτο ενδεχόμενο είναι να ισχύει $\int_a^b g^2 = 0$. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $F(\theta)$ γίνεται

$$F(\theta) = 2\theta \int_a^b fg + \int_a^b f^2.$$

Αφού η $F(\theta)$ δεν γίνεται ποτέ αρνητική, θα πρέπει ο συντελεστής του θ να είναι μηδενικός, δηλαδή $\int_a^b fg = 0$, και επομένως σε αυτή την περίπτωση και τα δύο μέλη της ανισότητας (7.7) είναι ίσα με 0 και η ανισότητα ισχύει.

Το δεύτερο ενδεχόμενο είναι να έχουμε $\int_a^b g^2 > 0$. Σε αυτή την περίπτωση, η $F(\theta)$ είναι τριώνυμο. Όπως φαίνεται και από την αρχική έκφραση, το τριώνυμο είναι πάντα μη αρνητικό. Επομένως, θα πρέπει να έχει διακρίνουσα μη θετική, διαφορετικά θα λάμβανε και θετικές και αρνητικές τιμές, σύμφωνα με τα γνωστά μας από τη θεωρία για τα τριώνυμα. Επομένως,

$$4\left(\int_a^b fg\right)^2 - 4\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \leq 0,$$

από το οποίο προκύπτει ότι και πάλι ισχύει η (7.7).

Ακολούθως, παρατηρήστε ότι η (7.7) θα ισχύει και για τις $f, -g$, και αντικαθιστώντας τες στην (7.7) και πολλαπλασιάζοντας με -1 προκύπτει η

$$\int_a^b fg \geq -\left[\int_a^b f^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_a^b g^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7.8}$$

Συνδυάζοντας τις (7.7) και (7.8), προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Ασκήσεις

7.23. **(Φράγμα ολοκληρώματος)** Αποδείξτε το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 7.5.

7.24. **(Ανισότητα Cauchy-Schwarz)** Να βρείτε αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε η Ανισότητα Cauchy-Schwarz να ισχύει με ισότητα.

7.25. **(Περίπου μηδενική συνάρτηση)** Να δείξετε ότι αν $\int_a^b g^2 = 0$, τότε για κάθε f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ θα έχουμε $\int_a^b fg = 0$. Βεβαιωθείτε ότι αντιλαμβάνεστε την φυσική ερμηνεία αυτής της ιδιότητας.

7.5 Ορισμός Ολοκληρώματος κατά Riemann

Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο αναφέροντας εν συντομία έναν εναλλακτικό ορισμό για το ολοκλήρωμα, και συγκεκριμένα τον ιστορικά πρώτο ορισμό που δόθηκε, από τον Riemann.

Ορισμός 7.5. ***(Ολοκλήρωμα κατά Riemann)***

1. *Καλούμε **λεπτότητα** $|P|$ μιας διαμέρισης $P = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ το μήκος του μεγαλύτερου υποδιαστήματός της:*
$$|P| = \max_{i=1,\ldots,n} |p_i - p_{i-1}|.$$

2. *Έστω διαμέριση $P = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ και έστω η **δειγματοληψία** $S = \{\xi_1,\ \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ n σημείων ξ_i τέτοιων ώστε*
$$p_{i-1} \leq \xi_i \leq p_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$
Το άθροισμα
$$R(f; P, S) = \sum_{i=1}^{n}(p_i - p_{i-1})f(x_i)$$
*καλείται **άθροισμα Riemann** της f για τη διαμέριση P και τη δειγματοληψία S.*

3. *Έστω φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f καλείται* ***ολοκληρώσιμη κατά Riemann*** *με* ***(ορισμένο) ολοκλήρωμα (κατά) Riemann*** $\int_a^b f$ *αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε διαμέριση P με $|P| < \delta$ και για κάθε δειγματοληψία S, το άθροισμα Riemann $R(f; P, S)$ αυτής της διαμέρισης να ικανοποιεί τη σχέση*

$$\left| R(f; P, S) - \int_a^b f \right| < \epsilon.$$

Για να διακρίνουμε τα δύο ολοκληρώματα των Ορισμών 7.2 και 7.5 θα καλούμε το ολοκλήρωμα του Ορισμού 7.2 και ολοκλήρωμα (κατά) Darboux.

Τονίζουμε ότι στον Ορισμό 7.5 η δειγματοληψία S δεν μπορεί να επιλεγεί ανεξάρτητα από τη διαμέριση P· με δεδομένη τη διαμέριση P, η δειγματοληψία S πρέπει να είναι τέτοια ώστε να υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο της S εκτός κάθε διαστήματος της διαμέρισης P.

Καταχρηστικά, όταν η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann μπορούμε να γράψουμε

$$\lim_{|P| \to 0} R(f; P, S) = \int_a^b f,$$

πρέπει πάντως να τονιστεί ότι το παραπάνω όριο δεν είναι όριο με την έννοια του Κεφαλαίου 3, αλλά με την έννοια του Σκέλους 3 του παραπάνω Ορισμού 7.5.

Θεώρημα 7.3. ***(Ολοκληρωσιμότητα Riemann $\Leftrightarrow$ ολοκληρωσιμότητα Darboux)*** *Το ολοκλήρωμα κατά Riemann, όπως ορίζεται στον Ορισμό 7.5, μιας συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει το ολοκλήρωμα κατά Darboux της συνάρτησης, όπως ορίζεται στον Ορισμό 7.2. Επιπλέον, όταν τα ολοκληρώματα υπάρχουν είναι ίσα μεταξύ τους.*

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι εκτενής, και γι' αυτό παραλείπεται. Επομένως, τελικά (και ευτυχώς!) οι δύο Ορισμοί 7.2 και 7.5 είναι ισοδύναμοι, και για αυτό στο εξής θα μιλάμε απλώς για το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης. Ο κύριος λόγος που είδαμε τον δεύτερο ορισμό είναι ότι ο ορισμός αυτός μπορεί να μας βοηθήσει να καταλάβουμε κάπως καλύτερα την έννοια του ολοκληρώματος. Πάντως, όπως μπορείτε να δείτε και στην ακόλουθη Πρόταση 7.8, έχει και τις πρακτικές του εφαρμογές.

Η γεωμετρική ερμηνεία των αθροισμάτων Riemann είναι ανάλογη αυτής των κάτω και άνω αθροισμάτων Darboux: εκφράζουν το προσημασμένο εμβαδόν μιας συνάρτησης που προσεγγίζει την f. Παρατηρήστε, όμως, ότι τα αθροίσματα Riemann, σε αντίθεση με τα κάτω και άνω αθροίσματα Darboux, δημιουργούνται επιλέγοντας ένα οποιοδήποτε σημείο ξ_i εντός του $[p_{i-1}, p_i]$, και όχι κάποιο συγκεκριμένο. Επομένως, η κλιμακωτή συνάρτηση που προσεγγίζει την f δεν τη φράζει άνω ή κάτω. Και πάλι, όμως, αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη, κάθε ακολουθία αθροισμάτων Riemann θα συγκλίνει, με την έννοια του Ορισμού 7.5, στο ολοκλήρωμα, όπως μας υπαγορεύει η διαίσθησή μας, και εξασφαλίζει το Θεώρημα 7.3.

Η παρακάτω πρόταση, που βασίζεται στο Θεώρημα 7.3, οφείλεται στη στενή σχέση που έχουν τα όρια του Κεφαλαίου 3 και του Ορισμού 7.5, και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίζουμε μια κατηγορία ορίων που έχουν τη μορφή αθροισμάτων.

Πρόταση 7.8. ***(Υπολογισμός ορίων μέσω αθροισμάτων Riemann)*** *Έστω συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Έστω ακολουθία διαμερίσεων P_n και ακολουθία αντίστοιχων δειγματοληψιών S_n. Αν η ακολουθία $|P_n| \to 0$ καθώς $n \to \infty$, τότε η ακολουθία $R(f; P_n, S_n) \to \int_a^b f$ καθώς $n \to \infty$.*

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του ορίου ακολουθίας για να δείξουμε το ζητούμενο όριο. Έστω, λοιπόν, $\epsilon > 0$. Από τον ορισμό του ολοκληρώματος, υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για *κάθε* διαμέριση με $|P| < \delta$ και κάθε δειγματοληψία S να έχουμε $\left|R(f; P, S) - \int_a^b f\right| < \epsilon$. Αφού η ακολουθία των λεπτοτήτων $|P_n| \to 0$, υπάρχει κάποιο N τέτοιο ώστε για κάθε $n > N$ να έχουμε

$$|P_n| < \delta \Rightarrow \left|R(f; P_n, S_n) - \int_a^b f\right| < \epsilon.$$

Επομένως, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε

$$n > N \Rightarrow \left|R(f; P_n, S_n) - \int_a^b f\right| < \epsilon,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Το επόμενο παράδειγμα είναι χαρακτηριστική περίπτωση ορίου που μπορεί να λυθεί με χρήση της παραπάνω πρότασης.

Παράδειγμα 7.8. (Όριο αθροίσματος) Θα υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{i\pi}{2n}\right). \tag{7.9}$$

Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι το άθροισμα εμφανίζει το συνημίτονο με διαδοχικά ορίσματα ομοιόμορφα εντός του διαστήματος $[0, \pi/2]$ και επομένως μοιάζει με άθροισμα Riemann. Έστω, λοιπόν, η συνάρτηση $\cos x$ στο διάστημα $[0, \pi/2]$ και έστω η διαμέριση αυτού του διαστήματος

$$P_n = \left\{p_0 = 0,\ p_1 = \frac{\pi}{2n},\ \ldots,\ p_i = \frac{i\pi}{2n},\ \ldots,\ p_n = \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}\right\},$$

για την οποία παρατηρήστε πως $|P_n| = \frac{\pi}{2n} \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Επιλέγουμε για κάθε διάστημα $[p_{i-1}, p_i]$ το σημείο $x_i = p_i$, δηλαδή η δειγματοληψία μας είναι η $S_n = P_n - \{p_0\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα Riemann

$$R(f; P_n, S_n) = \sum_{i=1}^{n} (p_i - p_{i-1}) \cos x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{2n} \cos\left(\frac{i\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{i\pi}{2n}\right)\right].$$

Επομένως, το άθροισμα που μας δόθηκε είναι ένα άθροισμα Riemann επί μια σταθερά $2/\pi$. Αφού, καθώς $n \to \infty$, η λεπτότητα της διαμέρισης P_n τείνει στο 0, θα έχουμε

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{i\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n} R(f; P_n, S_n) \to \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx.$$

Σε κατοπινό κεφάλαιο θα δείξουμε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1.$$

Επομένως, τελικά έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{i\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \frac{2}{\pi}.$$

Οποιαδήποτε άλλη μέθοδος υπολογισμού αυτού του ορίου θα ήταν πολύ πιο κοπιαστική από αυτή που χρησιμοποιήσαμε.

7.6 Περαιτέρω Μελέτη

Εκτενέστερη Ανάπτυξη της Θεωρίας Η παρουσίαση της θεωρίας σε αυτό το κεφάλαιο ήταν αναγκαστικά συνοπτική. Η ανάπτυξη του ολοκληρώματος Darboux γίνεται πολύ πιο αναλυτικά σε πολλά συγγράμματα, για παράδειγμα σε αυτά του Spivak [SPIE], [SPIG], του Γαλάνη [ΓΑΛΑ], του Παντελίδη [ΠΑΝΤ] και (με κάποιες παραλλαγές) του Apostol [APE1], [APG1].

Εναλλακτικοί Ορισμοί Ολοκληρώματος Ένας εναλλακτικός τρόπος να οριστεί το ολοκλήρωμα είναι απευθείας μέσω των αθροισμάτων Riemann, όπως είδαμε στην Παράγραφο 7.4. Η μέθοδος ακολουθείται στο βιβλίο του Λυκείου [ΑΝΔΡ] και το βιβλίο του Thomas [THOE], [THOG]. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι ο συγκεκριμένος ορισμός είναι ο πιο εύκολα κατανοητός, διότι δεν χρησιμοποιεί τις έννοιες των infimum και supremum. Η ακόλουθη ανάπτυξη της θεωρίας, όμως, δεν είναι τόσο κομψή. Πάντως, οι προσπάθειες των μαθηματικών να καταλήξουν στον τωρινό ορισμό του ολοκληρώματος (καθώς και της παραγώγου και της σχέσης μεταξύ τους) κράτησαν αιώνες, ή χιλιετίες, αν συμπεριλάβουμε και τις εργασίες του Αρχιμήδη. Μπορείτε να βρείτε αρκετές λεπτομέρειες για αυτό το κομμάτι της ιστορίας των Μαθηματικών (όπως και για άλλα ιστορικά θέματα) στο βιβλίο του Struik [STRU].

Άλλα Κριτήρια Ολοκληρωσιμότητας Για τις ανάγκες του μαθήματος, τα κριτήρια ολοκληρωσιμότητας που αναφέραμε είναι αρκετά. Αναφέρουμε, πάντως, το διάσημο αναγκαίο και ικανό Κριτήριο του Lebesgue, βάσει του οποίου μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann αν και μόνο αν τα σημεία ασυνέχειάς της συγκροτούν ένα σύνολο με μέτρο 0, δηλαδή ένα σύνολο που μπορεί να γραφτεί ως υποσύνολο μιας αριθμήσιμης ένωσης ανοικτών διαστημάτων με συνολικό μήκος αυθαίρετα μικρό. Οποιοδήποτε αριθμήσιμο σύνολο έχει μέτρο 0, επομένως ακόμα και αν μια συνάρτηση είναι ασυνεχής σε ένα άπειρο αλλά αριθμήσιμο σύνολο σημείων, είναι ολοκληρώσιμη!

Ορισμός Ολοκληρώματος κατά Lebesgue Ο ορισμός του ολοκληρώματος κατά Riemann δεν είναι ο μόνος που μπορεί να δοθεί. Λόγω ορισμένων περιορισμών του, οι μαθηματικοί έχουν ανακαλύψει και άλλους ορισμούς, εκ των οποίων ο πιο γνωστός και ευρέως χρησιμοποιούμενος είναι αυτός του Lebesgue. Το ολοκλήρωμα βάσει αυτού του ορισμού έχει ορισμένα βασικά πλεονεκτήματα σε σχέση με το αντίστοιχο του Riemann. Πρώτον, μπορεί να οριστεί όχι μόνο σε διαστήματα της μορφής $[a, b]$, αλλά και σε πιο γενικά σύνολα, εφόσον αυτά είναι κάπως εφοδιασμένα με ένα «μέτρο» που θα διευκρινίζει πόσο μεγάλα είναι τα διάφορα υποσύνολά τους. Για παράδειγμα, μπορεί να οριστεί σε σύνολα που περιγράφουν όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός τυχαίου πειράματος. Δεύτερον, ακόμα και στην περίπτωση συνόλων της μορφής $[a, b]$, το ολοκλήρωμα Lebesgue υπάρχει ακόμα και σε ορισμένες περιπτώσεις που δεν υπάρχει το ολοκλήρωμα Riemann. Για παράδειγμα, η συνάρτηση Dirichlet του Παραδείγματος 7.2 δεν έχει ολοκλήρωμα Riemann, έχει όμως ολοκλήρωμα Lebesgue, και είναι 0! Πάντως, αν υπάρχει το ολοκλήρωμα Riemann μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα, τότε υπάρχει και το ολοκλήρωμα Lebesgue, και τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα. Η θεωρία των ολοκληρωμάτων Lebesgue, πάντως, είναι αρκετά δύσκολη και μάλλον μεταπτυχιακού επιπέδου. Μερικά από τα ευρέως χρησιμοποιούμενα συγγράμματα με εισαγωγές στα ολοκληρώματα Lebesgue είναι τα βιβλία του Royden [ROYD] και του Rudin [RUDI].

Άλλα Είδη Ολοκληρώματος Υπάρχουν, πάντως, προβλήματα της Φυσικής και άλλων επιστημών, που χρησιμοποιούν άλλου είδους ολοκληρώματα, που αποτελούν γενικεύσεις του ολοκληρώματος Riemann σε περισσότερες διαστάσεις του Ευκλείδειου χώρου και βασίζονται στην γενίκευση των εννοιών της διαμέρισης και του αθροίσματος Riemann σε περισσότερες διαστάσεις. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να προσδιορίσουμε το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο εντός μιας δισδιάστατης ή τρισδιάστατης περιοχής, πρέπει να πάρουμε το *διπλό* ή *τριπλό*, αντίστοιχα, ολοκλήρωμα της πυκνότητας του ηλεκτρικού φορτίου στην εν λόγω περιοχή. Όλα τα εισαγωγικά και εκτενή συγγράμματα στο Λογισμό που έχουμε ήδη αναφέρει (π.χ., [STEW], [THOE], [THOG], [VARB]) εξετάζουν τα διπλά και τριπλά, καθώς και άλλα είδη ολοκληρωμάτων.

Κεφάλαιο 8

Τεχνικές Ολοκλήρωσης

Στο κεφάλαιο αυτό θα δείξουμε τη στενή σχέση που έχουν οι έννοιες του ολοκληρώματος και της παραγώγου. Χονδρικά μιλώντας, όπως γνωρίζουμε και από το Λύκειο, η παραγώγιση και η ολοκλήρωση είναι αντίστροφες διαδικασίες: το ολοκλήρωμα της παραγώγου μιας συνάρτησης ισούται με την συνάρτηση, και η παράγωγος του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης ισούται με τη συνάρτηση. Η σχέση αυτή έχει ορισμένες πολύ βασικές συνέπειες που αυξάνουν τη χρησιμότητα τόσο του ολοκληρώματος, όσο και της παραγώγου. Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε, επίσης, ορισμένες από αυτές τις συνέπειες.

Στην Παράγραφο 8.1 θα παρουσιάσουμε τα Θεμελιώδη Θεωρήματα του Λογισμού. Τα θεωρήματα αυτά, όπως αποκαλύπτει το όνομά τους, είναι τα κεντρικά θεωρήματα του Λογισμού, και είναι αυτά που δείχνουν ότι η παραγώγιση και η ολοκλήρωση είναι ουσιαστικά αντίστροφες διαδικασίες. Στην Παράγραφο 8.2 θα παρουσιάσουμε μερικές από τις άμεσες συνέπειες των θεωρημάτων αυτών και ιδιαιτέρως τα εργαλεία ολοκλήρωσης που απορρέουν από το δεύτερο και μας επιτρέπουν να ολοκληρώνουμε εύκολα πολλές κατηγορίες συναρτήσεων. Στις Παραγράφους 8.3 και 8.4 θα ορίσουμε αυστηρά τη λογαριθμική και την εκθετική συνάρτηση και θα μελετήσουμε τις ιδιότητές τους. Ολοκληρώνουμε με την Παράγραφο 8.5 όπου θα ορίσουμε τις πραγματικές δυνάμεις θετικών αριθμών.

8.1 Θεμελιώδη Θεωρήματα του Λογισμού

Σε αυτή την παράγραφο θα δείξουμε τα δύο Θεμελιώδη Θεωρήματα του Λογισμού. Τα δύο θεωρήματα σχετίζονται μεταξύ τους. Χονδρικά μιλώντας, το πρώτο προσδιορίζει ότι η παράγωγος του ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης είναι η ίδια η συνάρτηση, ενώ το δεύτερο ότι το ολοκλήρωμα της παραγώγου μιας συνάρτησης είναι και πάλι η ίδια η συνάρτηση. Συνεπώς, η ολοκλήρωση και η παραγώγιση είναι κατ' ουσίαν αντίστροφες διαδικασίες. Ας δούμε καταρχάς το πρώτο από τα δύο θεωρήματα.

Θεώρημα 8.1. ***(Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα Λογισμού)*** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Έστω $c \in [a, b]$. Σε κάθε $x_0 \in [a, b]$ όπου η f είναι συνεχής, έχουμε*

$$\left(\int_c^x f \right)' \Bigg|_{x=x_0} = f(x_0). \tag{8.1}$$

Στην περίπτωση που $x_0 = a$ ή $x_0 = b$, τότε η παραπάνω παράγωγος πρέπει να εκληφθεί ως πλευρική.

Απόδειξη: Ορίζουμε τη συνάρτηση $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_c^x f.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 7.7 η F είναι Lipschitz συνεχής, άρα και συνεχής, για κάθε ολοκληρωτέα συνάρτηση f. Το θεώρημα που καλούμαστε να αποδείξουμε λέει ότι αν επιπλέον η f είναι συνεχής, τότε η F είναι παραγωγίσιμη.

Θα αποδείξουμε μόνο την περίπτωση $x_0 \in (a, b)$. Οι περιπτώσεις $x_0 = a$ και $x_0 = b$ αποδεικνύονται παρόμοια, και η απόδειξή τους ζητείται στην Άσκηση 8.1.

Παρατηρήστε πως

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{\int_c^{x_0+c} f - \int_c^{x_0} f}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f}{h}.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι καθώς $h \to 0$, το παραπάνω πηλίκο τείνει στο $f(x_0)$.

Θα υπολογίσουμε καταρχάς το δεξί πλευρικό όριο. Έστω, λοιπόν, $\epsilon > 0$. Λόγω της συνέχειας της f, θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \Rightarrow f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon.$$

Έστω $0 < h < \delta$. Σε όλο το διάστημα ολοκλήρωσης $[x_0, x_0 + h]$ θα ισχύει η παραπάνω ανισότητα, επομένως

$$\begin{aligned}
&f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon \\
&\qquad \Rightarrow \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) - \epsilon)\, dx < \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx \le \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) + \epsilon)\, dx \\
&\qquad \Rightarrow (f(x_0) - \epsilon)h \le \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx \le (f(x_0) + \epsilon)h \\
&\qquad \Rightarrow f(x_0) - \epsilon \le \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx}{h} \le f(x_0) + \epsilon \\
&\qquad \Rightarrow \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx}{h} - f(x_0) \right| < \epsilon.
\end{aligned}$$

Επομένως, πράγματι

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f}{h} = f(x_0).$$

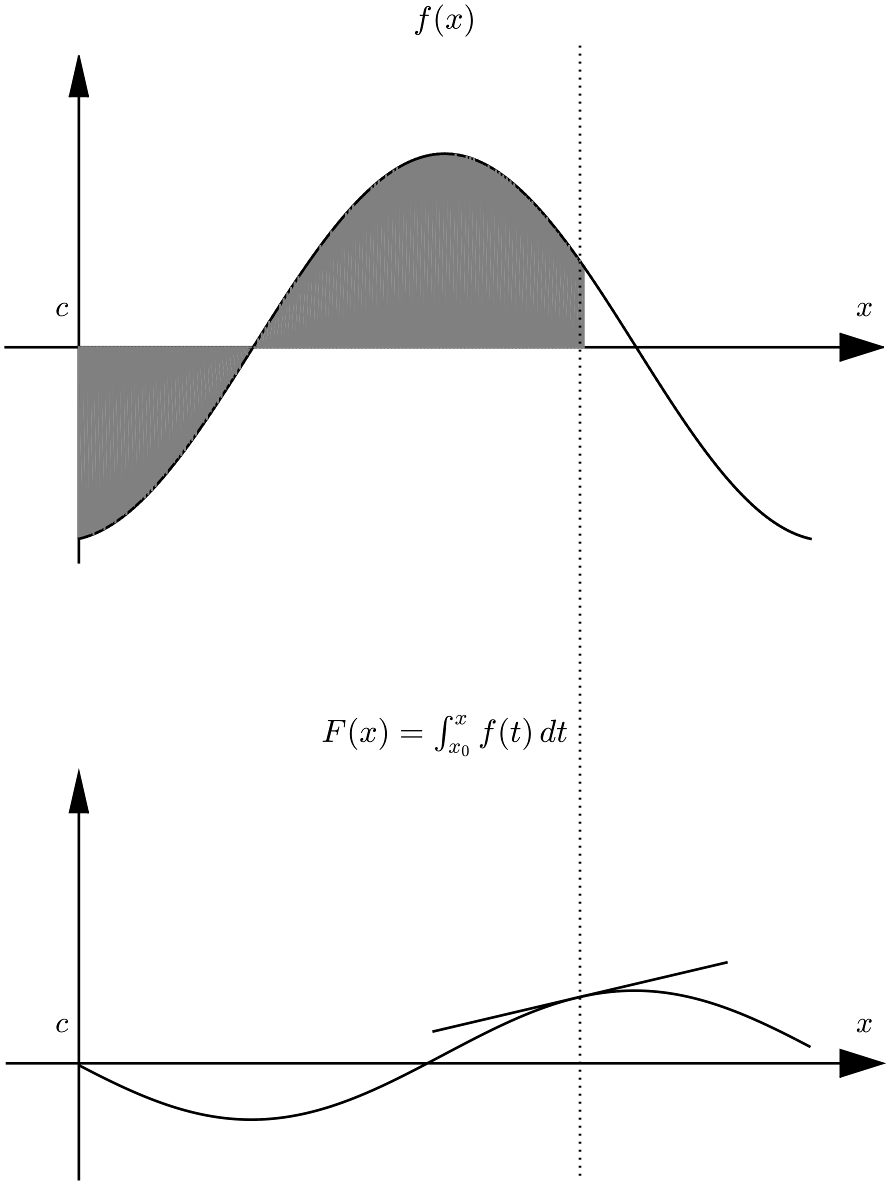
Το αντίστοιχο αριστερό όριο είναι επίσης ίσο με $f(x_0)$, όπως αποδεικνύεται με εντελώς ανάλογη μέθοδο. (Οι λεπτομέρειες ζητούνται στην Άσκηση 8.2.) Τελικά, λοιπόν,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f}{h} = f(x_0),$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Είναι σημαντικό να καταλάβουμε τη φυσική ερμηνεία του θεωρήματος. Για παράδειγμα, το θεώρημα μας λέει ότι όταν μια συνάρτηση f λαμβάνει μεγάλες θετικές τιμές, τότε καθώς την ολοκληρώνουμε κοντά σε αυτές τις τιμές το ολοκλήρωμα μεγαλώνει γρήγορα, δηλαδή έχει μεγάλη θετική παράγωγο. Αν, πάλι, η συνάρτηση λαμβάνει μεγάλες κατ' απόλυτο τιμή αλλά αρνητικές τιμές, τότε καθώς ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση γύρω από αυτές τις τιμές το ολοκλήρωμα μικραίνει γρήγορα, έχει δηλαδή μεγάλη αρνητική παράγωγο. Δείτε το Σχήμα 8.1.

Μια άμεση συνέπεια του θεωρήματος είναι η ακόλουθη πρόταση.



Σχήμα 8.1: Γεωμετρική ερμηνεία των δύο Θεμελιωδών Θεωρημάτων του Λογισμού. Για τις συναρτήσεις $f(x)$, $F(x)$ του σχήματος έχουμε $F'(x) = f(x)$, $\int_c^x f = F(x) - F(c)$. Έχουμε επιλέξει $F(c) = 0$. Εκεί που η $f(x)$ λαμβάνει θετικές (αρνητικές) τιμές, η $F(x)$ μεγαλώνει (μικραίνει).

Πρόταση 8.1. ***(Οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν αόριστο ολοκλήρωμα)*** *Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ έχει παράγουσα στο $[a, b]$, και επομένως αόριστο ολοκλήρωμα.*

Απόδειξη: Προφανώς, από το Θεώρημα 8.1, η

$$F(x) = \int_a^x f$$

είναι παράγουσα της f, και το αόριστο ολοκλήρωμά της είναι το

$$\int f = \int_a^x f + C.$$

■

Η πρόταση αυτή έχει μεγάλη θεωρητική σημασία, διότι, όπως έχουμε αναφέρει, δεν έχουν όλες οι συναρτήσεις παράγουσα σε κάποιο διάστημα. Η πρόταση, λοιπόν, μας εξασφαλίζει ότι οι συνεχείς, τουλάχιστον, συναρτήσεις έχουν παράγουσα. Επιπλέον, η πρόταση αναδεικνύει τη στενή σχέση ανάμεσα στο αόριστο και το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Σε γενικές γραμμές το Θεώρημα 8.1 μας λέει ότι η παράγωγος του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης ισούται με τη συνάρτηση αυτή. Ισχύει όμως και το αντίστροφο, δηλαδή χονδρικά το ολοκλήρωμα της παραγώγου μιας συνάρτησης ισούται με τη συνάρτηση αυτή. Για την ακρίβεια, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 8.2. ***(Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού)*** *Έστω $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, και έστω πως η παράγωγός της $F' : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη. Τότε για κάθε $c, d \in [a, b]$ ισχύει*

$$\int_c^d F' = F(d) - F(c). \tag{8.2}$$

Απόδειξη: Θα υποθέσουμε $c < d$. Αν $c = d$ τότε και τα δύο μέλη είναι 0, ενώ η περίπτωση $c > d$ προκύπτει άμεσα από την περίπτωση $c < d$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 7.8. Συγκεκριμένα, θα φτιάξουμε μια ακολουθία από διαμερίσεις του $[c, d]$ των οποίων η λεπτότητα τείνει στο 0, επομένως η ακολουθία των αθροισμάτων Riemann των διαμερίσεων αυτών θα τείνει στο ολοκλήρωμα.

Έστω λοιπόν οι διαμερίσεις

$$P_n = \left\{ p_0 = c,\ p_1 = c + \frac{(d-c)}{n}, \ldots,\ p_i = c + \frac{i(d-c)}{n}, \ldots,\ p_n = c + \frac{n(d-c)}{c} = d \right\},$$

με λεπτότητα $\frac{d-c}{n} \to 0$. Σε κάθε υποδιάστημα $[p_{i-1}, p_i]$ επιλέγουμε το σημείο x_i να είναι αυτό για το οποίο ισχύει

$$\frac{F(p_i) - F(p_{i-1})}{p_i - p_{i-1}} = F'(x_i).$$

Το σημείο αυτό υπάρχει σίγουρα, λόγω του Θεωρήματος Μέσης Τιμής! Έστω S_n η προκύπτουσα δειγματοληψία. Επομένως, το άθροισμα Riemann $R(f; P_n, S_n)$ ισούται με

$$\begin{aligned} R(f; P_n, S_n) &= \sum_{i=1}^{n} F'(x_i)(p_i - p_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} [F(p_i) - F(p_{i-1})] \\ &= F(p_n) - F(p_0) = F(d) - F(c). \end{aligned}$$

Η τρίτη ισότητα ισχύει διότι το άθροισμα που προκύπτει είναι τηλεσκοπικό. Επομένως, $R(f;P_n,S_n) = F(d) - F(c)$. Όμως γνωρίζουμε, από την Πρόταση 7.8, ότι επιπλέον θα πρέπει $R(f;P_n,S_n) \to \int_c^d F'(x)\,dx$. Επομένως, προκύπτει η ζητούμενη ισότητα. ∎

Αν στην (8.2) θέσουμε $c = x_0$ και $d = x$, προκύπτει ότι

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} F'(t)\,dt,$$

επομένως πράγματι η συνάρτηση F ισούται με το ολοκλήρωμα της παραγώγου της, ή, για να ακριβολογούμε, η συνάρτηση F ισούται, στη θέση x, με την τιμή της στη θέση x_0 συν το ολοκλήρωμα της παραγώγου F' από τη θέση x_0 έως τη θέση x.

Και αυτό το θεώρημα έχει μια απλή γεωμετρική ερμηνεία. Όπως προκύπτει και από τον ορισμό του ολοκληρώματος ως το όριο ενός αθροίσματος Riemann, το ολοκλήρωμα $\int_c^d F'$ ισούται με το άπειρο άθροισμα απειροστών όρων της μορφής $F'(x)\,dx$. Όμως, από τον ορισμό της παραγώγου ξέρουμε ότι ο απειροστός όρος $F'(x)\,dx$ ισούται με την απειροστή μεταβολή της συνάρτησης dF στο απειροστό διάστημα $[x, x+dx]$. Το ολοκλήρωμα, λοιπόν, συλλέγει αυτές τις απειροστές μεταβολές, επομένως θα πρέπει πράγματι να ισούται με τη συνολική μεταβολή της F από το $x = c$ έως το $x = d$, δηλαδή με το $F(d) - F(c)$. Δείτε το Σχήμα 8.1.

Ασκήσεις

8.1. (Ειδικές περιπτώσεις Θεωρήματος 8.1) Γράψτε την απόδειξη του Θεωρήματος 8.1 για τις ειδικές περιπτώσεις $x_0 = a$, $x_0 = b$.

8.2. (Απόδειξη Θεωρήματος 8.1) Ολοκληρώστε την απόδειξη του Θεωρήματος 8.1 δείχνοντας ότι

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f}{h} = f(x_0).$$

8.3. (Γενίκευση του Θεωρήματος 8.1) Έστω συνάρτηση $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Έστω παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f_1, f_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ με $f_1([c,d]), f_2([c,d]) \subseteq (a,b)$. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (c,d)$ έχουμε

$$\left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} G(t)\,dt\right)' = G(f_2(x))f_2'(x) - G(f_1(x))f_1'(x).$$

Επίσης, να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος, εξετάζοντας τι θα συμβεί αν το x μεταβληθεί κατά μια πολύ μικρή ποσότητα Δx. *(Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τον Κανόνα της Αλυσίδας.)*

8.2 Εφαρμογές των Θεμελιωδών Θεωρημάτων του Λογισμού

Μια πολύ σημαντική εφαρμογή των Θεμελιωδών Θεωρημάτων του Λογισμού (και ιδιαίτερα του δεύτερου) είναι ο λεγόμενος **αναλυτικός υπολογισμός ολοκληρωμάτων**, δηλαδή ο προσδιορισμός της τιμής τους βάσει ενός τύπου που εμπλέκει γνωστές μας συναρτήσεις, σταθερές και βέβαια τα όρια ολοκλήρωσης. Η διαδικασία αυτή καλείται και **ολοκλήρωση** (της ολοκληρωτέας συνάρτησης).

Το πρόβλημα είναι στενά συνδεδεμένο με τον υπολογισμό αόριστων ολοκληρωμάτων. Πράγματι, έστω πως μας ζητείται να υπολογίσουμε το *ορισμένο* ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ μιας συνάρτησης f. Αν καταφέρουμε να βρούμε μια παράγουσα F για την οποία $F' = f$, ή, ισοδύναμα, το *αόριστο* ολοκλήρωμα $\int f = F + C$, τότε από το Θεώρημα 8.2 προκύπτει πως

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Δείτε το ακόλουθο παράδειγμα για ορισμένες χαρακτηριστικές περιπτώσεις τέτοιων υπολογισμών.

Παράδειγμα 8.1. (Μερικά απλά ολοκληρώματα)

1. Επειδή $(\sin x)' = \cos x$, έχουμε
$$\int_a^b \cos x\, dx = \int_a^b (\sin x)'\, dx = \sin b - \sin a.$$
2. Επειδή $(-\cos x)' = \sin x$, έχουμε
$$\int_a^b \sin x\, dx = \int_a^b (-\cos x)'\, dx = \cos a - \cos b.$$
3. Επειδή $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$, έχουμε
$$\int_a^b \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_a^b (\tan x)'\, dx = \tan b - \tan a.$$
4. Έστω $n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$. Επειδή $(x^{n+1})' = nx^n$, έχουμε
$$\int_a^b x^n\, dx = \int_a^b \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$
Μια εύλογη ερώτηση σε αυτό το σημείο είναι τι συμβαίνει στην περίπτωση $n = -1$. Θα απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα σύντομα, στην Παράγραφο 8.3.

Παρατηρήστε ότι στο παραπάνω παράδειγμα δεν αναφέραμε τις τιμές που επιτρέπεται να λαμβάνουν τα όρια της ολοκλήρωσης. Στις περιπτώσεις που δεν αναφέρονται περιορισμοί, παρότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν είναι παντού ορισμένη ή/και ολοκληρώσιμη, αυτοί θα υπονοούνται. Πρέπει να τονιστεί ότι δεν αρκεί να είναι τα όρια a, b εντός του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Πρέπει η συνάρτηση να είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή καταρχάς ορισμένη και φραγμένη, *παντού* στο διάστημα που ορίζουν τα όρια a, b. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να γράψουμε
$$\int_0^\pi \frac{1}{\cos^2 x}\, dx,$$
διότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση ούτε ορίζεται στο $\pi/2$, που είναι εντός του διαστήματος ολοκλήρωσης, ούτε (στην περίπτωση που ορίζαμε αυθαίρετα μια τιμή για τη συνάρτηση στο $\pi/2$) είναι φραγμένη στο διάστημα ολοκλήρωσης. Αν δεν είμαστε προσεκτικοί, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το Παράδειγμα 8.1 να γράψουμε
$$\int_0^\pi \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \int_0^\pi (\tan x)' = \tan \pi - \tan 0 = 0,$$
αλλά, βέβαια, το αποτέλεσμα δεν έχει κάποιο νόημα.

Εκτός, πάντως, της άμεσης εφαρμογής του Θεωρήματος 8.2 για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων, όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, το θεώρημα μας επιτρέπει να αποδείξουμε δύο σημαντικά εργαλεία με τα οποία μπορούμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα για τα οποία η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν μας είναι εκ των προτέρων γνωστή. Το πρώτο από τα εργαλεία είναι το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 8.3. ***(Παραγοντική ολοκλήρωση)*** *Έστω συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες με ολοκληρώσιμες παραγώγους f', g' στο διάστημα $[a, b]$. Τότε*

$$\int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg'. \tag{8.3}$$

Απόδειξη: Έστω η συνάρτηση $F = fg$, και έστω η παράγωγος $F' = f'g + fg'$, που εξ υποθέσεως υπάρχει και είναι ολοκληρώσιμη. Από το Θεώρημα 8.2 έχουμε

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a) \Leftrightarrow \int_a^b (f'g + fg') = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

που είναι ισοδύναμη με τη ζητούμενη εξίσωση. ■

Σύμβαση: *Καθώς ποσότητες της μορφής $f(b) - f(a)$ θα εμφανίζονται συχνά στη συνέχεια, θα τις συμβολίζουμε με τους ακόλουθους τρόπους:*

$$f(b) - f(a) = [f]_a^b = (f)_a^b = f|_a^b.$$

Χρησιμοποιώντας τον τελευταίο από τους παραπάνω συμβολισμούς, η (8.3) γράφεται, πιο συνοπτικά,

$$\int_a^b f'g = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b fg'.$$

Το Θεώρημα 8.3 έχει εφαρμογή όταν καλούμαστε να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int_a^b f'g$ και γνωρίζουμε πώς να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^b fg'$. Η εφαρμογή του θεωρήματος καλείται **παραγοντική ολοκλήρωση** ή **ολοκλήρωση κατά παράγοντες**.

Παρατηρήστε ότι έχουμε δει μια αντίστοιχη μέθοδο για τον υπολογισμό αόριστων ολοκληρωμάτων, στο Θεώρημα 5.6. Η ομοιότητα των δύο μεθόδων δεν είναι τυχαία, αφού και οι δύο βασίζονται στην ιδιότητα των παραγώγων $(fg)' = f'g + fg'$. Μάλιστα, πολλές φορές όταν καλούμαστε να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα έχουμε δύο επιλογές:

1. Να εφαρμόσουμε παραγοντική ολοκλήρωση, με χρήση του Θεωρήματος 5.6, για να υπολογίσουμε το *αόριστο* ολοκλήρωμα της ολοκληρωτέας συνάρτησης, και κατόπιν να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 8.2. Η μέθοδος έχει το πλεονέκτημα ότι μας δίνει και ένα ενδιάμεσο αποτέλεσμα, δηλαδή το αόριστο ολοκλήρωμα της ολοκληρωτέας συνάρτησης, που μπορεί να είναι από μόνο του χρήσιμο για τη συνέχεια.

2. Να εφαρμόσουμε παραγοντική ολοκλήρωση με χρήση του Θεωρήματος 8.3 απευθείας στο δοσμένο ολοκλήρωμα. Η μέθοδος έχει το πλεονέκτημα ότι απαιτεί κάπως λιγότερους υπολογισμούς.

Στο παρακάτω παράδειγμα έχουμε συγκεντρώσει δύο χαρακτηριστικές εφαρμογές της μεθόδου.

Παράδειγμα 8.2. **(Παραγοντική ολοκλήρωση)** Θα υπολογίσουμε τα ακόλουθα δύο ολοκληρώματα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx.$$

Σχετικά με το πρώτο ολοκλήρωμα,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)'\,dx = (-x\cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'\cos x\,dx \\ &= 0 - 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)'\,dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.\end{aligned}$$

Σχετικά με το δεύτερο ολοκλήρωμα, ανάλογα έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)'\,dx = (x\sin x)|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'\sin x\,dx \\ &= \frac{\pi}{2} - 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)'\,dx = \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.\end{aligned}$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 5.13 σε συνδυασμό με το Θεώρημα 8.2.

Και το επόμενο εργαλείο, όπως θα δούμε στη συνέχεια, έχει το ανάλογό του στον υπολογισμό αορίστων ολοκληρωμάτων, και συγκεκριμένα το Θεώρημα 5.7.

Θεώρημα 8.4. ***(Ολοκλήρωση με αντικατάσταση)*** *Έστω $f : J \to \mathbb{R}$ συνεχής στο J. Έστω επίσης παραγωγίσιμη $g : I \to \mathbb{R}$ με $g(I) \subseteq J$ με ολοκληρώσιμη παράγωγο g'. Έστω $a, b \in I$. Έχουμε*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx. \tag{8.4}$$

Απόδειξη: Η συνάρτηση f είναι συνεχής, άρα έχει παράγουσα, έστω F. Παρατηρήστε ότι το μεν αριστερό μέλος ισούται με

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_a^b (F(g(x))'\,dx = F(g(b) - F(g(a)),$$

ενώ το δεξί μέλος ισούται με

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} F'(x)\,dx = F(g(b) - F(g(a)),$$

επομένως τα δύο μέλη είναι ίσα. ■

Η ομοιότητα ανάμεσα στα Θεωρήματα 8.4 και 5.7 δεν είναι, φυσικά, τυχαία. Και τα δύο βασίζονται στον Κανόνα της Αλυσίδας, $(F(g(x))' = F'(g(x))g'(x)$.

Όπως και στην περίπτωση του Θεωρήματος 5.7, το Θεώρημα 8.4 είναι η βάση μιας πολύ σημαντικής μεθόδου για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων, της λεγόμενης **ολοκλήρωσης με αντικατάσταση**. Η μέθοδος έχει ως στόχο να φέρει το δοσμένο ολοκλήρωμα στη μορφή του αριστερού μέλους της (8.4), στην οποία περίπτωση μπορούμε να το εξισώσουμε με το δεξί μέλος. (Δυστυχώς, συνήθως είναι δύσκολο να γράψουμε απευθείας το ολοκλήρωμα στη μορφή του αριστερού μέλους.) Η μέθοδος συνίσταται στα ακόλουθα βήματα:

1. Έστω $\int_a^b k(x)\,dx$ το δοσμένο ολοκλήρωμα.

2. Θέτουμε στο ολοκλήρωμα $u = g(x)$, όπου $g(x)$ οποιαδήποτε συνάρτηση πιστεύουμε ότι είναι η κατάλληλη και η οποία ήδη εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα, ή μπορούμε να την κάνουμε να εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα, με αλγεβρικές πράξεις. Θέτουμε, επίσης, $x = g^{-1}(u)$, εφόσον η συνάρτηση g έχει αντίστροφη.

3. Αντικαθιστούμε, επίσης, το dx με το $\frac{1}{g'(x)}\,du$.

4. Αν το ολοκλήρωμα έχει έρθει στη μορφή $\int_a^b f(u)\,du$ για κάποιο f, τότε αυτό σήμαινε ότι είχε τη μορφή $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$. Μαντεύοντας λοιπόν την g, ανακαλύψαμε την f. Αν δεν τα καταφέρουμε, τότε πρέπει να βρούμε άλλη αντικατάσταση $u = g(x)$.

5. Αν ο έλεγχος του προηγούμενου βήματος ήταν επιτυχής, τότε αλλάζουμε τα όρια ολοκλήρωσης από το a στο $g(a)$ και από το b στο $g(b)$ και με χρήση του Θεωρήματος 8.4 προκύπτει πως

$$\int_a^b k(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Αν έχουμε υπολογίσει, ή μπορέσουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους, έχουμε υπολογίσει και το αρχικό.

Η μέθοδος αυτή έχει το ανάλογό της στην αντίστοιχη μέθοδο βάσει της οποίας εφαρμόζεται το Θεώρημα 5.7. Όπως και εκείνη, δεν είναι απλή στη χρήση, και συχνά πρέπει να κάνουμε αρκετές προσπάθειες μέχρι να ανακαλύψουμε μια αντικατάσταση που να οδηγεί στον υπολογισμό του ολοκληρώματος που μας έχει δοθεί.

Επίσης, όπως ακριβώς και με την περίπτωση της παραγοντικής ολοκλήρωσης, για τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος με αντικατάσταση υπάρχουν δύο περίπου ισοδύναμες επιλογές:

1. Να εφαρμόσουμε ολοκλήρωση με αντικατάσταση βάσει του Θεωρήματος 5.7 για να υπολογίσουμε το *αόριστο* ολοκλήρωμα της ολοκληρωτέας συνάρτησης, και κατόπιν να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 8.2. Η μέθοδος έχει το πλεονέκτημα ότι μας δίνει ένα ενδιάμεσο αποτέλεσμα, δηλαδή το αόριστο ολοκλήρωμα της ολοκληρωτέας συνάρτησης.

2. Να εφαρμόσουμε ολοκλήρωση με αντικατάσταση βάσει του Θεωρήματος 8.4 για να υπολογίσουμε απευθείας το *ορισμένο* ολοκλήρωμα της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Η μέθοδος έχει το πλεονέκτημα ότι είναι κάπως πιο σύντομη.

Δείτε το ακόλουθο παράδειγμα για την εφαρμογή της μεθόδου. Στη συνέχεια θα έχουμε την ευκαιρία να την εφαρμόσουμε αρκετές φορές ακόμα.

Παράδειγμα 8.3. (Ολοκλήρωση με αντικατάσταση) Θα χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση με αντικατάσταση για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_2^4 x \sin x^2\,dx.$$

Θέτουμε $u = x^2$, επομένως $du = 2x\,dx$, και επίσης $x = 2 \Rightarrow u = 4$ και $x = 4 \Rightarrow u = 16$. Με αντικατάσταση στην παραπάνω έχουμε

$$\int_2^4 x \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_4^{16} \sin u\,du = \frac{1}{2}\int_4^{16} (-\cos u)'\,du = \cos 4 - \cos 16.$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 5.14, που μας δίνει μια παράγουσα της ολοκληρωτέας συνάρτησης, και κατόπιν να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 8.2.

Ολοκληρώνοντας την παράγραφο, θα πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ότι παρά τα διάφορα εργαλεία ολοκλήρωσης που έχουμε στη διάθεσή μας, όπως ακριβώς και στην περίπτωση των αόριστων ολοκληρωμάτων, υπάρχουν ορισμένα ολοκληρώματα που είναι αδύνατο να υπολογιστούν, με την έννοια που δώσαμε στην αρχή της παραγράφου. Για παράδειγμα, το ακόλουθο ολοκλήρωμα, γνωστό ως η συνάρτηση του Bessel πρώτου τύπου και μηδενικής τάξης, δεν μπορεί να υπολογιστεί:

$$J_0(a) = \int_0^{\pi} \cos(a \sin x)\, dx, \tag{8.5}$$

εκτός από ειδικές τιμές του ορίσματος a της συνάρτησης. Το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι απλώς να της δώσουμε ένα δικό της όνομα, όπως κάναμε και με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, και να την προσδιορίζουμε με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Ασκήσεις

8.4. [Π] (Ολοκλήρωμα περιττής συνάρτησης) Έστω ολοκληρώσιμη $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ περιττή. Να δείξετε ότι $\int_{-a}^{a} f = 0$.

8.5. (Ολοκλήρωμα άρτιας συνάρτησης) Έστω ολοκληρώσιμη $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ άρτια. Να δείξετε ότι $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$.

8.6. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(a \sin x)\, dx.$$

8.7. (Υπολογισμοί ορισμένων ολοκληρωμάτων) Υπολογίστε τα ακόλουθα ορισμένα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx$.
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx$.

8.8. (Μετατόπιση συνάρτησης) Να επαναλάβετε την Άσκηση 7.16 εκτελώντας, αυτή τη φορά, ολοκλήρωση με αντικατάσταση.

8.9. (Επέκταση συνάρτησης) Να επαναλάβετε την Άσκηση 7.17 εκτελώντας, αυτή τη φορά, ολοκλήρωση με αντικατάσταση.

8.3 Λογαριθμική Συνάρτηση

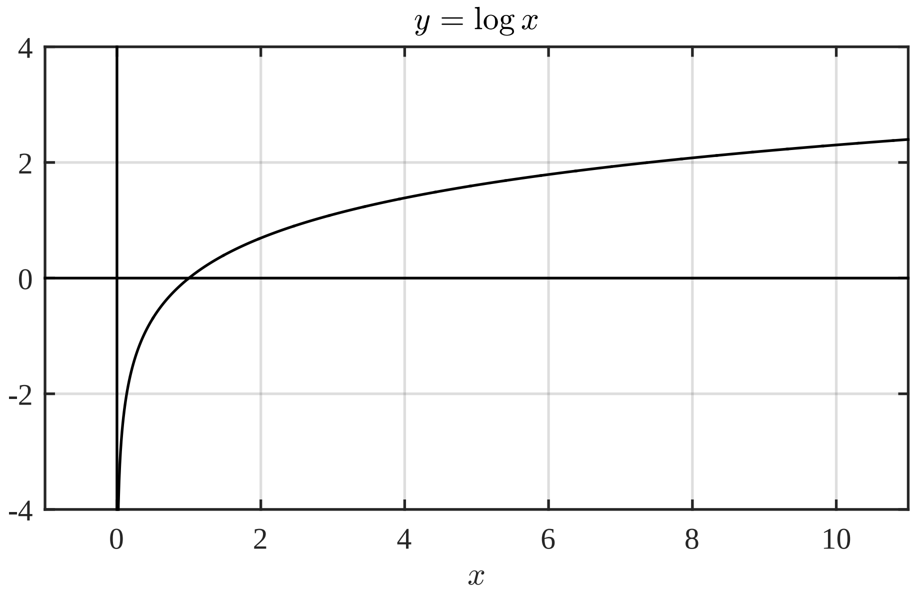
Έχοντας στη διάθεσή μας το Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού, μπορούμε να προχωρήσουμε στον ορισμό της λογαριθμικής συνάρτησης και της μελέτης των ιδιοτήτων της.

Ορισμός 8.1. ***(Λογαριθμική συνάρτηση)*** *Ορίζουμε τη* ***λογαριθμική συνάρτηση*** $\log x$*, όπου* $x \in \mathbb{R}_+^*$*, ως το ολοκλήρωμα*

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Ο αριθμός $\log x$ *καλείται* ***λογάριθμος*** *του* x.

Στο Σχήμα 8.2 έχουμε σχεδιάσει τη συνάρτηση του λογαρίθμου. Παρατηρήστε ότι πρέπει να έχουμε $x > 0$, ειδάλλως η συνάρτηση δεν ορίζεται στο διάστημα ολοκλήρωσης. Δυστυχώς, το ολοκλήρωμα



Σχήμα 8.2: Η λογαριθμική συνάρτηση $\log x$.

του ορισμού δεν μπορεί να δοθεί ως μια έκφραση που περιλαμβάνει ήδη γνωστές συναρτήσεις. Του δίνουμε, λοιπόν, το δικό του όνομα, και από εδώ και πέρα θα θεωρούμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές του λογαρίθμου για οποιοδήποτε όρισμα x.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτουν άμεσα ορισμένες ιδιότητες, που έχουμε συγκεντρώσει στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 8.2. ***(Ιδιότητες λογαριθμικής συνάρτησης)*** *Η λογαριθμική συνάρτηση έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος ισούνται με*

$$(\log x)' = \frac{1}{x}, \quad (\log x)'' = -\frac{1}{x^2}.$$

   Η $\log x$ *είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη σε όλο το πεδίο ορισμού της* $\mathbb{R}_+^*$.

2. *Έχουμε* $\log 1 = 0$*,* $\log x > 0$ *για* $x > 1$*, και* $\log x < 0$ *για* $x \in (0, 1)$.

3. *Για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$*,*

$$\log xy = \log x + \log y, \qquad \log \frac{1}{y} = -\log y, \qquad \log \frac{x}{y} = \log x - \log y.$$

4. *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *και για κάθε* $n \in Z$ *ισχύει ότι*

$$\log x^n = n \log x.$$

5. *Ισχύουν τα όρια*

$$\lim_{x\to\infty} \log x = \infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty.$$

Απόδειξη:

1. Με χρήση του Θεωρήματος 8.1, η λογαριθμική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, ως ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης, και η πρώτη παράγωγός της ισούται με
$$\left(\int_1^x \frac{dt}{t}\right)' = \frac{1}{x} > 0,$$
για κάθε $x > 0$. Επομένως, από την Πρόταση 5.5 προκύπτει ότι η λογαριθμική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα. Με μια δεύτερη παραγώγιση, προκύπτει πως
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},$$
επομένως με χρήση του Λήμματος 6.2 προκύπτει πως η $f(x)$ είναι κοίλη.

2. Με αντικατάσταση του $x = 1$ στον ορισμό της λογαριθμικής συνάρτησης άμεσα προκύπτει ότι $\log 1 = 0$. Αφού η $\log x$ είναι γνησίως αύξουσα, θα πρέπει για $x > 1$ να έχουμε $\log x > \log 1 = 0$ και για $x \in (0, 1)$ να έχουμε $\log x < \log 1 = 0$.

3. Παρατηρήστε πως
$$\log xy = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t}.$$
Θέτουμε στο δεύτερο ολοκλήρωμα $\theta = t/x$, και παρατηρούμε πως $t = x \Rightarrow \theta = 1$, ενώ $t = xy \Rightarrow \theta = y$, και τέλος $\frac{dt}{t} = \frac{d\theta}{\theta}$, επομένως
$$\log xy = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^y \frac{d\theta}{\theta} = \log x + \log y.$$
Με εφαρμογή αυτής της ιδιότητας για τα $y, \frac{1}{y}$, προκύπτει
$$0 = \log 1 = \log y \cdot \frac{1}{y} = \log y + \log \frac{1}{y} \Rightarrow \log \frac{1}{y} = -\log y.$$
Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω αποτελέσματα, έχουμε
$$\log \frac{x}{y} = \log x \cdot \frac{1}{y} = \log x + \log \frac{1}{y} = \log x - \log y.$$

4. Παρατηρήστε ότι η ιδιότητα ισχύει για $n = 0$. Σχετικά με τις θετικές τιμές του n, η ιδιότητα ισχύει για $n = 1$, και με χρήση επαγωγής μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει για κάθε n θετικό. Πράγματι, έστω πως ισχύει για κάποιο n θετικό. Τότε
$$\log x^{n+1} = \log x^n x = \log x^n + \log x = n \log x + \log x = (n+1) \log x.$$
Σχετικά με τις αρνητικές τιμές του n, παρατηρήστε πως
$$\log x^n = \log x^{-|n|} = -\log x^{|n|} = -|n| \log x = n \log x.$$
Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το προηγούμενο σκέλος, ενώ στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι έχουμε αποδείξει αυτό το σκέλος για θετικούς ακεραίους $|n|$. Επομένως, η ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

5. Σχετικά με το πρώτο όριο, παρατηρήστε πως η συνάρτηση του λογαρίθμου δεν είναι φραγμένη άνω. Πράγματι, για οποιοδήποτε $k > 1$, έχουμε

$$\log k^n = n \log k,$$

που μπορεί να γίνει όσο μεγάλη θέλουμε, αφού $\log k > 0$. Επομένως, η συνάρτηση είναι αύξουσα και όχι φραγμένη άνω, επομένως από την Άσκηση 3.40 τείνει στο ∞.

Σχετικά με το δεύτερο όριο, παρατηρήστε πως

$$\lim_{x\to\infty} \log x = \infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty} -\log x = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \log \frac{1}{x} = -\infty,$$

και χρησιμοποιώντας την Άσκηση 3.54 προκύπτει τελικά το ζητούμενο. ■

Στο υπόλοιπο της παραγράφου θα δούμε μερικές χαρακτηριστικές ασκήσεις στις οποίες εμφανίζεται η λογαριθμική συνάρτηση.

Παράδειγμα 8.4. (Ολοκλήρωμα του λογαρίθμου) Μια πρώτη λογική ερώτηση είναι, γνωρίζοντας την παράγωγο του λογαρίθμου, αν μπορούμε να υπολογίσουμε και το αόριστο ολοκλήρωμά του. Η απάντηση είναι πως

$$\int \log x \, dx = x \log x - x + C.$$

Ο σχετικός υπολογισμός βασίζεται σε παραγοντική ολοκλήρωση και ένα κλασικό «τρικ»:

$$\begin{aligned} \int \log x \, dx &= \int (x)' \log x \, dx = x \log x - \int x (\log x)' \, dx \\ &= x \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x + C. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.5. (Ολοκλήρωμα της $1/x$) Με δεδομένο ότι $(\log x)' = 1/x$, μπορούμε να γράψουμε

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \log x + C. \tag{8.6}$$

Στην παραπάνω εξίσωση, έχει γίνει μια βασική υπόθεση: το διάστημα στο οποίο ισχύει το ολοκλήρωμα είναι το $(0, \infty)$. Πράγματι, *μόνο* σε αυτό το διάστημα ισχύει η $(\log x)' = 1/x$.

Η συνάρτηση $1/x$, όμως, ορίζεται και για $x < 0$. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα ποιο είναι το αόριστο ολοκλήρωμά της στο διάστημα $(-\infty, 0)$. Παρατηρήστε, λοιπόν, ότι για $x < 0$ έχουμε

$$(\log(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x},$$

επομένως

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \log(-x) + C. \tag{8.7}$$

Αν συγκρίνουμε τις (8.6) και (8.7), εκ πρώτης όψεως υπάρχει μια αντίφαση. Στην πραγματικότητα, οι δύο εξισώσεις αφορούν διαφορετικά διαστήματα: η πρώτη αφορά το $(0, \infty)$, και φυσικά, οποιοδήποτε υποσύνολό του, ενώ η δεύτερη αφορά το $(-\infty, 0)$ και οποιοδήποτε υποσύνολό του. Ένας τρόπος να ενοποιήσουμε τις δύο εκφράσεις είναι να γράψουμε

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \log |x| + C.$$

Η έκφραση αυτή ισχύει για κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$, εκτός βέβαια από αυτά που περιλαμβάνουν το 0, όπου δεν ορίζεται η ολοκληρωτέα συνάρτηση, ή το έχουν ως σύνορο, στην οποία περίπτωση η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν είναι φραγμένη και άρα δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Επειδή η παράγωγος του λογαρίθμου έχει πολύ απλή μορφή, ο λογάριθμος συχνά εμφανίζεται στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων συναρτήσεων που δεν εμφανίζουν οι ίδιες τη λογαριθμική συνάρτηση. Το επόμενο παράδειγμα είναι χαρακτηριστικό.

Παράδειγμα 8.6. (Ολοκλήρωμα της εφαπτομένης) Θα δείξουμε ότι

$$\int \tan x \, dx = -\log|\cos x| + C.$$

Παρατηρήστε πως

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx.$$

Θέτοντας $u = \cos x$, έχουμε $du = -\sin x \, dx$, επομένως

$$\int \tan x \, dx = -\int \frac{du}{u} = -\log|u| + C = -\log|\cos x| + C.$$

Στην Άσκηση 8.10 ζητείται να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα της συνεφαπτομένης, εφαρμόζοντας μια ανάλογη τεχνική.

Παράδειγμα 8.7. (Αόριστο ολοκλήρωμα της $1/(y(1-y))$) Θα υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{x(1-x)}.$$

Είναι προφανές ότι μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$$

για κάποιες σταθερές $a, b \in \mathbb{R}$. Οι σταθερές αυτές μπορούν να προσδιοριστούν παρατηρώντας ότι θα πρέπει η παραπάνω ισότητα να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως, αν γράψουμε

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x} \Leftrightarrow 1 = a(1-x) + bx \Leftrightarrow (b-a)x + (a-1) = 0,$$

και για να ισχύει η παραπάνω για κάθε x θα πρέπει $a = b = 1$. Τελικά,

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{1-x} = \log|x| - \log|x-1| + C = \log\left|\frac{x}{x-1}\right| + C.$$

Η παραπάνω μέθοδος μπορεί να γενικευτεί, όπως περιγράφεται στην Άσκηση 8.14. Δείτε μερικά παραδείγματα ακόμα της εφαρμογής της μεθόδου στην Άσκηση 8.15.

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι η λογαριθμική συνάρτηση μεγαλώνει, καθώς $x \to \infty$, «πολύ αργά».

Παράδειγμα 8.8. (Ρυθμός αύξησης της λογαριθμικής συνάρτησης) Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^n}{x} = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Καταρχάς θα δείξουμε το παραπάνω για την ειδική περίπτωση $n = 1$. Παρατηρήστε πως έχουμε απροσδιοριστία της μορφής ∞/∞, επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τον Κανόνα του L'Hôpital, από τον οποίο προκύπτει άμεσα το ζητούμενο:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Επομένως, η λογαριθμική συνάρτηση αυξάνει πιο αργά από τη γραμμική συνάρτηση x καθώς το $x \to \infty$. Το ενδιαφέρον όμως είναι ότι το ίδιο ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, επομένως η λογαριθμική συνάρτηση αυξάνει απεριόριστα πιο αργά από την x καθώς το $x \to \infty$. Για να αποδείξουμε το παραπάνω όριο, χρησιμοποιούμε επαγωγή. Παρατηρήστε πως ισχύει για $n = 1$. Έστω τώρα πως ισχύει για κάποιο αυθαίρετο n. Θα δείξουμε, και πάλι με εφαρμογή του Κανόνα του L'Hôpital, πως ισχύει και για $n + 1$. Πράγματι,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^{n+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(n+1)(\log x)^n \cdot \frac{1}{x}}{1} = (n+1) \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^n}{x} = 0.$$

Επομένως, η λογαριθμική συνάρτηση, αν και τελικά απειρίζεται, απειρίζεται πολύ αργά! Πράγματι, παρατηρήστε πως

$$\log(2 \times 10^6) = \log 2 + \log(10^6),$$

δηλαδή αν αυξήσουμε το όρισμά της κατά 10^6, η συνάρτηση θα αυξηθεί μόνο κατά $\log 2$. Αν χρησιμοποιούσατε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή για να υπολογίσετε τη λογαριθμική συνάρτηση για διάφορα ορίσματα και σαν ρωτούσαν αν αυτή τείνει στο άπειρο, το πιθανότερο είναι ότι θα απαντούσατε ότι *δεν* τείνει στο άπειρο.

Φυσικά, υπάρχουν ακόμα πιο «αργές» συναρτήσεις. Παρατηρήστε, για παράδειγμα, ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(\log x)}{\log x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\log x} \times \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log x} = 0.$$

Παράδειγμα 8.9. (Συμπεριφορά της λογαριθμικής συνάρτησης γύρω από τη μονάδα) Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+ax)}{x} = a,$$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Έχουμε μια απροσδιοριστία της μορφής $0/0$, και με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital λαμβάνουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+ax)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{a}{1+ax}}{1} = a.$$

Ασκήσεις

8.10. Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \cot x \, dx$.

8.11. (Συμπεριφορά της λογαριθμικής συνάρτησης κοντά στο 0**)** Να δείξετε ότι για κάθε $n \in N^*$ ισχύει το όριο

$$\lim_{x\to 0^+} x\,(\log x)^n = 0.$$

Να δώσετε μια γεωμετρική εξήγηση για το αποτέλεσμα, ανάλογη με τα σχόλια του Παραδείγματος 8.8.

8.12. (Παράγωγοι ανώτερης τάξης του λογαρίθμου) Δώστε ένα γενικό τύπο για την παράγωγο n τάξης της λογαριθμικής συνάρτησης.

8.13. (Αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης)

1. Να προσδιορίσετε τα $A, B \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει
$$\frac{1}{x(10-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{10-x}.$$

2. Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα
$$\int \frac{dx}{x(10-x)}$$
στο διάστημα $(0, 10)$.

8.14. [$\star\star$] (Ανάπτυγμα ρητής συνάρτησης) Σε αυτή την άσκηση θα γενικεύσουμε την Άσκηση 8.13. Έστω ρητή συνάρτηση
$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$
τέτοια ώστε ο βαθμός της $P(x)$ να είναι μικρότερος του βαθμού της $Q(x)$, και επιπλέον η $Q(x)$ έχει μόνο απλές πραγματικές ρίζες, δηλαδή είναι της μορφής $Q(x) = (x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_n)$ με όλα τα a_i πραγματικά και διάφορα μεταξύ τους. Να δείξετε ότι μπορούμε να φέρουμε την $R(x)$ στη μορφή
$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{x-a_i},$$
όπου τα b_i μπορούν να υπολογιστούν αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω με την $Q(x)$, φέρουμε την ισότητα που προκύπτει στη μορφή $K(x) = 0$, όπου $K(x)$ πολυώνυμο, και απαιτήσουμε το πολυώνυμο να έχει όλους τους συντελεστές του μηδενικούς.

8.15. (Υπολογισμοί αόριστων ολοκληρωμάτων) Υπολογίστε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

1. $\int \frac{dx}{(x^2-4)}$.
2. $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

8.4 Εκθετική Συνάρτηση

Η λογαριθμική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, με πεδίο ορισμού το $(0, \infty)$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$. Επομένως έχει αντίστροφη συνάρτηση, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το $(0, \infty)$. Η συνάρτηση αυτή δίνεται στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 8.2. ***(Εκθετική συνάρτηση)*** *Η αντίστροφη συνάρτηση της λογαριθμικής συνάρτησης καλείται* ***εκθετική συνάρτηση*** *και συμβολίζεται με* $\exp y$. *Εξ ορισμού έχουμε*
$$y = \log x \Leftrightarrow x = \exp y.$$

Στο Σχήμα 8.3 έχουμε σχεδιάσει την εκθετική συνάρτηση. Όπως και στην περίπτωση της λογαριθμικής συνάρτησης, δεν υπάρχει τύπος γι' αυτήν που να εμπλέκει γνωστές συναρτήσεις, αναγκαζόμαστε, λοιπόν, να εισάγουμε τον συμβολισμό $\exp y$.

Η εκθετική συνάρτηση έχει μια σειρά από σημαντικές ιδιότητες που προκύπτουν από τη σχέση που έχει με τη λογαριθμική. Οι ιδιότητες αυτές συγκεντρώνονται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 8.3. ***(Ιδιότητες εκθετικής συνάρτησης)*** *Η εκθετική συνάρτηση έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1.

$$\forall x > 0, \quad \exp(\log x) = x,$$
$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \log(\exp y) = y.$$

2. Η εκθετική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο τον εαυτό της, δηλαδή

$$(\exp y)' = \exp y,$$

γνησίως αύξουσα και κυρτή στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$.

3. Έχουμε $\exp 0 = 1$, $\exp y > 1$ για $y > 0$, και $\exp y < 1$ για $y < 0$.

4. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b), \qquad \exp(-a) = \frac{1}{\exp a}, \qquad \exp(a-b) = \frac{\exp a}{\exp b}.$$

5. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $n \in Z$ ισχύει ότι

$$\exp(nx) = (\exp x)^n.$$

6. Ισχύουν τα όρια

$$\lim_{y\to\infty} \exp y = \infty, \qquad \lim_{y\to-\infty} \exp y = 0.$$

Απόδειξη:

1. Οι ισότητες ισχύουν από τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης ως αντίστροφης της λογαριθμικής.

2. Η συνάρτηση $\log x$ είναι παραγωγίσιμη με μη μηδενική παράγωγο $1/x$ σε κάθε $x \in (0, \infty)$, επομένως, με χρήση του Θεωρήματος 5.2 προκύπτει πως υπάρχει η παράγωγος της αντιστροφής της στο $y = \log x$, και μάλιστα

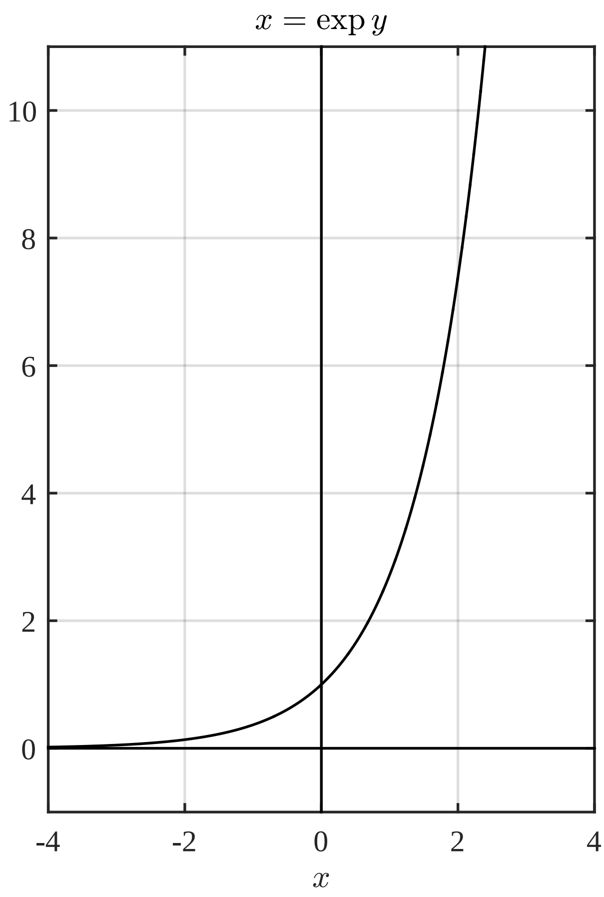
$$(\exp y)' = \frac{1}{(\log' x)_{x=\exp y}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)_{x=\exp y}} = \exp y.$$

   Η $\exp y$ έχει ως πεδίο τιμών το πεδίο ορισμού της $\log x$, δηλαδή το $(0, \infty)$. Επομένως, είναι παντού θετική. Επειδή $(\exp y)' = \exp y$, και προφανώς $(\exp y)'' = \exp y$, προκύπτει πως η $\exp y$ είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

3. Η $\exp 0 = 1$ προκύπτει από την $\log 1 = 0$. Αφού η $\exp y$ είναι αύξουσα, θα έχουμε λοιπόν $\exp y > 1$ για $y > 0$, και $\exp y < 1$ για $y < 0$.

4. Παρατηρήστε πως

$$\begin{aligned}\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b) &\Leftrightarrow \log\exp(a+b) = \log(\exp(a)\exp(b)) \\ &\Leftrightarrow a+b = \log\exp(a) + \log\exp(b) = a+b,\end{aligned}$$



Σχήμα 8.3: Η εκθετική συνάρτηση $\exp x$.

και αφού ισχύει η τελευταία ισοδυναμία θα ισχύει και η πρώτη. Ανάλογα,

$$\exp(-a) = \frac{1}{\exp a} \Leftrightarrow \log \exp(-a) = \log \frac{1}{\exp a}$$
$$\Leftrightarrow -a = \log(\exp a)^{-1} = -\log \exp a = -a,$$

και αφού ισχύει η τελευταία ισοδυναμία θα ισχύει και η πρώτη. Επίσης,

$$\exp(a-b) = \frac{\exp a}{\exp b} \Leftrightarrow \log \exp(a-b) = \log \frac{\exp a}{\exp b} = \log \exp a - \log \exp b \Leftrightarrow a-b = a-b,$$

και αφού ισχύει η τελευταία ισοδυναμία θα ισχύει και η πρώτη.

5. Η απόδειξη προκύπτει εύκολα με επαγωγή. Δείτε την Άσκηση 8.16.

6. Σχετικά με το πρώτο όριο, παρατηρήστε πως για τις συναρτήσεις $f(y) = \exp y$ και $g(y) = y+1$ έχουμε ότι $f(0) = g(0) = 1$ και $f'(y) \geq g'(y)$ για κάθε $y > 0$. Επομένως, με χρήση της Άσκησης 5.15, έχουμε ότι $\lim_{y\to\infty} \exp y = \infty$.

   Σχετικά με το δεύτερο όριο, πολύ απλά έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = \lim_{x\to\infty} \exp(-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp x} = 0.$$

Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την Άσκηση 3.55 και στη τελευταία ισότητα την Άσκηση 3.35. ■

Στο επόμενο παράδειγμα θα υπολογίσουμε μερικά χαρακτηριστικά αόριστα ολοκληρώματα που εμπλέκουν την εκθετική συνάρτηση. Το γεγονός ότι η παράγωγος της $\exp x$ είναι η ίδια η $\exp x$ είναι μια ιδιαιτέρως χρήσιμη ιδιότητα, όπως θα δούμε.

Παράδειγμα 8.10. (Ολοκληρώματα που εμφανίζουν την εκθετική συνάρτηση) Παρατηρούμε, καταρχάς ότι αφού $(\exp(x))' = \exp(x)$, θα έχουμε

$$\int \exp x\, dx = \exp x + C.$$

Ακολούθως, θα δείξουμε ότι

$$\int x \exp x\, dx = (x-1)\exp x + C.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\int x\exp x\, dx &= \int x(\exp x)'\, dx = x\exp x - \int x' \exp x\, dx\\ &= x\exp x - \int \exp x\, dx = x\exp x - \exp x + C = (x-1)\exp x + C.\end{aligned}$$

Τέλος, θα δείξουμε ότι

$$\int x \exp x^2\, dx = \frac{1}{2}\exp x^2.$$

Σε αυτή την περίπτωση, εκτελούμε την αλλαγή μεταβλητής $u = x^2$, από την οποία προκύπτει $du = 2x\, dx$, επομένως

$$\int x\exp x^2\, dx = \frac{1}{2}\int \exp u\, du = \frac{1}{2}\exp x^2 + C.$$

Λαμβάνοντας υπόψη τα ολοκληρώματα που υπολογίσαμε, μια εύλογη ερώτηση είναι ποιο είναι το ολοκλήρωμα

$$\int \exp\left(-x^2\right) dx.$$

Δυστυχώς μπορεί να αποδειχθεί ότι το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα δεν μπορεί να υπολογιστεί. Το ολοκλήρωμα αυτό είναι εξαιρετικά σημαντικό γιατί εμφανίζεται συχνά στη Θεωρία Πιθανοτήτων. Δείτε, σχετικά, την Άσκηση 8.24.

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι, σε αντίθεση με τη λογαριθμική συνάρτηση, η εκθετική συνάρτηση μεγαλώνει πολύ γρήγορα.

Παράδειγμα 8.11. (Ρυθμός αύξησης της εκθετικής συνάρτησης) Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\exp x}{x^n} = \infty$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Θα αποδείξουμε το όριο καταρχάς για $n = 1$. Παρατηρήστε πως έχουμε απροσδιοριστία ∞/∞. Με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital λαμβάνουμε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\exp x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\exp x}{1} = \infty.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το όριο για οποιαδήποτε τιμή του n, με επαγωγή. Έστω λοιπόν πως ισχύει για κάποιο n. Τότε, με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital έχουμε

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp x}{x^{n+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\exp x}{(n+1)x^n} = \infty,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την υπόθεση της επαγωγής.

Επομένως, η εκθετική συνάρτηση αυξάνεται εξαιρετικά γρήγορα, και για την ακρίβεια ταχύτερα από οποιοδήποτε πολυώνυμο, καθώς $x \to \infty$. Υπάρχουν, βέβαια, και συναρτήσεις που αυξάνονται ακόμα γρηγορότερα, για παράδειγμα η $\exp(\exp(x))$. Πράγματι,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(\exp x)}{\exp x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\exp x \exp(\exp x)}{\exp x} = \lim_{x\to\infty} \exp x = \infty.$$

Ασκήσεις

8.16. Να αποδείξετε το Σκέλος 5 της Πρότασης 8.3.

8.17. (Διπλή παραγοντική ολοκλήρωση) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x^2 \exp x\, dx$. Ακολούθως, να προσδιορίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^2 \exp x\, dx$.

8.18. (Υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις) Ορίζουμε τις υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις υπερβολικό ημίτονο $\sinh x$, υπερβολικό συνημίτονο $\cosh x$, υπερβολική εφαπτόμενη $\tanh x$, και υπερβολική συνεφαπτομένη $\coth x$, ως

$$\sinh x = \frac{\exp x - \exp(-x)}{2}, \quad \cosh x = \frac{\exp x + \exp(-x)}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις καλούνται υπερβολικές τριγωνομετρικές λόγω της ομοιότητας που έχουν πολλές από τις ιδιότητές τους με αντίστοιχες ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Υπολογίστε τις παραγώγους των παραπάνω συναρτήσεων, και εκφράστε τες χρησιμοποιώντας αποκλειστικά άλλες υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

8.19. [Π] (Αντίστροφο υπερβολικό ημίτονο) Να κάνετε τα ακόλουθα, για τις συναρτήσεις του υπερβολικού ημιτόνου και υπερβολικού συνημιτόνου:

1. Υπολογίστε τα όρια της συνάρτησης καθώς το όρισμα $x \to \pm\infty$.

2. Σχεδιάστε τη συνάρτηση.

3. Προσδιορίστε ένα τύπο για την αντίστροφή της. Αν η αντίστροφη δεν μπορεί να οριστεί για το αρχικό πεδίο ορισμού της υπερβολικής τριγωνομετρικής συνάρτησης, περιορίστε το κατάλληλα.

4. Σχεδιάστε την αντίστροφή της.

5. Υπολογίστε την παράγωγο της αντίστροφης.

(Δείτε την Άσκηση 8.18 για τον ορισμό των δύο αυτών συναρτήσεων και τον προσδιορισμό των παραγώγων τους.)

8.20. (Αντίστροφο υπερβολικό συνημίτονο) Επαναλάβετε την Άσκηση 8.19 αλλά για την συνάρτηση του υπερβολικού συνημιτόνου.

8.21. (Αντίστροφη υπερβολική εφαπτομένη) Επαναλάβετε την Άσκηση 8.19 αλλά για την συνάρτηση της υπερβολικής εφαπτομένης.

8.22. (Αντίστροφη υπερβολική συνεφαπτομένη) Επαναλάβετε την Άσκηση 8.19 αλλά για την συνάρτηση της υπερβολικής συνεφαπτομένης.

8.23. (Αόριστο ολοκλήρωμα) Να υπολογίσετε το ακόλουθο αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx.$$

(Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Άσκηση 8.19.)

8.24. (Συνάρτηση Φ) Στην Θεωρία Πιθανοτήτων ορίζουμε την ακόλουθη συνάρτηση:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-t^2/2\right) dt.$$

(Αν και αυτό δεν μας αφορά εδώ, αναφέρουμε απλώς πως μπορεί να δειχθεί ότι το άνω ολοκλήρωμα δεν μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή). Να γράψετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \exp(-x^2)\,dx$ χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Φ.

8.25. [⋆⋆] (Όριο λόγου ⇒ όριο ρίζας) Να δείξετε ότι αν για μια ακολουθία $a_n > 0$ έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \in \mathbb{R}$, τότε επίσης $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = r$. *(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 3.71 και ορίστε την βοηθητική ακολουθία* $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$*.)*

Να δείξετε, επίσης, ότι το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή υπάρχουν ακολουθίες a_n για τις οποίες ναι μεν $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = r \in \mathbb{R}$, αλλά δεν ισχύει ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$.

Το αποτέλεσμα είναι πολύ χρήσιμο στον προσδιορισμό της σύγκλισης (ή μη) σειρών θετικών όρων, που θα μελετήσουμε στο Κεφάλαιο 12, καθώς δείχνει ότι το Κριτήριο της Ρίζας (Θεώρημα 12.3) είναι ισχυρότερο του Κριτηρίου του Λόγου (Θεώρημα 12.4).

8.26. Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int e^{-x} \sin x\,dx, \qquad \int e^{-x} \cos x\,dx.$$

8.5 Πραγματικές Δυνάμεις

Μέχρι τώρα έχουμε μελετήσει περιπτώσεις στις οποίες ένας θετικός αριθμός b υψώνεται σε μια ρητή δύναμη $a = \frac{m}{n}$ (δείτε τον Ορισμό 1.9). Σε αυτή την παράγραφο θα μας απασχολήσει η ύψωση σε οποιαδήποτε πραγματική, ενδεχομένως και άρρητη, δύναμη a.

Ένας απλός τρόπος να ορίσουμε την ποσότητα b^a όταν ο a είναι οποιοσδήποτε πραγματικός, είναι μέσω του ορίου

$$b^a = \lim_{n\to\infty} b^{a_n}, \tag{8.8}$$

όπου a_n ακολουθία ρητών που τείνει στο a. Με αυτό τον ορισμό, όμως, θα χρειαστεί να αναπτύξουμε πολλή θεωρία για να αποδείξουμε τις γνωστές μας ιδιότητες των δυνάμεων. Θα πρέπει, για παράδειγμα, καταρχάς να αποδείξουμε ότι το όριο υπάρχει, και είναι το ίδιο για κάθε ακολουθία που συγκλίνει στο a. Αν και αυτές οι δύο ιδιότητες ισχύουν, μη έχοντας τη συνέχεια της συνάρτησης b^x, η απόδειξή τους δεν είναι εύκολη.

Έχοντας, όμως, ήδη ορίσει την εκθετική συνάρτηση, υπάρχει ένας πιο σύντομος δρόμος για να ορίζουμε αυστηρά τις πραγματικές δυνάμεις, και συγκεκριμένα ο ακόλουθος:

Ορισμός 8.3. ***(Πραγματικές δυνάμεις)*** *Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a > 0$. Ορίζουμε*

$$b^a \triangleq \exp(a \log b).$$

Το b καλείται ***βάση****, το a καλείται* ***εκθέτης****, και το b^a καλείται η* ***δύναμη*** *του b εις το a.*

Κάτι που πρέπει να εξασφαλίσουμε είναι ότι αυτός ο ορισμός ταυτίζεται με τον Ορισμό 1.9 στην ειδική περίπτωση που το a είναι ρητός, δηλαδή $a = \frac{m}{n}$. Πρέπει, δηλαδή, να δείξουμε ότι

$$(b^m)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{m}{n} \log b\right),$$

όπου το αριστερό μέλος υπολογίζεται κατά τον Ορισμό 1.9. Αυτό όμως είναι εύκολο να δειχθεί. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \left[\exp\left(\frac{m}{n} \log b\right)\right]^n &= \exp\left[\left(\frac{m}{n} \log b\right) n\right] \\ &= \exp\left[m \log b\right] = (\exp(\log b))^m = b^m. \end{aligned}$$

Η πρώτη και η τρίτη ισότητα προέκυψαν από το Σκέλος 5 της Πρότασης 8.3. Λαμβάνοντας τη n-οστή ρίζα και στα δύο μέλη, προέκυψε το ζητούμενο.

Παρατηρήστε, επίσης, ότι λόγω της συνέχειας της εκθετικής συνάρτησης, έχουμε, για κάθε ακολουθία $a_n \to a$,

$$\lim_{n\to\infty} b^{a_n} = \lim_{n\to\infty} \exp(a_n \log b) = \exp(\lim_{n\to\infty} a_n \log b) = \exp(a \log b) = b^a, \tag{8.9}$$

δηλαδή ικανοποιείται και ο εναλλακτικός ορισμός (8.8) που δεν ακολουθήσαμε.

Τέλος, κάτι που πρέπει να επιβεβαιώσουμε είναι ότι ισχύουν οι γνωστές μας ιδιότητες που ισχύουν και για την περίπτωση ρητών δυνάμεων (δείτε την Πρόταση 1.9). Πράγματι, έχουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 8.4. ***(Ιδιότητες πραγματικών δυνάμεων)*** *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ και για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύουν τα ακόλουθα:*

$$x^a x^b = x^{a+b}, \qquad x^a y^a = (xy)^a, \quad (x^a)^b = x^{ab}.$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε την πρώτη ιδιότητα. Οι άλλες αποδεικνύονται παρόμοια και ζητούνται στην Άσκηση 8.27.

Έστω, λοιπόν, $x \in \mathbb{R}_+^*$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Έστω ακολουθίες ρητών $a_n \to a$ και $b_n \to b$. Έχουμε

$$x^a x^b = \lim_{n\to\infty} x^{a_n} \lim_{n\to\infty} x^{b_n} = \lim_{n\to\infty} x^{a_n} x^{b_n} = \lim_{n\to\infty} x^{a_n + b_n} = x^{a+b}.$$

Η πρώτη και η τέταρτη ισότητα ισχύουν λόγω της (8.9). Η δεύτερη είναι γνωστή ιδιότητα ορίων, και η (κρίσιμη) τρίτη προκύπτει από την αντίστοιχη ιδιότητα για τις *ρητές* δυνάμεις (Πρόταση 1.9). ■

Έχοντας ορίσει τις πραγματικές δυνάμεις και προσδιορίσει τις ιδιότητές τους, είμαστε, πλέον, σε θέση να δούμε ορισμένα ενδιαφέροντα παραδείγματα.

Παράδειγμα 8.12. **(Η παράγωγος της x^a)** Έστω η $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^a$, όπου $a \in \mathbb{R}^*$. Θα δείξουμε ότι

$$(x^a)' = a x^{a-1},$$

γενικεύοντας, έτσι, το Παράδειγμα 5.8. Έχουμε, πολύ απλά,

$$(x^a)' = (\exp(a \log x))' = \frac{a}{x}(\exp(a \log x)) = \frac{a}{x} x^a = a x^{a-1}.$$

Παράδειγμα 8.13. **(Απροσδιοριστία 0^0)** Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} x^x = 1.$$

Παρατηρήστε ότι έχουμε μια καινούργια μορφή απροσδιοριστίας, την απροσδιοριστία 0^0. Το όριο, όμως, μπορεί να υπολογιστεί, με χρήση και πάλι του Κανόνα του L'Hôpital, παρατηρώντας πως

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} \exp(x \log x) = \exp(\lim_{x\to 0} x \log x) = \exp(0) = 1.$$

Η πρώτη ισότητα προκύπτει από τον Ορισμό 8.3. Η δεύτερη ισότητα προκύπτει λόγω της συνέχειας της $\exp x$ και της Πρότασης 4.5, και η τρίτη ισότητα προκύπτει λόγω της Άσκησης 8.11.

Παράδειγμα 8.14. **(Απροσδιοριστία 1^∞)** Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \exp a.$$

Παρατηρήστε ότι η βάση της δύναμης τείνει στο 1, ενώ ο εκθέτης στο ∞, άρα έχουμε ακόμα ένα νέο είδος απροσδιοριστίας, την απροσδιοριστία 1^∞.

Και πάλι, με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital, και παρόμοια με το προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x &= \lim_{x\to\infty} \exp\left[x \log\left(1 + \frac{a}{x}\right)\right] = \exp\left[\lim_{x\to\infty} x \log\left(1 + \frac{a}{x}\right)\right] \\ &= \left[\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log(1 + ah)\right] = \exp a. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει με χρήση του Παραδείγματος 8.9.

Έχοντας, τέλος, ορίσει τις πραγματικές δυνάμεις και προσδιορίσει τις ιδιότητές τους, είμαστε σε θέση να μελετήσουμε τη συνάρτηση b^x. Έχουμε συγκεντρώσει τις βασικές της ιδιότητες στην ακόλουθη πρόταση. Η απόδειξη είναι απλή και ζητείται στην Άσκηση 8.28.

Πρόταση 8.5. ***(Ιδιότητες της b^x)*** *Έστω $b > 0$ και έστω η συνάρτηση*

$$b^x = \exp(x \log b), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Η b^x έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $b^x > 0$.
2. *Η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος ισούνται με*
$$(b^x)' = (\log b) b^x, \qquad (b^x)'' = (\log b)^2 b^x.$$
3. *Η b^x είναι γνησίως αύξουσα για $b > 1$, σταθερά και ίση με 1 για $b = 1$, και γνησίως φθίνουσα για $b < 1$.*
4. *Η b^x είναι κυρτή.*
5. *Για $b > 1$ ισχύουν τα όρια*
$$\lim_{x\to\infty} b^x = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} b^x = 0,$$
ενώ για $b < 1$ ισχύουν τα όρια
$$\lim_{x\to\infty} b^x = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} b^x = \infty,$$

6. *Για $b \neq 1$ υπάρχει η αντίστροφη της b^x και είναι η*

$$x = \frac{\log y}{\log b}.$$

Η περίπτωση που το $\log b = 1$ είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, διότι τότε $b^x = \exp x$. Προκύπτει, επομένως, ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 8.4. ***(Σταθερά** e**)*** *Η σταθερά e ορίζεται μέσω της ακόλουθης σχέσης:*

$$\log e = 1 \Leftrightarrow \exp 1 = e \Leftrightarrow \int_1^e \frac{dt}{t} = 1.$$

Επομένως, για τη συνάρτηση $\exp x$ έχουμε, από τον Ορισμό 8.3 ότι $\exp x = e^x$, και από εδώ και πέρα θα χρησιμοποιούμε τις δύο εκφράσεις με ισοδύναμο τρόπο.

Η αντίστροφη της b^x για τιμές του b διάφορες του e έχει και αυτή το δικό της ενδιαφέρον, ειδικά στην περίπτωση που $b = 10$. Έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 8.5. ***(Λογαριθμική συνάρτηση με βάση** b**)*** *Έστω $b \in \mathbb{R}_+^*$, $b \neq 1$. Ορίζουμε τη **λογαριθμική συνάρτηση με βάση** b $\log_b : \mathbb{R}_+^* \to \infty$ ως εξής:*

$$\log_b y \triangleq \frac{\log y}{\log b}.$$

Στην ακόλουθη πρόταση έχουμε συγκεντρώσει τις ιδιότητες αυτής της συνάρτησης. Η απόδειξή τους είναι εύκολη, και ζητείται στην Άσκηση 8.29.

Πρόταση 8.6. ***(Ιδιότητες της** $\log_b y$**)*** *Η συνάρτηση $\log_b y$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της ισούνται με*

$$(\log_b y)' = \frac{1}{y \log b}, \qquad (\log_b y)'' = -\frac{1}{y^2 \log b}.$$

   Η $\log_b y$ είναι γνησίως αύξουσα για $b > 1$ και γνησίως φθίνουσα για $b < 1$. Επίσης, η $\log_b y$ είναι κοίλη για $b > 1$ και κυρτή για $b < 1$.

2. *Έχουμε $\log_b 1 = 0$. Για $b > 1$ έχουμε $\log x > 0$ για $x > 1$, και $\log x < 0$ για $x \in (0, 1)$. Για $b < 1$ έχουμε $\log x < 0$ για $x > 1$, και $\log x > 0$ για $x \in (0, 1)$.*

3. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y, \qquad \log_b \frac{1}{y} = -\log_b y, \qquad \log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y.$$

4. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $n \in Z$ ισχύει ότι*

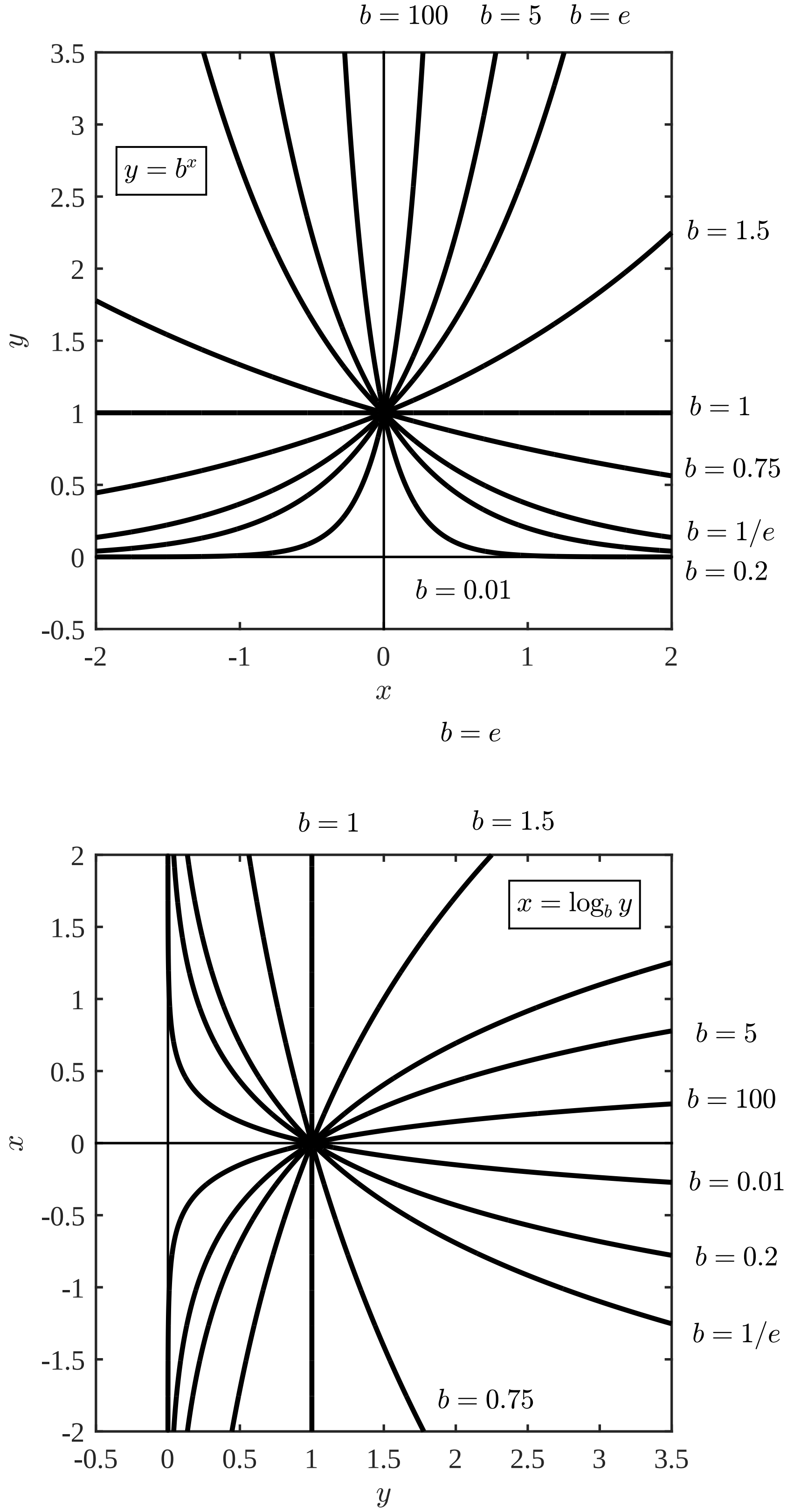
$$\log_b x^n = n \log_b x.$$

5. *Για $b > 1$ ισχύουν τα όρια*

$$\lim_{y \to \infty} \log_b y = \infty, \qquad \lim_{y \to 0^+} \log_b y = -\infty,$$

   ενώ για $b < 1$ ισχύουν τα όρια

$$\lim_{y \to \infty} \log_b y = -\infty, \qquad \lim_{y \to 0^+} \log_b y = \infty.$$



Σχήμα 8.4: Η εκθετική συνάρτηση $y = b^x$, για τις τιμές $b = 0.01,\ 0.2,\ 1/e,\ 0.75,\ 1,\ 1.5,\ e,\ 5,\ 100$ και η αντίστροφή της $x = \log_b y$ για τις ίδιες τιμές εκτός της $b = 1$.

Στο Σχήμα 8.4 έχουμε σχεδιάσει την $y = b^x$ και την $x = \log_b y$ για διάφορες τιμές του b, μικρότερες και μεγαλύτερες της μονάδας. Οι γραφικές παραστάσεις επιβεβαιώνουν τις ιδιότητες των Προτάσεων 8.5 και 8.6.

Ασκήσεις

8.27. **(Ιδιότητες πραγματικών δυνάμεων)** Ολοκληρώστε την απόδειξη της Πρότασης 8.4.

8.28. **(Ιδιότητες εκθετικής συνάρτησης b^x)** Αποδείξτε την Πρόταση 8.5.

8.29. **(Ιδιότητες λογαριθμικής συνάρτησης $\log_b y$)** Αποδείξτε την Πρόταση 8.6.

8.30. **(Όρια της x^a)** Να αποδείξετε ότι αν $a > 0$ τότε

$$\lim_{x\to\infty} x^a = \infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^a = 0,$$

ενώ αν $a < 0$ τότε

$$\lim_{x\to\infty} x^a = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^a = \infty.$$

8.6 Περαιτέρω Μελέτη

Τεχνικές Ολοκλήρωσης Στο παρόν κεφάλαιο δεν είχαμε τη δυνατότητα να δούμε εκτενώς τις διάφορες τεχνικές ολοκλήρωσης που έχουν αναπτυχθεί για να υπολογίζονται διάφοροι τύποι ολοκληρωμάτων, όπως ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων, ολοκληρώματα διαφόρων μορφών που εμφανίζουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις, κ.ο.κ. Η σχετική βιβλιογραφία είναι πολύ πλούσια, γιατί το αντικείμενο της ολοκλήρωσης είναι αντικειμενικά πολύ σημαντικό. Περισσότερες πληροφορίες γι' αυτές τις τεχνικές μπορείτε να βρείτε στα εκτενέστερα από τα εισαγωγικά συγγράμματα Λογισμού, για παράδειγμα στα βιβλία των Courant και John [COUR], Thomas [THOE], [THOG], Stewart [STEW] και Varberg et al. [VARB]. Πριν από την εποχή των υπολογιστών, ο προσδιορισμός της τιμής ενός ολοκληρώματος γινόταν και με τη βοήθεια καταλόγων ολοκληρωμάτων, όπως για παράδειγμα αυτών του βιβλίου των Gradshteyn και Ryzhik [GRAD] (1200 σελίδες με ολοκληρώματα!). Πλέον, πολλές από τις τεχνικές ολοκλήρωσης εκτελούνται αυτόματα από ειδικά προγράμματα υπολογιστών.

Αριθμητική Ολοκλήρωση Ένα άλλο θέμα που δεν είχαμε τη δυνατότητα να εξετάσουμε είναι οι διάφορες τεχνικές *αριθμητικής* ολοκλήρωσης που έχουν αναπτυχθεί για τον υπολογισμό της τιμής ολοκληρωμάτων με χρήση υπολογιστή. Όλα τα βιβλία Αριθμητικής Ανάλυσης που έχουμε αναφέρει σε προηγούμενα κεφάλαια αφιερώνουν εκτενή τμήματά τους σε συγκεκριμένες μεθόδους. Η βασική ιδέα όλων των μεθόδων είναι να προσεγγιστεί το ολοκλήρωμα από κάποιο άθροισμα Riemann, το οποίο πρέπει να επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιήσουμε, κατά το δυνατόν, το σφάλμα στην εκτίμησή μας για την πραγματική τιμή του ολοκληρώματος και ταυτοχρόνως τις πράξεις που απαιτούνται.

Πριν την έλευση των υπολογιστών ο αριθμητικός υπολογισμός ολοκληρωμάτων γινόταν από ανθρώπους, συχνά με αναγωγή του δοσμένου ολοκληρώματος σε ένα άλλο ολοκλήρωμα του οποίου η τιμή εμφανιζόταν σε κάποιο πίνακα. Αν έχετε γονέα μηχανικό, πιθανόν να υπάρχει στη βιβλιοθήκη του το βιβλίο των Abramowitz και Stegun [ABRA], που περιλαμβάνει ένα μεγάλο πλήθος πινάκων, γραφημάτων και ταυτοτήτων χρήσιμων στην παραπάνω διαδικασία.

Ορισμός Εκθετικής και Λογαριθμικής Συνάρτησης Η λογαριθμική και η εκθετική συνάρτηση θα μπορούσαν να οριστούν διαφορετικά. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να ορίσουμε την εκθετική συνάρτηση μέσω της *δυναμοσειράς* της

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

και τη λογαριθμική συνάρτηση ως την αντίστροφή της [RUDI], [MARS], [SAGA]. Δεν ακολουθήσαμε τη μέθοδο αυτή γιατί θα έπρεπε να καθυστερήσουμε και άλλο τον ορισμό των δύο αυτών σημαντικών συναρτήσεων.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε

1. Πρώτα να ορίσουμε εξαρχής την έννοια της πραγματικής δύναμης, μέσω της (8.8), και να αποδείξουμε τις ιδιότητές της. (Το βήμα αυτό είναι εκτενές.)

2. Κατόπιν να ορίσουμε τη σταθερά e, για παράδειγμα μέσω του ορίου

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

3. Τέλος να ορίσουμε την εκθετική συνάρτηση απλώς ως e^x και τη λογαριθμική ως την αντίστροφή της και να αποδείξουμε τις ιδιότητές τους.

Η συγκεκριμένη μέθοδος ακολουθείται στα [ΓΑΛΑ], [ΠΑΝΤ], [ΦΛΥΑ]. Έχει το πλεονέκτημα ότι ο ορισμός της δύναμης με αυτόν τον τρόπο είναι ο πλέον διαισθητικός και κατανοητός, και το μειονέκτημα ότι είναι πιο εκτεταμένη σε σχέση με αυτή που ακολουθήσαμε.

Η μέθοδος που ακολουθήσαμε είναι η πιο συνηθισμένη, και ακολουθείτε στα [ΦΛΥΤ], [SAGA], [COUR], [SPIE], [SPIG], [APE1], [APG1]. Τα [SPIE], [SPIG], [APE1], [APG1] είναι τα καταλληλότερα για μια πιο εκτεταμένη μελέτη της προσέγγισης αυτής σε απλό επίπεδο.

Ιστορική Χρήση των Λογαρίθμων Οι λογάριθμοι μελετήθηκαν εκτενώς ήδη από το Μεσαίωνα. Ο λόγος ήταν η βασική τους ιδιότητα $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$. Η ιδιότητα αυτή μας επιτρέπει να μετατρέψουμε ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού (των x, y) σε ένα πρόβλημα πρόσθεσης (που είναι πολύ πιο γρήγορη διαδικασία) των λογαρίθμων τους, $\log_b x$ και $\log_b y$, εφαρμόζοντας τον ακόλουθο αλγόριθμο:

1. Υπολογίζουμε τους λογάριθμους $\log_b x$, $\log_b y$, των x, y.

2. Προσθέτουμε τους λογάριθμους $\log_b x$, $\log_b y$. Το άθροισμα ισούται με τον $\log_b xy$.

3. Υπολογίζουμε το γινόμενο x, y μέσω του $\log_b xy$.

Παραδοσιακά ο αλγόριθμος εκτελούνταν με δεκαδικούς λογάριθμους, δηλαδή με λογάριθμους με βάση το $b = 10$. Το πρώτο και το τρίτο βήμα γίνονται με τη χρήση πινάκων που δίνουν τον λογάριθμο κάθε αριθμού στο εύρος $1 - 10$ (επομένως αυτοί οι λογάριθμοι θα είναι στο εύρος $0 - 1$), και της ιδιότητας $\log_{10} 10^k x = k + \log_{10} x$ (στην περίπτωση που πρέπει να χειριστούμε αριθμούς που δεν είναι στο εύρος $1 - 10$).

Για παράδειγμα, έστω πως θέλουμε να υπολογίσουμε το γινόμενο 1350×0.37.

1. Για να υπολογίσουμε τον λογάριθμο του 1350, παρατηρούμε πως

$$\log_{10} 1350 = \log_{10} 10^3 \times 1.35 = 3 + \log_{10} 1.35,$$

   και ο λογάριθμος $\log_{10} 1.35$ μπορεί να υπολογιστεί από πίνακα, και ισούται με $0.1303\ldots$. Ομοίως, για να υπολογίσουμε τον λογάριθμο του 0.37, παρατηρούμε πως

$$\log_{10} 0.37 = \log_{10} 10^{-1} \times 3.7 = -1 + \log_{10} 3.7,$$

   και ο λογάριθμος $\log_{10} 3.7$ μπορεί να υπολογιστεί από πίνακα, και ισούται με $0.5682\ldots$.

2. Επομένως,

$$\log_{10}(1350 \times 0.37) \simeq 3 + 0.1303 - 1 + 0.5682 = 2.6985.$$

3. Τέλος, με χρήση πίνακα μπορούμε να βρούμε πως ο αριθμός με λογάριθμο τον 0.6985 είναι ο 4.9946, επομένως:

$$1350 \times 0.37 = 10^{\log_{10} 1350 \times 0.37} = 10^{2.6985} = 10^2 \times 10^{0.6985} = 100 \times 4.9946 = 499.46.$$

Το ακριβές αποτέλεσμα είναι 499.50, και το σφάλμα οφείλεται στο ότι υποθέσαμε ότι οι πίνακες μας δίνουν τους λογάριθμους και τους αντίστροφούς τους με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων.

Η διαδικασία αυτή των τριών βημάτων μπορεί να αυτοματοποιηθεί με τη χρήση ενός μικρού φορητού εργαλείου που ονομάζεται λογαριθμικός κανόνας (slide rule). Αν έχετε παππού ή γιαγιά μηχανικό, μπορείτε να δανειστείτε τον λογαριθμικό τους κανόνα (που σίγουρα διαθέτουν) και να τον φέρετε στις εξετάσεις όταν απαγορεύεται το «κομπιουτεράκι». Πιο hipster δεν γίνεται!

Κεφάλαιο 9

Εφαρμογές Ολοκληρωμάτων

Το ορισμένο ολοκλήρωμα, στις διάφορες μορφές του, είναι ο ελβετικός σουγιάς των φυσικών επιστημών. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε ένα μικρό μόνο μέρος των εφαρμογών που έχει η απλή μορφή του ορισμένου ολοκληρώματος που γνωρίσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, το ολοκλήρωμα Riemann.

Στην Παράγραφο 9.1 παρουσιάζουμε τα καταχρηστικά ολοκληρώματα (γνωστά στη βιβλιογραφία και ως *γενικευμένα ολοκληρώματα*). Στην Παράγραφο 9.2 δείχνουμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν χωρίων που έχουν οριστεί με χρήση πολικών συντεταγμένων (που πρωτοείδαμε στην Παράγραφο 2.3). Το ολοκλήρωμα είναι τόσο ισχυρό εργαλείο, ώστε μπορεί να υπολογίσει όχι μόνο *εμβαδά*, αλλά και *όγκους* ορισμένων στερεών, και συγκεκριμένα αυτών που έχουν δημιουργηθεί εκ περιστροφής. Στις Παραγράφους 9.3 και 9.4 παρουσιάζουμε τα σχετικά αποτελέσματα. Στην Παράγραφο 9.5 δείχνουμε πώς μπορεί να υπολογιστεί το μήκος καμπυλών που έχουν οριστεί σε παραμετρική μορφή (και οι οποίες έχουν ήδη περιγραφεί στην Παράγραφο 2.4).

9.1 Καταχρηστικά Ολοκληρώματα

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 7, για να οριστεί το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης, πρέπει, πρώτον, το διάστημα ολοκλήρωσης να είναι ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα της μορφής $[a, b]$ και, δεύτερον, η ολοκληρωτέα συνάρτηση να είναι φραγμένη σε αυτό το διάστημα. Όμως, πολύ συχνά σε εφαρμογές μάς ενδιαφέρουν περιπτώσεις στις οποίες θέλουμε να υπολογίσουμε το προσημασμένο εμβαδόν που δημιουργείται μεταξύ του γραφήματος μιας συνάρτησης και ενός διαστήματος, όπου είτε το διάστημα εκτείνεται στο $\pm\infty$, είτε η συνάρτηση τείνει στο $\pm\infty$ σε κάποιο σημείο του διαστήματος αυτού. Στην πράξη, όπως και στην περίπτωση των ορίων, στην πρώτη περίπτωση δεν μας ενδιαφέρει τόσο τι συμβαίνει όταν το διάστημα είναι άπειρο, όσο τι συμβαίνει καθώς το διάστημα *τείνει* στο άπειρο, δηλαδή όταν κάποιο όριο ολοκλήρωσης λαμβάνει πολύ μεγάλες τιμές. Παρόμοια, στη δεύτερη περίπτωση δεν μας ενδιαφέρει τι συμβαίνει όταν η συνάρτηση γίνεται άπειρη, όσο το τι συμβαίνει καθώς το διάστημα ολοκλήρωσης *τείνει* να περιλάβει σημεία στα οποία η συνάρτηση τείνει στο $\pm\infty$, δηλαδή όταν κάποιο όριο ολοκλήρωσης λαμβάνει τιμές αυθαίρετα κοντά σε κάποιο σημείο στο οποίο η συνάρτηση τείνει στο $\pm\infty$. Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε τις δύο αυτές περιπτώσεις, έχουμε δώσει δύο διαφορετικές επεκτάσεις στον ορισμό του ολοκληρώματος, που εξετάζουμε διαδοχικά. Πρώτα θα δούμε την επέκταση που καλύπτει τις περιπτώσεις που το διάστημα ολοκλήρωσης είναι άπειρο.

9.1.1 Καταχρηστικά Ολοκληρώματα Πρώτου Τύπου

Ορισμός 9.1. ***(Καταχρηστικό ολοκλήρωμα πρώτου τύπου)*** *Τα ακόλουθα όρια, εφόσον υπάρχουν και είναι πεπερασμένα ή $\pm\infty$, καλούνται* ***καταχρηστικά ολοκληρώματα (πρώτου τύπου)****:*

1. *Το όριο*
$$\int_a^\infty f \triangleq \lim_{h\to\infty} \int_a^h f,$$
όπου $a \in \mathbb{R}$ *και για τη συνάρτηση* $f : I \to \mathbb{R}$ *έχουμε* $[a, \infty) \subseteq I$.

2. *Το όριο*
$$\int_{-\infty}^a f \triangleq \lim_{h\to-\infty} \int_h^a f,$$
όπου $a \in \mathbb{R}$ *και για τη συνάρτηση* $f : I \to \mathbb{R}$ *έχουμε* $(-\infty, a] \subseteq I$.

Επομένως, το καταχρηστικό ολοκλήρωμα πρώτου τύπου είναι ο συνδυασμός δύο βασικών εννοιών: του ολοκληρώματος και του ορίου. Για να υπάρχει, λοιπόν, το καταχρηστικό ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης, πρώτον πρέπει να υπάρχει το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται εντός του ορίου, και δεύτερον πρέπει να υπάρχει και το όριο της συνάρτησης που προκύπτει από την ολοκλήρωση. Αν δεν υπάρχει ένα εκ των δύο, δεν υπάρχει και το καταχρηστικό ολοκλήρωμα.

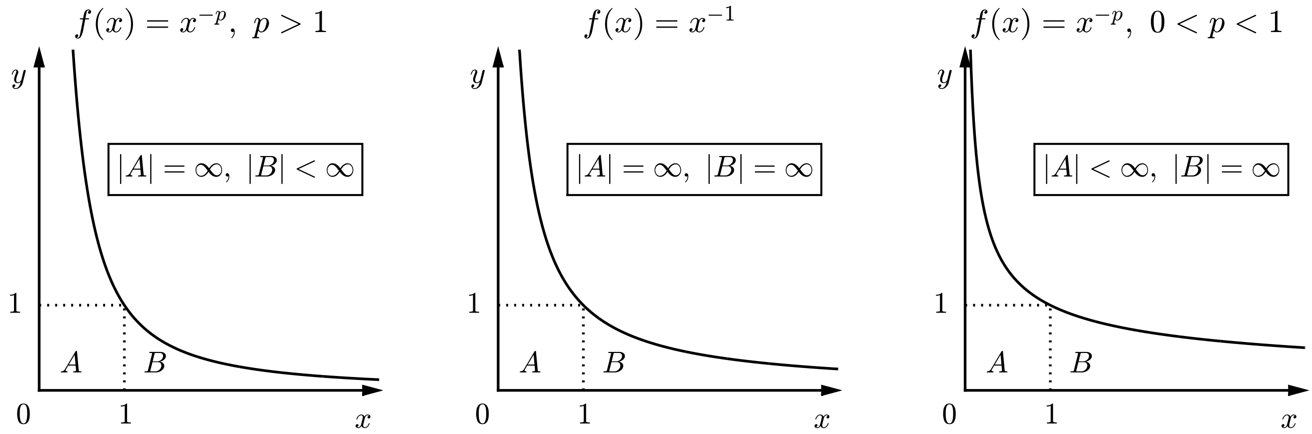
Σχετικά με τη φυσική ερμηνεία του καταχρηστικού ολοκληρώματος, παρατηρήστε ότι καθώς το h τείνει στο $\pm\infty$, το ολοκλήρωμα εντός του ορίου εκφράζει ένα προσημασμένο εμβαδόν που περιλαμβάνει ολοένα και μεγαλύτερη επιφάνεια, επομένως πράγματι το καταχρηστικό ολοκλήρωμα εκφράζει το προσημασμένο εμβαδόν του χωρίου που περιβάλλεται από το γράφημα της συνάρτησης, την ευθεία $x = a$, και το διάστημα $[a, \infty)$ ή $(-\infty, a]$, κατά περίπτωση.

Μια ένσταση που μπορεί να έχει κάποιος, στην περίπτωση που η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι παντού θετική, είναι κατά πόσον είναι δυνατόν το εμβαδόν του χωρίου που δημιουργείται να *μην* είναι άπειρο, αφού αντιστοιχεί σε ένα σχήμα του οποίου το μήκος κατά τη μία διάσταση είναι άπειρο. Το παράδοξο είναι παρόμοιο με αυτό του Ζήνωνος (το οποίο θα δούμε στο Κεφάλαιο 12), σύμφωνα με το οποίο δεν είναι δυνατόν ένα άπειρο πλήθος θετικών αριθμών να είναι πεπερασμένο. Το παράδοξο εξαφανίζεται (όπως ουσιαστικά και στην περίπτωση του παράδοξου του Ζήνωνος) αν παρατηρήσουμε πως ναι μεν το μήκος κατά τη μία διάσταση του συνόλου είναι άπειρο, αλλά το μήκος κατά τη δεύτερη διάσταση τείνει στο 0. Επομένως, έχουμε ένα είδος απροσδιοριστίας $0 \times \infty$. Για αυτό το λόγο, όπως θα δούμε στα παραδείγματα που ακολουθούν, το καταχρηστικό ολοκλήρωμα, στην περίπτωση που η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι παντού θετική, μπορεί αν είναι είτε άπειρο, είτε πεπερασμένο.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μερικά απλά παραδείγματα υπολογισμών καταχρηστικών ολοκληρωμάτων πρώτου τύπου. Σε όλες τις περιπτώσεις, ακολουθούμε την ίδια μεθοδολογία: πρώτα υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα εντός του ορίου, και κατόπιν το ίδιο το όριο.

Παράδειγμα 9.1. (Συνάρτηση $1/x^p$ στο $[1, \infty)$) Θα υπολογίσουμε, καταρχάς, το καταχρηστικό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x) = 1/x^p$ στο διάστημα $[1, \infty)$, δηλαδή το
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{h\to\infty} \int_1^h \frac{dx}{x^p},$$
για όλα τα $p \in \mathbb{R}$.

Έστω, πρώτα, πως $p \neq 1$. Τότε:
$$\int_1^h \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{(1-p)} \int_1^h \left[\frac{1}{x^{p-1}}\right]' dx = \frac{1}{(1-p)} \left(h^{1-p} - 1\right).$$
Διακρίνουμε περιπτώσεις: αν $p < 1$, τότε $1 - p > 0$, και επειδή $\lim_{h\to\infty} h^{1-p} = \infty$, προκύπτει πως
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{h\to\infty} \int_1^h \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{(1-p)} \lim_{h\to\infty} (h^{1-p} - 1) = \infty.$$



Σχήμα 9.1: Η συνάρτηση $f(x) = 1/x^p$ στο διάστημα $(0, \infty)$ για τρεις τιμές του p: Μια τιμή $p \in (0, 1)$, την τιμή $p = 1$, και μια τιμή $p > 1$. Το χωρίο μεταξύ της συνάρτησης $f(x)$ και των δύο αξόνων μπορεί να χωριστεί σε δύο σύνολα, A και B, εκ των οποίων το πρώτο έχει εμβαδόν $|A| = \int_{0^+}^{1} f$, και το δεύτερο έχει εμβαδόν $|B| = \int_1^\infty f$. Στο Παράδειγμα 9.1 υπολογίζουμε ότι $|B| = \infty$ για $p \leq 1$ και $|B| < \infty$ για $p > 1$. Στο Παράδειγμα 9.5 υπολογίζουμε ότι $|A| = \infty$ για $p \geq 1$ και $|A| < \infty$ για $0 < p < 1$.

Αν, όμως, $p > 1$, τότε $1 - p < 0$, και επειδή τότε $\lim\limits_{h\to\infty} h^{1-p} = 0$, έχουμε

$$\int_1^\infty = \lim_{h\to\infty} \int_1^h \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{(1-p)} \lim_{h\to\infty} (h^{1-p} - 1) = \frac{1}{p-1}.$$

Μένει, τέλος, η περίπτωση που $p = 1$, για την οποία έχουμε

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{h\to\infty} \int_1^h \frac{dx}{x} = \lim_{h\to\infty} \int_1^h (\log x)'\, dx = \lim_{h\to\infty} (\log h - 0) = \infty.$$

Επομένως, τελικά έχουμε

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \infty, & p \leq 1, \\ \frac{1}{p-1}, & p > 1. \end{cases}$$

Παρατηρήστε καταρχάς πως για $p \in (0, 1)$ μολονότι η συνάρτηση τείνει στο 0 καθώς $x \to \infty$, το καταχρηστικό ολοκλήρωμά της είναι άπειρο. Παρατηρήστε επίσης πως υπάρχει ένας κρίσιμος εκθέτης, ο $p = 1$, για τον οποίο το εμβαδόν μεταξύ της $1/x^p$ και του διαστήματος $[1, \infty)$ είναι *οριακά* άπειρο. Για $p > 1$, το εμβαδόν αυτό είναι πεπερασμένο. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα δεν θα μπορούσε να έχει προκύψει απλώς με επισκόπηση της συνάρτησης $1/x^p$.

Στο Σχήμα 9.1 έχουμε σχεδιάσει την $f(x) = 1/x^p$ στο διάστημα $[1, \infty)$ για τρεις τιμές του p. Μία τιμή $p \in (0, 1)$, την τιμή $p = 1$, και μία τιμή $p > 1$. Στις πρώτες δύο, το εμβαδόν $|B|$ του χωρίου B που δημιουργείται μεταξύ του διαστήματος $[1, \infty)$, του γραφήματος της συνάρτησης $f(x) = 1/x^p$ και της ευθείας $x = 1$, είναι άπειρο, ενώ στην τρίτη περίπτωση είναι πεπερασμένο, παρότι και στις τρεις περιπτώσεις το μήκος του χωρίου B κατά τη μία διάσταση είναι άπειρο, και κατά την άλλη τείνει στο 0. Η συμπεριφορά του εμβαδού του χωρίου A θα εξεταστεί στο Παράδειγμα 9.5.

Παράδειγμα 9.2. (Ολοκλήρωμα της e^{-x} στο $[0, \infty)$) Θα δείξουμε ότι

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1.$$

Πράγματι,

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_0^h e^{-x}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_0^h (-e^{-x})'\,dx = \lim_{h\to\infty}(-e^{-h}+e^0) = 1.$$

Ήταν αναμενόμενο ότι το καταχρηστικό αυτό ολοκλήρωμα θα ήταν πεπερασμένο. Πράγματι, έχουμε δει ότι η συνάρτηση e^x μεγαλώνει πολύ γρήγορα, και μάλιστα γρηγορότερα από κάθε πολυωνυμική συνάρτηση, άρα η e^{-x} μικραίνει πολύ γρήγορα.

Παράδειγμα 9.3. (Ολοκλήρωμα της xe^{-x} στο $[0,\infty)$) Παρόμοια, θα δείξουμε πως

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = 1.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty xe^{-x}\,dx &= \lim_{h\to\infty}\int_0^h xe^{-x}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_0^h -x(e^{-x})'\,dx\\ &= \lim_{h\to\infty}\left[-xe^{-x}\Big|_0^h + \int_0^h e^{-x}\,dx\right] = \lim_{h\to\infty}\left[-he^{-h}+0-e^{-x}\Big|_0^h\right]\\ &= \lim_{h\to\infty}(-he^{-h}-e^{-h}+1).\end{aligned}$$

Όμως,

$$\lim_{h\to\infty} e^{-h} = 0, \qquad \lim_{h\to\infty} he^{-h} = \lim_{h\to\infty}\frac{h}{e^h} = \lim_{h\to\infty}\frac{1}{e^h} = 0,$$

και τελικά προέκυψε η δοσμένη ισότητα.

Ολοκληρώνουμε τα παραδείγματά μας για τα καταχρηστικά ολοκληρώματα πρώτου τύπου με την περίπτωση ενός καταχρηστικού ολοκληρώματος που δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 9.4. (Ολοκλήρωμα της $\sin x$ στο $[0,\infty)$) Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \sin x\,dx.$$

Πράγματι,

$$\int_0^h \sin x\,dx = \int_0^h (-\cos x)'\,dx = \cos 0 - \cos h = 1-\cos h,$$

του οποίου το όριο καθώς $h\to\infty$ δεν υπάρχει (δείτε την Άσκηση 3.51). Επομένως, δεν μπορεί να υπάρχει και το αντίστοιχο καταχρηστικό ολοκλήρωμα.

Το αποτέλεσμα αυτό συμβαδίζει με τη φυσική ερμηνεία του ολοκληρώματος: καθώς το h μεγαλώνει, το ολοκλήρωμα εντός του ορίου $\lim_{h\to\infty}$ «ταλαντώνεται» αδιαλείπτως, χωρίς τελικά να συγκλίνει σε κάποια τιμή.

9.1.2 Καταχρηστικά Ολοκληρώματα Δεύτερου Τύπου

Προχωράμε στον δεύτερο τύπο καταχρηστικών ολοκληρωμάτων. Σε αυτόν τον τύπο, το πρόβλημα που αντιμετωπίζεται δεν είναι ο απειρισμός του διαστήματος ολοκλήρωσης, αλλά ο απειρισμός της ολοκληρωτέας συνάρτησης.

Ορισμός 9.2. ***(Καταχρηστικό ολοκλήρωμα δεύτερου τύπου)*** *Τα ακόλουθα όρια, εφόσον υπάρχουν και είναι πεπερασμένα ή $\pm\infty$, καλούνται* ***καταχρηστικά ολοκληρώματα (δεύτερου τύπου)****:*

1. *Το όριο*
$$\int_a^{b^-} f \triangleq \lim_{h\to b^-} \int_a^h f,$$
όπου $a < b$, εφόσον υπάρχει το ολοκλήρωμα της f σε κάθε διάστημα $[a,h]$ με $h < b$, όχι όμως και στο $[a,b]$.

2. *Το όριο*
$$\int_{a^+}^{b} f \triangleq \lim_{h\to a^+} \int_h^b f,$$
όπου $a < b$, εφόσον υπάρχει το ολοκλήρωμα της f σε κάθε διάστημα $[h,b]$ με $h > a$, όχι όμως και στο $[a,b]$.

Η απαίτηση να μην υπάρχει το (συνηθισμένο) ολοκλήρωμα στο διάστημα $[a,b]$ είναι απαραίτητη, γιατί σε διαφορετική περίπτωση δεν θα είχε νόημα να ασχολούμαστε με τον ορισμό του καταχρηστικού ολοκληρώματος. Η απαίτηση πρακτικά σημαίνει ότι η συνάρτηση δεν είναι φραγμένη στο $[a,b]$. (Δείτε την Άσκηση 7.20, από την οποία προκύπτει ότι αν η συνάρτηση είναι φραγμένη στο $[a,b]$, τότε αν υπάρχει το καταχρηστικό ολοκλήρωμα στο $[a,b]$, θα υπάρχει και το απλό ολοκλήρωμα στο $[a,b]$.)

Για τον δεύτερο τύπο καταχρηστικού ολοκληρώματος ισχύουν παρατηρήσεις ανάλογες με αυτές του πρώτου τύπου. Συγκεκριμένα, κάθε καταχρηστικό ολοκλήρωμα είναι το όριο ενός ολοκληρώματος. Επομένως, για να το υπολογίσουμε πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, και εφόσον αυτό υπάρχει, ακολούθως να υπολογίσουμε το όριο. Δεύτερον, καθώς $h \to b^-$ ή $h \to a^+$, το ολοκλήρωμα εντός του ορίου εκφράζει ένα προσημασμένο εμβαδόν που περιλαμβάνει ολοένα και περισσότερη επιφάνεια, ώστε τελικά το καταχρηστικό ολοκλήρωμα να εκφράζει το εμβαδόν όλου του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του διαστήματος $[a,b]$, του γραφήματος της συνάρτησης, και των ευθειών $x = a$, $x = b$.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μερικά απλά παραδείγματα υπολογισμού καταχρηστικών ολοκληρωμάτων δεύτερου τύπου. Και πάλι, η μεθοδολογία είναι η ίδια: πρώτα υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα εντός του ορίου, και κατόπιν, εφόσον το ολοκλήρωμα υπάρχει, υπολογίζουμε και το ίδιο το όριο. Αν υπάρχει και αυτό, υπάρχει το καταχρηστικό ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα 9.5. (Ολοκλήρωμα της $1/x^p$ στο $[0,1]$) Θα συμπληρώσουμε το Παράδειγμα 9.1 υπολογίζοντας το καταχρηστικό όριο της συνάρτησης $f(x) = 1/x^p$ στο διάστημα $[0,1]$, δηλαδή το
$$\int_{0^+}^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{h\to 0^+} \int_h^1 \frac{dx}{x^p}$$
για κάθε $p > 0$. Δεν εξετάζουμε την περίπτωση $p \le 0$, διότι τότε το ολοκλήρωμα της $1/x^p$ υπάρχει με τη συνήθη έννοια, και προφανώς είναι πεπερασμένο.

Έστω, πρώτα, πως $p \ne 1$. Έχουμε
$$\int_h^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\int_h^1 \left(x^{1-p}\right)' dx = \frac{1}{1-p}(1-h^{1-p}).$$
Και πάλι διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, τις $0 < p < 1$ και $p > 1$. Αν $0 < p < 1$, τότε $1 - p > 0$ και επομένως
$$\int_{0^+}^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{1-p}(1-h^{1-p}) = \frac{1}{1-p}.$$

Αν, όμως, $p > 1$, τότε $1 - p < 0$ και επειδή έχουμε $\lim_{h\to 0^+} h^{1-p} = \infty$,

$$\int_{0^+}^{1} \frac{dx}{x^p} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{1-p}(1 - h^{1-p}) = \infty.$$

Τέλος, στην περίπτωση $p = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{0^+}^{1} \frac{dx}{x} &= \lim_{h\to 0} \int_{h}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{h\to 0} \int_{h}^{1} (\log x)'\, dx \\ &= \lim_{h\to 0} [\log x]_h^1 = \lim_{h\to 0^+} (\log 1 - \log h) = 1 - (-\infty) = \infty. \end{aligned}$$

Συγκεντρωτικά, λοιπόν,

$$\int_{0^+}^{1} \frac{dx}{x} = \begin{cases} \infty, & p \geq 1, \\ \frac{1}{1-p}, & p < 1. \end{cases}$$

Στο Σχήμα 9.1 έχουμε απεικονίσει γραφικά το αποτέλεσμα. Όταν $p \geq 1$, το χωρίο A που περιγράφεται από τη συνάρτηση $f(x) = 1/x^p$, τον άξονα των x, τον άξονα των y, και την ευθεία $x = 1$ έχει άπειρο εμβαδόν $|A|$. Όταν $p < 1$, το εμβαδόν του $|A|$ είναι πεπερασμένο. Επομένως, όταν $p = 1$ το εμβαδόν $|A|$ είναι οριακά άπειρο. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση του καταχρηστικού ολοκληρώματος πρώτου τύπου για την ίδια συνάρτηση, δεν υπήρχε τρόπος να καταλήξουμε σε αυτό το αποτέλεσμα μόνο με χρήση της μαθηματικής μας διαίσθησης.

Σύμβαση: *Σχετικά με τον συμβολισμό των καταχρηστικών ολοκληρωμάτων δεύτερου τύπου, είθισται μερικές φορές να παραλείπουμε τους εκθέτες $+$ και $-$ των προβληματικών ορίων ολοκλήρωσης. Γράφουμε, για παράδειγμα,*

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x} \text{ αντί για } \int_{0^+}^{1} \frac{dx}{x}.$$

Σε κάθε περίπτωση, μπορούμε να καταλάβουμε ότι ο αντίστοιχος δείκτης παραλήφθηκε, από το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα που εξετάζουμε δεν υπάρχει με την κανονική έννοια, αλλά μόνο με την καταχρηστική. Στη συνέχεια, θα υπάρξουν περιπτώσεις που θα ακολουθήσουμε αυτή τη σύμβαση.

9.1.3 Καταχρηστικά Ολοκληρώματα Μικτού Τύπου

Οι προηγούμενοι ορισμοί μπορούν να συνδυαστούν για να μας δώσουν καταχρηστικά ολοκληρώματα που εμφανίζουν πολλαπλά είδη απειρισμού, είτε στα όρια ολοκλήρωσης, είτε στην ολοκληρωτέα συνάρτηση. Δείτε τον ακόλουθο ορισμό. Προσέξτε πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί αναδρομικά.

Ορισμός 9.3. ***(Καταχρηστικό ολοκλήρωμα μικτού τύπου)*** *Για οποιαδήποτε a, b, c με $a < b < c$ και $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, αν τα $\int_a^b f$ και $\int_b^c f$ είναι καταχρηστικά ολοκληρώματα οποιουδήποτε τύπου, τότε ορίζουμε το άθροισμα*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f,$$

εφόσον δεν εμφανίζει απροσδιοριστία $\infty - \infty$, ως ***καταχρηστικό ολοκλήρωμα (μικτού τύπου)****.*

Ο παραπάνω ορισμός εμφανίζει ένα ενδεχομένως προβληματικό σημείο. Αν μας δοθεί ένα καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\int_a^c f$ του οποίου και τα δύο άκρα είναι «προβληματικά», δηλαδή είτε είναι $\pm\infty$ είτε η συνάρτηση δεν είναι φραγμένη γύρω από αυτά, δεν υπάρχει όμως άλλο προβληματικό σημείο εντός του (a, c), τότε έχουμε διάφορες επιλογές για το πώς θα σπάσουμε το διάστημα $[a, c]$ σε δύ-ο κομμάτια $[a, b]$ και $[b, c]$ προκειμένου να εφαρμόσουμε, στα δύο αυτά υποδιαστήματα, τον ορισμό του καταχρηστικού ολοκληρώματος ως όριο ενός κανονικού ολοκληρώματος. Πράγματι, μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε $b \in (a, c)$. Θα πρέπει το αποτέλεσμα να *μην* εξαρτάται από την επιλογή του b. Ευτυχώς, αυτή η ιδιότητα ισχύει. Η απόδειξη, για μία μόνο από τις περιπτώσεις που πρέπει να εξεταστούν, ζητείται στην Άσκηση 9.1.

Παράδειγμα 9.6. (Ολοκλήρωμα της $1/x^p$ στο $(0, \infty)$) Συνδυάζοντας τα Παραδείγματα 9.1 και 9.5, προκύπτει ότι για κάθε τιμή του $p > 0$, θα έχουμε

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^p} = \int_0^1 \frac{dx}{x^p} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \infty,$$

αφού είτε το ένα είτε το άλλο ολοκλήρωμα, είτε και τα δύο (στην περίπτωση $p = 1$) είναι ίσα με ∞.

Μερικές φορές μπορεί να δίνεται ένα καταχρηστικό ολοκλήρωμα χωρίς να διευκρινίζεται για ποιο λόγο είναι καταχρηστικό. Αυτό είναι κάτι που προκύπτει με μελέτη της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Δείτε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 9.7. (Ολοκλήρωμα της $1/x^p$ στο $[-1, 9]$) Θα δείξουμε ότι

$$\int_{-1}^9 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 8.$$

Παρατηρήστε ότι το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό ολοκλήρωμα μικτού τύπου, λόγω του απειρισμού της ολοκληρωτέας συνάρτησης στο 0. Επομένως,

$$\int_{-1}^9 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} + \int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x}} + \int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Σχετικά με το δεύτερο ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{h \to 0} \int_h^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{h \to 0} \int_h^9 2\left(\sqrt{x}\right)' dx = \lim_{h \to 0} 2\left(3 - \sqrt{h}\right) = 6.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί με τον ίδιο τρόπο, κάνοντας πρώτα την αλλαγή μεταβλητής $y = -x$, και καταλήγοντας στο

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 2.$$

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα, προκύπτει το ζητούμενο.

Ασκήσεις

9.1. (Το $\int_{-\infty}^{\infty} f$ είναι καλώς ορισμένο) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{a} f + \int_a^\infty f,$$

εφόσον υπάρχουν οι δύο όροι και δεν έχουμε απροσδιοριστία $\infty - \infty$, δεν εξαρτάται από την τιμή του a.

9.2. [$\star$, Π] (Καταχρηστικό ολοκλήρωμα της $x^n e^{-x}$) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

9.3. (Ζεύγος καταχρηστικών ολοκληρωμάτων) Να υπολογίσετε το ζεύγος καταχρηστικών ολοκληρωμάτων

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx, \qquad \int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx.$$

9.4. (Καταχρηστικό ολοκλήρωμα της $\log x$) Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα του λογαρίθμου, $\int_0^\infty \log x\,dx$.

9.5. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα καταχρηστικά ολοκληρώματα:

1. $\int_{1+}^2 \frac{dx}{x\log x}$.
2. $\int_0^1 \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$.
3. $\int_0^\infty e^{-x}\sin(e^{-x})\,dx$.

9.2 Εμβαδόν Χωρίου Οριζόμενου σε Πολικές Συντεταγμένες

Στην Παράγραφο 2.3 είδαμε πώς μπορούμε να περιγράψουμε γραφικά μια συνάρτηση κατασκευάζοντας το γράφημά της σε πολικές συντεταγμένες. Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός χωρίου σχετιζόμενου με αυτό το γράφημα. Συγκεκριμένα, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 9.1. ***(Υπολογισμός εμβαδού με χρήση πολικών συντεταγμένων)*** *Έστω συνάρτηση $f : A \to [0,\infty)$ και έστω διάστημα $[a,b] \subseteq A$ με $b-a \le 2\pi$ στο οποίο η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη. Έστω το χωρίο*

$$R = \{[r,\theta] : a \le \theta \le b,\ 0 \le r \le f(\theta)\}. \tag{9.1}$$

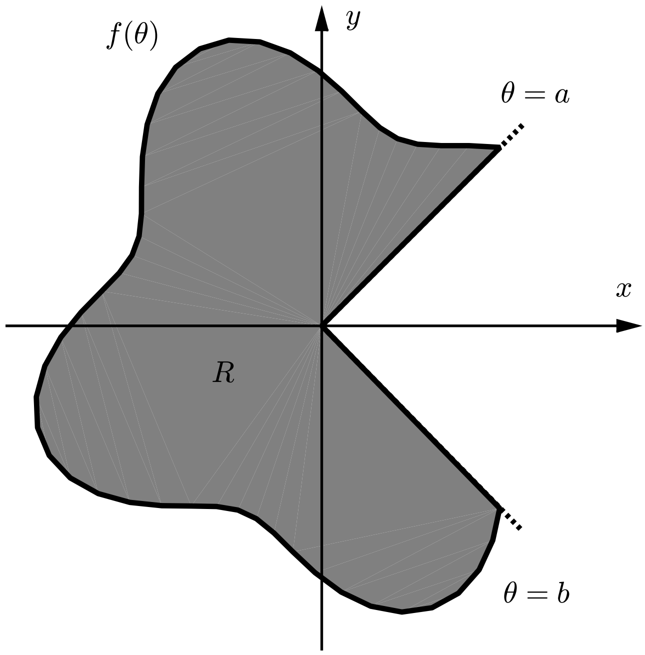
Το εμβαδόν $A(R)$ του χωρίου R ισούται με

$$A(R) = \frac{1}{2}\int_a^b f^2. \tag{9.2}$$

Για να κατανοήσουμε το θεώρημα, πρέπει πρώτα να κατανοήσουμε ποιο είναι το χωρίο που περιγράφει η (9.1). Σύμφωνα με αυτή την έκφραση, το χωρίο αποτελείται από όλα τα σημεία του επιπέδου των οποίων οι *πολικές* συντεταγμένες ικανοποιούν δύο προϋποθέσεις. Πρώτον, η γωνία θ είναι εντός του εύρους $[a,b]$. Δεύτερον, η ακτίνα r έχει τιμή από το 0 έως το $f(\theta)$. Παρατηρήστε πως τα σημεία που αντιστοιχούν σε μια συγκεκριμένη γωνία θ και έχουν ακτίνα εντός του διαστήματος $[0, f(\theta)]$ δημιουργούν ένα ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ της αρχής των αξόνων και του σημείου $[f(\theta),\theta] = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta)$. Το χωρίο R, με τη σειρά του, είναι η ένωση όλων αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων. Το χωρίο έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 9.2. Το Θεώρημα 9.1, λοιπόν, μας δείχνει ότι η επιφάνεια $A(R)$ του χωρίου R δίνεται από τον πολύ απλό τύπο (9.2).

Δεν θα αποδείξουμε αυστηρά το θεώρημα, θα δώσουμε όμως μια πολύ πειστική εξήγηση για το γιατί ισχύει. Το πρώτο βήμα είναι να παρατηρήσουμε ότι το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα S ακτίνας R και γωνίας θ είναι $A(S) = \frac{1}{2}\theta R^2$. Πράγματι, όλος ο κύκλος έχει εμβαδόν πR^2, επομένως με χρήση της απλής μεθόδου των τριών προκύπτει πως ο κυκλικός τομέας θα πρέπει να έχει εμβαδόν $\frac{\theta}{2\pi}\pi R^2 = \frac{1}{2}\theta R^2$. Δείτε το Σχήμα 9.3. Ακολούθως, έστω μια ακολουθία διαμερίσεων P_n του διαστήματος $[a,b]$ ως εξής:

$$P_n = \{\theta_0 = a < \theta_1 < \cdots < \theta_n = b\},$$



Σχήμα 9.2: Το χωρίο R που περιγράφεται από την (9.1). Το εμβαδόν αυτού του χωρίου δίνεται από την (9.2).

τέτοια ώστε $|P_n| \to 0$. Έστω, επίσης, n αυθαίρετα επιλεγμένα σημεία $x_1, x_2, \dots, x_n$ τέτοια ώστε $\theta_{i-1} < x_i < \theta_i$. Δημιουργούμε την ακολουθία κλιμακωτών (δηλαδή τμηματικά σταθερών) συναρτήσεων $g_n : [a,b] \to [0,\infty)$ με:

$$g_n(\theta) = f(x_i), \quad \theta_{i-1} \leq x_i < \theta_i, \quad i = 1, \dots, n$$

και $g_n(b) = f(b)$. Θα υπολογίσουμε το εμβαδόν $A(R_n)$ του χωρίου

$$R_n = \{[r,\theta] : a \leq \theta \leq b,\ 0 \leq r \leq g_n(\theta)\}.$$

που δημιουργεί κάθε συνάρτηση g_n. Δείτε το Σχήμα 9.4, όπου έχουμε σχεδιάσει το χωρίο R_n για 4 επιλογές του n. Παρατηρήστε ότι το χωρίο αυτό αποτελείται από διαδοχικούς κυκλικούς τομείς, και επομένως το εμβαδόν $A(R_n)$ του ολικού χωρίου R_n ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των τομέων, δηλαδή

$$A(R_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(x_i)(\theta_i - \theta_{i-1}).$$

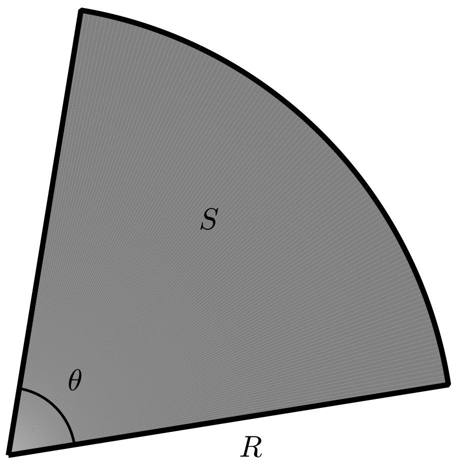
Παρατηρήστε ότι το $A(R_n)$ είναι ένα άθροισμα Riemann της συνάρτησης $\frac{1}{2}f^2$ στο $[a,b]$. Παρατηρήστε επίσης ότι καθώς $n \to \infty$, συμβαίνουν δύο διαφορετικά πράγματα:

1. Το εμβαδόν $A(R_n)$ συγκλίνει στο εμβαδόν του αρχικού χωρίου R, καθώς η προσέγγιση γίνεται ολοένα και καλύτερη και το χωρίο R_n συγκλίνει στο R, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.4.

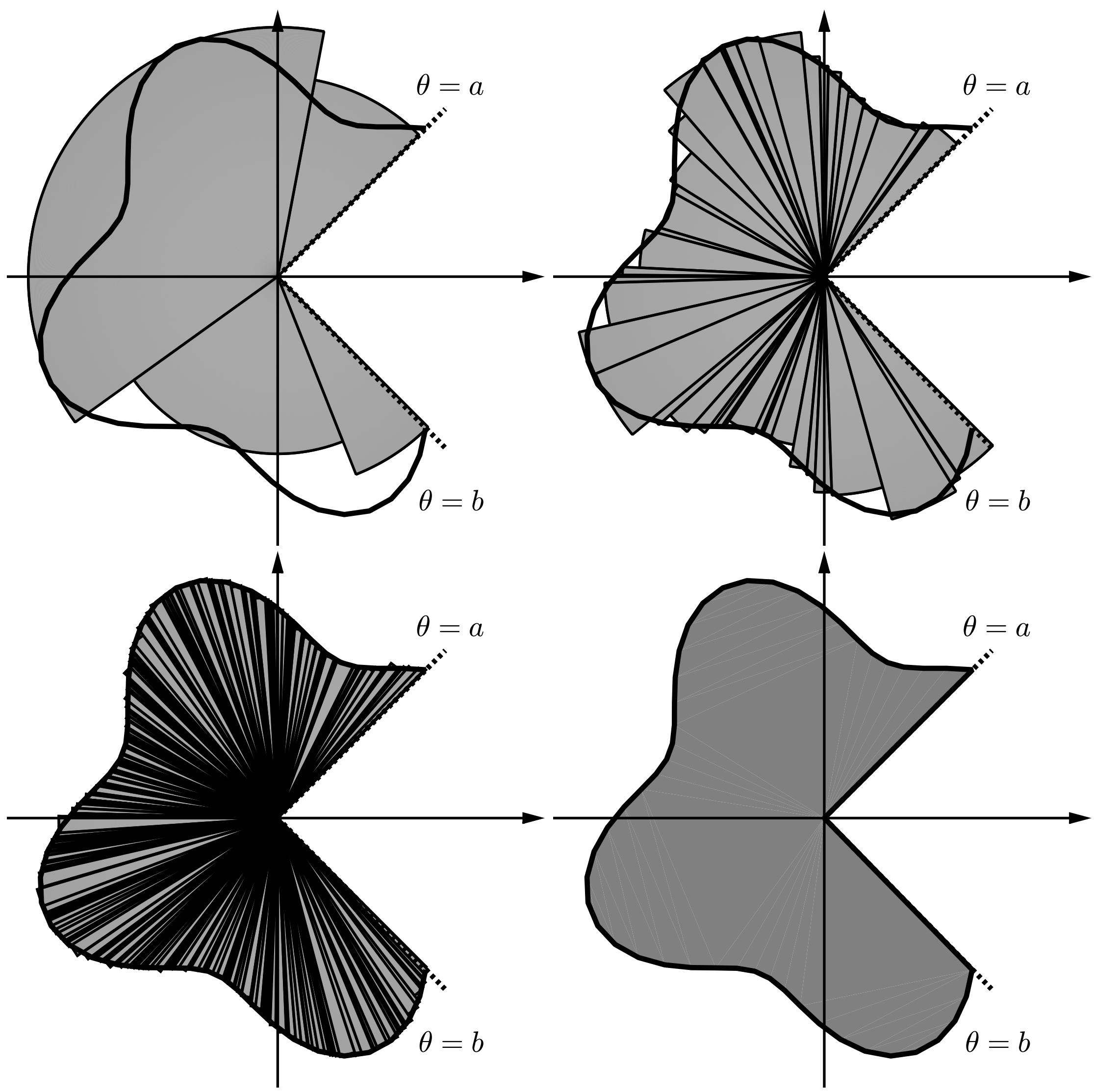
2. Το εμβαδόν $A(R_n)$, ως άθροισμα Riemann της $\frac{1}{2}f^2$, συγκλίνει στο $\int_a^b \frac{1}{2}f^2$.

Αφού η ίδια ακολουθία $A(R_n)$ συγκλίνει σε δύο αριθμούς, δηλαδή το $A(R)$ και το $\int_a^b \frac{1}{2}f^2$, θα πρέπει αυτοί οι αριθμοί να είναι ίσοι, και έτσι ισχύει το Θεώρημα 9.1.

Ένας άλλος, πιο σύντομος, τρόπος να εξηγήσουμε τον τύπο (9.2) είναι ο ακόλουθος: το εμβαδόν του χωρίου R ισούται με το εμβαδόν ενός άπειρου πλήθους κυκλικών τομέων, ενός για κάθε $\theta \in [a,b]$, απειροστής γωνίας $d\theta$ και ακτίνας $f(\theta)$. Το εμβαδόν καθενός από τους κυκλικούς τομείς είναι λοιπόν $\frac{1}{2}(f(x))^2 d\theta$, και προσθέτοντας όλα τα απειροστά εμβαδά, δηλαδή λαμβάνοντας το ολοκλήρωμα, προκύπτει το συνολικό εμβαδόν $\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx$.



Σχήμα 9.3: Το εμβαδόν $A(S)$ ενός κυκλικού τομέα S με ακτίνα R και γωνία θ ισούται με $\frac{1}{2}\theta R^2$.



Σχήμα 9.4: Διαδοχικές προσεγγίσεις του χωρίου R του Σχήματος 9.2 από τα χωρία R_n που δημιουργούνται από κλιμακωτές συναρτήσεις $g_n(\theta)$. Παρατηρήστε ότι καθώς οι διαμερίσεις γίνονται πιο πυκνές, τα χωρία R_n συγκλίνουν στο R και τα εμβαδά τους $A(R_n)$ συγκλίνουν στο εμβαδόν $A(R)$.

Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα 9.1 απαιτεί $b-a \leq 2\pi$. Πράγματι, αν αυτή η συνθήκη παραβιάζεται, τότε το R, όπως δίνεται από την (9.1), παραμένει καλώς ορισμένο, με τη μόνη επιπλοκή ότι ορισμένα σημεία του χωρίου θα περιγράφονται από περισσότερα του ενός ζεύγη (r, θ). Όμως, ο τύπος (9.2) παύει να ισχύει διότι υπολογίζει το εμβαδόν του υποχωρίου που δημιουργούν αυτά τα σημεία περισσότερες της μίας φοράς.

Το θεώρημα είναι πολύ απλό στη χρήση του. Αν μας δοθεί η f, αρκεί να υπολογίσουμε το $\frac{1}{2}\int_a^b f^2$ για να προσδιορίζουμε το εμβαδόν του χωρίου που δίνεται από την έκφραση (9.1). Δείτε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 9.8. (Υπολογισμός εμβαδού) Σε αυτό το παράδειγμα, θα υπολογίσουμε το εμβαδόν των χωρίων της μορφής

$$R = \{[r, \theta] : a \leq \theta \leq b,\ 0 \leq r \leq f(\theta)\}.$$

για τις συναρτήσεις του Παραδείγματος 2.2 του Κεφαλαίου 2.

Πρώτον, υπολογίζουμε το εμβαδόν του χωρίου R για την περίπτωση που $f(\theta) = |\cos\theta|$ και $a = 0$, $b = 2\pi$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f^2(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} (\sin 2\theta)'\, d\theta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Δεύτερον, υπολογίζουμε το εμβαδόν του χωρίου R για την περίπτωση που $f(\theta) = e^{-\theta/10}$ και $a = 0$, $b = 2\pi$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f^2(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-\theta/5}\, d\theta = -\frac{5}{2}\int_0^{2\pi} \left(e^{-\theta/5}\right)' d\theta \\ &= -\frac{5}{2}\left[e^{-2\pi/5} - 1\right] = \frac{5}{2}\left[1 - e^{-2\pi/5}\right]. \end{aligned}$$

Τέλος, υπολογίζουμε το εμβαδόν του χωρίου R για την περίπτωση που $f(\theta) = \sin^2 2\theta$ και $a = 0$, $b = 2\pi$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f^2(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^4 2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} (1-\cos 4\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} (1+\cos^2 4\theta - 2\cos 4\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 8\theta}{2}\, d\theta - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos 4\theta\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{16}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{128}\left[\sin 8\theta\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{16}\left[\sin 4\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + 0 - 0 = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

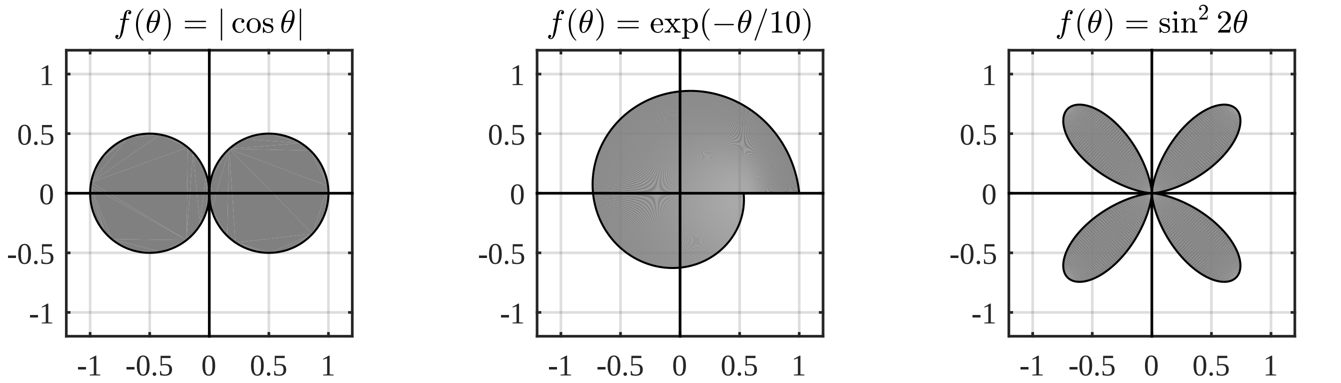
Και τα τρία χωρία εμφανίζονται στο Σχήμα 9.5.

Ασκήσεις

9.6. [Π] (Λουλουδάκι) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου

$$R = \{[r, \theta] : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq |\cos k\theta/2|\},$$

όπου $k \in \mathbb{N}^*$. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος;



Σχήμα 9.5: Τα χωρία του Παραδείγματος 9.8.

9.7. (Λουλουδάκι μείον λουλουδάκι) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου

$$R = \left\{[r,\theta] : a \leq \theta \leq b,\ \cos^2 2\theta \leq r \leq 2\cos^2 2\theta\right\}.$$

9.8. (Καρδούλα) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου

$$R = \{[r,\theta] : a \leq \theta \leq b,\ 0 \leq r \leq 1 + \cos\theta\}.$$

9.9. (Κύκλος) Επαληθεύστε ότι το Θεώρημα 9.1 προβλέπει το σωστό εμβαδόν για την περίπτωση που $f(\theta) = R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, στην περίπτωση δηλαδή που το χωρίο R είναι κύκλος.

9.3 Μέθοδος των Δίσκων

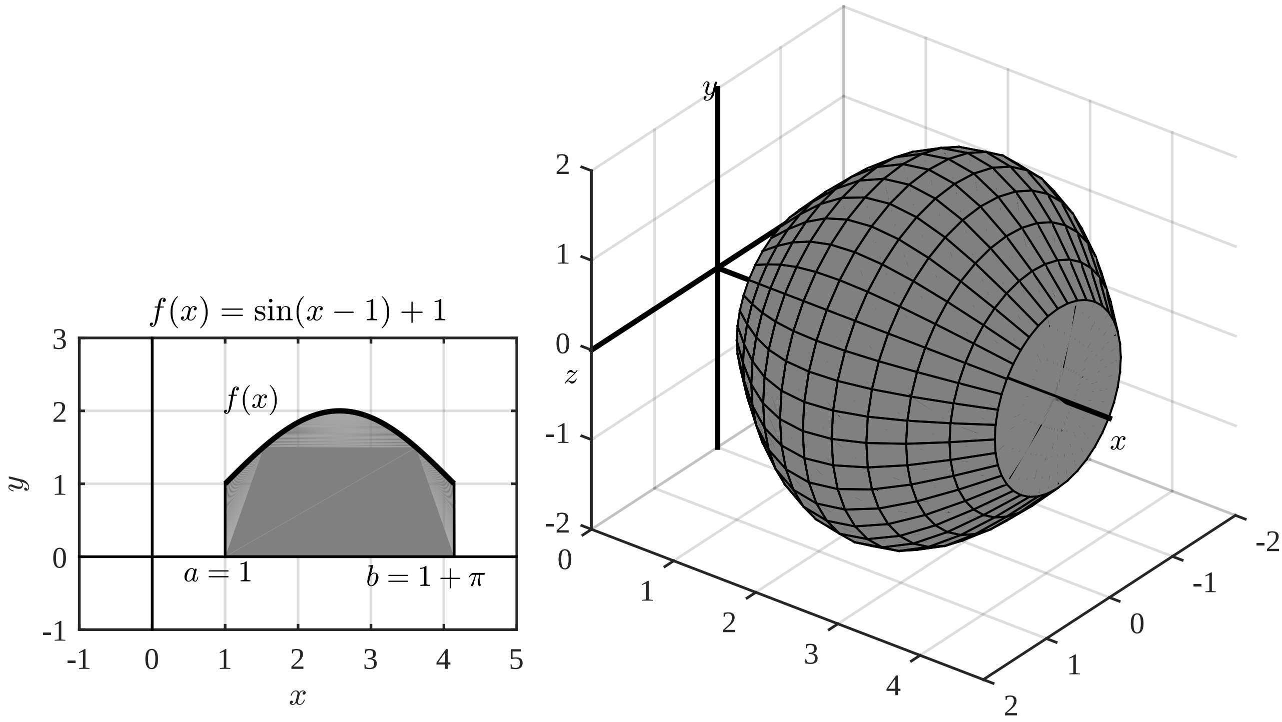
Σε αυτή την παράγραφο εξετάζουμε την περίπτωση στερεών που δημιουργούνται με περιστροφή ε-νός γραφήματος περί τον άξονα των x. (Στην Παράγραφο 9.4 θα μελετήσουμε την περίπτωση που η περιστροφή γίνεται περί τον άξονα των y.)

Θεώρημα 9.2. ***(Μέθοδος των Δίσκων)*** *Έστω συνάρτηση $f : [a,b] \to [0,\infty)$. Έστω το στερεό S εκ περιστροφής που δημιουργείται αν περιστρέψουμε περί τον άξονα των x το χωρίο που σχηματίζεται από το γράφημα της συνάρτησης, τον άξονα των x, και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$. Ο όγκος $V(S)$ του στερεού S ισούται με*

$$V(S) = \pi \int_a^b f^2. \tag{9.3}$$

Το δύσκολο στο παραπάνω θεώρημα δεν είναι τόσο να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, όσο να συ-νειδητοποιήσουμε ποιο είναι ακριβώς το στερεό του οποίου τον όγκο υπολογίζουμε. Δείτε προσεκτικά τα επόμενα δύο παραδείγματα και, σε κάθε περίπτωση, βεβαιωθείτε ότι το στερεό εκ περιστροφής που έχει σχεδιαστεί είναι αυτό που πράγματι προκύπτει από τη διαδικασία που περιγράφει το θεώρημα.

Παράδειγμα 9.9. (Συνάρτηση $f(x) = 1 + \sin(x-1)$) Έστω η συνάρτηση $f(x) = 1 + \sin(x-1)$ στο διάστημα $[a,b] = [1, 1+\pi]$, και έστω πως την περιστρέφουμε όπως περιγράφεται στο Θεώρημα 9.2. Τόσο



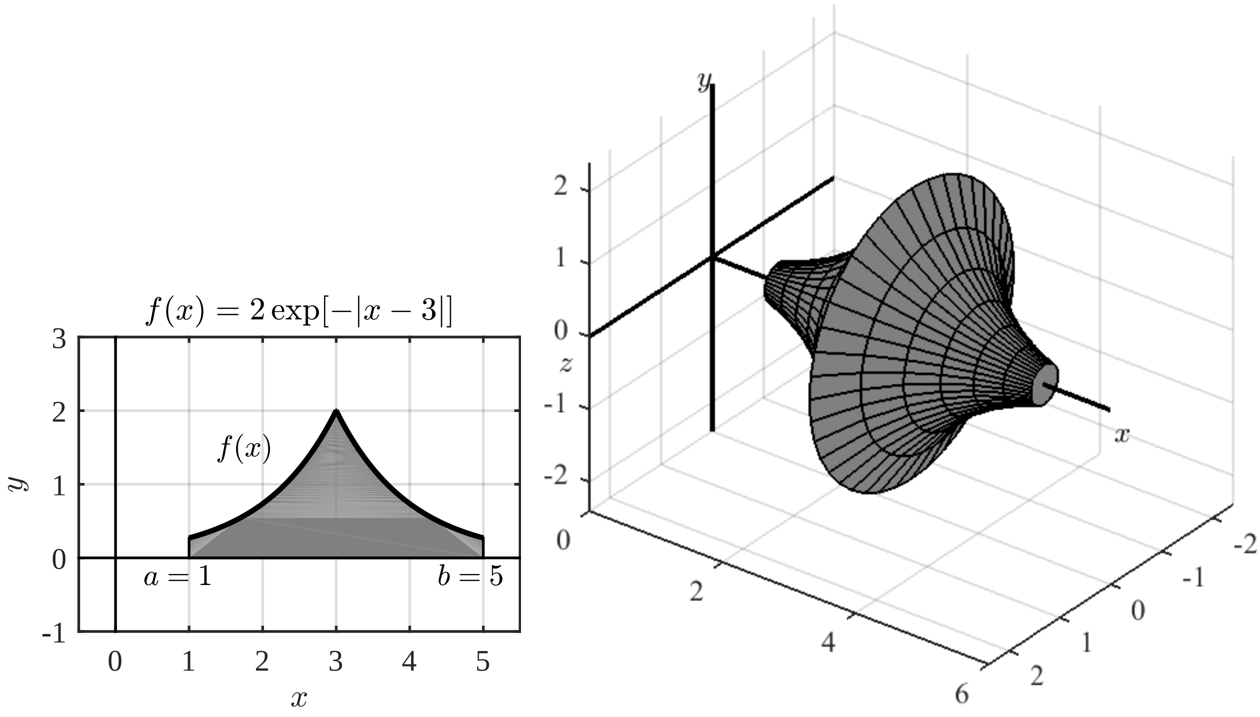
Σχήμα 9.6: Η συνάρτηση $f(x) = \sin(x-1)+1$ στο διάστημα $[a, b] = [1, 1+\pi]$ και το στερεό που δημιουργείται αν περιστρέψουμε περί τον άξονα των x το χωρίο που δημιουργείται από το γράφημα της $f(x)$, τον άξονα των x, και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 1+\pi$.

η συνάρτηση, όσο και το στερεό, εμφανίζονται στο Σχήμα 9.6. Ο όγκος του στερεού είναι

$$\begin{aligned} V(S) &= \pi \int_1^{1+\pi} f^2(x)\,dx = \pi \int_1^{1+\pi} (1+\sin(x-1))^2\,dx \\ &= \pi \int_1^{1+\pi} \big(1+\sin^2(x-1)+2\sin(x-1)\big)\,dx \\ &= \pi^2 + \pi \int_1^{1+\pi} \frac{1-\cos 2(x-1)}{2}\,dx - 2\pi \int_1^{1+\pi} (\cos(x-1))'\,dx \\ &= \pi^2 + \pi^2/2 - \frac{\pi}{4} \int_1^{1+\pi} (\sin 2(x-1))'\,dx - 2\pi(\cos\pi - \cos 0) \\ &= \pi^2 + \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{4}(\sin 2\pi - \sin 0) - 2\pi(-1-1) = \frac{3\pi^2}{2} + 4\pi. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.10. (Συνάρτηση $f(x) = 2\exp(-|x-3|)$) Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\exp(-|x-3|)$ στο διάστημα $[a, b] = [1, 5]$, και έστω πως την περιστρέφουμε όπως περιγράφεται στο Θεώρημα 9.2. Τόσο η συνάρτηση, όσο και το στερεό, εμφανίζονται στο Σχήμα 9.7. Ο όγκος του στερεού είναι

$$\begin{aligned} V(S) &= \pi \int_1^5 f^2(x)\,dx = \pi \int_1^5 4\exp(-2|x-3|)\,dx = 8\pi \int_3^5 \exp(-2(x-3))\,dx \\ &= -4\pi \int_3^5 [\exp(-2(x-3)]'\,dx = 4\pi\,[\exp(-2(x-3))]_5^3 = 4\pi(1-\exp(-4)). \end{aligned}$$



Σχήμα 9.7: Η συνάρτηση $f(x) = 2\exp(-|x-3|)$ στο διάστημα $[a,b] = [1,5]$ και το στερεό που δημιουργείται αν περιστρέψουμε περί τον άξονα των x το χωρίο που δημιουργείται από το γράφημα της $f(x)$, τον άξονα των x, και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 5$.

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη συμμετρία της $f(x)$ περί την ευθεία $x = 3$.

Έχοντας δει πώς εφαρμόζεται το θεώρημα, θα δώσουμε μια αρκετά πειστική αιτιολόγηση για το γιατί ισχύει, χωρίς πάντως να δώσουμε μια πλήρη απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε ένα επιχείρημα ανάλογο με αυτό που εφαρμόσαμε στην Παράγραφο 9.2 για την αιτιολόγηση του Θεωρήματος 9.1.

Έστω, λοιπόν, πως μας έχει δοθεί μια συνάρτηση $f : [a,b] \to [0,\infty)$, η οποία δημιουργεί ένα στερεό εκ περιστροφής, κατά την περιγραφή του Θεωρήματος 9.2, του οποίου τον όγκο θέλουμε να υπολογίσουμε. Έστω μια ακολουθία διαμερίσεων

$$P_n = \{a = p_0 < p_1 < \cdots < p_n = b\} \tag{9.4}$$

τέτοια ώστε $|P_n| \to 0$, και έστω, για κάθε διαμέριση, μια επιλογή σημείων $\{x_1, \ldots, x_n\}$ τέτοια ώστε

$$p_{i-1} < x_i < p_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{9.5}$$

Έστω, επίσης, για κάθε διαμέριση P_n, η τμηματικά σταθερή συνάρτηση $g_n(x)$ που ορίζεται ως εξής:

$$g_n(x) = \begin{cases} f(x_i), & p_{i-1} \le x < p_i, \quad i = 1, \ldots, n \\ f(x_n), & x = p_n. \end{cases} \tag{9.6}$$

Θα υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού S_n που δημιουργείται αν περιστρέψουμε το χωρίο που περιγράφεται από το γράφημα της τμηματικά σταθερής g_n, του άξονα των x, και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$. Παρατηρήστε ότι αυτό το στερεό απαρτίζεται από n *δίσκους* (αυτό εξηγεί και το όνομα του Θεωρήματος 9.2, για όποιον αναρωτιόταν), των οποίων τον όγκο γνωρίζουμε. Πράγματι, ο δίσκος i

είναι ένας κύλινδρος με ακτίνα $f(x_i)$ και ύψος $(p_i - p_{i-1})$, επομένως έχει όγκο $\pi f^2(x_i)(p_i - p_{i-1})$, και τελικά ο όγκος του στερεού S_n είναι

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(x_i)(p_i - p_{i-1}). \tag{9.7}$$

Παρατηρήστε ότι ο όγκος $V(S_n)$ είναι ένα άθροισμα Riemann της συνάρτησης πf^2 στο $[a, b]$. Μπορείτε να φανταστείτε τη συνέχεια: καθώς το πλήθος n των διαστημάτων της διαμέρισης τείνει στο άπειρο, δηλαδή $n \to \infty$, συμβαίνουν δύο διαφορετικά πράγματα:

1. Ο όγκος $V(S_n)$ συγκλίνει στον όγκο του αρχικού στερεού S, αφού καθώς $n \to \infty$ το στερεό S_n γίνεται ολοένα και καλύτερη προσέγγιση του S_n.

2. Ο όγκος $V(S_n)$, ως άθροισμα Riemann της συνάρτησης πf^2 στο $[a, b]$, συγκλίνει στο $\int_a^b \pi f^2$.

Αφού η ίδια ακολουθία συγκλίνει σε δύο αριθμούς, θα πρέπει οι δύο αυτοί αριθμοί να είναι ίσοι, επομένως προκύπτει η (9.3) του Θεωρήματος 9.2.

Στο Σχήμα 9.8 έχουμε σχεδιάσει το στερεό S_n στην περίπτωση της συνάρτησης του Παραδείγματος 9.9 για τέσσερις τιμές του n. Αναφέρουμε, επίσης, τις αντίστοιχες τιμές των όγκων V_n, που πράγματι συγκλίνουν στην τιμή που υπολογίσαμε στο Παράδειγμα 9.9.

Ένας άλλος, πιο σύντομος, τρόπος να εξηγήσουμε τον τύπο (9.3) είναι ο ακόλουθος: ο όγκος του στερεού ισούται με ένα άπειρο πλήθος δίσκων, έναν για κάθε $x \in [a, b]$, απειροστού πάχους dx και ακτίνας $f(x)$. Ο όγκος καθενός από τους δίσκους είναι λοιπόν $\pi(f(x))^2\,dx$, και προσθέτοντας όλους τους όγκους, δηλαδή λαμβάνοντας το ολοκλήρωμα, προκύπτει ο συνολικός όγκος $\pi \int_a^b f^2(x)\,dx$.

Ασκήσεις

9.10. Να προσδιορίσετε τον όγκο που δημιουργείται αν περιστρέψουμε το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = |\cos kx|$ μεταξύ των σημείων $x = 0$ και $x = 2\pi$ περί τον άξονα των x. Το $k \in \mathbb{N}^*$. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος; Δείτε την Άσκηση 9.6 για ένα παρόμοιο αποτέλεσμα στο επίπεδο.

9.11. **(Λουκάνικα)** Οι τελευταίες έρευνες της αλλαντοβιομηχανίας απέδειξαν ότι το βέλτιστο σχήμα για ένα λουκάνικο είναι αυτό του στερεού που προκύπτει αν περιστρέψουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{\sin k\pi x}$$

περί τον άξονα των x μεταξύ των σημείων $x = 0$ και $x = 1$. Να υπολογίζετε τον όγκο αυτού του στερεού.

9.12. **(Λουλουδάκι)** Πρόσφατη συνεργασία βοτανολόγων και λαϊκών συνθετών απέδειξε ότι το *αγριολούλουδο το ανθεκτικό* έχει σχήμα που προκύπτει αν περιστρέψουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = (2 + \sin 3x)\exp(-x)$$

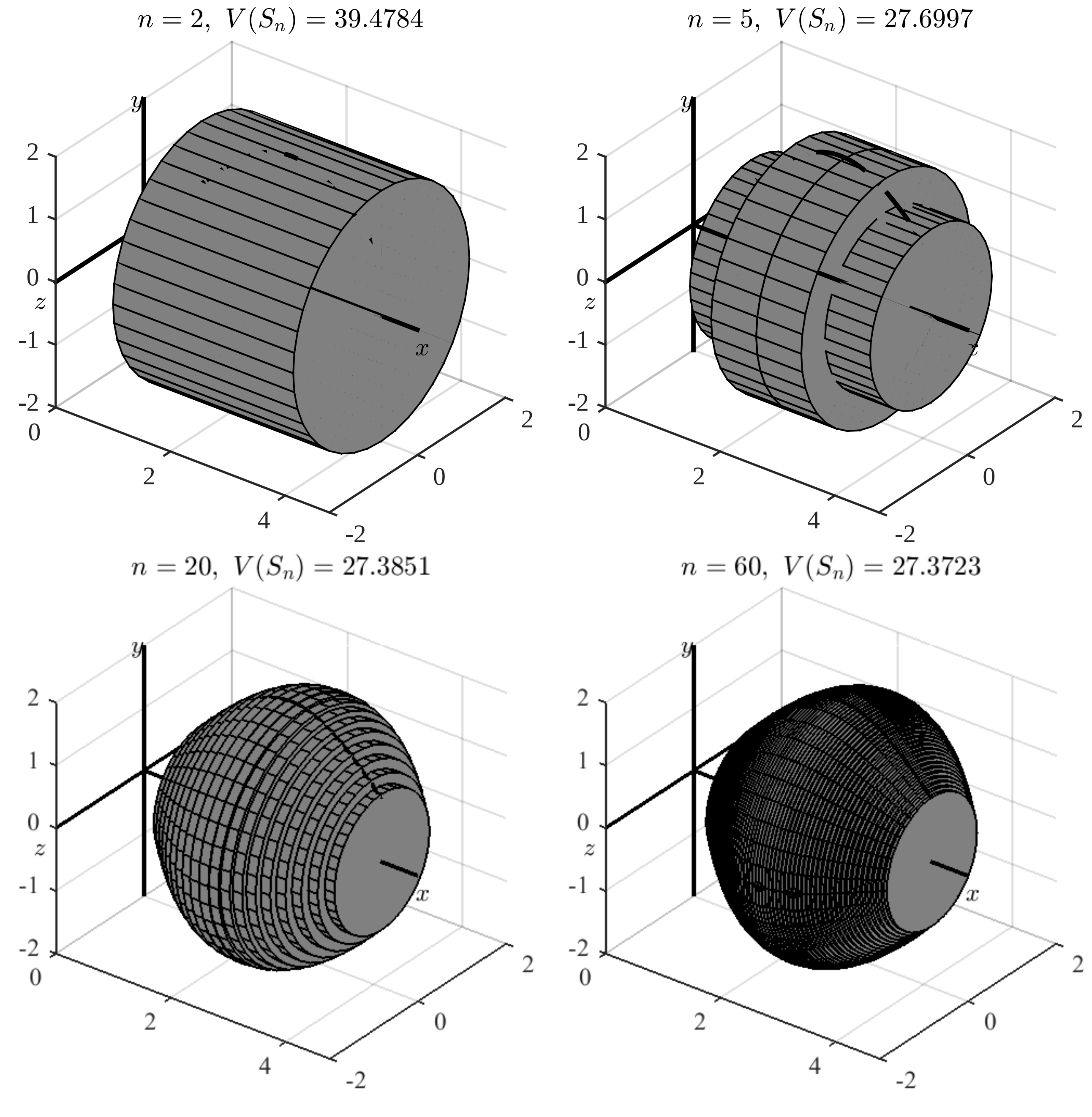
περί τον άξονα των x μεταξύ των $x = 0$ και $x = 5$. Να υπολογίσετε τον όγκο του λουλουδιού αυτού.

9.13. **(Άλλος άξονας)** Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται αν περιστρέψουμε περί την ευθεία $y = -1$ το χωρίο που δημιουργείται από το γράφημα της συνάρτησης $1 - x^2$ και τις ευθείες $y = -1$, $x = -1$, και $x = 1$.

9.14. **[Π] (Περιστροφή του συνημιτόνου)**

1. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται αν περιστρέψουμε το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = \cos x$ μεταξύ των σημείων $x = -\pi/2$ και $x = \pi/2$ περί τον άξονα των x.

2. Να επαναλάβετε το προηγούμενο σκέλος στην περίπτωση που η περιστροφή γίνεται περί την ευθεία $y = -1$.



Σχήμα 9.8: Όγκοι εκ περιστροφής περί τον άξονα των x που δημιουργούνται αν περιστρέψουμε κλιμακωτές συναρτήσεις οι οποίες προκύπτουν από διαμερίσεις με n σημεία, για $n = 2,\ 5,\ 20,\ 60$ της συνάρτησης του Παραδείγματος 9.9. Παρατηρήστε ότι τα στερεά που δημιουργούνται αποτελούνται από δίσκους, και ο συνολικός τους όγκος, που υπολογίζεται εφαρμόζοντας την (9.7), συγκλίνει στην ποσότητα $3\pi^2/2 + 4\pi \simeq 27.3708$ που υπολογίσαμε στο Παράδειγμα 9.9.

9.4 Μέθοδος των Κελυφών

Εξετάζουμε, στη συνέχεια, τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής που δημιουργείται αν περιστρέψουμε το στερεό *περί τον άξονα των* y. Συγκεκριμένα, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 9.3. ***(Μέθοδος των Κελυφών)*** *Έστω συνάρτηση* $f : [a,b] \to [0,\infty)$. *Έστω το στερεό* S *εκ περιστροφής που δημιουργείται αν περιστρέψουμε περί τον άξονα των* y *το χωρίο που σχηματίζεται από το γράφημα της συνάρτησης, τον άξονα των* x, *και τις ευθείες* $x = a$ *και* $x = b$. *Ο όγκος* $V(S)$ *του στερεού* S *ισούται με*

$$V(S) = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx. \tag{9.8}$$

Όπως και στην περίπτωση της περιστροφής περί τον άξονα των x, η δυσκολία του παραπάνω θεωρήματος δεν είναι, τόσο, στον υπολογισμό του ολοκληρώματος, όσο στο να συνειδητοποιήσουμε ποιο ακριβώς είναι το στερεό του οποίου τον όγκο καλούμαστε να υπολογίσουμε. Δείτε προσεκτικά τα ακόλουθα δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 9.11. **(Συνάρτηση** $f(x) = \sin(x-1)+1$**)** Έστω η $f(x) = \sin(x-1)+1$ στο $[a,b] = [1, 1+\pi]$, που έχουμε ήδη δει στο Παράδειγμα 9.9. Έστω, τώρα, πως την περιστρέφουμε όπως περιγράφεται στο Θεώρημα 9.3. Η συνάρτηση και το στερεό που δημιουργείται εμφανίζονται στο Σχήμα 9.9. Συγκρίνετε τα στερεά των Σχημάτων 9.6 και 9.9. Όπως μπορείτε να δείτε, είναι πολύ διαφορετικά.

Ο όγκος του στερεού είναι

$$\begin{aligned}
V(S) &= 2\pi \int_1^{1+\pi} x(1+\sin(x-1))\, dx = 2\pi \int_1^{1+\pi} x\, dx + 2\pi \int_1^{1+\pi} x \sin(x-1)\, dx \\
&= 2\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{1+\pi} - 2\pi \int_1^{1+\pi} x\,(\cos(x-1))'\, dx \\
&= 2\pi \left[\frac{(1+\pi)^2}{2} - \frac{1}{2}\right] - 2\pi\,[x\cos(x-1)]_1^{1+\pi} + 2\pi \int_1^{1+\pi} (\sin(x-1))'\, dx \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{2} + \pi - \frac{1}{2}\right] - 2\pi\,[(1+\pi)\cos\pi - \cos 0] + 2\pi\,[\sin(x-1)]_1^{1+\pi} \\
&= \pi^3 + 2\pi^2 + 2\pi(1+\pi+1) + 2\pi(0-0) = \pi^3 + 2\pi^2 + 4\pi + 2\pi^2 \\
&= \pi^3 + 4\pi^2 + 4\pi.
\end{aligned}$$

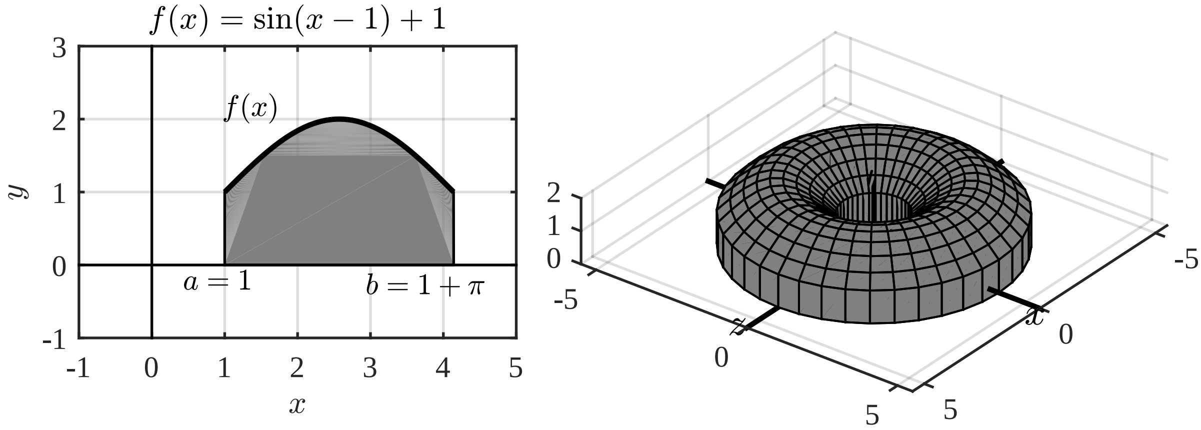
Παράδειγμα 9.12. **(Συνάρτηση** $f(x) = 2\exp(-|x-3|)$**)** Έστω η $f(x) = 2\exp(-|x-3|)$ στο $[a,b] = [1,5]$, που έχουμε δει στο Παράδειγμα 9.10. Έστω όμως αυτή τη φορά πως την περιστρέφουμε όπως περιγράφεται στο Θεώρημα 9.3. Η συνάρτηση και το στερεό που δημιουργείται εμφανίζονται στο Σχήμα 9.10.

Ο όγκος του στερεού είναι

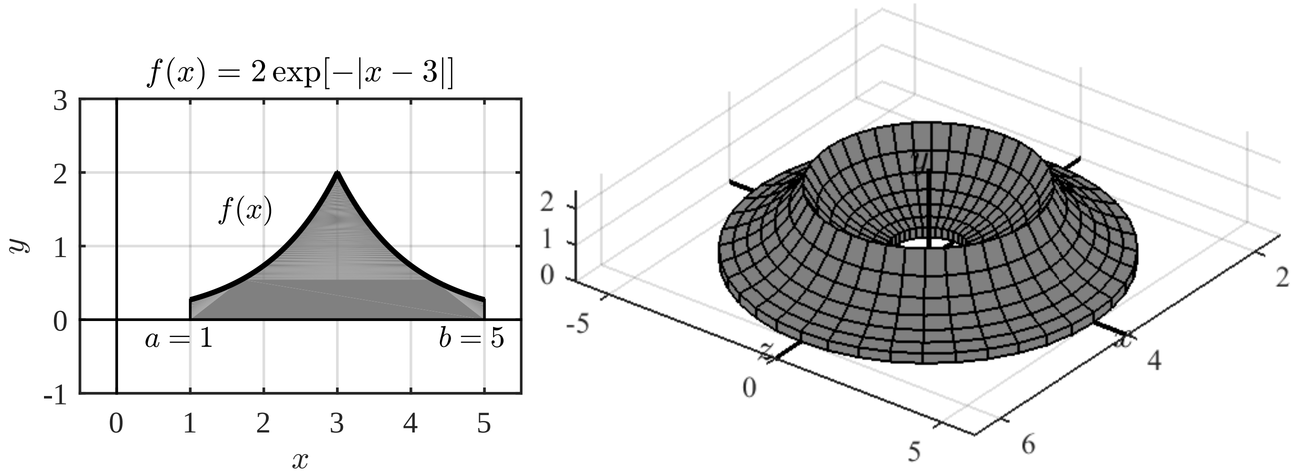
$$V(S) = 2\pi \int_1^5 x\exp(-|x-3|)\, dx = 2\pi \int_1^3 x\exp(x-3)\, dx + 2\pi \int_3^5 x\exp(3-x)\, dx.$$

Σχετικά με το πρώτο ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_1^3 x\exp(x-3)\, dx &= \int_1^3 x(\exp(x-3))'\, dx = [x\exp(x-3)]_1^3 - \int_1^3 \exp(x-3)\, dx \\
&= 3 - \exp(-2) - [\exp(x-3)]_1^3 \\
&= 3 - \exp(-2) - 1 + \exp(-2) = 2.
\end{aligned}$$



Σχήμα 9.9: Η συνάρτηση $f(x) = \sin(x-1)+1$ στο διάστημα $[a, b] = [1, 1+\pi]$ και το στερεό που δημιουργείται αν περιστρέψουμε περί τον άξονα των y το χωρίο που δημιουργείται από το γράφημα της $f(x)$, τον άξονα των x, και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 1 + \pi$.



Σχήμα 9.10: Η συνάρτηση $f(x) = 2\exp(-|x-3|)$ στο διάστημα $[a, b] = [1, 5]$ και το στερεό που δημιουργείται αν περιστρέψουμε περί τον άξονα των y το χωρίο που δημιουργείται από το γράφημα της $f(x)$, τον άξονα των x, και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 5$.

Σχετικά με το δεύτερο ολοκλήρωμα, ανάλογα

$$\begin{aligned}
\int_3^5 x\exp(3-x)\,dx &= -\int_3^5 x(\exp(3-x))'\,dx = -[x\exp(3-x)]_3^5 + \int_3^5 \exp(3-x)\,dx \\
&= -5\exp(-2) + 3 - [\exp(3-x)]_3^5 \\
&= 3 - 5\exp(-2) - \exp(-2) + 1 = 4 - 6\exp(-2).
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, τελικά προκύπτει

$$V(S) = 2\pi(2 + 4 - 6\exp(-2)) = 12\pi(1 - \exp(-2)).$$

Έχοντας δει πώς εφαρμόζεται το θεώρημα και σε αυτή την περίπτωση, θα δούμε, όπως και στην προηγούμενη, μια πειστική εξήγηση σχετικά με το γιατί αυτό ισχύει. Θα επαναλάβουμε, με κάποιες παραλλαγές, τα βήματα της προηγούμενης περίπτωσης.

Έστω, λοιπόν, πως μας δίνεται μια συνάρτηση $f : [a, b] \to [0, \infty)$, η οποία δημιουργεί ένα στερεό εκ περιστροφής κατά την περιγραφή του Θεωρήματος 9.3. Έστω και πάλι η ακολουθία διαμερίσεων P_n που δίνεται από την (9.4), επίσης για κάθε διαμέριση τα n σημεία $x_1, \ldots, x_n$ που ικανοποιούν τις (9.5), και τέλος η ακολουθία των κλιμακωτών συναρτήσεων που ορίζονται από την (9.6). Εξετάζουμε και πάλι την ακολουθία των στερεών S_n που δημιουργούνται αν περιστρέψουμε τις g_n, αντί της f, περί τον άξονα των y. Κάθε στερεό S_n αποτελείται από n κελύφη κυλινδρικού σχήματος, όπου το κέλυφος i έχει εσωτερική ακτίνα p_{i-1}, εξωτερική ακτίνα p_i, και ύψος $f(x_i)$. Ο όγκος αυτού του κελύφους ισούται με τον όγκο ενός κυλίνδρου ύψους $f(x_i)$ και ακτίνας p_i μείον τον όγκο ενός μικρότερου κυλίνδρου του ίδιου ύψους αλλά ακτίνας p_{i-1}, και επομένως ο συνολικός όγκος του στερεού είναι ίσος με

$$\begin{aligned} V(S_n) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\pi p_i^2 f(x_i) - \pi p_{i-1}^2 f(x_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} \pi f(x_i)(p_i^2 - p_{i+1}^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \pi f(x_i)(p_i - p_{i+1})(p_i + p_{i+1}). \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο, εκ πρώτης όψης χτυπήσαμε ένα τοίχο, καθώς το παραπάνω άθροισμα δεν είναι εμφανώς κάποιο άθροισμα Riemann. Έχουμε, όμως, έναν άσο στο μανίκι: το σημείο x_i μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα εντός του διαστήματος $[p_{i-1}, p_i]$, αλλά και πάλι το άθροισμα Riemann θα συγκλίνει στο ολοκλήρωμα της συνάρτησης, εφόσον βέβαια $|P| \to 0$. Επιλέγουμε, λοιπόν, $x_i = (p_{i-1} + p_i)/2$, και τότε

$$\begin{aligned} V(S_n) &= \sum_{i=1}^{n} \pi f(x_i)(p_i - p_{i+1})(p_i + p_{i+1}) = 2\sum_{i=1}^{n} \pi f(x_i)(p_i - p_{i+1})(p_i + p_{i-1})/2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i f(x_i)(p_i - p_{i+1}), \end{aligned}$$

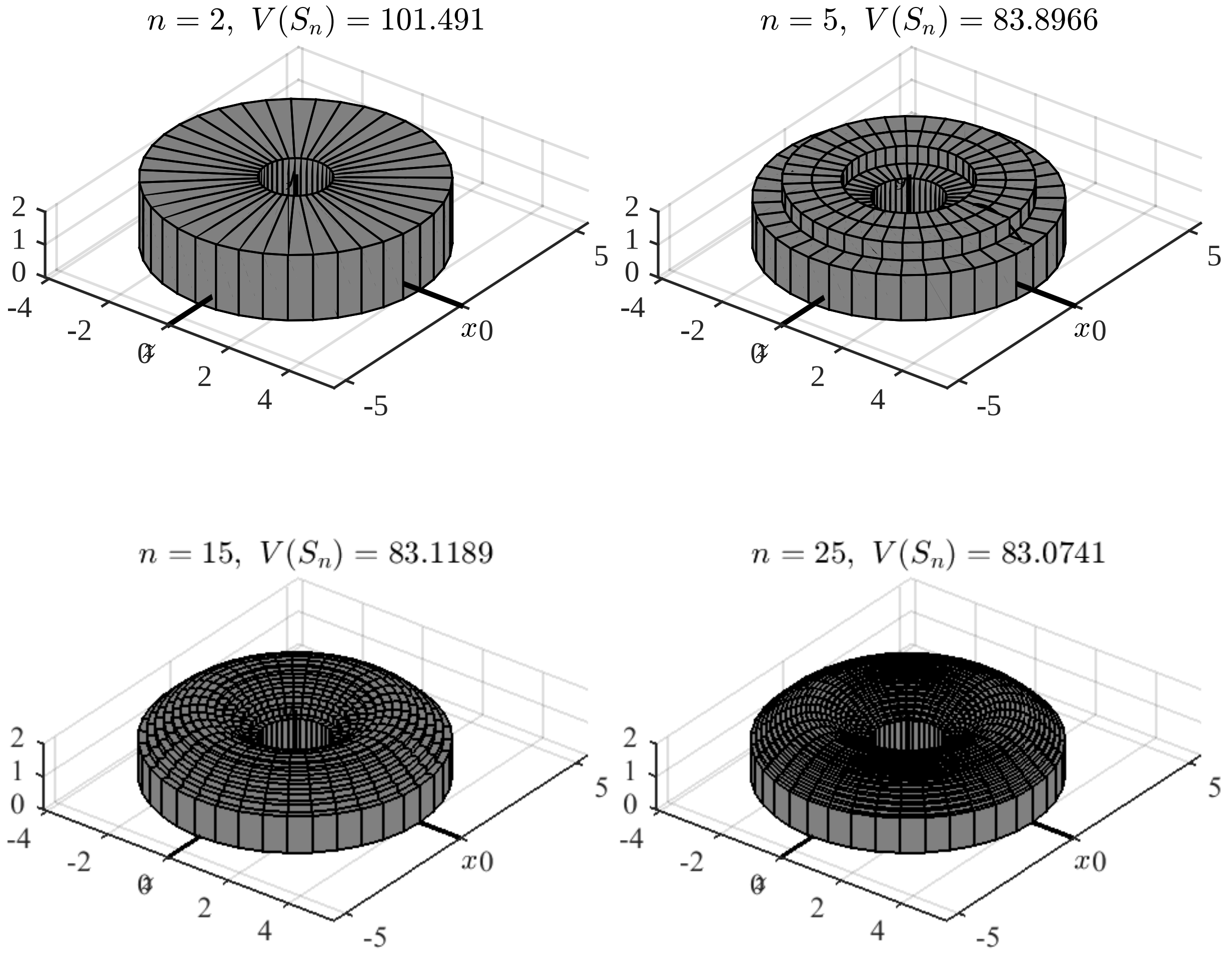
που είναι άθροισμα Riemann, της συνάρτησης $2\pi x f(x)$! Μπορούμε, λοιπόν, να συνεχίσουμε τον γνωστό μας συλλογισμό, παρατηρώντας πως αφενός οι όγκοι $V(S_n)$ συγκλίνουν στο $\int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$, ως αθροίσματα Riemann, αφετέρου οι όγκοι $V(S_n)$ επίσης συγκλίνουν στον όγκο $V(S)$ του S, αφού τα στερεά S_n τείνουν να προσεγγίσουν το S. Επομένως, θα πρέπει να ισχύει η ισότητα (9.8).

Στο Σχήμα 9.11 έχουμε σχεδιάσει το στερεό S_n στην περίπτωση της συνάρτησης του Παραδείγματος 9.11 για τέσσερις τιμές του n. Αναφέρουμε, επίσης, τις αντίστοιχες τιμές των όγκων V_n, που πράγματι συγκλίνουν στην τιμή που υπολογίσαμε στο Παράδειγμα 9.11.

Ένας άλλος, πιο σύντομος, τρόπος να εξηγήσουμε τον τύπο (9.8) είναι ο ακόλουθος: ο όγκος του στερεού ισούται με ένα άπειρο πλήθος κελυφών, ένα για κάθε $x \in [a, b]$, απειροστού πάχους dx, ύψους $f(x)$, και περιμέτρου $2\pi x$. Ο όγκος καθενός από τα κελύφη είναι λοιπόν $2\pi x f(x)\, dx$, και προσθέτοντας όλους τους όγκους, δηλαδή λαμβάνοντας το ολοκλήρωμα, προκύπτει ο συνολικός όγκος $2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$. Ta-dah!

Ασκήσεις

9.15. (Περιστροφή περί τον άξονα των y) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται αν περιστρέψουμε το χωρίο μεταξύ των γραφημάτων των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x^2$ μεταξύ του $x = 0$ και το $x = 1$ περί τον άξονα των y.



Σχήμα 9.11: Όγκοι εκ περιστροφής περί τον άξονα των y που δημιουργούνται αν περιστρέψουμε κλιμακωτές συναρτήσεις που προκύπτουν από διαμερίσεις με n σημεία, για $n = 2,\ 5,\ 15,\ 40$ της συνάρτησης του Παραδείγματος 9.11. Παρατηρήστε ότι τα στερεά που δημιουργούνται αποτελούνται από κελύφη, και ο συνολικός τους όγκος, που υπολογίζεται εφαρμόζοντας την (9.8), συγκλίνει στην ποσότητα $\pi^3 + 4\pi^2 + 4\pi \simeq 83.0511$ που υπολογίσαμε στο Παράδειγμα 9.11.

9.16. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ορισμένη στο διάστημα $[0, 1]$. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται αν περιστρέψουμε το γράφημα της συνάρτησης περί τον άξονα των x. Κατόπιν, υπολογίστε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται αν περιστρέψουμε το γράφημα της συνάρτησης περί τον άξονα των y. Τι παρατηρείτε, και γιατί;

9.5 Μήκος Καμπύλης

Στην παράγραφο αυτή θα επιστρέψουμε στην έννοια της καμπύλης σε παραμετρική μορφή που πρωτοείδαμε στην Παράγραφο 2.4. Έχοντας στη διάθεσή μας την έννοια του ολοκληρώματος και τα εργαλεία ολοκλήρωσης που αναπτύξαμε, θα δείξουμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος μιας καμπύλης. Το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνουμε είναι να ορίσουμε την ίδια την έννοια του μήκους.

Ορισμός 9.4. ***(Μήκος Καμπύλης)***

1. *Μια καμπύλη C με παραμετρική μορφή*

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad a \leq t \leq b,$$

*καλείται **συνεχής** αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς.*

2. *Για κάθε διαμέριση $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ του $[a, b]$ με $n \in \mathbb{N}^*$ και*

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

ορίζουμε την ποσότητα

$$l(C, P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2}.$$

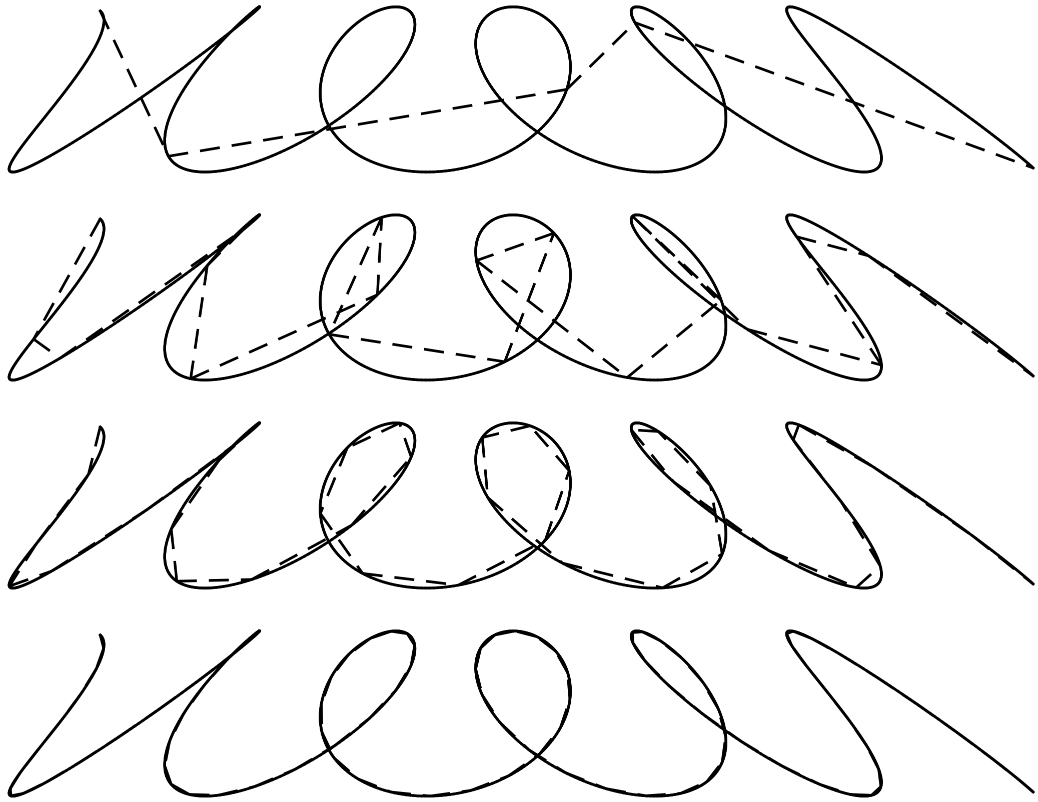
3. *Το **μήκος** της συνεχούς καμπύλης C ισούται με*

$$l(C) = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} l(C, P),$$

όπου το σύνολο $\mathcal{P}[a, b]$ είναι το σύνολο όλων των διαμερίσεων του διαστήματος $[a, b]$.

Η ποσότητα $l(P, C)$ έχει ξεκάθαρη φυσική ερμηνεία: εκφράζει το μήκος μιας καμπύλης που αποτελείται από n συνεχόμενα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία ενώνουν τα $n + 1$ σημεία της καμπύλης $(f(t_i), g(t_i))$ που αντιστοιχούν στη διαμέριση. Δείτε το Σχήμα 9.12

Ο παραπάνω ορισμός έχει ορισμένα σημαντικά πλεονεκτήματα. Πρώτον, ανακυκλώνει δύο έννοιες ήδη γνωστές μας, αυτές του supremum και της διαμέρισης. Αυτό είναι κάτι που εν γένει αρέσει πολύ στους μαθηματικούς. Επιπλέον, είναι διαισθητικά ξεκάθαρος. Πράγματι, όσο πιο μικρή λεπτότητα έχει μια διαμέριση, τόσο πιο κοντά είναι το μήκος της τμηματικά ευθύγραμμης καμπύλης που προσεγγίζει μια καμπύλη στο μήκος της ίδιας της καμπύλης. Δείτε το Σχήμα 9.12. Ο ορισμός, όμως, έχει και ένα σημαντικό μειονέκτημα: δεν μας παρέχει μια μέθοδο προκειμένου να υπολογίζουμε το μήκος καμπυλών, καθώς δεν έχουμε μαθηματικά εργαλεία για να χειριζόμαστε suprema της μορφής του ορισμού. Το κενό αυτό καλύπτει το ακόλουθο θεώρημα.



Σχήμα 9.12: Διαδοχικές προσεγγίσεις μιας καμπύλης από τμηματικά ευθύγραμμες καμπύλες που αποτελούνται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα. Καθώς το πλήθος των διαμερίσεων τείνει στο άπειρο, το μήκος των τμηματικά ευθύγραμμων καμπυλών τείνει στο μήκος της αρχικής καμπύλης C.

Θεώρημα 9.4. ***(Μήκος καμπύλης)*** *Έστω συνεχής καμπύλη C με παραμετρική μορφή*

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad a \le t \le b,$$

και έστω πως οι f, g είναι παραγωγίσιμες με συνεχείς παραγώγους. Το μήκος $l(C)$ της καμπύλης C δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt. \tag{9.9}$$

Για άλλη μια φορά, προκύπτει πως μπορούμε να υπολογίσουμε μια φυσική ποσότητα συναρτήσει ενός ολοκληρώματος μιας κατάλληλα ορισμένης συνάρτησης. Σε πρακτικό επίπεδο, μια επιπλοκή που υπάρχει είναι ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση έχει κάπως πολύπλοκη μορφή, οπότε είναι εύκολο να ξεκινήσουμε με πολύ απλές f, g, και τελικά το ολοκλήρωμα στο οποίο θα καταλήξουμε να μην υπολογίζεται. Και σε αυτή την περίπτωση το θεώρημα παραμένει χρήσιμο, καθώς οποιοδήποτε ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί εύκολα με χρήση αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Πριν συζητήσουμε την απόδειξη του θεωρήματος, ας δούμε μερικές περιπτώσεις εφαρμογής του.

Παράδειγμα 9.13. **(Υπολογισμός μήκους καμπύλης 1)** Έστω η καμπύλη

$$x = \sin t, \qquad y = \sin 2t, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

που παρουσιάστηκε στο Παράδειγμα 2.3 και το ίχνος της έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 2.10.

Το μήκος της καμπύλης ισούται με

$$\begin{aligned} l(C) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + (2\cos 2t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1+\cos 2t}{2} + 4\frac{1+\cos 4t}{2}\right]^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} [1+\cos 2t + 4 + 4\cos 4t]^{\frac{1}{2}}\, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} [5+\cos 2t + 4\cos 4t]^{\frac{1}{2}}\, dt \simeq 9.4294, \end{aligned}$$

το οποίο, όμως, δεν μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή.

Παράδειγμα 9.14. (Υπολογισμός μήκους καμπύλης 2) Έστω, από την άλλη, η καμπύλη

$$x = e^{-t/5}\sin 2t, \qquad y = e^{-t/5}\cos 2t, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

επίσης του Παραδείγματος 2.3, που έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 2.11.

Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε

$$\begin{aligned} l(C) &= \int_0^{2\pi} \left[\left(-\frac{e^{-t/5}\sin 2t}{5} + 2e^{-t/5}\cos 2t\right)^2 + \left(-\frac{e^{-t/5}\cos 2t}{5} - 2e^{-t/5}\sin 2t\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-t/5}\left[\frac{\sin^2 2t}{25} + 4\cos^2 2t - \frac{4}{5}\sin 2t\cos 2t + \frac{\cos^2 2t}{25} + 4\sin^2 2t + \frac{4}{5}\sin 2t\cos 2t\right]^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-t/5}\left[\frac{1}{25}+4\right]^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\sqrt{101}}{5}\int_0^{2\pi} e^{-t/5}\, dt \\ &= -\sqrt{101}\int_0^{2\pi} \left(e^{-t/5}\right)' dt = -\sqrt{101}\left[e^{-2\pi/5} - 1\right] = \sqrt{101}\left[1 - e^{-2\pi/5}\right]. \end{aligned}$$

Τώρα που έχουμε ένα θεώρημα που μας δίνει το μήκος οποιασδήποτε καμπύλης, ένα εύλογο ερώτημα είναι κατά πόσον το θεώρημα μας δίνει το σωστό αποτέλεσμα στις περιπτώσεις που ήδη ξέραμε! Δείτε τα επόμενα δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 9.15. (Μήκος ευθυγράμμου τμήματος) Σαν ένα πρώτο παράδειγμα, έστω το ευθύγραμμα τμήμα που ενώνει δύο σημεία του επιπέδου (x_0, y_0) και (x_1, y_1). Ποιο είναι το μήκος του, με εφαρμογή του Θεωρήματος 9.4;

Για να απαντήσουμε αυτό το ερώτημα, το πρώτο που πρέπει να κάνουμε είναι να βρούμε μια παραμετρική καμπύλη που ενώνει τα δύο σημεία. Μια επιλογή είναι η

$$x = tx_0 + (1-t)x_1, \qquad y = y_0 + (1-t)y_1, \qquad 0 \le t \le 1. \tag{9.10}$$

Πράγματι, για $t = 0$ λαμβάνουμε $(x, y) = (x_0, y_0)$, για $t = 1$ λαμβάνουμε $(x, y) = (x_1, y_1)$, και για τις ενδιάμεσες τιμές, τα x, y αλλάζουν με σταθερό ρυθμό από το x_0 στο x_1 και από το y_0 στο y_1 αντίστοιχα. Αν δεν πειστήκατε, μπορείτε να λύσετε ως προς το t τη μια εξίσωση, να το αντικαταστήσετε στην άλλη εξίσωση, και να προκύψει η εξίσωση μιας ευθείας. (Δείτε την Άσκηση 9.17).

Τα υπόλοιπα είναι πολύ απλά. Εφαρμόζοντας τον τύπο 9.9, έχουμε

$$l(C) = \int_0^1 \sqrt{(x_0-x_1)^2 + (y_0-y_1)^2}\, dt = \sqrt{(x_0-x_1)^2 + (y_0-y_1)^2},$$

και πράγματι προέκυψε ο γνωστός μας από το Λύκειο τύπος για την απόσταση μεταξύ των σημείων (x_0, y_0) και (x_1, y_1).

Παράδειγμα 9.16. (Μήκος τόξου) Έστω η καμπύλη

$$x = R\sin\omega t, \qquad y = R\cos\omega t, \qquad t \in [a,b],$$

που περιγράφει το τόξο κύκλου ακτίνας R που αντιστοιχεί σε μια γωνία ίση με $\omega(b-a)$. Για το μήκος του, ισχύει

$$\begin{aligned} l(C) &= \int_a^b \sqrt{(R\omega\cos\omega t)^2 + (-R\omega\sin\omega t)^2}\,dt \\ &= R\omega\int_a^b \sqrt{\cos^2\omega t + \sin^2\omega t}\,dt = R\omega(b-a). \end{aligned}$$

Ο τύπος που προέκυψε είναι πράγματι ο αναμενόμενος, για παράδειγμα όταν $\omega(b-a) = 2\pi$, λαμβάνουμε το μήκος της περιφέρειας του κύκλου, $2\pi R$.

Ολοκληρώνουμε την παράγραφο επιστρέφοντας στο Θεώρημα 9.4. Η αυστηρή απόδειξη του θεωρήματος είναι ιδιαίτερα μακροσκελής, και γι' αυτόν το λόγο δεν θα τη δώσουμε. Όμως, όπως και στις προηγούμενες παραγράφους, θα δώσουμε μια πειστική εξήγηση για το γεγονός ότι ισχύει το θεώρημα. Έστω, λοιπόν, μια ακολουθία διαμερίσεων P_n του διαστήματος $[a,b]$ ως εξής:

$$P_n = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b\},$$

τέτοια ώστε $|P_n| \to 0$. Τα μήκη $l(C,P)$ ισούνται με

$$l(C,P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2}.$$

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, θα φέρουμε αυτή την έκφραση στη μορφή ενός αθροίσματος Riemann. Καταρχάς γράφουμε

$$l(C,P) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})\sqrt{\left(\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2}.$$

Επειδή οι f, g είναι παραγωγίσιμες, θα υπάρχει σε κάθε διάστημα $[t_{i-1}, t_i]$ ένα x_i και ένα y_i τέτοια ώστε

$$f'(x_i) = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}, \qquad g'(y_i) = \frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}},$$

και με αντικατάσταση στην παραπάνω λαμβάνουμε

$$l(C,P) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})\sqrt{(f'(x_i)^2 + (g'(y_i))^2}.$$

Επειδή, όμως, η g' είναι συνεχής, για μεγάλες τιμές του n αναμένουμε ότι $g'(y_i) \simeq g'(x_i)$, επομένως το παραπάνω γράφεται ως

$$l(C,P) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})\sqrt{(f'(x_i)^2 + (g'(x_i))^2},$$

που είναι ένα άθροισμα Riemann, και συγκεκριμένα της συνάρτησης $\sqrt{(f'(x))^2 + (g'(x))^2}$. Χρησιμοποιούμε, τώρα, το συνήθη συλλογισμό. Καθώς $n \to \infty$ και $P_n \to 0$, δύο τινά συμβαίνουν:

1. Η ακολουθία των αθροισμάτων Riemann συγκλίνει στο $\int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + (g'(x))^2}\, dx$,
2. Η ακολουθία των αθροισμάτων Riemann συγκλίνει επίσης στο μήκος $l(C)$ της καμπύλης C, καθώς η δειγματοληψία των σημείων επί της καμπύλης γίνεται ολοένα και πιο πυκνή και η τμηματικά ευθύγραμμη καμπύλη που δημιουργούμε προσεγγίζει ολοένα και καλύτερα την καμπύλη C.

Αφού η ίδια ακολουθία συγκλίνει σε δύο αριθμούς, αυτοί πρέπει να είναι ίσοι, επομένως προκύπτει η (9.9).

Ένας κάπως πιο σύντομος τρόπος για να πειστούμε για την ορθότητα της (9.9) είναι ο ακόλουθος. Φανταστείτε ότι η καμπύλη εκφράζει την κίνηση ενός σώματος. Παρατηρήστε ότι η παράγωγος $f'(t)$ είναι ο ρυθμός με τον οποίο αλλάζει η θέση του σώματος επί του άξονα των x. Επομένως, ισούται με τη συνιστώσα του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας του σώματος επί του άξονα των x τη χρονική στιγμή t. Παρομοίως, η $g'(t)$ είναι η συνιστώσα του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητα του σώματος επί τον άξονα των y τη χρονική στιγμή t. Επομένως, η ποσότητα $\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}$ είναι το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας τη στιγμή t, και το γινόμενο αυτής της ποσότητας με την απειροστή ποσότητα dt εκφράζει την απειροστή απόσταση που θα διανύσει το σώμα κατά το απειροστού μήκους χρονικό διάστημα $[t, t+dt]$. Προσθέτοντας όλες αυτές τις απειροστές ποσότητες για όλα τα $t \in [a, b]$, λαμβάνοντας δηλαδή το ολοκλήρωμα της $\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}$ στο διάστημα $[a, b]$, όπως προσδιορίζει το θεώρημα, λαμβάνουμε τελικά το συνολικό μήκος της καμπύλης που θα διανύσει το σώμα στο διάστημα $[a, b]$.

Ασκήσεις

9.17. (Μήκος ευθύγραμμου τμήματος) Να δείξετε ότι η παραμετρική καμπύλη

$$x = tx_0 + (1-t)x_1, \qquad y = y_0 + (1-t)y_1, \qquad t \in \mathbb{R}$$

περιγράφει την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (x_0, y_0) και (x_1, y_1), λύνοντας την μια εκ των εξισώσεων ως προς t και αντικαθιστώντας στην άλλη. Παρατηρήστε ότι πρέπει να εξετάσετε και ειδικές περιπτώσεις.

9.18. (Μήκος έλλειψης) Να δώσετε μια έκφραση για το μήκος της έλλειψης που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε σε κλειστή μορφή το ολοκλήρωμα που προκύπτει. (Αν το καταφέρετε, έχετε κάνει λάθος.)

9.19. [Π] (Μήκος παραβολής) Να υπολογίσετε το μήκος της παραβολής που περιγράφεται από την εξίσωση $y = ax^2$ μεταξύ των σημείων $(0, 0)$ και $(1, a)$. *(Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Άσκηση 8.23.)*

9.20. (Μήκος υπερβολής) Να υπολογίσετε το μήκος της υπερβολής που περιγράφεται από την εξίσωση $y = 1/x$ μεταξύ των σημείων $(a, 1/a)$ και $(b, 1/b)$.

9.21. (Αστεράκι) Να υπολογίσετε το μήκος της καμπύλης με παραμετρική μορφή

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \sin^3 t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

9.22. (Μήκος του γραφήματος του συνημιτόνου) Να δώσετε μια έκφραση για το μήκος του γραφήματος της συνάρτησης $\cos t$ μεταξύ του $x = 0$ και του $x = 2\pi$.

9.6 Περαιτέρω Μελέτη

Άλλες Εφαρμογές Ολοκληρωμάτων Οποιοδήποτε κεφάλαιο στις εφαρμογές του ολοκληρώματος δεν μπορεί παρά να είναι εξαιρετικά ελλιπές, καθώς το ολοκλήρωμα είναι σίγουρα το πιο εύπλαστο και ευρέως χρησιμοποιούμενο μαθηματικό εργαλείο των τελευταίων αιώνων.

Αν καταλάβατε τη λογική βάσει της οποίας αιτιολογήσαμε τα θεωρήματα αυτού του κεφαλαίου (δείτε, για παράδειγμα, το τέλος της Παραγράφου 9.5), δεν θα δυσκολευτείτε να μαντέψετε ανάλογα θεωρήματα για την περίπτωση που θέλουμε να υπολογίσουμε, μεταξύ άλλων, το μήκος μιας καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες και τις επιφάνειες των στερεών που δημιουργούνται από περιστροφή περί τους άξονες των x και y. Όλα τα εισαγωγικά και εκτενή συγγράμματα στο Λογισμό που έχουμε ήδη αναφέρει (π.χ., [STEW], [THOE], [THOG], [VARB]), καθώς και τα βιβλίο του Φλυτζάνη [ΦΛΥΤ] και των Courant και John [COUR] παρουσιάζουν αναλυτικά πολλές τέτοιες περιπτώσεις.

Η χρήση των ολοκληρωμάτων, όμως, δεν περιορίζεται στον υπολογισμών *γεωμετρικών* ποσοτήτων. Για παράδειγμα, στη θεωρία των πιθανοτήτων συχνά ορίζεται μια συνάρτηση που καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, την οποία μπορούμε να ολοκληρώσουμε σε ένα διάστημα $[a, b]$ προκειμένου να προσδιορίσουμε την πιθανότητα ένας τυχαίος αριθμός X να βρίσκεται εντός του διαστήματος $[a, b]$. Τα βιβλία των Ross [ROSE], [ROSG], του Κούτρα [ΚΟΥΤ], και των Μπερτσεκά και Τσιτσικλή [BETE], [BETG] είναι όλα εξαιρετικές εισαγωγές στη Θεωρία Πιθανοτήτων και εκτελούν εκτενώς υπολογισμούς της παραπάνω μορφής.

Στη Φυσική, επίσης, το ολοκλήρωμα έχει κεντρική θέση. Μπορεί, για παράδειγμα, να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε το έργο που παράγει μια δύναμη, την απόσταση ή/και την ταχύτητα ενός στερεού, κ.ο.κ. Σε οποιοδήποτε εισαγωγικό βιβλίο Φυσικής ανατρέξετε (π.χ., το βιβλίο τα [HALL], [HRG1], [HRG2], [OHE1], [OHG1], [OHE2], [OHG2]), είναι βέβαιο ότι θα γίνεται εξαιρετικά εκτεταμένη χρήση ολοκληρωμάτων.

Υπάρχουν, βέβαια, και προβλήματα της Φυσικής (όπως για παράδειγμα ο προσδιορισμός του κέντρου μάζας και της ροπής αδράνειας ενός στερεού) και άλλων επιστημών, όπου απαιτείται η χρήση άλλων ολοκληρωμάτων, όπως των διπλών και τριπλών (που αναφέρονται στην Παράγραφο 7.6).

Κεφάλαιο 10

Διαφορικές Εξισώσεις

Μέχρι τώρα, οι εξισώσεις που καλούμασταν να «λύσουμε» είχαν μια ή περισσότερες άγνωστες μεταβλητές, δηλαδή άγνωστους *αριθμούς*. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα αντιμετωπίσουμε ένα αρκετά πιο δύσκολο πρόβλημα, και συγκεκριμένα την επίλυση εξισώσεων που ως αγνώστους έχουν *συναρτήσεις*, και εμφανίζουν, επίσης, παραγώγους αυτών των συναρτήσεων. Εξισώσεις αυτής της μορφής καλούνται διαφορικές εξισώσεις (ΔΕ). Μια ΔΕ μπορεί να λυθεί είτε αναλυτικά, δηλαδή με την εύρεση μιας μαθηματικής έκφρασης για τις λύσεις της, είτε αριθμητικά, δηλαδή με τον αριθμητικό προσδιορισμό των λύσεών της με χρήση αριθμητικών μεθόδων, χωρίς την εύρεση μαθηματικών εκφράσεων για αυτές. Η θεωρία των ΔΕ είναι εξαιρετικά εκτεταμένη, καθώς η ποικιλία των ΔΕ που εμφανίζονται σε φυσικούς νόμους και εφαρμογές είναι τεράστια, ενώ ο προσδιορισμός των λύσεών τους, είτε με αναλυτικές είτε με αριθμητικές μεθόδους, συχνά είναι πολύ δύσκολος, δυστυχώς και για ορισμένες ΔΕ με μεγάλη πρακτική αξία. Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε ορισμένες απλές περιπτώσεις ΔΕ και μεθόδους λύσης τους.

Στην Παράγραφο 10.1 θα ορίσουμε τις ΔΕ πρώτης τάξης. Στις Παραγράφους 10.2 και 10.3 θα δούμε μεθόδους αναλυτικής επίλυσης δύο μεγάλων κατηγοριών ΔΕ πρώτης τάξης, και συγκεκριμένα των γραμμικών ΔΕ πρώτης τάξης και των ΔΕ πρώτης τάξης χωριζομένων μεταβλητών. Ολοκληρώνουμε την μελέτη αναλυτικών λύσεων ΔΕ με την Παράγραφο 10.4 όπου γίνεται μια σύντομη αναφορά σε άλλα είδη διαφορικών εξισώσεων. Στην Παράγραφο 10.5 θα δούμε την πιο γνωστή αριθμητική μέθοδο με την οποία μπορούμε να προσδιορίσουμε προσεγγιστικά τις λύσεις πρακτικά οποιασδήποτε ΔΕ πρώτης τάξης, την Μέθοδο του Euler. Στην Παράγραφο 10.6 παρουσιάζουμε μια σχετική έννοια, την έννοια των πεδίων διευθύνσεων.

10.1 Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

Ορισμός 10.1. ***(Διαφορική εξίσωση)*** *Καλούμε* ***διαφορική εξίσωση (ΔΕ)*** *κάθε εξίσωση η οποία ισχύει σε κάποιο διάστημα I και στην οποία εμφανίζεται μια άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ και μια ή περισσότερες παράγωγοί της. Αν η μόνη παράγωγος που εμφανίζεται είναι η πρώτη παράγωγος, η ΔΕ καλείται* ***πρώτης τάξης****, αν οι μόνες παράγωγοι που εμφανίζονται είναι η δεύτερη και ενδεχομένως η πρώτη η ΔΕ καλείται* ***δεύτερης τάξης****, και γενικότερα αν εμφανίζεται μέχρι και η n-οστή παράγωγος αλλά καμία παράγωγος τάξης μεγαλύτερης του n, η ΔΕ καλείται n-οστής τάξης. Κάθε συνάρτηση $y(x)$ που ικανοποιεί τη ΔΕ στο I καλείται* ***λύση*** *της ΔΕ.*

Μια κατηγορία διαφορικών εξισώσεων που έχουμε ήδη συναντήσει είναι αυτές της μορφής

$$y'(x) = f(x), \tag{10.1}$$

σε κάποιο διάστημα I. Συγκεκριμένα, όπως έχουμε δει στο Κεφάλαιο 5, εφόσον υπάρχει έστω μια παράγουσα $F(x)$ της $f(x)$ στο I, το σύνολο των λύσεων της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

ενώ υπάρχει και το ενδεχόμενο να μην υπάρχει καμία παράγουσα της $f(x)$ στο I, στην οποία περίπτωση η ΔΕ δεν έχει καμία λύση. Στην περίπτωση που η $f(x)$ είναι συνεχής, τότε μια παράγουσά της είναι η $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, όπου $a \in I$, επομένως το σύνολο των λύσεων της ΔΕ είναι όλες οι συναρτήσεις

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Αν μας δοθεί κάποια επιπλέον συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η λύση της (10.1), τότε ενδεχομένως να υπάρχει μόνο μια λύση. Για παράδειγμα, η λύση της (10.1) η οποία διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0), όπου $x_0 \in I$, είναι η συνάρτηση

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt + y_0.$$

Η ύπαρξη άπειρων λύσεων για μια δοσμένη ΔΕ είναι βασικό χαρακτηριστικό πρακτικά όλων των ΔΕ. Για αυτό το λόγο, εισάγουμε τους ακόλουθους ορισμούς:

Ορισμός 10.2. ***(Λύσεις ΔΕ)*** *Έστω μια δοσμένη ΔΕ σε κάποιο διάστημα I.*

1. *Το σύνολο των λύσεων μιας ΔΕ καλείται **γενική λύση**.*

2. *Κάθε λύση της ΔΕ που ικανοποιεί, πέραν της ΔΕ, και μια επιπλέον συνθήκη, καλείται **ειδική λύση**.*

Στις επόμενες παραγράφους, θα επικεντρωθούμε στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Στην πιο γενική της μορφή, μια τέτοια ΔΕ μπορεί να γραφεί ως

$$F(y'(x), y(x), x) = 0,$$

όπου F μια συνάρτηση τριών μεταβλητών. Χωρίς μεγάλη βλάβη στη γενικότητα, μπορούμε να γράψουμε μια οποιαδήποτε ΔΕ πρώτης τάξης και ως

$$y'(x) = F(y(x), x), \tag{10.2}$$

όπου F μια συνάρτηση δύο μεταβλητών. Δυστυχώς, και για τις δύο άνω μορφές, δεν υπάρχει κάποια γενική μέθοδος που να μας δίνει τη λύση της ΔΕ με χρήση *αναλυτικών* τεχνικών, όπως παραγωγίσεις, ολοκληρώσεις, κοκ. Για να αντιμετωπίσουν αυτό το πρόβλημα, οι μαθηματικοί έχουν

1. Αφενός αναπτύξει *αναλυτικές* μεθόδους που μπορούν να εφαρμοστούν σε ειδικές περιπτώσεις ΔΕ. Για παράδειγμα, έχουμε ήδη μελετήσει την ειδική περίπτωση των ΔΕ της μορφής (10.1). Θα δούμε άλλες ειδικές περιπτώσεις στις Παραγράφους 10.2, 10.3, και 10.4.

2. Αφετέρου έχουν αναπτύξει *αριθμητικές* μεθόδους οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν σε οποιαδήποτε ΔΕ της μορφής (10.2) προκειμένου να υπολογίσουμε τις λύσεις της αριθμητικά με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή. Θα μελετήσουμε την πιο απλή από αυτές τις μεθόδους, τη μέθοδο του Euler, στις Παραγράφους 10.5 και 10.6.

10.2 Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

Η πρώτη ειδική περίπτωση ΔΕ πρώτης τάξης που θα εξετάσουμε είναι η ακόλουθη.

Ορισμός 10.3. ***(Γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης)*** *Καλούμε* ***γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης*** *κάθε ΔΕ της μορφής*

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x) \tag{10.3}$$

σε κάποιο διάστημα I, για κάποιες συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$.

Καταρχάς πρέπει να κάνουμε ένα σύντομο σχόλιο σχετικά με τον χαρακτηρισμό της άνω ΔΕ ως γραμμικής. Ο χαρακτηρισμός αυτός οφείλεται στο ότι αν έχουμε δύο λύσεις $y_1(x)$ $y_2(x)$ της **ομογενούς** ΔΕ που εξ ορισμού προκύπτει αν θέσουμε $g(x) = 0$, τότε οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός τους $ay_1(x) + by_2(x)$ είναι επίσης λύση της ομογενούς ΔΕ. (Δείτε την Άσκηση 10.1.) Η έννοια της γραμμικότητας γενικεύεται και σε ΔΕ ανώτερων τάξεων, και γενικά είναι μια εξαιρετικά χρήσιμη ιδιότητα που συνήθως απλοποιεί δραματικά τον υπολογισμό και τις ιδιότητες των λύσεων που αναζητούμε.

Σχετικά με την επίλυση της (10.3), παρατηρήστε πως το αριστερό μέλος της είναι *σχεδόν* της μορφής $(m(x)n(x))' = m'(x)n(x) + m(x)n'(x)$. Αν ήταν *ακριβώς* αυτής της μορφής, τα πράγματα θα ήταν πολύ πιο εύκολα. Αυτή η παρατήρηση μας δίνει την κατεύθυνση που πρέπει να ακολουθήσουμε για να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 10.1. ***(Γενική και ειδική λύση γραμμικών ΔΕ πρώτης τάξης)*** *Έστω η γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης*

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$$

σε κάποιο διάστημα I. Έστω $F(x)$ μια οποιαδήποτε παράγουσα της $f(x)$ στο I, και έστω $H(x)$ μια οποιαδήποτε παράγουσα της $g(x)\exp(F(x))$, επίσης στο I. Η γενική λύση της ΔΕ είναι το σύνολο

$$y(x) = \exp\left[-F(x)\right]\left(H(x) + C\right), \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{10.4}$$

Επιπλέον, η ειδική λύση που διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0) είναι η

$$y(x) = \exp\left[-\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right]\left(\int_{x_0}^{x} g(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u} f(t)\,dt\right]du + y_0\right). \tag{10.5}$$

Απόδειξη: Εύκολα παρατηρούμε πως μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} y'(x) + f(x)y(x) = g(x) &\Leftrightarrow \exp(F(x))y'(x) + \exp(F(x))f(x)y(x) = \exp(F(x))g(x) \\ &\Leftrightarrow (y(x)\exp(F(x)))' = (H(x))' \Leftrightarrow (y(x)\exp(F(x)) - H(x))' = 0. \end{aligned}$$

Η πρώτη ισοδυναμία προκύψει διότι $\exp(F(x)) \neq 0$ παντού στο I. Η δεύτερη ισοδυναμία προκύπτει από την ιδιότητα $(m(x)n(x))' = m'(x)n(x) + m(x)n'(x)$ και τον ορισμό της $H(x)$. Συνεχίζοντας, από την Πρόταση 5.5 έχουμε

$$\begin{aligned} (y(x)\exp(F(x)) - H(x))' = 0 &\Leftrightarrow y(x)\exp(F(x)) = H(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow y(x) = \exp\left[-F(x)\right]\left(H(x) + C\right), \qquad C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

και πράγματι προκύπτει η δοσμένη γενική λύση.

Σχετικά με την ειδική λύση που διέρχεται από το (x_0, y_0), πρώτα επιλέγουμε τις ακόλουθες παράγουσες:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \qquad H(x) = \int_{x_0}^{x} g(u) \exp\left[\int_{x_0}^{u} f(t)\,dt\right] du.$$

Κατόπιν, θέτουμε στη γενική λύση (10.4) $y(x_0) = y_0$, οπότε προκύπτει $C = y_0$, και έτσι τελικά καταλήγουμε στη δοσμένη (10.5). ■

Επομένως, η επίλυση μιας γραμμικής ΔΕ πρώτης τάξης ουσιαστικά ανάγεται στον υπολογισμό δύο παραγουσών, αυτών των $f(x)$ και $g(x)\exp(F(x))$. Αν και μπορούμε να εφαρμόζουμε, κάθε φορά που καλούμαστε να λύσουμε μια γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης, το άνω θεώρημα, εντούτοις, λόγω της μορφής της απόδειξής του, στην πράξη είναι συνήθως πιο βολικό να επαναλαμβάνουμε την ίδια την απόδειξη. Συγκεκριμένα, μπορούμε να εφαρμόζουμε την ακόλουθη μέθοδο:

1. Φέρνουμε τη ΔΕ στη μορφή $y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$.
2. Υπολογίζουμε μια οποιαδήποτε παράγουσα $F(x)$ της $f(x)$ και πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με την $\exp(F(x))$.
3. Φέρνουμε το αριστερό μέλος στη μορφή $(y(x)\exp(F(x))'$ και το δεξί μέλος στη μορφή $H'(x)$,
4. Γράφουμε $y(x)\exp(F(x)) = H(x) + C$, και λύνοντας ως προς $y(x)$ βρίσκουμε τη γενική λύση.
5. Αν μας ζητείται η ειδική λύση που διέρχεται από ένα σημείο (x_0, y_0), αντικαθιστούμε στη γενική λύση τα x_0, y_0 και προσδιορίζουμε την τιμή του C.

Δείτε την εφαρμογή αυτής της μεθόδου στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 10.1. Θα υπολογίσουμε τη γενική λύση της ΔΕ

$$x^2 y'(x) + xy(x) = x \tan x,$$

στο διάστημα $(0, \pi/2)$ και ακολούθως θα προσδιορίσουμε την ειδική λύση η οποία τέμνει τον άξονα των x στη θέση $x = \pi/4$.

Το πρώτο βήμα είναι να φέρουμε τη ΔΕ στη μορφή (10.3). Αφού μας ενδιαφέρει να βρούμε λύσεις στο διάστημα $(0, \pi/2)$, μπορούμε να διαιρέσουμε με το x, και έχουμε

$$y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = \frac{\tan x}{x},$$

επομένως, αφού μια παράγουσα του $1/x$ είναι η $\log x$ θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τη ΔΕ με το $\exp(\log x) = x$, καταλήγοντας στην

$$xy'(x) + y(x) = \tan x \Leftrightarrow (xy(x))' = \tan x.$$

Παρατηρήστε ότι, με λίγη φαντασία, θα μπορούσαμε να έχουμε μαντέψει ότι μπορούσαμε να φέρουμε τη ΔΕ στην άνω μορφή χωρίς να ακολουθήσουμε αυστηρά την άνω μέθοδο. Συνεχίζοντας, από το Παράδειγμα 8.6 έχουμε ότι στο διάστημα $(0, \pi/2)$ ισχύει

$$\int \tan x\,dx = -\log(\cos x) + C,$$

άρα τελικά

$$(xy(x))' = (-\log(\cos x) + C)' \Leftrightarrow y(x) = \frac{C - \log(\cos x)}{x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Έχοντας τη γενική λύση, μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι πράγματι τα μέλη της ικανοποιούν τη δοσμένη ΔΕ. Πράγματι,

$$\begin{aligned} x^2 y'(x) + xy(x) &= x^2 \left[\frac{-\frac{1}{\cos x}(-\sin x)x + \log(\cos x) - C}{x^2} \right] + x \left[\frac{C - \log(\cos x)}{x} \right] \\ &= x \tan x + \log(\cos x) - C + C - \log\cos x = x \tan x. \end{aligned}$$

Στα επόμενα παραδείγματα δεν θα κάνουμε άλλη επαλήθευση. Όταν λύνουμε ασκήσεις, όμως, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι αυτή η δυνατότητα υπάρχει.

Τέλος, η ειδική λύση που τέμνει τον άξονα των x στη θέση $x = \pi/4$ είναι αυτή για την οποία

$$y(\pi/4) = 0 \Leftrightarrow C - \log(\cos\pi/4) = 0 \Leftrightarrow C = \log(\cos\pi/4) = \log(\sqrt{2}/2) = -\frac{1}{2}\log 2,$$

επομένως η ζητούμενη ειδική λύση είναι η

$$y(x) = -\frac{\log(\cos x) + \frac{1}{2}\log 2}{x}.$$

Παράδειγμα 10.2. Ως ένα ακόμα παράδειγμα, θα εξετάσουμε τη ΔΕ

$$y'(x) = ay(x) + b,$$

δηλαδή τη ΔΕ για την οποία η παράγωγος $y'(x)$ είναι γραμμική συνάρτηση της $y(x)$. Εφαρμόζοντας την ίδια μέθοδο, προκύπτει

$$\begin{aligned} y'(x) = ay(x) + b \Leftrightarrow y'(x) - ay(x) = b \Leftrightarrow e^{-ax}y'(x) - ae^{-ax}y(x) = be^{-ax} \\ \Leftrightarrow \left[e^{-ax}y(x)\right]' = \left[-\frac{b}{a}e^{-ax}\right]' \Leftrightarrow y(x) = e^{ax}\left[C - \frac{b}{a}e^{-ax}\right] \\ \Leftrightarrow y(x) = -\frac{b}{a} + Ce^{ax}, \qquad C \in \mathbb{R}. \quad (10.6) \end{aligned}$$

Μια ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι η περίπτωση που $b = 0$, οπότε και η ΔΕ γίνεται

$$y'(x) = ay(x). \tag{10.7}$$

Θέτοντας $b = 0$ στην 10.6, προκύπτει πως η γενική λύση της (10.7) είναι η

$$y(x) = Ce^{ax}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Η ΔΕ (10.7) απαντάται πολύ συχνά, και συγκεκριμένα οποτεδήποτε έχουμε μια φυσική ποσότητα της οποίας ο ρυθμός μεταβολής είναι ανάλογος της τιμής της, με σταθερά αναλογίας την παράμετρο a, που μπορεί να είναι θετική ή αρνητική, κατά περίπτωση. Για παράδειγμα:

1. Ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού ενός είδους μικροβίων σε ένα δοκιμαστικό σωλήνα είναι ανάλογος του πληθυσμού μικροβίων που ήδη υπάρχουν, με *θετική* σταθερά αναλογίας a, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει άφθονη τροφή για τα μικρόβια και δεν υπάρχει κάποιος μηχανισμός με τον οποίο ο πληθυσμός των μικροβίων απομειώνεται.

2. Ο ρυθμός αύξησης του πλήθους των πυρήνων των ραδιενεργών ισοτόπων άνθρακα που βρίσκον-

ται σε μια δοσμένη ποσότητα άνθρακα είναι ανάλογος του αρχικού πλήθους των πυρήνων του ραδιενεργού ισοτόπου, με *αρνητική* σταθερά αναλογίας (δηλαδή, το πλήθος των πυρήνων μειώνεται με το χρόνο). Η μέθοδος της ραδιοχρονολόγησης βασίζεται σε αυτή ακριβώς την ιδιότητα του άνθρακα.

Στο επόμενη παράδειγμα, ζητείται μια ειδική λύση που ικανοποιεί μια συνθήκη που δεν είναι της μορφής $y(x_0) = y_0$, επομένως πρέπει να κάνουμε λίγο περισσότερη δουλειά από ό,τι στο προηγούμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 10.3. Θα υπολογίσουμε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + y(x)\cos x = \cos x,$$

στο διάστημα $\mathbb{R}$, και ακολούθως θα υπολογίσουμε την ειδική λύση η οποία λαμβάνει ως μέγιστη τιμή την τιμή 2.

Σχετικά με τη γενική λύση, παρατηρούμε πως $(\sin x)' = \cos x$, επομένως πολύ απλά

$$\begin{aligned} &y'(x) + y(x)\cos x = \cos x \Leftrightarrow e^{\sin x}y'(x) + e^{\sin x}y(x)\cos x = e^{\sin x}\cos x \\ &\qquad \Leftrightarrow \left(e^{\sin x}y(x)\right)' = \left(e^{\sin x}\right)' \Leftrightarrow e^{\sin x}y(x) = e^{\sin x} + C \Leftrightarrow y(x) = 1 + \frac{C}{e^{\sin x}}, \qquad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι οι λύσεις είναι περιοδικές, με περίοδο 2π, και η μέγιστη τιμή που λαμβάνει η κάθε λύση είναι η $1 + C/e^{-1}$, επομένως

$$1 + C/e^{-1} = 2 \Leftrightarrow C = e^{-1},$$

και η ζητούμενη ειδική λύση είναι η

$$y(x) = 1 + e^{-1-\sin x}.$$

Ασκήσεις

10.1. (Γραμμικότητα ΔΕ πρώτης τάξης) Έστω η ομογενής ΔΕ $y'(x) + f(x)y(x) = 0$. Να δείξετε ότι αν οι $y_1(x)$, $y_2(x)$ είναι λύσεις αυτής της ΔΕ, τότε είναι λύση και η $ay_1(x) + by_2(x)$.

10.2. (Επαλήθευση) Να επαληθεύσετε ότι οι γενικές λύσεις που βρέθηκαν στα Παραδείγματα 10.2 και 10.3 ικανοποιούν τις δοσμένες ΔΕ.

10.3. (Επίλυση ΔΕ 1) Να υπολογίσετε τις γενικές λύσεις των ακόλουθων ΔΕ και τις ειδικές λύσεις που ικανοποιούν την επιπλέον συνθήκη που δίνεται. Ακολούθως, να επαληθεύσετε ότι οι γενικές λύσεις που βρήκατε πράγματι ικανοποιούν τη δοσμένη ΔΕ, αντικαθιστώντας τες σε αυτήν.

1. $y'(x) + (\log x + 1)y(x) = \frac{x^{-x}}{1+x^2}$ στο $I = (0, \infty)$, με συνθήκη την $y(1) = 2$.
2. $y'(x) + (1 + 1/x)y(x) = 1$ στο $I = (0, \infty)$, με συνθήκη την $y(1) = 0$.

10.4. [Π] (Επίλυση ΔΕ 2) Δίνεται η ακόλουθη ΔΕ, που ισχύει στο διάστημα $(0, \infty)$:

$$y'(x) + (\log x)y(x) = e^{-x\log x}.$$

Να προσδιορίσετε τη γενική της λύση. Ακολούθως, να προσδιορίσετε το όριο των λύσεών της καθώς $x \to \infty$.

10.5. [Π] (Επίλυση ΔΕ 3) Υπολογίστε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + \frac{1}{\cos^2 x}y(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$. Ακολούθως, να υπολογίσετε το όριο των λύσεών της καθώς $x \to \pi/2$ και καθώς $x \to -\pi/2$. *(Υπόδειξη: ποια είναι η παράγωγος της* $\tan x$*;)*

10.3 Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης Χωριζομένων Μεταβλητών

Οι επόμενες ΔΕ που θα εξετάσουμε δεν είναι γραμμικές, και ως εκ τούτου ο χειρισμός τους είναι εν γένει δύσκολος, όμως έχουν μια χαρακτηριστική ιδιότητα που μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε μια εύκολη και διαισθητική μέθοδο που δίνει μια εξίσωση για τις γενικές τους λύσεις. Η μέθοδος αυτή είναι τόσο διαισθητική, που πολλοί αδιάβαστοι φοιτητές την εφαρμόζουν ως λύση εσχάτου ανάγκης την ώρα της τελικής εξέτασης.

Ορισμός 10.4. ***(ΔΕ πρώτης τάξης χωριζομένων μεταβλητών)*** *Κάθε ΔΕ πρώτης τάξης της μορφής*

$$f(y)y'(x) = g(x)$$

καλείται ***χωριζομένων μεταβλητών.***

Η άνω ονομασία προέρχεται από το γεγονός ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό Lipschitz και να γράψουμε

$$f(y)y'(x) = g(x) \Leftrightarrow f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \Leftrightarrow f(y)\,dy = g(x)\,dx, \tag{10.8}$$

οπότε *χωρίσαμε* τις μεταβλητές x, y. Πράγματι, το y εμφανίζεται μόνο στο αριστερό μέλος, και το x εμφανίζεται μόνο στο δεξί μέλος. Φυσικά, τα dx, dy από μόνα τους δεν έχουν καμία σημασία, και επομένως τυπικά η τελευταία ισότητα είναι κενή περιεχομένου.

Θεώρημα 10.2. ***(Γενική Λύση ΔΕ πρώτης τάξης χωριζομένων μεταβλητών)*** *Έστω η ΔΕ πρώτης τάξης χωριζομένων μεταβλητών*

$$f(y)y'(x) = g(x) \tag{10.9}$$

σε κάποιο διάστημα I, και έστω πως υπάρχει μια παράγουσα $G(x)$ της $g(x)$ στο διάστημα I και μια παράγουσα $F(y)$ της $f(y)$ στο διάστημα $y(I)$.

Μια συνάρτηση $y(x)$ είναι λύση της ΔΕ αν και μόνο αν υπάρχει κάποιο $C \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$F(y(x)) = G(x) + C \tag{10.10}$$

παντού στο I.

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει από τον Κανόνα της Αλυσίδας. Πράγματι, έστω πως ισχύει η δοσμένη ΔΕ για κάποιο $y(x)$. Τότε

$$(F(y(x)))' = F'(y(x))y'(x) = f(y(x))y'(x) = g(x) = G'(x) \Rightarrow F(y(x)) = G(x) + C$$

παντού στο I για κάποιο $C \in \mathbb{R}$. Αντιστρόφως, αν ισχύει η $F(y(x)) = G(x) + C$ παντού στο I για κάποιο C, τότε με παραγώγιση προκύπτει πως θα ισχύει και η ΔΕ σε αυτό. ■

Ένας εύκολος μνημονικός τρόπος να θυμόμαστε τι ακριβώς μας δίνει το θεώρημα, είναι να γράψουμε

$$\begin{aligned} f(y)y'(x) = g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \\ &\Leftrightarrow \quad f(y)\,dy = g(x)\,dx \\ &\Leftrightarrow \quad \int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx \\ &\Leftrightarrow \quad F(y(x)) = G(x) + C \text{ για κάποιο } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Από τις άνω ισοδυναμίες, η πρώτη και η τελευταία ισχύουν, όμως η δεύτερη και η τρίτη αυστηρώς δεν βασίζονται σε κάποια γνωστή ιδιότητα ούτε είναι τυπικά σωστές, διότι η έκφραση $f(y)\,dy = g(x)\,dx$ στερείτε νοήματος. Δικαιούμαστε, όμως να γράφουμε την πλήρη ακολουθία ισοδυναμιών σε ασκήσεις, ως ένα μνημονικό κανόνα. Η εγκυρότητα του τελικού αποτελέσματος δεν βασίζεται σε αυτή την ακολουθία ισοδυναμιών, αλλά στο Θεώρημα 10.2 που αποδείξαμε αυστηρά, χωρίς βέβαια να χρησιμοποιήσουμε τις άνω προβληματικές ισοδυναμίες.

Δυστυχώς, η εφαρμογή του Θεωρήματος 10.2 δεν είναι τόσο απλή όσο είναι η εφαρμογή του αντίστοιχου Θεωρήματος 10.1 για την περίπτωση που η ΔΕ πρώτης τάξης είναι γραμμική. Συγκεκριμένα, υπάρχουν τα ακόλουθα προβλήματα:

1. Το Θεώρημα 10.2 *δεν* ορίζει ότι *για κάθε* C η εξίσωση $F(y(x)) = G(x) + C$ μας δίνει κάποια λύση $y(x)$ της ΔΕ. Το θεώρημα απλώς ορίζει ότι όλες οι λύσεις ικανοποιούν την άνω εξίσωση *για κάποιο* C. Το πρόβλημα είναι ότι για ορισμένα C μπορεί η παραπάνω εξίσωση να μην ικανοποιείται για κάθε x στο διάστημα I.

2. Το Θεώρημα 10.2 δίνει τις λύσεις σε *πεπλεγμένη μορφή*, δηλαδή ορίζει μια εξίσωση $F(y(x)) = G(x) + C$ που πρέπει να ικανοποιούν οι λύσεις της ΔΕ, και ενδεχομένως να είναι πολύ δύσκολο να λύσουμε αυτή την εξίσωση ως προς την $y(x)$.

3. Ενδεχομένως να πρέπει να κάνουμε επιπλέον υποθέσεις σχετικά με τις τιμές που λαμβάνει η $y(x)$ προκειμένου να φέρουμε μια δοσμένη ΔΕ στη μορφή $f(y)y'(x) = g(x)$. (Για παράδειγμα, μπορεί να πρέπει να απαιτήσουμε $y(x) \neq 0$.)

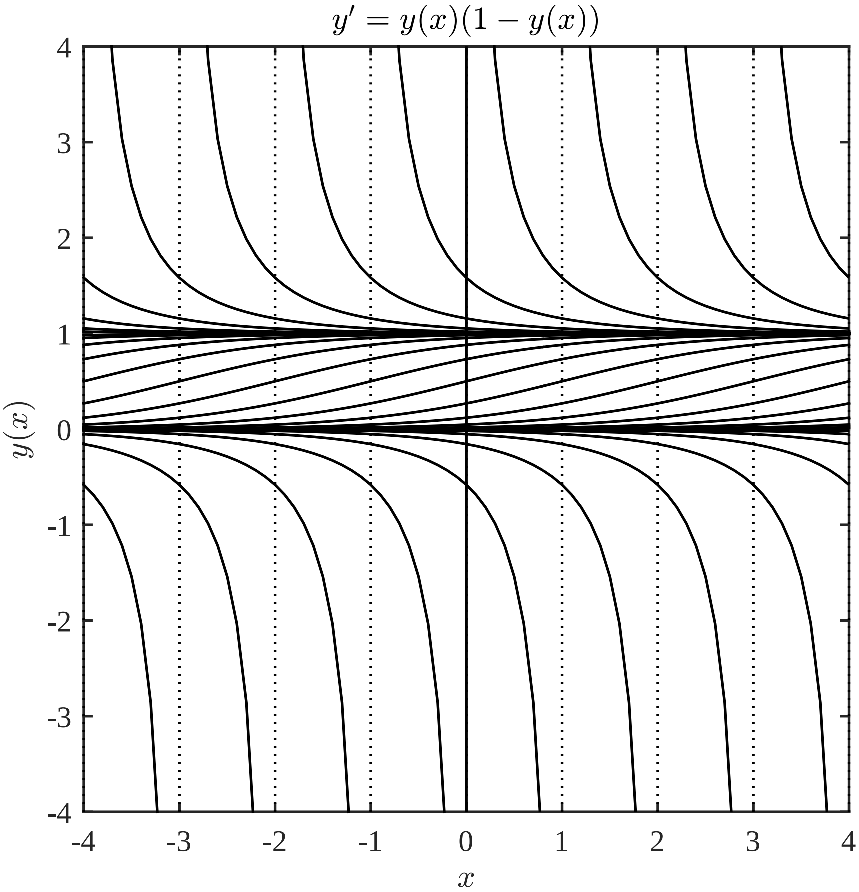
Τα προβλήματα αυτά οφείλονται στη μη γραμμικότητα της ΔΕ (10.9), και έχουν ως αποτέλεσμα κάθε δοσμένη ΔΕ να πρέπει να αντιμετωπιστεί ως ιδιαίτερη περίπτωση. Για αυτό και πολλές φορές όταν μας δίνεται μια ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών θα θεωρούμε ότι αυτή έχει λυθεί εφόσον έχουμε καταλήξει σε μια εξίσωση της μορφής (10.10), ακόμα και αν δεν έχουμε προσδιορίσει το εύρος των τιμών του C, και ακόμα και αν έχουμε κάνει κάποιες επιπλέον υποθέσεις προκειμένου να φέρουμε τη δοσμένη ΔΕ στη μορφή (10.9). Δείτε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα στη συνέχεια.

Παράδειγμα 10.4. (Διάδοση κουτσομπολιών) Θα εξετάσουμε τη ΔΕ

$$y'(x) = ay(x)(1 - y(x)), \tag{10.11}$$

η οποία παρατηρήστε ότι δεν μπορεί να λυθεί με τη θεωρία των γραμμικών ΔΕ πρώτης τάξης. Συγκεκριμένα, θα βρούμε όλες τις λύσεις της οι οποίες ικανοποιούν, επιπλέον, τη συνθήκη $0 < y(x) < 1$.

Έστω πως $a > 0$. Όταν μια λύση $y(x)$ είναι στο εύρος τιμών $0 < y(x) < 1$, παρατηρούμε, από τη ΔΕ, ότι θα έχει θετική παράγωγο, επομένως θα είναι αύξουσα. Όμως, για τιμές της $y(x)$ κοντά στο 0 και στο 1 η παράγωγος θα είναι μικρή. Αναμένουμε, λοιπόν, ότι οι λύσεις θα τείνουν ασυμπτωτικά στο 1 καθώς $x \to \infty$, και ασυμπτωτικά στο 0, καθώς $x \to -\infty$. Αντίστοιχα, αν $a < 0$, τότε οι λύσεις θα τείνουν ασυμπτωτικά στο 0 καθώς $x \to \infty$, και ασυμπτωτικά στο 1, καθώς $x \to -\infty$. Τέτοιου είδους συλλογισμούς είναι καλό να κάνουμε, όποτε μπορούμε, καθώς επιτρέπουν να έχουμε μια αίσθηση για την συμπεριφορά των λύσεών μας που μπορεί να μας χρησιμεύσει στην επίλυση της ΔΕ.



Σχήμα 10.1: Οι γενικές λύσεις του Παραδείγματος 10.4 (η περιοχή $0 < y(x) < 1$), και των Ασκήσεων 10.6 (η περιοχή $y(x) > 1$) και 10.7 (η περιοχή $y(x) < 0$), για $a = 1$.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 10.2, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= ay(x)(1 - y(x)) \\
&\Leftrightarrow \frac{y'}{y(1-y)} = a \Leftrightarrow \frac{dy}{y(1-y)} = a\,dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y(1-y)} = \int a\,dx \\
&\Leftrightarrow \log\left|\frac{y}{y-1}\right| = ax + C \Leftrightarrow \log\left(\frac{y}{1-y}\right) = ax + C \\
&\Leftrightarrow \frac{y}{1-y} = e^{ax+C} \Leftrightarrow y = e^{ax+C} - ye^{ax+C} \Leftrightarrow y\left(1 + e^{ax+C}\right) = e^{ax+C} \\
&\Leftrightarrow y(x) = \frac{e^{ax+C}}{1 + e^{ax+C}} \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{1 + ke^{-ax}}, \qquad k > 0.
\end{aligned}
$$

Στην τέταρτη ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 8.7. Στην τελευταία ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι αν $C \in \mathbb{R}$, τότε σίγουρα $k \triangleq e^{-C} > 0$. Παρατηρήστε ότι, πράγματι, οι λύσεις της ΔΕ έχουν τις ιδιότητες που αναμέναμε.

Στο Σχήμα 10.1 έχουμε σχεδιάσει τη γενική λύση της ΔΕ για την περίπτωση $a > 0$. Έχουμε, επίσης, σχεδιάσει τις γενικές λύσεις που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις $y(x) > 1$ και $y(x) < 0$. (Δείτε, σχετικά, τις Ασκήσεις 10.6 και 10.7.)

Η ΔΕ (10.11) εμφανίζεται συχνά σε εφαρμογές ως αποτέλεσμα της μοντελοποίησης διάφορων διεργασιών. Μπορεί να δειχθεί, για παράδειγμα, ότι για $a > 0$ περιγράφει το πώς μεταβάλλεται χρονικά το ποσοστό $y(x)$ ενός ανθρώπινου πληθυσμού που έχει εν γνώσει του ένα κουτσομπολιό. Πράγματι, σύμφωνα με την άνω ΔΕ όταν το ποσοστό του πληθυσμού που ξέρει το κουτσομπολιό είναι είτε 0 (δηλαδή κανείς δεν ξέρει το κουτσομπολιό) είτε 1 (δηλαδή το ξέρουν όλοι) τότε $y'(x) = 0$, δηλαδή το ποσοστό παραμένει αμετάβλητο. Αν, όμως $0 < y(x) < 1$ (δηλαδή μερικοί ξέρουν και μερικοί δεν ξέρουν το κουτσομπολιό) τότε το ποσοστό των ατόμων του πληθυσμού που γνωρίζει το κουτσομπολιό αυξάνει με ένα ρυθμό $y'(x)$ που είναι ανάλογος του ρυθμού που συναντώνται άτομα που γνωρίζουν το κουτσομπολιό με άτομα που δεν γνωρίζουν το κουτσομπολιό. Υποθέτοντας ότι κάθε ζεύγος ατόμων συναντάται με τον ίδιο ρυθμό, μπορεί να δειχθεί ότι αυτός ο ρυθμός είναι ανάλογος του $y(x)(1-y(x))$. Σε περίπτωση που απαξιείτε να ασχοληθείτε με κουτσομπολιά, παρατηρούμε ότι παρόμοια μπορεί να περιγραφεί η εξάπλωση μιας ασθένειας σε ένα πληθυσμό, ή ενός ιού σε ένα δίκτυο υπολογιστών.

Παράδειγμα 10.5. (Αύξηση πληθυσμών) Σαν ένα άλλο παράδειγμα, θα προσδιορίσουμε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) = ay(x)$$

όπου $x \in \mathbb{R}$. Η ΔΕ έχει ήδη μελετηθεί, στο Παράδειγμα 10.2, αλλά εδώ θα δούμε πώς μπορεί να λυθεί και με τη θεωρία των ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών.

Καταρχάς, παρατηρούμε πως η $y(x) = 0$ ικανοποιεί τη ΔΕ, και επομένως είναι λύση. Έστω, τώρα, μια λύση $y(x) \neq 0$ παντού στο $\mathbb{R}$. Διαιρώντας με το $y(x)$ και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 10.2 έχουμε

$$\begin{aligned} y'(x) = ay(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = a\,dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int a\,dx \\ &\Leftrightarrow \quad \log|y(x)| = ax + C \Leftrightarrow |y(x)| = e^{ax+C}. \end{aligned}$$

Επομένως, η $y(x) \neq 0$ είναι λύση της ΔΕ ανν

$$|y(x)| = e^{ax+C} \text{ για κάποιο } C \in \mathbb{R}. \tag{10.12}$$

Με δεδομένο ότι πρέπει και η $y(x)$ να είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη, θα πρέπει να είναι παντού θετική ή παντού αρνητική, επομένως η (10.12) είναι ισοδύναμη με την

$$y(x) = Ke^{ax} \text{ για κάποιο } K \in \mathbb{R}^*. \tag{10.13}$$

Μέχρι τώρα, έχουμε ανακαλύψει τη λύση $y(x) = 0$, που είναι παντού μηδέν, και τις λύσεις που δίνονται από την (10.13), που δεν μηδενίζονται πουθενά. Ολοκληρώνουμε παρατηρώντας πως δεν υπάρχουν άλλες λύσεις, δηλαδή λύσεις οι οποίες κάπου μηδενίζονται, χωρίς να είναι ταυτοτικά μηδέν.

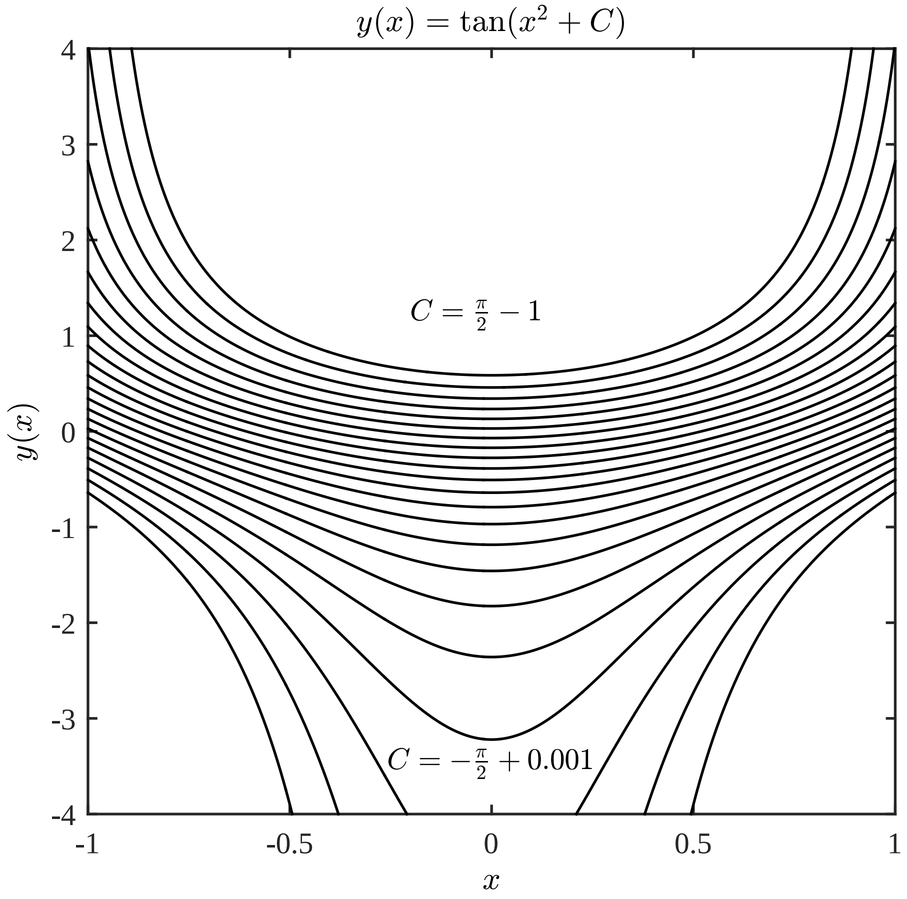
Πράγματι, έστω μια τέτοια λύση $y(x)$, και έστω πως $y(x_0) > 0$ για κάποιο x_0. (Η περίπτωση $y(x_0) < 0$ είναι ανάλογη και παραλείπεται.) Θα δείξουμε ότι θα πρέπει $y(x) > 0$ για κάθε $x > x_0$, χρησιμοποιώντας απαγωγή σε άτοπο, υποθέτοντας δηλαδή ότι $y(x) \leq 0$ για κάποιο $x > x_0$ και καταλήγοντας σε άτοπο.

1. Έστω λοιπόν πως η συνάρτηση μηδενίζεται κάπου δεξιά του x_0, και έστω το

$$b = \inf\{x > x_0 : y(x) = 0\}.$$

   Το παραπάνω σύνολο είναι μη κενό, εξ υποθέσεως, και φραγμένο κάτω, από το x_0, οπότε η ύπαρξη του infimum είναι εξασφαλισμένη από το Αξίωμα της Πληρότητας.

2. Έστω, εναλλακτικά, πως η συνάρτηση $y(x)$ γίνεται αρνητική κάπου δεξιά του x_0. Άρα, από το Θεώρημα του Bolzano, θα μηδενίζεται και κάπου δεξιά του x_0, άρα επανερχόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση και πάλι μπορούμε να ορίσουμε το b όπως παραπάνω.



Σχήμα 10.2: Η γενική λύση της ΔΕ του Παραδείγματος 10.6.

Παρατηρήστε ότι θα πρέπει να έχουμε $y(b) = 0$, αφού η $y(x)$ είναι συνεχής, ειδάλλως έχουμε άτοπο με χρήση της Άσκησης 4.5. Θα πρέπει, επίσης, $y(x) > 0$ παντού στο σύνολο $[x_0, b)$, διότι αν κάπου εντός του διαστήματος έχουμε $y(x) = 0$ τότε παραβιάζεται ο ορισμός του b, ενώ αν κάπου εντός του διαστήματος $y(x) < 0$ τότε από το Θεώρημα του Bolzano υπάρχει ρίζα της y εντός του (x_0, x) και πάλι παραβιάζεται ο ορισμός του b.

Αφού, λοιπόν, η $y(x)$ είναι παντού μεγαλύτερη του μηδενός εντός του $[x_0, b)$, θα είναι της μορφής (10.12) με $K > 0$. Επομένως, θα έχουμε

$$\lim_{x \to b^-} y(x) = \lim_{x \to b^-} Ke^{ax} = Ke^{ab} > 0, \qquad \lim_{x \to b^+} y(x) = \lim_{x \to b^-} 0 = 0,$$

επομένως τα πλευρικά όρια διαφέρουν, η $y(x)$ δεν είναι συνεχής στο b και έχουμε άτοπο. Επομένως, θα πρέπει $y(x) \neq 0$ παντού στο (x_0, ∞). Ανάλογα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $y(x) \neq 0$ παντού στο $(-\infty, x_0)$, και η απόδειξη αυτού του σκέλους ολοκληρώθηκε.

Επομένως, οι μόνες λύσεις είναι αυτές της (10.13) και η $y(x) = 0$, και συνδυάζοντάς τες έχουμε τη γενική λύση

$$y(x) = Ce^{ax}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρήστε πόση περισσότερη δουλειά χρειάστηκε να κάνουμε στο Παράδειγμα 10.5 σε σχέση με το Παράδειγμα 10.2. Ο λόγος είναι ότι δεν χρησιμοποιήσαμε τη γραμμικότητα της ΔΕ, και την πολύ πιο ισχυρή θεωρία της Παραγράφου 10.2.

Παράδειγμα 10.6. Θα προσδιορίσουμε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) = 2x(1 + y^2(x))$$

στο διάστημα $(-1, 1)$. Ακολούθως, θα προσδιορίσουμε την ειδική λύση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και την ειδική λύση που διέρχεται από το σημείο $(0, 10)$.

Σχετικά με τη γενική λύση, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 10.2, έχουμε:

$$\begin{aligned} y' = 2x(1 + y^2) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{1 + y^2} = 2x\,dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int 2x\,dx \\ &\Leftrightarrow \quad \arctan y = x^2 + C \Leftrightarrow y(x) = \tan(x^2 + C), \qquad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Στην τρίτη ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε το ότι $(\arctan y)' = \frac{1}{1+x^2}$, όπως έχουμε δείξει στο Παράδειγμα 5.6.

Σε αυτό το σημείο, παρατηρούμε πως πρέπει η λύση να ορίζεται παντού στο $(-1, 1)$. Η συνάρτηση της εφαπτομένης, όμως, όπως ορίζεται στο Παράδειγμα 5.6 και την έχουμε χρησιμοποιήσει εδώ, έχει πεδίο ορισμού το $(-\pi/2, \pi/2)$. Επομένως, προκειμένου η λύση μας να ορίζεται παντού στο $(-1, 1)$, πρέπει να έχουμε $1 + C \leq \pi/2 \Leftrightarrow C \leq \pi/2 - 1 \simeq 0.5708$ και επιπλέον $0 + C > -\pi/2 \Leftrightarrow C > -\pi/2$, επομένως, τελικά πρέπει $C \in (-\pi/2, \pi/2 - 1]$.

Επομένως, η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y(x) = \tan(x^2 + C), \qquad C \in (-\pi/2, \pi/2 - 1].$$

Σχετικά με την πρώτη ειδική λύση, με αντικατάσταση $y(0) = 0$ εύκολα προκύπτει ότι $C = 0$, επομένως η ειδική λύση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι η $y(x) = \tan x^2$. Σχετικά με τη δεύτερη ζητούμενη λύση, έχουμε

$$10 = \tan C \Leftrightarrow C = \arctan 10 \simeq 1.4711,$$

που όμως είναι εκτός του εύρους $(-\pi/2, 1-\pi/2]$ που έχουμε προσδιορίσει για το C. Επομένως, *δεν* υπάρχει ειδική λύση στο $(-1, 1)$ που να διέρχεται από το σημείο $(0, 10)$. Ουσιαστικά το πρόβλημα είναι ότι αν μια λύση της ΔΕ διέρχεται από το συγκεκριμένο σημείο, θα απειρίζεται κάπου εντός του διαστήματος $(-1, 1)$, και συγκεκριμένα στις θέσεις x όπου

$$x^2 + \arctan 10 = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\pi/2 - \arctan 10} \simeq \pm 0.3157,$$

και επομένως δεν θα μπορεί να οριστεί εντός του $(-1, 1)$.

Η γενική λύση έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 10.2. Συγκεκριμένα, έχουμε σχεδιάσει τη συνάρτηση $y(x) = \tan(x^2 + C)$ για διάφορες τιμές του C εντός του διαστήματος $(-\pi/2, \pi/2 - 1]$. Η μεγαλύτερη τιμή του C που έχει χρησιμοποιηθεί είναι η $C = \pi/2 - 1$. Για αυτή την τιμή, έχουμε απειρισμούς της συνάρτησης καθώς προσεγγίζουμε τα όρια $x = -1$ και $x = 1$. Η μικρότερη τιμή του C που έχει χρησιμοποιηθεί είναι η $C = -\pi/2+0.001$. Καθώς το $C \to -\pi/2$, η λύση της συνάρτησης στο $x = 0$ τείνει στο $-\infty$. Παρατηρήστε ότι υπάρχουν σημεία του επιπέδου από τα οποία δεν περνά *καμία* λύση. Ουσιαστικά, οι λύσεις που περνάνε από αυτά τα σημεία δεν ορίζονται σε όλο το διάστημα $(-1, 1)$, όπως έχουμε απαιτήσει καθώς απειρίζονται εντός του.

Ασκήσεις

10.6. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) = ay(x)(1 - y(x)),$$

για την περίπτωση που $y(x) > 1$. Η σταθερά $a \in \mathbb{R}^*_+$. Σε ποιο διάστημα ορίζεται κάθε μια από τις λύσεις; Δείτε σχετικά το Παράδειγμα 10.4 και το Σχήμα 10.1.

10.7. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) = ay(x)(1 - y(x)),$$

για την περίπτωση που $y(x) < 0$. Η σταθερά $a \in \mathbb{R}_+^*$. Σε ποιο διάστημα ορίζεται κάθε μια από τις λύσεις; Δείτε σχετικά το Παράδειγμα 10.4 και το Σχήμα 10.1.

10.8. Να επαναλάβετε τις Ασκήσεις 10.6 και 10.7 για την περίπτωση $a < 0$. Σχεδιάστε τις γενικές λύσεις που προκύπτουν.

10.9. [Π] Να βρείτε όλες τις λύσεις της ΔΕ

$$y'(x)y(x) + x = 0$$

στο διάστημα $(-10, 10)$. Κατόπιν, να σχεδιάσετε τις λύσεις, και να προσδιορίσετε αυτές που διέρχονται από το σημείο $(0, 10)$ και το σημείο $(0, 5)$, αν υπάρχουν.

10.10. (Επίλυση ΔΕ) Να υπολογίσετε τις γενικές λύσεις των ακόλουθων ΔΕ και τις ειδικές λύσεις που ικανοποιούν την επιπλέον συνθήκη που δίνεται. Ακολούθως, να επαληθεύσετε ότι οι γενικές λύσεις που βρήκατε πράγματι ικανοποιούν τη δοσμένη ΔΕ, αντικαθιστώντας τες σε αυτήν.

1. $y'(x) \cos y(x) + x = 0$ στο διάστημα $[-1, 10]$, με συνθήκη $y(0) = 0$.
2. $y'(x) \sin y(x) = e^x$ στο διάστημα $[-1, 10]$, με συνθήκη $y(0) = 0$.

10.11. Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) = 2y(x)(10 - y(x))$$

με $y(x) \in (0, 10)$ και $x \in \mathbb{R}$. Να σχεδιαστούν, ενδεικτικά και προσεγγιστικά, ορισμένες λύσεις της άνω ΔΕ. Τέλος, να προσδιοριστεί η ειδική λύση της άνω ΔΕ για την οποία $y(0) = 5$.

10.4 Άλλα Είδη Διαφορικών Εξισώσεων

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε, περιληπτικά, μερικές ακόμα κατηγορίες ΔΕ που μπορούν να λυθούν αναλυτικά.

10.4.1 ΔΕ Bernoulli

Ορισμός 10.5. ***(Διαφορική εξίσωση Bernoulli)*** *Καλούμε* ***διαφορική εξίσωση Bernoulli*** *κάθε ΔΕ της μορφής*

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)(y(x))^k$$

σε κάποιο διάστημα I, για κάποιες συναρτήσεις $f(x), g(x)$ και $k \in \mathbb{R}$.

Οι περιπτώσεις που $k = 0$ ή $k = 1$ δεν έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, γιατί σε αυτή την περίπτωση η ΔΕ Bernoulli είναι επιπλέον γραμμική. Όμως, όταν $k \neq 0, 1$, έχουμε μια μη γραμμική ΔΕ που εν γένει δεν είναι χωριζομένων μεταβλητών. Μπορούμε, πάντως, να υπολογίζουμε τις λύσεις τις σε αναλυτική μορφή, υποθέτοντας επιπλέον, στην περίπτωση $k > 0$, ότι οι λύσεις $y(x) \neq 0$. Πράγματι, αρκεί να κάνουμε την αντικατάσταση

$$z(x) = (y(x))^{1-k} \Rightarrow z'(x) = (1-k)(y(x))^{-k}y'(x),$$

και εύκολα προκύπτει ότι, για τη νέα άγνωστη συνάρτηση $z(x)$ που εισάγαμε, πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} & y'(x) + f(x)y(x) = g(x)(y(x))^k \\ & \Leftrightarrow (1-k)y'(x)(y(x))^{-k} + (1-k)f(x)(y(x))^{1-k} = (1-k)g(x) \\ & \Leftrightarrow z'(x) + (1-k)f(x)z(x) = (1-k)g(x), \end{aligned}$$

που είναι γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης, και επομένως η γενική της λύση μπορεί να βρεθεί αναλυτικά.

Δείτε το ακόλουθο παράδειγμα για μια απλή εφαρμογή της μεθόδου.

Παράδειγμα 10.7. (Μια ΔΕ Bernoulli) Έστω η ΔΕ

$$y'(x) + y(x)\cos x = (y(x))^2 \cos x$$

στο $\mathbb{R}$. Παρατηρήστε πως η $y(x) = 0$ είναι λύση της ΔΕ. Θα εντοπίσουμε και τις λύσεις $y(x) \neq 0$ οι οποίες ορίζονται παντού στο $\mathbb{R}$. Για αυτό το σκοπό, καταρχάς διαιρούμε την άνω με το $(y(x))^2$ και λαμβάνουμε

$$\frac{y'(x)}{(y(x))^2} + \frac{\cos x}{y(x)} = \cos x.$$

Ακολούθως, θέτουμε

$$z(x) = \frac{1}{y(x)} \Rightarrow z'(x) = -\frac{y'(x)}{(y(x))^2},$$

και με αντικατάσταση στην άνω έχουμε

$$-z'(x) + z(x)\cos x = \cos x,$$

η οποία είναι γραμμική πρώτης τάξης και μπορεί να λυθεί με τη συνήθη διαδικασία:

$$\begin{aligned} & -z'(x) + z(x)\cos x = \cos x \Leftrightarrow e^{-\sin x} z'(x) - (\cos x)e^{-\sin x} z(x) = -(\cos x)e^{-\sin x} \\ & \Leftrightarrow (e^{-\sin x} z(x))' = (e^{-\sin x})' \Leftrightarrow e^{-\sin x} z(x) = e^{-\sin x} + C \\ & \Leftrightarrow z(x) = Ce^{\sin x} + 1 \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{Ce^{\sin x} + 1}. \end{aligned}$$

Προκειμένου η $y(x)$ να μην έχει απειρισμούς και να ορίζεται παντού στο $\mathbb{R}$, πρέπει ο παρονομαστής $Ce^{\sin x} + 1$ να είναι είτε παντού θετικός, είτε παντού αρνητικός. Για να είναι παντού θετικός πρέπει

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Ce^{\sin x} + 1 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ C > -e^{-\sin x} \Rightarrow C > -e^{-1}.$$

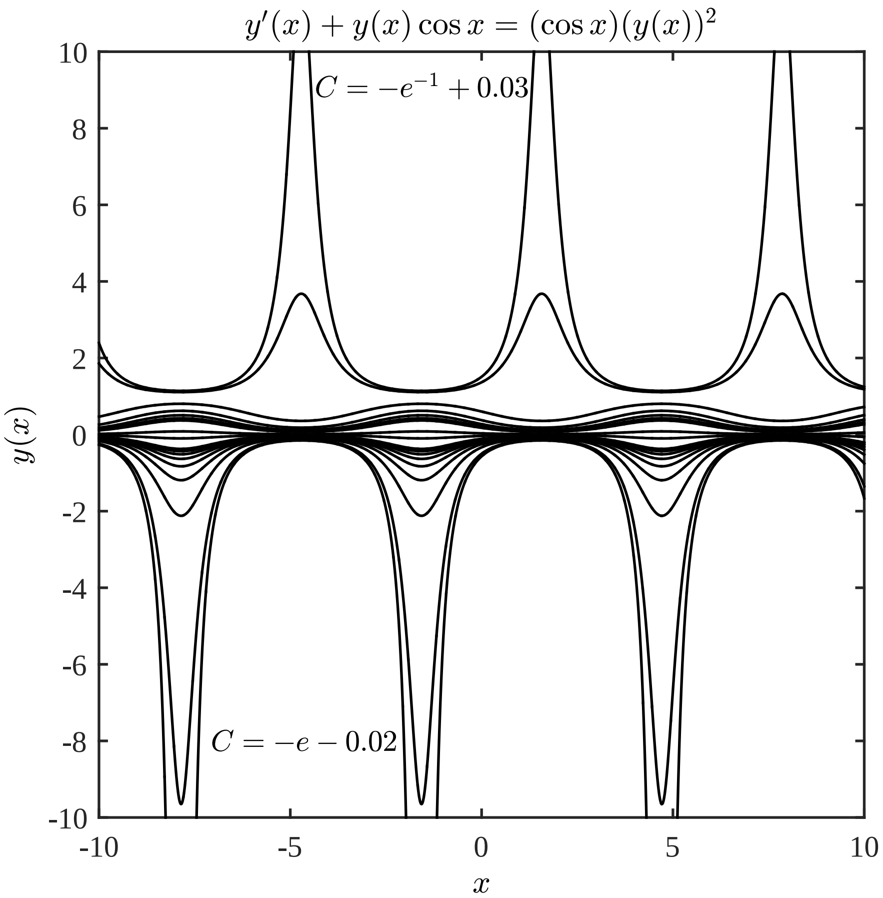
Για να είναι παντού αρνητικός πρέπει

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Ce^{\sin x} + 1 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ C < -e^{-\sin x} \Rightarrow C < -e$$

Επομένως, πρέπει να αποκλείσουμε τιμές του C εντός του $[-e, -e^{-1}]$. Τιμές $C > -e^{-1}$ δίνουν λύσεις $y(x) > 0$, και τιμές $C < -e$ δίνουν λύσεις $y(x) < 0$. Δείτε το Σχήμα 10.3.

10.4.2 ΔΕ Ανώτερης Τάξης

Συχνά καλούμαστε να επιλύσουμε ΔΕ που εμφανίζουν παραγώγους τάξεως n και $n-1$, για κάποιο φυσικό $n \geq 2$, χωρίς να εμφανίζουν την άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ ή παραγώγους της τάξεως μικρότερης της $n-1$. Σε αυτές τις περιπτώσεις, μια αντικατάσταση που μπορεί να δουλέψει είναι η $z(x) = y^{(n-1)}(x)$. Δείτε το επόμενο παράδειγμα.



Σχήμα 10.3: Έχουμε σχεδιάσει ορισμένες από τις λύσεις της ΔΕ του Παραδείγματος 10.7 που υπάρχουν σε όλο το $\mathbb{R}$. Διευκρινίζουμε ότι η γενική λύση της ΔΕ περιλαμβάνει, εκτός των λύσεων που υπάρχουν σε όλο το $\mathbb{R}$, και λύσεις οι οποίες ορίζονται σε φραγμένα ανοικτά διαστήματα στα όρια των οποίων απειρίζονται.

Παράδειγμα 10.8. (Παράδειγμα ΔΕ τρίτης τάξης) Έστω η ΔΕ

$$y'''(x) - ky''(x) = 0$$

στο $\mathbb{R}$. Θα προσδιορίσουμε τη γενική λύση της $y(x)$.

Παρατηρούμε πως η ΔΕ δεν εμφανίζει τις $y(x)$, $y'(x)$, επομένως μπορούμε να θέσουμε $z(x) = y''(x)$, και έχουμε

$$z'(x) = kz(x) \Leftrightarrow z(x) = C_1 e^{kx}, \qquad C_1 \in \mathbb{R},$$

με χρήση του Παραδείγματος 10.2. Ακολούθως, έχουμε

$$y''(x) = C_1 e^{kx} \Leftrightarrow y'(x) = \frac{C_1}{k} e^{kx} + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R},$$

και με μια ολοκλήρωση ακόμα έχουμε

$$y(x) = \frac{C_1}{k^2} e^{kx} + C_2 x + C_3, \qquad C_3 \in \mathbb{R}.$$

Με δεδομένο ότι το σύνολο των αριθμών της μορφής C_1/k^2 είναι όλο το $\mathbb{R}$, τελικά έχουμε

$$y(x) = C_1 e^{kx} + C_2 x + C_3, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R},$$

επομένως η συγκεκριμένη ΔΕ έχει τρεις ελευθερίας, μπορούμε δηλαδή να ορίζουμε τρεις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί μια ειδική λύση προκειμένου να είναι μοναδική. Αυτό δεν είναι τυχαίο: εκτός ειδικών περιπτώσεων, οι ΔΕ n-οστής τάξης έχουν γενικές λύσεις με n βαθμούς ελευθερίας.

10.4.3 Γραμμικές Ομογενείς ΔΕ Δεύτερης Τάξης με Σταθερούς Συντελεστές

Ολοκληρώνοντας την παράγραφο θα δούμε, με μεγάλη συντομία, μια απλή ΔΕ δεύτερης τάξης, και θα περιγράψουμε τη γενική της λύση.

Έστω, συγκεκριμένα, η ΔΕ

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0,$$

με $a, b, c \in \mathbb{R}$ και $a, c \neq 0$. (Αν $a = 0$, τότε η ΔΕ είναι γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης και γνωρίζουμε πώς να τη λύσουμε.)

Μια λύση αυτής της ΔΕ είναι η $y(x) = 0$. Οι λύσεις που δεν είναι παντού μηδενικές πρέπει να είναι τέτοιες ώστε η δεύτερη παράγωγός τους να μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των $y(x)$, $y'(x)$. Μια συνάρτηση που όντως έχει αυτή την ιδιότητα είναι η $y(x) = ke^{sx}$, όπου $k \neq 0$, επομένως είναι εύλογο να την εξετάσουμε ως πιθανή λύση. Αντικαθιστώντας στη ΔΕ, έχουμε

$$kas^2 e^{sx} + kbse^{sx} + kce^{sx} = 0 \Leftrightarrow as^2 + bs + c = 0.$$

Εφόσον το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες, κάθε μια από αυτές μας δίνει και μια λύση της ΔΕ. Δυστυχώς, η πραγματικότητα είναι αρκετά πιο σύνθετη, και για αυτό το λόγο θα παραθέσουμε απλώς, χωρίς απόδειξη, το παρακάτω θεώρημα, που περιγράφει πλήρως τις λύσεις της άνω ΔΕ.

Θεώρημα 10.3. ***(Γραμμικές ομογενείς ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές)*** *Έστω η γραμμική ομογενής ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές*

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \tag{10.14}$$

όπου $a \in \mathbb{R}^*$ και $b, c \in \mathbb{R}$, και έστω

$$as^2 + bs + c = 0$$

*το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** της άνω ΔΕ. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:*

1. *Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει δύο διακριτές πραγματικές ρίζες r_1, r_2, τότε η γενική λύση της ΔΕ είναι η*
$$y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}, \qquad k_1,\ k_2 \in \mathbb{R}.$$

2. *Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει μια διπλή πραγματική ρίζα r, τότε η γενική λύση της ΔΕ είναι η*
$$y(x) = k_1 e^{rx} + k_2 x e^{rx}, \qquad k_1,\ k_2 \in \mathbb{R}.$$

3. *Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει τις μιγαδικές συζυγείς ρίζες $r_{1,2} = r \pm is$, τότε η γενική λύση της ΔΕ είναι η*
$$y(x) = k_1 e^{rx} \cos sx + k_2 e^{rx} \sin sx, \qquad k_1,\ k_2 \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρήστε ότι, σε όλες τις περιπτώσεις, η γενική λύση της ΔΕ έχει *δύο* βαθμούς ελευθερίας, και όχι *έναν*. Επομένως, για να καθορίσουμε πλήρως μια ειδική λύση πρέπει να καθορίσουμε δύο σταθερές, και όχι μία. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να μας δοθούν δύο συνθήκες και όχι μια.

Διευκρινίζουμε ότι αν $c = 0$ τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα, αλλά εναλλακτικά μπορούμε και να κάνουμε την αντικατάσταση $z(x) = y'(x)$ και να μετατρέψουμε την ΔΕ σε μια γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης, και κατόπιν να την επιλύσουμε χρησιμοποιώντας τη θεωρία της Παραγράφου 10.2.

Στα επόμενα παραδείγματα εξετάζουμε κάθε μια από τις περιπτώσεις του θεωρήματος.

Παράδειγμα 10.9. (Δύο πραγματικές ρίζες) Έστω η ΔΕ

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0.$$

Θα προσδιορίσουμε τη γενική λύση της, καθώς και την ειδική λύση που διέρχεται από τα σημεία του επιπέδου $(0,0)$, $(1,1)$.

Παρατηρούμε πως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το

$$s^2 - 4s + 3 = (s-1)(s-3) = 0,$$

επομένως η γενική λύση είναι η

$$y(x) = k_1 e^{3x} + k_2 e^{x}, \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Σχετικά με τη ζητούμενη ειδική λύση, θέτοντας στη γενική λύση πρώτον $y(0) = 0$ και δεύτερον $y(1) = 1$, προκύπτει το γραμμικό σύστημα

$$0 = k_1 + k_2, \qquad 1 = k_1 e^3 + k_2 e \Rightarrow k_1 = 1/(e^3 - e), \quad k_2 = -1/(e^3 - e),$$

επομένως η ζητούμενη γενική λύση είναι η

$$y(x) = \frac{e^{3x} - e^x}{e^3 - e}.$$

Παράδειγμα 10.10. (Μια διπλή ρίζα) Έστω η ΔΕ

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0.$$

Θα προσδιορίσουμε τη γενική λύση της, καθώς και την ειδική λύση που διέρχεται από τα σημεία του επιπέδου $(0,0)$, $(1,1)$.

Παρατηρούμε πως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το

$$s^2 - 4s + 4 = (s-2)^2 = 0,$$

επομένως η γενική λύση είναι η

$$y(x) = k_1 e^{2x} + k_2 x e^{2x}, \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Σχετικά με τη ζητούμενη ειδική λύση, θέτοντας στη γενική λύση πρώτον $y(0) = 0$ και δεύτερον $y(1) = 1$, προκύπτει το γραμμικό σύστημα

$$0 = k_1, \qquad 1 = k_1 e^2 + k_2 e^2 \Rightarrow k_1 = 0,\ k_2 = e^{-2},$$

επομένως η ζητούμενη γενική λύση είναι η

$$y(x) = xe^{2(x-1)}.$$

Παράδειγμα 10.11. (Δύο μιγαδικές συζυγείς ρίζες) Τέλος, έστω η ΔΕ

$$y''(x) - 4y'(x) + 8y(x) = 0.$$

Και πάλι θα προσδιορίσουμε τη γενική λύση της, καθώς και την ειδική λύση που διέρχεται από τα σημεία του επιπέδου $(0,0)$, $(1,1)$.

Παρατηρούμε πως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το

$$s^2 - 4s + 8 = (s-2-2i)(s-2+2i) = 0,$$

επομένως η γενική λύση είναι η

$$y(x) = k_1 e^{2x} \cos 2x + k_2 e^{2x} \sin 2x.$$

Σχετικά με τη ζητούμενη ειδική λύση, θέτοντας στη γενική λύση πρώτον $y(x) = 0$ και δεύτερον $y(x) = 1$, προκύπτει το γραμμικό σύστημα

$$0 = k_1, \qquad 1 = k_1 e^2 \cos 2 + k_2 e^2 \sin 2 \Rightarrow k_1 = 0,\ k_2 = \frac{1}{e^2 \cos 2},$$

επομένως η ζητούμενη γενική λύση είναι η

$$y(x) = \frac{e^{2(x-1)} \sin 2x}{\cos 2}.$$

10.5 Η Μέθοδος του Euler

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε την τρίτη και τελευταία αριθμητική μέθοδο του βιβλίου, και συγκεκριμένα τη Μέθοδο του Euler, με την οποία μπορούμε να προσεγγίζουμε αριθμητικά τις ειδικές λύσεις οποιασδήποτε ΔΕ πρώτης τάξης της μορφής

$$y'(x) = f(y(x), x).$$

Συγκεκριμένα, δοσμένης μιας έκφρασης της άνω μορφής και ενός σημείου $(x_0, y(x_0))$ από το οποίο διέρχεται η άγνωστη συνάρτηση $y(x)$, εφαρμόζοντας τη μέθοδο βρίσκουμε μια ακολουθία από σημεία της μορφής (x_i, y_i) που, προσεγγιστικά, ανήκουν στο γράφημα της άγνωστης συνάρτησης.

Είναι εξαιρετικά σημαντικό να έχουμε στη διάθεσή μας μια τέτοια μέθοδο καθώς, όπως έχουμε αναφέρει, δεν υπάρχει κάποια αναλυτική μέθοδος που να λύνει όλες τις ΔΕ της άνω μορφής.

Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι εξαιρετικά απλή. Έστω πως μας δίνεται η άνω ΔΕ και μας ζητείται η ειδική λύση της που διέρχεται από ένα δοσμένο σημείο (x_0, y_0). Τότε, μπορούμε να βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης σε εκείνο το σημείο: προφανώς $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Έχοντας την παράγωγο, μπορούμε να βρούμε, *προσεγγιστικά*, ακόμα ένα σημείο του γραφήματός της. Συγκεκριμένα, αφού

$$y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0}$$

τότε και

$$y'(x_0) \simeq \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow y(x) \simeq y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0),$$

εφόσον το $\Delta x \triangleq x - x_0$ είναι μικρό. Μπορούμε, λοιπόν, προσεγγιστικά, να θέσουμε

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + y'(x_0)\Delta x.$$

Ανακαλύπτουμε, έτσι, πέραν του αρχικού σημείου (x_0, y_0) και ένα νέο σημείο, το

$$(x_0 + \Delta x, y(x_0) + \Delta x y'(x_0, y_0))$$

που προσεγγιστικά ανήκει στο γράφημα της άγνωστης συνάρτησης $y(x)$. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία από το νέο σημείο, μπορούμε να βρούμε ένα τρίτο σημείο, κ.ο.κ. Τελικά, με τη μέθοδο αυτή μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα αυθαίρετο πλήθος από σημεία (x_i, y_i) τα οποία προσεγγιστικά ανήκουν στο γράφημα της άγνωστης συνάρτησης, όπως ακριβώς ήταν ο στόχος μας.

Ο ψευδοκώδικας που αντιστοιχεί στην άνω περιγραφή είναι ο ακόλουθος:

```
/* EULER METHOD */

function euler(f,x(0),y(0),Δx,N)

/* INPUT:                                              */
/* f: A function of x,y such that y'=f(x,y)            */
/* (x(0),y(0)): Starting location for the iterations   */
/* Δx: Step size                                       */
/* N: Number of iterations                             */

1: FOR i=1 TO N
2:    x(i)=x(i-1)+Δx;
```

```
3:    y(i)=y(i-1)+Δx*f(x(i-1),y(i-1));
4: END;

/* Return locations estimated to belong in graph of y(x) */
5:  RETURN (x(i),y(i)), i=1,2,...,N.
```

Μια προφανής ένσταση που μπορεί κάποιος να έχει, είναι ότι τα σφάλματα του κάθε βήματος είναι προφανώς σωρευτικά, και ως εκ τούτου είναι πιθανό το σφάλμα μεταξύ της πραγματικής τιμής της συνάρτησης και της προσεγγιστικής τιμής που υπολογίζουμε να μεγαλώνει πολύ γρήγορα. Αναφέρουμε, χωρίς να μπορούμε να παρουσιάσουμε την απόδειξη, ότι το αθροιστικό σφάλμα μεταξύ της τελευταίας τιμής της συνάρτησης που υπολογίσαμε και της πραγματικής είναι ανάλογο του βήματος Δx. Επομένως, όσο πιο μικρό είναι το Δx, τόσο πιο μικρό θα είναι το σφάλμα της *τελευταίας* τιμής που υπολογίσαμε.

Παράδειγμα 10.12. (Εφαρμογή της Μεθόδου Euler για την $y'(x) = \cos x$) Σαν ένα παράδειγμα της Μεθόδου του Euler, στο Σχήμα 10.4 έχουμε σχεδιάσει τα σημεία που προσδιορίζει η μέθοδος ως ανήκοντα στο γράφημα της λύσης της ΔΕ, στην περίπτωση της ΔΕ

$$y'(x) = \cos x$$

με αρχική συνθήκη την $y(0) = 0$. Φυσικά, σε αυτή την περίπτωση γνωρίζουμε ότι η λύση της ΔΕ είναι η $y(x) = \sin x$. Ο σκοπό; μας σε αυτό το παράδειγμα είναι η σύγκριση μεταξύ της ακριβούς λύσης και της προσεγγιστικής που δίνει η μέθοδος. Έχουμε προσδιορίσει τη λύση στο διάστημα $[0, 10]$ και για τρεις τιμές του βήματος Δx, και συγκεκριμένα τις $\Delta x = 1,\ 0.5,\ 0.1$. Όπως μπορείτε να παρατηρήστε, όσο μικρότερο είναι το βήμα, τόσο ακριβέστερα προσεγγίζει η λύση που υπολογίζουμε την ακριβή λύση.

Η μέθοδος μπορεί να επεκταθεί προκειμένου να εντοπίζονται σημεία του γραφήματος στα *αριστερά*, και όχι στα *δεξιά* του δοσμένου σημείου (x_0, y_0). Απλώς, πρέπει να επιλέξουμε μια αρνητική τιμή για το βήμα Δx. Δείτε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 10.13. (Εφαρμογή της μεθόδου με αρνητικά βήματα) Στο Σχήμα 10.5 έχουμε υπολογίσει σημεία του γραφήματος της ειδικής λύσης της ΔΕ $y'(x) = y(x)$ που διέρχεται από το $y(0) = 1$, για δύο τιμές του βήματος, την $\Delta x = 0.2$ και την $\Delta x = -0.2$, και για 5 βήματα κάθε φορά.

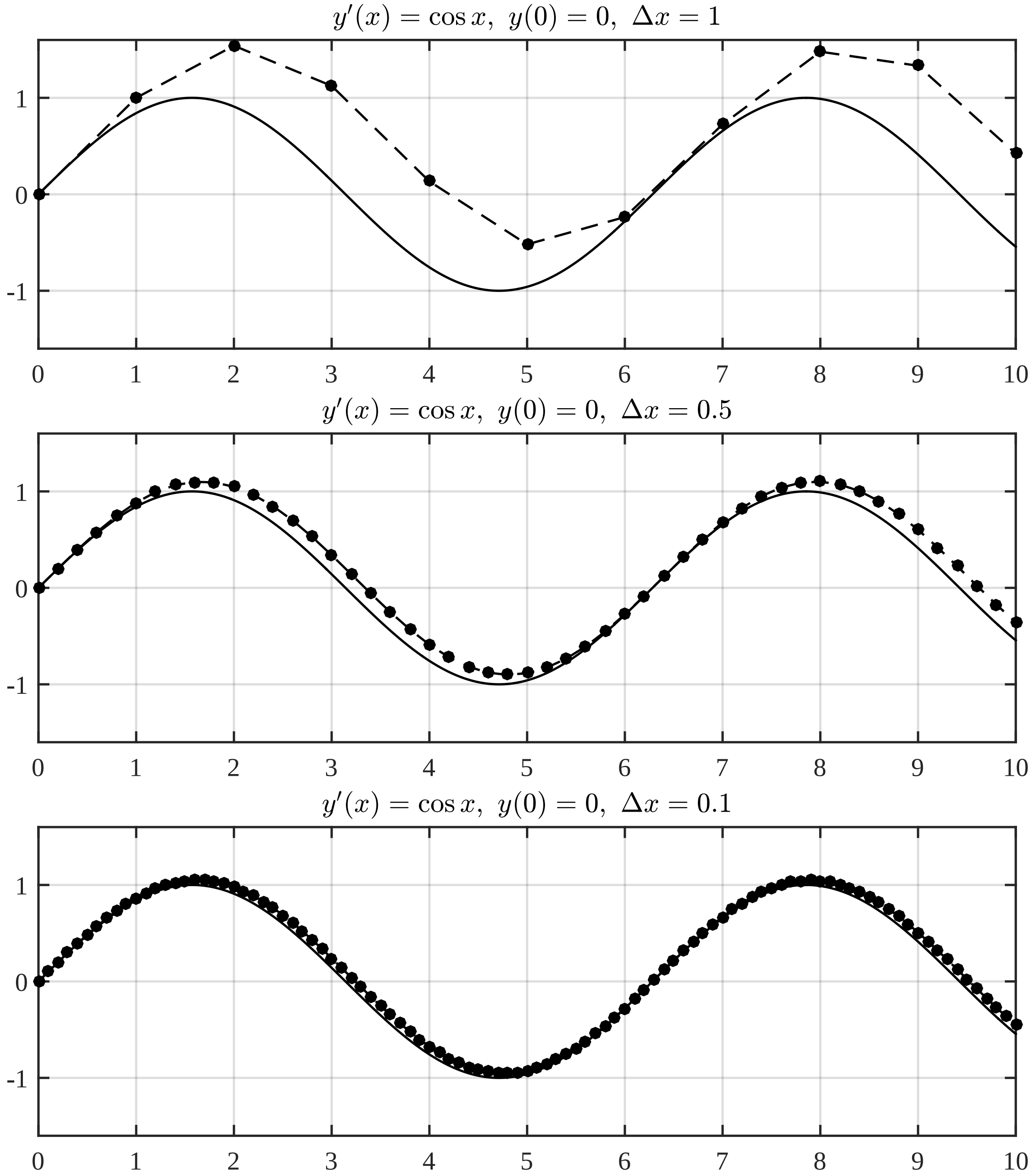
Και σε αυτή την περίπτωση, εύκολα υπολογίζεται ότι η λύση είναι η $y(x) = e^x$. Επομένως, είναι εύκολο να εκτιμήσουμε το σφάλμα της μεθόδου σε κάθε βήμα. Παρατηρήστε ότι η μέθοδος συστηματικά υποεκτιμά την τιμή της συνάρτησης. Αυτό δεν είναι τυχαίο, και οφείλεται στο γεγονός ότι η συνάρτηση έχει αύξουσα παράγωγο.

10.6 Πεδία Διευθύνσεων

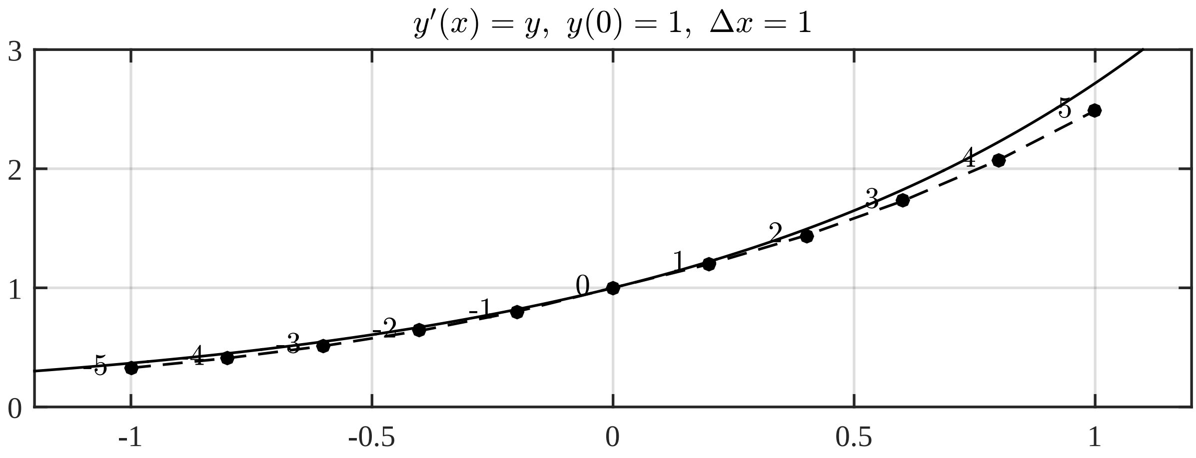
Στην Παράγραφο 10.6 αναπτύξαμε τη Μέθοδο του Euler ξεκινώντας από την παρατήρηση ότι κάθε λύση της ΔΕ

$$y'(x) = f(y(x), x)$$

θα πρέπει να έχει παράγωγο στη θέση $(x_0, y(x_0))$ ίση με $f(y(x_0), x_0)$. Η ίδια παρατήρηση μας επιτρέπει να αναπτύξουμε μια γραφική μέθοδο με την οποία μπορούμε να απεικονίζουμε τη γενική λύση της άνω ΔΕ, δηλαδή το σύνολο των λύσεών της.



Σχήμα 10.4: Εφαρμογή της Μεθόδου του Euler για την περίπτωση της ΔΕ $y'(x) = \cos x$, $y(0) = 0$, και για τις τρεις τιμές του βήματος $\Delta x = 1,\ 0.5,\ 0.1$.



Σχήμα 10.5: Εφαρμογή της Μεθόδου του Euler για την περίπτωση της ΔΕ $y'(x) = y(x)$, $y(0) = 0$, και για δύο τιμές του βήματος, την $\Delta x = 0.2$ και την $\Delta x = -0.2$.

Ένας απλός τρόπος για να καταλάβουμε πως λειτουργεί αυτή τη μέθοδος είναι ο εξής. Έστω πως έχουμε στη διάθεσή μας ένα μεγάλο αριθμό από εκπαιδευμένα μυρμήγκια. Σε μια μεγάλη επίπεδη επιφάνεια τοποθετούμε δύο άξονες x και y. Κατόπιν, χωρίζουμε τα μυρμήγκια σε δύο ομάδες, την Ομάδα Α και την Ομάδα Β. Εφοδιάζουμε τα μυρμήγκια της Ομάδας Α το καθένα με μια συσκευή GPS που εντοπίζει τις συντεταγμένες που βρίσκεται βάσει των παραπάνω αξόνων, έναν υπολογιστή χειρός, και μια ταμπέλα με ένα βέλος, και τα μυρμήγκια της Ομάδας Β με ένα κουβά μπογιά και μια βούρτσα.

Στα μυρμήγκια της Ομάδας Α δίνουμε την οδηγία να απλωθούν ομοιόμορφα στη δοσμένη επίπεδη επιφάνεια και κατόπιν, το καθένα από αυτά να κάνει τα ακόλουθα:

1. Να εντοπίσει τις συντεταγμένες (x, y) της θέσης του, χρησιμοποιώντας τη συσκευή GPS.

2. Να υπολογίσει τη συνάρτηση $f(x, y)$ στη θέση του χρησιμοποιώντας τον υπολογιστή χειρός.

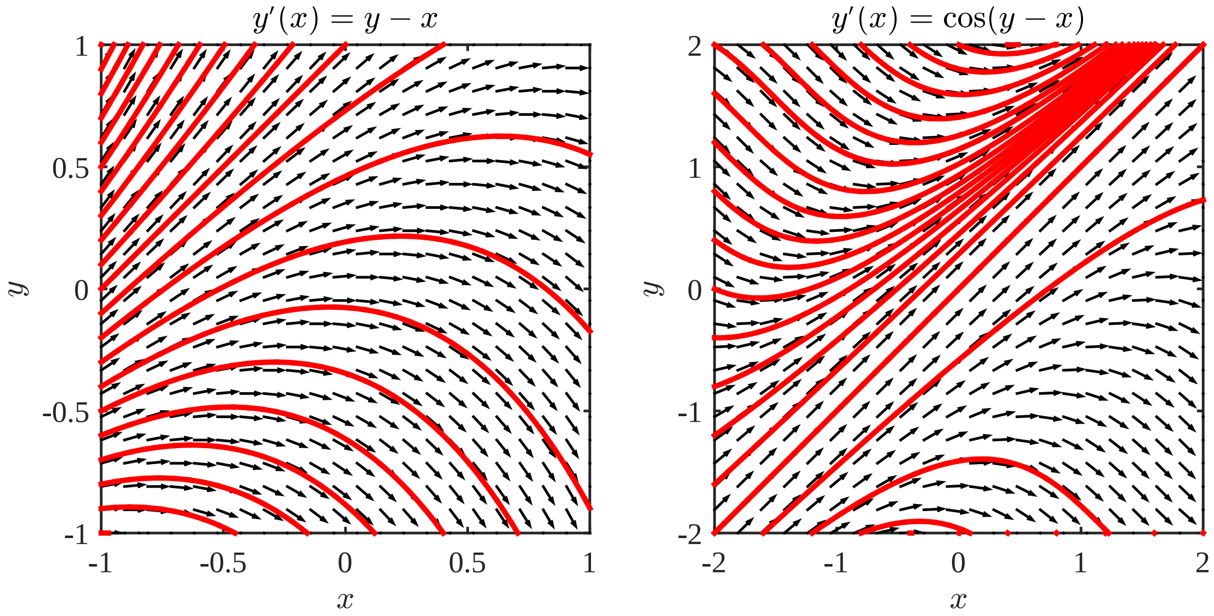
3. Να στρέψει την ταμπέλα με το βέλος προς την κατεύθυνση που δείχνει η συνάρτηση, δηλαδή το βέλος να προσδιορίζει μια ευθεία με κλίση $f(x, y)$.

Καλούμε το σύνολο των βελών που κρατούν τα μυρμήγκια της Ομάδας Α **πεδίο διευθύνσεων**. Στα μυρμήγκια της Ομάδας Β δίνουμε την οδηγία να ξεκινήσουν από διάφορα σημεία, και να αρχίσουν να βαδίζουν προς την κατεύθυνση που δείχνουν ανά πάσα στιγμή τα μυρμήγκια της Ομάδας Α που βρίσκονται γύρω τους (αν η Ομάδα Α έχει αρκετά μυρμήγκια και η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι συνεχής, όλα τα μυρμήγκια της Ομάδας Α στην ίδια γειτονιά θα δείχνουν περίπου προς την ίδια κατεύθυνση), ταυτοχρόνως δημιουργώντας με τη βούρτσα μια γραμμή στο έδαφος. Ουσιαστικά, κάθε μυρμήγκι της Ομάδας Α θα εκτελεί τη μέθοδο του Euler για να εντοπίζει την ειδική λύση που διέρχεται από το σημείο στο οποίο ξεκίνησε. Φυσικά, ελλείψει εκπαιδευμένων μυρμηγκιών, η άνω μέθοδος εφαρμόζεται κάλλιστα και με χρήση υπολογιστή.

Το πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι μας επιτρέπει να απεικονίσουμε με παραστατικό τρόπο τη γενική λύση μιας ΔΕ, και να αντιληφθούμε έτσι τα βασικά ποιοτικά της χαρακτηριστικά, για παράδειγμα πόσο θα αλλάξει μια ειδική λύση της αν αλλάξουμε ελαφρώς το σημείο από το οποίο διέρχεται.

Παράδειγμα 10.14. Στο Σχήμα 10.6 έχουμε σχεδιάσει πεδία διευθύνσεων για τη ΔΕ

$$y'(x) = y(x) - x$$



Σχήμα 10.6: Πεδία διευθύνσεων για τις ΔΕ $y'(x) = y(x) - x$ και $y'(x) = \cos(y(x) - x)$.

και τη ΔΕ

$$y'(x) = \cos(y - x).$$

Παρατηρήστε ότι η πρώτη ΔΕ μπορεί να λυθεί και αναλυτικά, είτε ως γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης, είτε ως χωριζομένων μεταβλητών. (Δείτε την Άσκηση 10.12.) Η δεύτερη ΔΕ, όμως, δεν ανήκει σε καμία από τις κατηγορίες ΔΕ που εξετάσαμε σε αυτό το κεφάλαιο.

Από το πεδίο διευθύνσεων της $y'(x) = y(x) - x$ προκύπτει πως οι λύσεις που έχουμε σχεδιάσει τείνουν να απομακρύνονται μεταξύ τους καθώς αυξάνει το x. Επομένως, μικρές διαφορές στην αρχική επιλογή του σημείου (x_0, y_0) δημιουργούν μεγάλες αποκλίσεις στην τιμή που λαμβάνει η λύση καθώς $x \to \infty$.

Στην περίπτωση της ΔΕ $y'(x) = \cos(y-x)$, εφόσον επιλέξουμε ένα αρχικό σημείο (x_0, y_0) με $y_0 > x_0$, εν τέλει η λύση $y(x)$ θα τείνει ασυμπτωτικά στην ευθεία $y = x$. Αν, όμως, επιλέξουμε ένα αρχικό σημείο (x_0, y_0) με $y_0 < x_0$, τότε η λύση απομακρύνεται από την ευθεία $y = x$, τουλάχιστον για τα τμήματα των λύσεων που έχουμε σχεδιάσει.

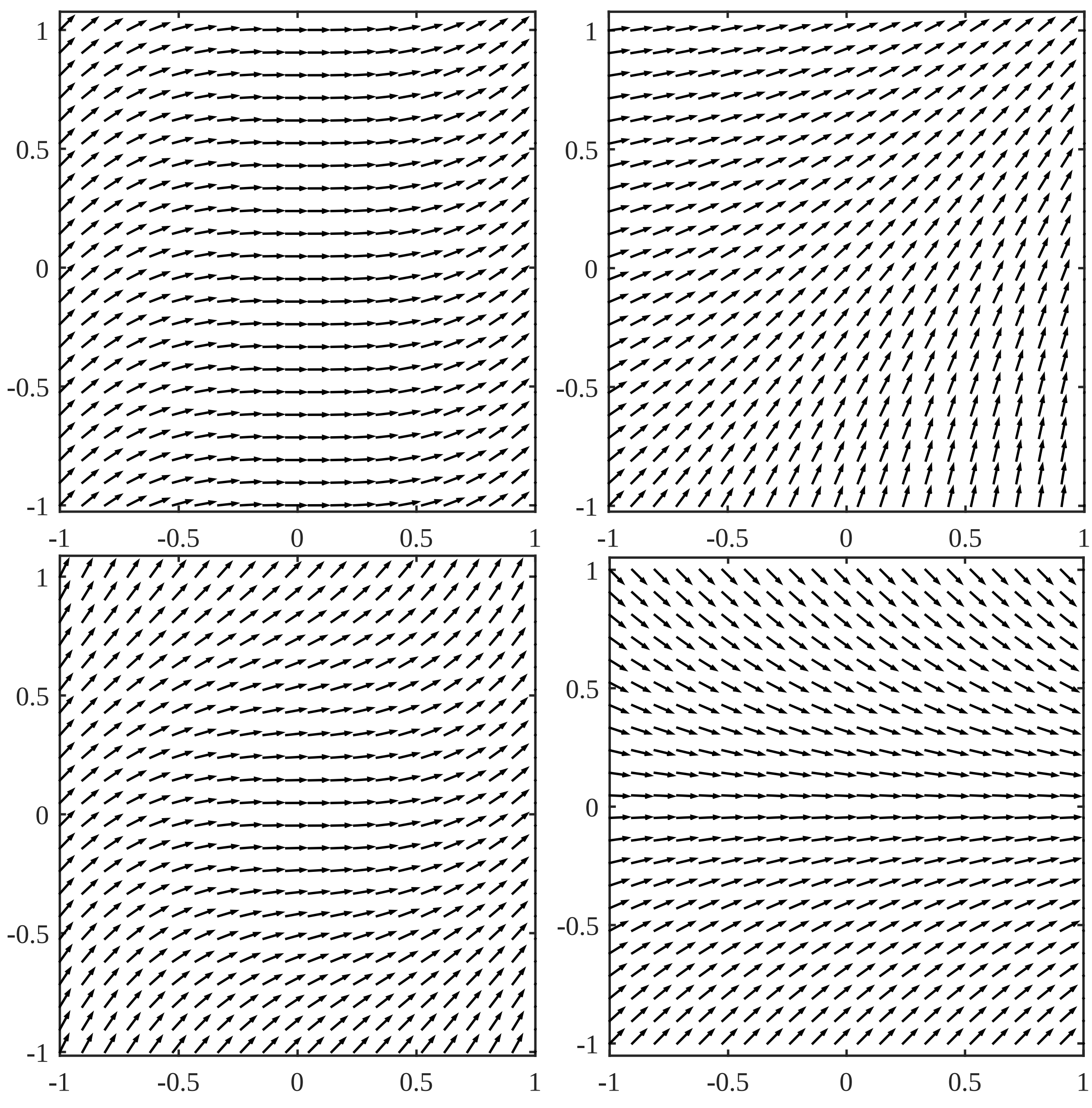
Ασκήσεις

10.12. Βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ $y'(x) = y(x) - x$ του Παραδείγματος 10.14.

10.13. Στο Σχήμα 10.7 έχουμε σχεδιάσει πεδία διευθύνσεων για τις ακόλουθες ΔΕ:

1. $y' = x^2 + y^2$.
2. $y' = -y$.
3. $y' = \exp(x - y)$.
4. $y' = x^2$.

Αντιστοιχίστε το σωστό πεδίο διεύθυνσης για την κάθε ΔΕ, και σχεδιάστε μερικές λύσεις της.



Σχήμα 10.7: Τα πεδία διευθύνσεων της Άσκησης 10.13.

10.7 Περαιτέρω Μελέτη

Γραμμικές Ομογενείς ΔΕ Δεύτερης Τάξης Οι ΔΕ της μορφής (10.14) εμφανίζονται εξαιρετικά συχνά σε εφαρμογές καθώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μοντελοποίηση αποσβεννύμενων ταλαντώσεων στερεών, όπως για παράδειγμα οι ακόλουθες:

1. Η ταλάντωση ενός εκκρεμούς που κατά την κίνησή του δέχεται αντίσταση από τον αέρα.
2. Η ταλάντωση που κάνει ένα αυτοκίνητο μόλις βγει από μια λακκούβα. Σε αυτή την περίπτωση, κάθε αμορτισέρ του αυτοκινήτου περιλαμβάνει τόσο ένα ελατήριο όσο και ένα μηχανισμό απόσβεσης της κίνησης.

Σε αυτές τις περιπτώσεις, η ΔΕ προκύπτει με εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, σύμφωνα με τον οποίο η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα ισούται με την επιτάχυνση του σώματος επί τη μάζα του. Συγκεκριμένα:

1. Η ανεξάρτητη μεταβλητή x εκφράζει το χρόνο.
2. Η $y(x)$ εκφράζει την απόκλιση από το σημείο ισορροπίας. (Στην περίπτωση του εκκρεμούς, αυτό είναι το σημείο ηρεμίας. Στην περίπτωση του αυτοκινήτου, αυτό είναι το σημείο στο οποίο το αυτοκίνητο παύει να ταλαντώνεται.) Επομένως, η $y'(x)$ είναι η ταχύτητα και η $y''(x)$ είναι η επιτάχυνση του στερεού.
3. Ο όρος $cy(x)$ εκφράζει μια δύναμη επαναφοράς ανάλογη της απόκλισης $y(x)$ από το σημείο ισορροπίας.
4. Ο όρος $by'(x)$ εκφράζει μια δύναμη ανάλογη της ταχύτητας, που μοντελοποιεί αποσβέσεις.
5. Ο όρος $ay''(x)$ εκφράζει την επιτάχυνση, με τη σταθερά a να είναι αντίστροφη της μάζας.

Λόγω της συχνότητας που απαντούμε ταλαντώσεις στη φύση, η ΔΕ (10.14) είναι από τις πιο σημαντικές ΔΕ που μπορούμε να συναντήσουμε. Φυσικά, έχει τους περιορισμούς της:

1. Δεν περιλαμβάνει εξωτερικές δυνάμεις που επιδρούν στο σύστημα (για παράδειγμα, τις λακκούβες που συναντά το αυτοκίνητο). Σε αυτή την περίπτωση, θα έπρεπε να προσθέσουμε μια συνάρτηση που μοντελοποιεί αυτές τις δυνάμεις στο δεξί μέλος της εξίσωσης, που, ως έχει, είναι ομογενής.
2. Η χρήση της προϋποθέτει ότι το σύστημα δεν αλλάζει συμπεριφορά με το χρόνο. Σε περίπτωση που η συμπεριφορά άλλαζε με το χρόνο, θα έπρεπε αντί για τους σταθερούς συντελεστές a, b, c να εμφανίζονται συναρτήσεις $a(x), b(x), c(x)$ του χρόνου x.
3. Η χρήση της προϋποθέτει ότι η δύναμη επαναφοράς είναι ανάλογη της απόκλισης από το σημείο ισορροπίας. Αν αυτό δεν ισχύει, θα πρέπει να αντικαταστήσουμε τον γραμμικό όρο $ay(x)$ με κάποιον άλλο, ενδεχομένως μη γραμμικό.
4. Η χρήση της προϋποθέτει ότι η δύναμη που προκαλεί αποσβέσεις είναι ανάλογη της ταχύτητας. Αν αυτό δεν ισχύει, θα πρέπει να αντικαταστήσουμε τον όρο $by'(x)$ με κάποιον άλλο, ενδεχομένως μη γραμμικό.

Άλλες ΔΕ που επιλύονται αναλυτικά Τα είδη των συνήθων ΔΕ που είδαμε στις Παραγράφους 10.1, 10.2, 10.3, 10.4, δεν είναι τα μόνα που μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά. Πολύ περισσότερα είδη μπορείτε να βρείτε στα βιβλία των Κατερίνη και Φλυτζάνη [ΚΑΤΕ] του Παντελίδη et al. [ΠΑΝΔ], και του Φλυντζάνη [ΦΛΥΑ].

Άλλα Είδη ΔΕ Οι ΔΕ που είδαμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι από τις πλέον απλές. Για παράδειγμα, αφορούσαν όλες συναρτήσεις *μιας* μεταβλητής. Δυστυχώς, η πραγματικότητα είναι πολύ πιο πολύπλοκη. Συχνά καλούμαστε να λύσουμε ΔΕ που εμφανίζουν παραγώγους συναρτήσεων πολλών μεταβλητών ως προς κάθε μια από αυτές τις μεταβλητές. Αυτές οι παράγωγοι καλούνται **μερικές**, όπως επίσης και οι ΔΕ που τις εμφανίζουν. (Σε αντιδιαστολή, οι ΔΕ που εμφανίζουν μια μόνο μεταβλητή καλούνται **συνήθεις**.) Οι περισσότεροι νόμοι της φύσης, για παράδειγμα οι τέσσερις νόμοι του Maxwell, οι οποίοι περιγράφουν πλήρως τη συμπεριφορά των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, μπορούν να γραφούν ως μερικές ΔΕ. Τα βιβλία Φυσικής που έχουμε αναφέρει [HALL], [HRG1], [HRG2], [OHE1], [OHG1], [OHE2], [OHG2] βρίθουν τέτοιων ΔΕ.

Αριθμητική Επίλυση ΔΕ Η μέθοδος του Euler είναι η πιο απλή μέθοδος επίλυσης ΔΕ. Λόγω της μεγάλης σημασίας των ΔΕ σε εφαρμογές, έχει αναπτυχθεί μεγάλη ποικιλία μεθόδων, για παράδειγμα μέθοδοι που σε κάθε βήμα εκτιμούν ένα νέο σημείο στο γράφημα κάνοντας χρήση και παραγώγων ανώτερης τάξης (που μπορούν να προκύψουν με παραγώγιση της αρχικής ΔΕ), βημάτων μεταβλητού μήκους, ή τιμών της συνάρτησης σε επιπλέον σημεία. Οι περισσότερες από αυτές τις μεθόδους μπορούν να επεκταθούν στην περίπτωση μερικών ΔΕ ή συστημάτων πολλών ΔΕ. Τα βιβλία Αριθμητικής Ανάλυσης που έχουμε ήδη αναφέρει περιλαμβάνουν πολλές επεκτάσεις.

Κεφάλαιο 11

Πολυώνυμα Taylor

Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή στα πολυώνυμα Taylor. Τα πολυώνυμα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως προσεγγίσεις μιας συνάρτησης γύρω από ένα σημείο, και έχουν μεγάλη χρησιμότητα, τόσο σε πρακτικό, όσο και θεωρητικό επίπεδο, όπως θα δούμε αναλυτικότερα στη συνέχεια.

Στην Παράγραφο 11.1 αναφέρουμε τον ορισμό τους, στην Παράγραφο 11.2 δίνουμε ορισμένα παραδείγματα, στην Παράγραφο 11.3 αναφέρουμε ορισμένες βασικές ιδιότητές τους, και ολοκληρώνουμε στην Παράγραφο 11.4 όπου παρουσιάζουμε φράγματα στο σφάλμα που γίνεται αν προσεγγίσουμε μια συνάρτηση με το αντίστοιχο πολυώνυμο Taylor σε ένα σημείο.

11.1 Ορισμός

Θυμίζουμε ότι η εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ μιας συνάρτησης f παραγωγίσιμης σε αυτό το σημείο δίνεται από την εξίσωση

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Πράγματι, παρατηρήστε ότι οι συντεταγμένες $(x_0, f(x_0))$ ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση, και επιπλέον η ευθεία έχει κλίση ίση με την παράγωγο της f στο x_0.

Ας εξετάσουμε την εξίσωση της παραπάνω ευθείας ως ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού:

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Παρατηρήστε ότι, από όλα τα πολυώνυμα πρώτου βαθμού, αυτό το πολυώνυμο είναι η καλύτερη δυνατή προσέγγιση για τη συνάρτηση γύρω από το σημείο x_0, διότι *και* διέρχεται από το σημείο $(x_0, f(x_0))$, *και* έχει την ίδια κλίση με τη συνάρτηση. Συνοπτικά, μπορούμε να γράψουμε

$$P_1(x_0) = f(x_0), \quad P_1'(x_0) = f'(x_0). \tag{11.1}$$

Το πολυώνυμο αυτό είναι το μοναδικό που έχει αυτά τα δύο χαρακτηριστικά (δείτε την Άσκηση 11.1), και επομένως μπορούμε να πούμε ότι οποιοδήποτε άλλο θα ήταν χειρότερη προσέγγιση της συνάρτησης γύρω από το x_0.

Μια λογική προέκταση του παραπάνω συλλογισμού είναι ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακόμα καλύτερη προσέγγιση της συνάρτησης κοντά στο σημείο x_0, αν χρησιμοποιήσουμε, αντί για το πολυώνυμο *πρώτου* βαθμού P_1, ένα πολυώνυμο *δεύτερου* βαθμού P_2. Με αυτόν τον τρόπο, έχοντας ακόμα ένα βαθμό ελευθερίας, μπορούμε να απαιτήσουμε να ικανοποιείται ακόμα μια συνθήκη, και συγκεκριμένα να είναι *και* η δεύτερη παράγωγος του πολυωνύμου ίση με τη δεύτερη παράγωγο της f.

Ας προσδιορίσουμε αυτό το πολυώνυμο P_2. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, και με δεδομένο ότι μας ενδιαφέρει να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση f γύρω από το x_0, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το πολυώνυμο έχει τη μορφή

$$P_2(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2,$$

αντί για την πιο συνηθισμένη $P_1(x) = a + bx + c^2$. Αφού θέλουμε $P_2(x_0) = f(x_0)$, θα πρέπει

$$a + b(x_0 - x_0) + c(x_0 - x_0)^2 = f(x_0) \Rightarrow a = f(x_0).$$

Επίσης,

$$P_2'(x_0) = f'(x_0) \Rightarrow b + 2c(x_0 - x_0) = f'(x_0) \Rightarrow b = f'(x_0).$$

Τέλος,

$$P_2''(x_0) = f''(x_0) \Rightarrow 2c = f''(x_0) \Rightarrow c = f''(x_0)/2,$$

επομένως, τελικά,

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Αυτό είναι το μοναδικό πολυώνυμο δευτέρου βαθμού που ικανοποιεί και τις τρεις συνθήκες

$$P_2(x_0) = f(x_0), \quad P_2'(x_0) = f'(x_0), \quad P_2''(x_0) = f''(x_0), \tag{11.2}$$

(πράγματι, το υπολογίσαμε ξεκινώντας από αυτές τις συνθήκες) και, υπό αυτή την έννοια, προσεγγίζει καλύτερα από όλα τα άλλα πολυώνυμα δευτέρου βαθμού την f κοντά στο x_0. Παρατηρήστε ότι

$$P_2(x) = P_1(x) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2,$$

δηλαδή το $P_2(x)$ προκύπτει προσθέτοντας έναν όρο στο $P_1(x)$, κάτι το οποίο δεν ήταν προφανές εκ των προτέρων.

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί, φυσικά, να επεκταθεί σε πολυώνυμα και μεγαλύτερων βαθμών. Προκύπτει, έτσι, ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 11.1. ***(Πολυώνυμο Taylor)*** *Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ που έχει στο $x_0 \in A$ παραγώγους μέχρι n τάξεως, όπου $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε το* ***πολυώνυμο Taylor βαθμού*** *n στο σημείο x_0 ως το πολυώνυμο*

$$\begin{aligned} P_n(x) &\triangleq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \end{aligned} \tag{11.3}$$

Σε περίπτωση που θέλουμε να διακρίνουμε μεταξύ διαφόρων πολυωνύμων Taylor, θα συμβολίζουμε το παραπάνω και ως $P_n(x; f, x_0)$. Στην περίπτωση $x_0 = 0$, το (11.3) καλείται επίσης και ***πολυώνυμο Maclaurin****.*

Στον παραπάνω ορισμό, με $g^{(n)}$ συμβολίζουμε τη n-οστή παράγωγο μιας συνάρτησης g, όταν $n \in \mathbb{N}^*$, και (για λόγους συνοπτικότητας) την ίδια τη συνάρτηση g, όταν $n = 0$. Επίσης, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

και, επίσης για λόγους συνοπτικότητας, ορίζουμε $0! = 1$. Το $n!$ διαβάζεται n **παραγοντικό**.

Παρατηρήστε ότι ο ορισμός προβλέπει και την περίπτωση $n = 0$. Σε αυτή την περίπτωση, το πολυώνυμο Taylor μηδενικού βαθμού είναι το

$$P_0(x) = f(x_0),$$

που, πράγματι, προσεγγίζει τη συνάρτηση $f(x)$ καλύτερα από όλα τα άλλα πολυώνυμα μηδενικού βαθμού αφού είναι το μόνο πολυώνυμο μηδενικού βαθμού που διέρχεται από το σημείο $(x_0, f(x_0))$.

Πρόταση 11.1. *Το πολυώνυμο Taylor n βαθμού μιας συνάρτησης f στο x_0 είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου του n για το οποίο ισχύει*

$$f^{(k)}(x_0) = P^{(k)}(x_0), \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Η απόδειξη είναι απλή γενίκευση των πράξεων που κάναμε για την περίπτωση του πολυωνύμου δεύτερου βαθμού, και ζητείται στην Άσκηση 11.2.

Πρέπει να τονιστεί ότι το πολυώνυμο Taylor δεν είναι *γενικώς* η προσέγγιση μιας συνάρτησης, αλλά η προσέγγιση μιας συνάρτησης *γύρω από ένα συγκεκριμένο σημείο* x_0. Επομένως, η ίδια συνάρτηση μπορεί να προσεγγίζεται από πολλά πολυώνυμα Taylor, καθένα για ένα διαφορετικό x_0.

Κάτι που δεν συζητήσαμε μέχρι τώρα, είναι ποια είναι η χρησιμότητα των πολυωνύμων Taylor. Αναφέρουμε, σύντομα, τα εξής:

1. Η πιο άμεση εφαρμογή των πολυωνύμων Taylor είναι ότι μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τις τιμές συναρτήσεων που δεν μπορούμε να υπολογίσουμε αλλιώς. Αυτό, για παράδειγμα, κάνουν (σε συνδυασμό με άλλες τεχνικές) οι υπολογιστές για να υπολογίσουν τις τιμές των μη ρητών συναρτήσεων, για παράδειγμα της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης. (Είχατε αναρωτηθεί ποτέ πως υπολογίζει το κομπιουτεράκι σας τις τιμές των λογαρίθμων που ζητάτε; Χρησιμοποιεί πολυώνυμα Taylor, και βασίζεται στη θεωρία αυτού του κεφαλαίου.) Φυσικά, αυτές οι προσεγγίσεις εισάγουν σφάλματα, ευτυχώς όμως αυτά τα σφάλματα μπορούν να φραχτούν, όπως θα δούμε στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου.

2. Πολλά θεωρήματα των εφαρμοσμένων μαθηματικών, για παράδειγμα θεωρήματα που περιγράφουν τις ιδιότητες σύγκλισης διαφόρων μεθόδων αριθμητικής ανάλυσης, δίνονται βάσει πολυωνύμων Taylor.

3. Τα πολυώνυμα Taylor είναι η βάση των δυναμοσειρών, ενός ακόμα πιο ισχυρού μαθηματικού εργαλείου.

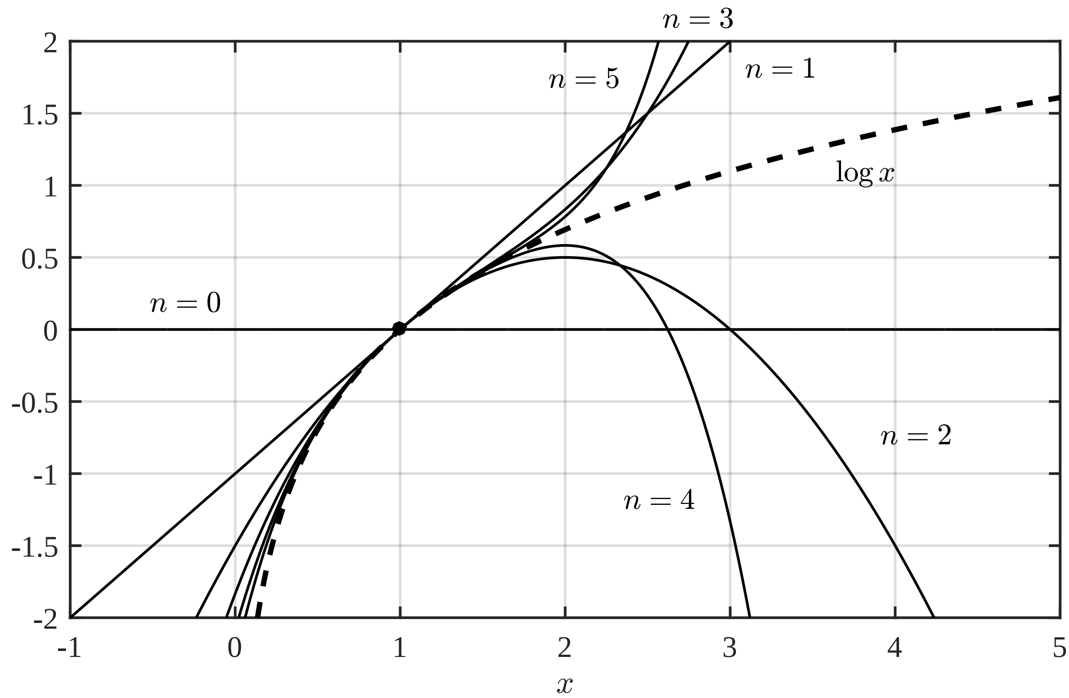
Ασκήσεις

11.1. (Μοναδικότητα πολυωνύμου πρώτου βαθμού) Έστω συνάρτηση $f : A \to$ παραγωγίσιμη στο x_0. Να δείξετε ότι το μοναδικό πολυώνυμο P_1 πρώτου βαθμού για το οποίο ισχύουν οι (11.1) είναι το $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

11.2. (Μοναδικότητα πολυωνύμου βαθμού n) Να αποδείξετε την Πρόταση 11.1.

11.2 Παραδείγματα

Εξετάζουμε, στη συνέχεια, μερικά πολυώνυμα Taylor γνωστών συναρτήσεων. Σε όλες τις περιπτώσεις, αυτό που έχουμε να κάνουμε είναι απλό: υπολογίζουμε τις παραγώγους της δοσμένης συνάρτησης στο δοσμένο σημείο, και εφαρμόζουμε τον τύπο (11.3) του ορισμού.



Σχήμα 11.1: Πολυώνυμα Taylor βαθμού $n = 0$ έως και 5 για τη συνάρτηση $\log x$ στο $x_0 = 1$.

Παράδειγμα 11.1. (Πολυώνυμο Taylor της $f(x) = \log x$ στο $x_0 = 1$) Για τη συνάρτηση $f(x) = \log x$ έχουμε

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= \log x &\Rightarrow\quad & f^{(0)}(1) = 0,\\
f^{(1)}(x) &= \frac{1}{x} &\Rightarrow\quad & f^{(1)}(1) = 1,\\
f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{x^2} &\Rightarrow\quad & f^{(2)}(1) = -1,\\
f^{(3)}(x) &= \frac{2}{x^3} &\Rightarrow\quad & f^{(3)}(1) = 2,\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4} &\Rightarrow\quad & f^{(4)}(1) = -6,\\
f^{(5)}(x) &= \frac{24}{x^5} &\Rightarrow\quad & f^{(5)}(1) = 24,
\end{aligned}$$

και, γενικά, για $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n} \Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

Επομένως, με χρήση του ορισμού (11.3) έχουμε:

$$P_0(x) = 0,$$

$$P_1(x) = 0 + 1 \times (x-1) = (x-1),$$

$$P_2(x) = 0 + 1 \times (x-1) + \frac{1}{2} \times (-1) \times (x-1)^2 = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2,$$

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 0 + 1 \times (x-1) + \frac{1}{2} \times (-1) \times (x-1)^2 + \frac{1}{3!} \times 2 \times (x-1)^3 \\ &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 0 + 1 \times (x-1) + \frac{1}{2} \times (-1) \times (x-1)^2 + \frac{1}{3!} \times 2 \times (x-1)^3 + \frac{1}{4!} \times (-6) \times (x-1)^4 \\ &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_5(x) &= 0 + 1 \times (x-1) + \frac{1}{2} \times (-1) \times (x-1)^2 + \frac{1}{3!} \times 2 \times (x-1)^3 + \frac{1}{4!} \times (-6) \times (x-1)^4 \\ &\quad + \frac{1}{5!} \times 24 \times (x-1)^5 \\ &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5. \end{aligned}$$

Πιο γενικά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k.$$

Στο Σχήμα 11.1 έχουμε σχεδιάσει τα πρώτα 6 από τα παραπάνω πολυώνυμα Taylor, για $n = 0$ έως $n = 5$.

Παρατηρήστε ότι το προηγούμενο παράδειγμα επιβεβαιώνει πλήρως τη διαίσθησή μας ότι, προσθέτοντας όρους στο πολυώνυμο, η προσέγγιση που αυτό επιτυγχάνει *κοντά σε ένα σημείο* x_0 γίνεται ολοένα και καλύτερη.

Παρατηρήστε, επίσης, ότι καθώς αυξάνει το n χειροτερεύει η προσέγγιση που αυτό επιτυγχάνει *μακρυά από το σημείο* x_0! Ο λόγος είναι ότι, όσο πιο μεγάλη είναι ο βαθμός ενός πολυωνύμου, τόσο πιο γρήγορα αυτό τείνει στο $\pm\infty$ καθώς το όρισμά του $x \to \pm\infty$.

Όπως προκύπτει από τον Ορισμό 11.1 και είδαμε και στο προηγούμενο παράδειγμα, το πολυώνυμα Taylor βαθμών $k < n$ προκύπτουν άμεσα από το πολυώνυμο Taylor βαθμού n, απλώς αφαιρώντας όλους τους όρους με βαθμό μεγαλύτερο του k. Η ιδιότητα αυτή δεν ήταν προφανές εκ των προτέρων ότι θα ίσχυε, και μας διευκολύνει σημαντικά στην ανάπτυξη της θεωρίας μας. Στα επόμενα παραδείγματα θα είμαστε συνοπτικότεροι, αναφέροντας απλώς το πολυώνυμο Taylor βαθμού n.

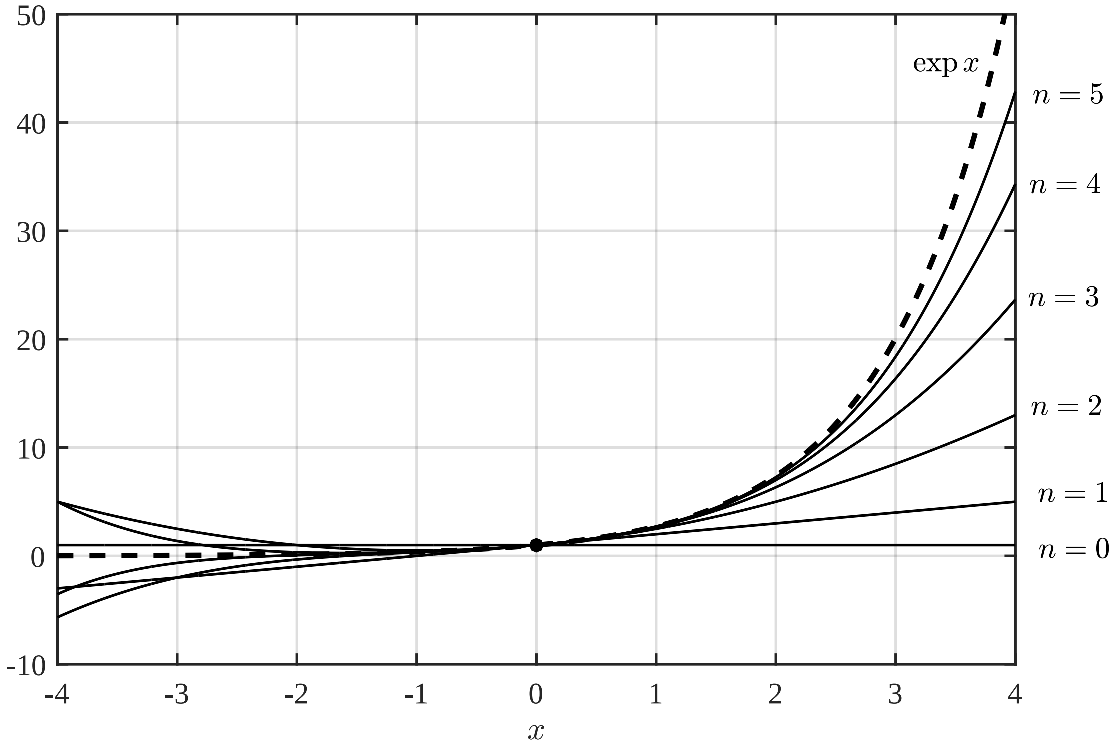
Παράδειγμα 11.2. (Πολυώνυμο Taylor της $f(x) = \exp x$ στο $x_0 = 0$) Στην περίπτωση της συνάρτησης $f(x) = \exp x$, παρατηρούμε πως

$$(\exp x)^{(n)} = \exp x \Rightarrow (\exp x)^{(n)}\Big|_{x=0} = \exp 0 = 1,$$

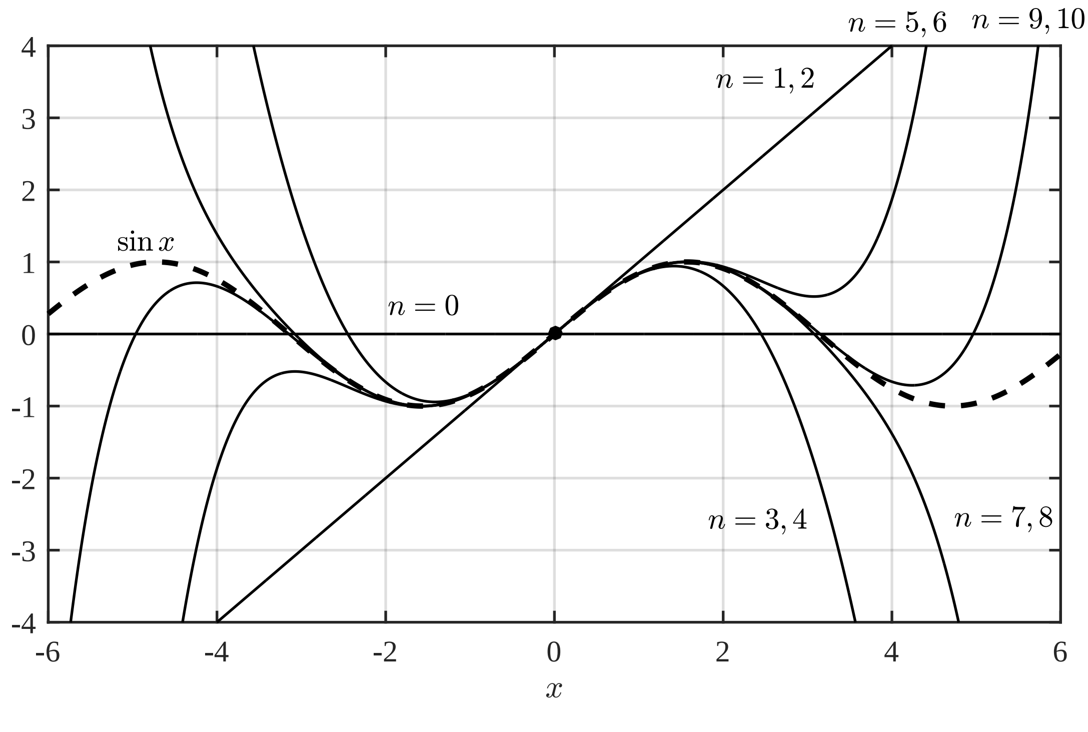
επομένως το πολυώνυμο Taylor n-οστού βαθμού στο σημείο x_0 είναι το

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k. \end{aligned}$$

Στο Σχήμα 11.2 έχουμε σχεδιάσει τα πρώτα 6 από τα παραπάνω πολυώνυμα.



Σχήμα 11.2: Πολυώνυμα Taylor βαθμού $n = 0$ έως και 5 για τη συνάρτηση $\exp x$ στο $x_0 = 0$.



Σχήμα 11.3: Πολυώνυμα Taylor βαθμού $n = 0$ έως και 10 για τη συνάρτηση $\sin x$ στο $x_0 = 0$.

Παράδειγμα 11.3. (Πολυώνυμο Taylor της $f(x) = \sin x$ στο $x_0 = 0$) Στην περίπτωση της συνάρτησης $f(x) = \sin x$, γνωρίζουμε, από την Άσκηση 5.10, ότι

$$\sin^{(4n)} x = \sin x, \quad \sin^{(4n+1)} x = \cos x, \quad \sin^{(4n+2)} x = -\sin x, \quad \sin^{(4n+3)} x = -\cos x,$$

όπου $n \in \mathbb{N}$, επομένως

$$\sin^{(4n)} 0 = 0, \quad \sin^{(4n+1)} 0 = 1, \quad \sin^{(4n+2)} 0 = 0, \quad \sin^{(4n+3)} 0 = -1,$$

ή, πιο συνοπτικά,

$$\sin^{(2n)} 0 = 0, \quad \sin^{(2n+1)} 0 = (-1)^n,$$

και επομένως για το πολυώνυμο Taylor του ημίτονου στο 0 έχουμε

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 0, \\ P_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}, \qquad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι, επειδή όλες οι παράγωγοι άρτιας τάξης μηδενίζονται στο σημείο $x_0 = 0$, όλα τα πολυώνυμα που αντιστοιχούν σε άρτιο βαθμό $2n+2$ τελικά ταυτίζονται με τα αντίστοιχα πολυώνυμα περιττού βαθμού $2n+1$.

Στο Σχήμα 11.3 έχουμε σχεδιάσει τα πολυώνυμα Taylor του $\sin x$ στο $x_0 = 0$ για τους βαθμούς $n = 0$ έως και 10.

Παρατηρήστε ότι το πολυώνυμο Taylor της συνάρτησης του ημιτόνου, που είναι μια περιττή συνάρτηση, προέκυψε να είναι και αυτό περιττή συνάρτηση. Αυτό δεν είναι τυχαίο. Δείτε, σχετικά, την Άσκηση 11.5.

Παράδειγμα 11.4. (Πολυώνυμο Taylor της $f(x) = \cos x$ στο $x_0 = 0$) Στην περίπτωση της συνάρτησης $f(x) = \cos x$, γνωρίζουμε, από την Άσκηση 5.10, ότι

$$\cos^{(4n)} x = \cos x, \quad \cos^{(4n+1)} x = -\sin x, \quad \cos^{(4n+2)} x = -\cos x, \quad \cos^{(4n+3)} x = \sin x,$$

όπου $n \in \mathbb{N}$, επομένως

$$\cos^{(4n)} 0 = 1, \quad \cos^{(4n+1)} 0 = 0, \quad \cos^{(4n+2)} 0 = -1, \quad \cos^{(4n+3)} 0 = 0,$$

ή, πιο συνοπτικά,

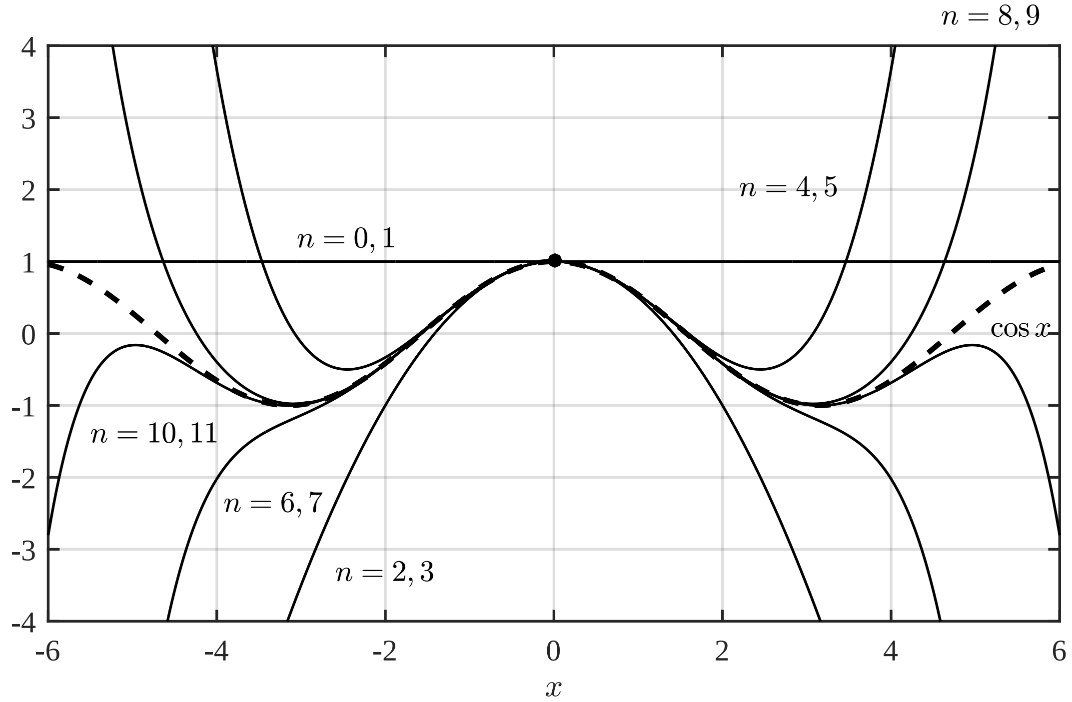
$$\cos^{(2n)} 0 = (-1)^n, \quad \cos^{(2n+1)} 0 = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

και επομένως για το πολυώνυμο Taylor του συνημιτόνου στο $x_0 = 0$ έχουμε

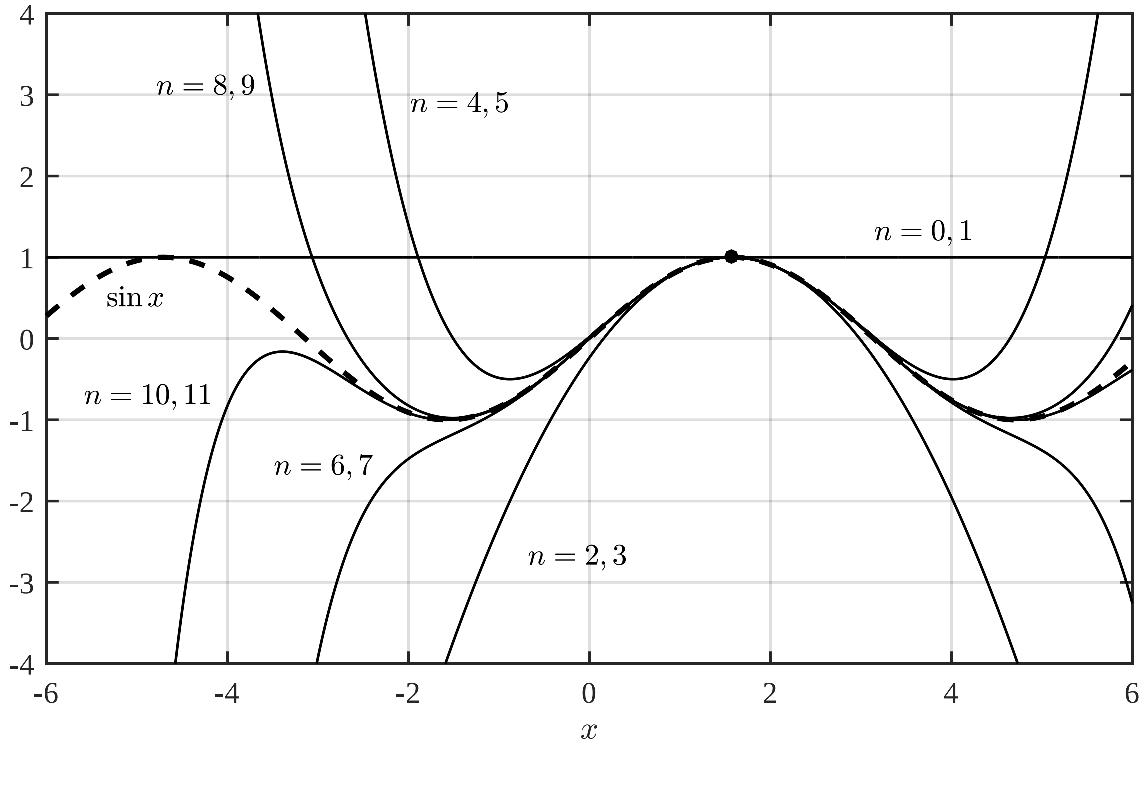
$$\begin{aligned} P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι, επειδή όλες οι παράγωγοι περιττής τάξης μηδενίζονται στο σημείο $x_0 = 0$, όλα τα πολυώνυμα που αντιστοιχούν σε ένα περιττό βαθμό $2n+1$ τελικά ταυτίζονται με το αμέσως προηγούμενο πολυώνυμο βαθμού $2n$.

Στο Σχήμα 11.4 έχουμε σχεδιάσει τα πολυώνυμα Taylor του $\cos x$ στο $x_0 = 0$ για τους βαθμούς $n = 0$ έως και 11.



Σχήμα 11.4: Πολυώνυμα Taylor βαθμού $n = 0$ έως και 11 για τη συνάρτηση $\cos x$ στο $x_0 = 0$.



Σχήμα 11.5: Πολυώνυμα Taylor βαθμού $n = 0$ έως και 11 για τη συνάρτηση $\sin x$ στο $x_0 = \pi/2$.

Παράδειγμα 11.5. (Πολυώνυμο Taylor της $f(x) = \sin x$ στο $x_0 = \pi/2$) Τέλος, θα εξετάσουμε τα πολυώνυμα Taylor της συνάρτησης $\sin x$, που ήδη έχουμε δει στο Παράδειγμα 11.1, αλλά αυτή τη φορά θα χρησιμοποιήσουμε το σημείο $x_0 = \pi/2$. Και πάλι ισχύει ότι

$$\sin^{(4n)} x = \sin x, \quad \sin^{(4n+1)} x = \cos x, \quad \sin^{(4n+2)} x = -\sin x, \quad \sin^{(4n+3)} x = -\cos x,$$

όπου $n \in \mathbb{N}$, επομένως, σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι

$$\sin^{(4n)} \pi/2 = 1, \quad \sin^{(4n+1)} \pi/2 = 0, \quad \sin^{(4n+2)} \pi/2 = -1, \quad \sin^{(4n+3)} \pi/2 = 0,$$

ή, πιο συνοπτικά,

$$\sin^{(2n)} \pi/2 = (-1)^n, \quad \sin^{(2n+1)} \pi/2 = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

επομένως

$$\begin{aligned} P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) &= 1 - \frac{1}{2!}(x-\pi/2)^2 + \frac{1}{4!}(x-\pi/2)^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}(x-\pi/2)^{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(x-\pi/2)^{2k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι τα πολυώνυμα Taylor που προέκυψαν είναι τα πολυώνυμα Taylor του συνημιτόνου γύρω από το 0 (δείτε το Παράδειγμα 11.4) μετατοπισμένα δεξιά κατά $\pi/2$, όπως ακριβώς και το συνημίτονο μετατοπισμένο δεξιά κατά $\pi/2$ μας δίνει το ημίτονο. Όπως θα δούμε στη συνέχεια (Πρόταση 11.2), το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι τυχαίο.

Ασκήσεις

11.3. [Π] Να προσδιορίσετε το πολυώνυμο Taylor τετάρτου βαθμού της συνάρτησης $f(x) = x\cos x$ στο $x_0 = 0$.

11.4. (Υπολογισμός πολυωνύμων Taylor) Να προσδιορίσετε τα πολυώνυμα Taylor των ακόλουθων συναρτήσεων στα σημεία x_0 που δίνονται για όλους τους βαθμούς $n \in \mathbb{R}$. Σε όλες τις περιπτώσεις, να σχεδιάσετε όλα τα πολυώνυμα Taylor μέχρι βαθμού $n = 4$ με την καλύτερη δυνατή ακρίβεια.

1. $f(x) = x^2 + 4x + 6$ στο $x_0 = 2$.
2. $f(x) = x^2 + 4x + 6$ στο $x_0 = 0$.
3. $\exp x^2$ στο $x_0 = 0$.
4. $\arctan x$ στο $x_0 = 0$.
5. 10^x στο $x_0 = 0$.

11.5. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο Taylor στο x_0 μιας περιττής (εναλλακτικά, άρτιας) συνάρτησης f είναι επίσης περιττή (εναλλακτικά, άρτια) συνάρτηση.

11.3 Βασικές Ιδιότητες

Πρόταση 11.2. ***(Αλλαγή κλίμακας)*** *Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ η οποία είναι n φορές παραγωγίσιμη στο x_0, με πολυώνυμο Taylor $P_n(x)$ στο σημείο x_0. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$. Η συνάρτηση $g(x) = f(ax+b)$ έχει πολυώνυμο Taylor, στο σημείο $y_0 = (x_0 - b)/a$, το $P_n(ax+b)$.*

Απόδειξη: Εξετάζουμε το πολυώνυμο Taylor $Q_n(x)$ της $g(x)$ στο σημείο y_0, όπως το δίνει ο τύπος (11.3) του ορισμού, και δείχνουμε ότι πράγματι ισούται με το $P_n(ax+b)$:

$$
\begin{aligned}
Q_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} g^{(k)}(y_0)(x-y_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left[a^k f^{(k)}(ax+b)\right]_{x=y_0} (x-y_0)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a^k f^{(k)}(ay_0+b)(x-y_0)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a^k f^{(k)}\left(a\frac{x_0-b}{a}+b\right)\left(x-\frac{x_0-b}{a}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(ax+b-x_0)^k = P_n(ax+b),
\end{aligned}
$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $g(ax+b)$ δημιουργείται από τη συνάρτηση $f(x)$ με μια αλλαγή κλίμακας, και συγκεκριμένα αρχικά με μια μετατόπισή της f αριστερά κατά b/a (αν το $b/a < 0$ τότε έχουμε μετατόπιση προς τα δεξιά) και κατόπιν με συρρίκνωση της συνάρτησης που προκύπτει, με κέντρο την αρχή των αξόνων, κατά ένα συντελεστή a, έτσι ώστε το αρχικό σημείο x_0 να έχει πλέον μεταφερθεί στο σημείο $y_0 = (x_0 - b)/a$. Αν ο συντελεστής a είναι αρνητικός, εκτός από συρρίκνωση έχουμε και περιστροφή της συνάρτησης περί τον άξονα των y. Τέλος, αν $|a| < 1$, δεν έχουμε συρρίκνωση αλλά επιμήκυνση. Δείτε μερικά παραδείγματα αυτής της αλλαγής κλίμακας στην Άσκηση 11.6.

Τα παραπάνω εξηγούν γεωμετρικά γιατί ισχύει η πρόταση: συγκεκριμένα, η πρόταση μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τα πολυώνυμα Taylor της g εφαρμόζοντας ακριβώς την ίδια αλλαγή κλίμακας και στα πολυώνυμα Taylor της f, κάτι που γεωμετρικά είναι αναμενόμενο. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα, μπορούμε να εξάγουμε αυτόματα το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 11.5 χρησιμοποιώντας την πρόταση σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 11.4.

Παράδειγμα 11.6. (Πολυώνυμα Taylor της $f(x) = \exp(-x)$) Με χρήση της Πρότασης 11.2 και του Παραδείγματος 11.2, προκύπτει πως η $f(x) = \exp(-x)$ έχει πολυώνυμα Taylor στο 0 τα ακόλουθα:

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k.
\end{aligned}
$$

Πρόταση 11.3. ***(Γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων)*** *Έστω συναρτήσεις $f, g : A \to \mathbb{R}$ οι οποίες είναι n φορές παραγωγίσιμες στο x_0, με πολυώνυμα Taylor $P_n(x)$, $Q_n(x)$ στο σημείο x_0. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $af(x) + bg(x)$ έχει πολυώνυμο Taylor, στο σημείο x_0, το $aP(x) + bQ(x)$.*

Παράδειγμα 11.7. (Πολυώνυμα Taylor της $f(x) = \log[(x+1)/(x-1)]$) Με χρήση του Παραδείγματος 11.1 και της Πρότασης 11.2 προκύπτει πως η συνάρτηση $f(x) = \log(1+x)$ έχει πολυώνυμα Taylor στο $x_0 = 0$ τα

$$P_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k,$$

και η συνάρτηση $f(x) = \log(1-x)$ έχει πολυώνυμα Taylor στο $x_0 = 0$ τα

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(-x)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k+1}}{k}x^k = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}x^k \\ &= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \cdots - \frac{1}{n}x^n. \end{aligned}$$

Επομένως, η συνάρτηση

$$f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log(1+x) - \log(1-x)$$

έχει πολυώνυμα Taylor στο $x_0 = 0$ τα ακόλουθα:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}x^k = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right),$$

επομένως

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 0, \\ P_{2n+1}(x) = P_{2n+2}(x) &= 2\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \qquad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Η απόδειξη της Πρότασης 11.3 είναι ανάλογη της απόδειξης της Πρότασης 11.2 και για αυτό δεν δίνεται, αλλά ζητείται στην Άσκηση 11.7. Και αυτή η πρόταση έχει μια απλή γεωμετρική εξήγηση: αν το $P_n(x)$ προσεγγίζει την $f(x)$, και το $Q_n(x)$ την $g(x)$, τότε είναι αναμενόμενο ο γραμμικός συνδυασμός $af(x) + bg(x)$ να προσεγγίζεται από τον ανάλογο γραμμικό συνδυασμό $aP_n(x) + bQ_n(x)$.

Πρόταση 11.4. ***(Παράγωγος πολυώνυμου Taylor)*** *Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ η οποία είναι n φορές παραγωγίσιμη στο x_0, με πολυώνυμα Taylor $P_n(x)$ στο σημείο x_0. Η παράγωγος $P_n'(x)$ του πολυωνύμου $P_n(x)$ είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού $n-1$ της παραγώγου $f'(x)$.*

Η απόδειξη της πρότασης είναι ανάλογη της απόδειξης της Πρότασης 11.2 και ζητείται στην Άσκηση 11.8. Η πρόταση μας επιτρέπει να υπολογίζουμε πολυώνυμα Taylor συναρτήσεων χωρίς να χρειάζεται να υπολογίσουμε τις παραγώγους τους. Τα πολυώνυμα που υπολογίζουμε, βέβαια, έχουν ένα βαθμό μικρότερο από τα αρχικά. Παρατηρήστε ότι τα Παραδείγματα 11.3 και 11.4 επαληθεύουν την παραπάνω πρόταση.

Παράδειγμα 11.8. (Πολυώνυμο Taylor της $\frac{1}{x}$) Με χρήση της Πρότασης 11.4 και του Παραδείγματος 11.1 άμεσα προκύπτει πως τα πολυώνυμα Taylor της $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $x_0 = 1$ είναι τα

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (x-1)^k. \end{aligned}$$

Ασκήσεις

11.6. (Αλλαγή κλίμακας) Σχεδιάστε τη συνάρτηση $f(x)$ και τη συνάρτηση $g(x) = f(ax+b)$ για τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. $f(x) = \sin x$, $a = \pi$, $b = 0$.
2. $f(x) = xu(x)u(1-x)$, $a = 2$, $b = 1$.
3. $f(x) = xu(x)u(1-x)$, $a = -2$, $b = 1$.
4. $f(x) = xu(x)u(1-x)$, $a = 1/2$, $b = 1$.
5. $f(x) = xu(x)u(1-x)$, $a = -1/2$, $b = 1$.

Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση Heaviside $u(x)$ έχει οριστεί στην Παράγραφο 3.1.

11.7. (Γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων) Να αποδείξετε την Πρόταση 11.3.

11.8. (Παράγωγος πολυωνύμου Taylor) Να αποδείξετε την Πρόταση 11.4.

11.9. (Πολυώνυμα Taylor των $\sinh x$, $\cosh x$) Να υπολογίσετε τα πολυώνυμα Taylor των υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\sinh x$, $\cosh x$ της Άσκησης 8.18:

$$\sinh x = \frac{\exp x - \exp(-x)}{2}, \quad \cosh x = \frac{\exp x + \exp(-x)}{2}.$$

11.10. Να επαληθεύσετε τα αποτελέσματα των Παραδειγμάτων 11.6, 11.7, 11.8 εφαρμόζοντας απευθείας τον ορισμό του πολυώνυμου Taylor.

11.11. (Πολυώνυμο Taylor ολοκληρώματος) Έστω η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη n φορές στο σημείο x_0 και έστω $P_n(x)$ το πολυώνυμο Taylor βαθμού n της f στη θέση x_0. Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{x_0}^{x} P_n$ ισούται με το πολυώνυμο Taylor βαθμού $n+1$ της συνάρτησης $\int_{x_0}^{x} f$ στη θέση x_0.

11.12. (Πολυώνυμο Taylor της $1/(1-x^2)$) Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor της συνάρτησης $f(x) = 1/(1-x^2)$ στο $x_0 = 0$ με δύο τρόπους. Πρώτον, μέσω του ορισμού, και, δεύτερον, παραγωγίζοντας την $\log[(1+x)/(1-x)]$ και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 11.4 και το Παράδειγμα 11.7.

11.13. Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f(x)$ έχει πολυώνυμο Taylor βαθμού n στη θέση $x_0 = 0$ το $P_n(x)$, τότε η συνάρτηση $xf(x)$ έχει πολυώνυμο Taylor βαθμού $n+1$ στη θέση $x_0 = 0$ το $xP_n(x)$.

11.14. Να επαναλάβετε την Άσκηση 11.3 χρησιμοποιώντας την Άσκηση 11.13.

11.4 Υπόλοιπο

Στις προηγούμενες παραγράφους ορίσαμε τα πολυώνυμα Taylor μιας συνάρτησης και αναφερθήκαμε στη χρησιμότητά τους ως προσεγγίσεις αυτής της συνάρτησης κοντά σε ένα σημείο x_0. Όμως, σε καμία περίπτωση δεν υπολογίσαμε πόσο καλή είναι αυτή η προσέγγιση. Στην παράγραφο αυτή θα καλύψουμε το σημαντικό αυτό κενό, παρουσιάζοντας το Θεώρημα του Taylor. Το πρώτο που πρέπει να κάνουμε, είναι να ορίσουμε το σφάλμα της προσέγγισης.

Ορισμός 11.2. ***(Υπόλοιπο)*** *Έστω διάστημα A και συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ για την οποία υπάρχουν οι παράγωγοι μέχρι και n τάξης στο σημείο $x_0 \in A$. Έστω $P_n(x)$ το πολυώνυμο Taylor n βαθμού της συνάρτησης στο x_0. Ορίζουμε το* ***υπόλοιπο*** *$R_n(x)$ ως*

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \Leftrightarrow f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Στην περίπτωση που θέλουμε να διακρίνουμε μεταξύ διάφορων υπολοίπων, θα συμβολίζουμε το υπόλοιπο και ως $R_n(x; f, x_0)$.

Επομένως, το υπόλοιπο είναι μια συνάρτηση $R_n(x)$ που είναι παραγωγίσιμη n φορές στο x_0 (ως διαφορά δύο συναρτήσεων που είναι παραγωγίσιμες n φορές) η οποία εκφράζει πόσο μεγάλο είναι το σφάλμα που θα κάνουμε αν χρησιμοποιήσουμε την τιμή της προσέγγισης P_n αντί για την τιμή της f στο σημείο x. Το ακόλουθο θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιορίσουμε πόσο μεγάλη είναι η τιμή αυτού του σφάλματος.

Θεώρημα 11.1. ***(Θεώρημα του Taylor)*** *Έστω διάστημα A και συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ για την οποία υπάρχουν οι παράγωγοι μέχρι και $n+1$ τάξης στο A και η παράγωγος $f^{(n+1)}$ είναι ολοκληρώσιμη στο A. Έστω $P_n(x)$ το πολυώνυμο Taylor στο σημείο $x_0 \in A$ και έστω $R_n(x)$ το αντίστοιχο υπόλοιπο. Επίσης, έστω $K(x_0, x)$ το κλειστό διάστημα με άκρα τα x_0, x, δηλαδή $K = [x_0, x]$ αν $x_0 \le x$ και $K = [x, x_0]$ αν $x \le x_0$.*

1. *Το $R_n(x)$ ισούται με*
$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}\, dt. \tag{11.4}$$

2. *Υπάρχει $x_1 \in K(x_0, x)$, τέτοιο ώστε*
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_1)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{11.5}$$
Η μορφή (11.5) για το υπόλοιπο καλείται ***υπόλοιπο Lagrange****,*

3. *Υπάρχει $x_2 \in K(x_0, x)$, τέτοιο ώστε*
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_2)(x-x_2)^n(x-x_0)}{n!}. \tag{11.6}$$
Η μορφή (11.6) καλείται ***υπόλοιπο Cauchy****.*

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε μόνο την πρώτη, ολοκληρωτική μορφή (11.4). Η απόδειξη των άλλων δύο μορφών ζητείται στις Ασκήσεις 11.15 και 11.16.

Η απόδειξη της ολοκληρωτικής μορφής (11.4) είναι αρκετά απλή, και απλώς βασίζεται σε επαγωγή και σε παραγοντική ολοκλήρωση.

Παρατηρούμε, καταρχάς, πως η δοσμένη εξίσωση ισχύει όταν $n = 0$. Πράγματι, εξ ορισμού έχουμε ότι

$$R_0(x) = f(x) - P_0(x) = f(x) - f_0(x),$$

ενώ

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(0+1)}(t)(x-t)^0}{0!}\, dt = \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt = f(x) - f(x_0),$$

με χρήση του Θεωρήματος 8.2.

Έστω, λοιπόν, πως το θεώρημα ισχύει για κάποιο οποιοδήποτε $k < n$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για το $k+1 \leq n$. Παρατηρούμε πως επειδή

$$f(x) = P_k(x) + R_k(x), \qquad f(x) = P_{k+1}(x) + R_{k+1}(x),$$

θα έχουμε και

$$R_{k+1}(x) = R_k(x) + P_k(x) - P_{k+1}(x) = R_k(x) - \frac{f^{(k+1)}(x_0)(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}
R_{k+1}(x) &= R_k(x) - \frac{f^{(k+1)}(x_0)(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!}\,dt - \frac{f^{(k+1)}(x_0)(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= (-1)^k \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+1)}(t)\left[(t-x)^{k+1}\right]'}{(k+1)!}\,dt - \frac{f^{(k+1)}(x_0)(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= (-1)^k \left[\frac{f^{(k+1)}(t)(t-x)^{k+1}}{(k+1)!}\right]_{x_0}^{x} - (-1)^k \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+2)}(t)(t-x)^{k+1}}{(k+1)!}\,dt \\
&\quad - \frac{f^{(k+1)}(x_0)(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= (-1)^{k+1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)(x_0-x)^{k+1}}{(k+1)!} + (-1)^{k+1} \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+2)}(t)(t-x)^{k+1}}{(k+1)!}\,dt \\
&\quad - \frac{f^{(k+1)}(x_0)(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+2)}(t)(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}\,dt.
\end{aligned}$$

Στα παραπάνω ολοκληρώματα, μην ξεχνάτε ότι η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το t, ενώ τόσο το x όσο και το x_0 είναι παράμετροι. Στη δεύτερη ισότητα κάναμε χρήση της επαγωγικής υπόθεσης. Στην τέταρτη ισότητα εφαρμόσαμε παραγοντική ολοκλήρωση, ενώ στην τελευταία ισότητα απλώς ενσωματώσαμε τους συντελεστές $(-1)^{k+1}$ εντός των υπόλοιπων παραγόντων των γινομένων όπου εμφανίζονται. Τελικά, αποδείξαμε και το επαγωγικό βήμα, επομένως ισχύει το ζητούμενο. ■

Το Θεώρημα 11.1 μας δίνει το υπόλοιπο είτε σε μια μορφή ολοκληρώματος που δεν είναι καθόλου απλή στον υπολογισμό, είτε βάσει αγνώστων παραμέτρων x_1, x_2. Η όλη χρησιμότητά του έγκειται, όμως, στο ότι μπορούμε εύκολα να *φράξουμε* την τιμή του υπολοίπου, βάσει του ακόλουθου πορίσματος.

Πόρισμα 11.1. ***(Φράγμα στο υπόλοιπο Taylor)*** *Έστω διάστημα A και συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ για την οποία υπάρχουν οι παράγωγοι μέχρι και $n+1$ τάξης στο A, και η παράγωγος $f^{(n+1)}$ είναι ολοκληρώσιμη στο A. Έστω $P_n(x)$ το πολυώνυμο Taylor γύρω από το σημείο $x_0 \in A$ και έστω $R_n(x)$ το αντίστοιχο υπόλοιπο. Έστω πως ισχύει το ακόλουθο φράγμα:*

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M, \qquad \forall t \in K(x_0, x),$$

όπου $K(x_0, x) \subseteq A$ είναι το κλειστό διάστημα με άκρα το x και το x_0, δηλαδή είτε το $[x, x_0]$, είτε το $[x_0, x]$. Το $|R_n(x)|$ είναι άνω φραγμένο ως εξής:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Απόδειξη: Η ανισότητα προκύπτει άμεσα με χρήση του τύπου (11.5) για το υπόλοιπο Lagrange:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(x_1)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \frac{|f^{(n+1)}(x_1)||x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{11.7}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 7.6 στο ολοκλήρωμα που δίνει η (11.4). Πράγματι, έστω πως $x > x_0$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}\,dt\right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} \frac{\left|f^{(n+1)}(t)\right|(x-t)^n}{n!}\,dt \\ &\leq \frac{M}{n!}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)'dt \\ &= \frac{M}{(n+1)!}\left[(x-x_0)^{n+1}-0\right] = \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Η περίπτωση $x < x_0$ αντιμετωπίζεται ανάλογα. Δείτε την Άσκηση 11.17. ■

Το φράγμα που δίνει το λήμμα έχει πολύ ενδιαφέρουσα μορφή. Για παράδειγμα, αυξάνει αναλογικά με το φράγμα στην παράγωγο τάξης $n+1$, η οποία είναι η πρώτη παράγωγος που δεν συνεισφέρει στο πολυώνυμο Taylor. Σαν μια ειδική περίπτωση, αν η παράγωγος $n+1$ τάξης είναι μηδενική παντού στο διάστημα ολοκλήρωσης, τότε το φράγμα είναι το μηδέν. (Δείτε, σχετικά, για αυτή την περίπτωση, την Άσκηση 11.18.) Παρατηρήστε, επίσης, ότι όσο μεγαλώνει το n, το $n!$ αυξάνει πολύ γρήγορα, επομένως μπορούμε να ελπίζουμε, βλέποντας το αποτέλεσμα του πορίσματος, ότι σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να κάνουμε το φράγμα όσο μικρό θέλουμε. Αυτό πράγματι ισχύει σε πολλές περιπτώσεις. Δείτε το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 11.9. (Υπολογισμός του $\sin \pi/5$) Σαν μια απλή εφαρμογή του λήμματος, θα υπολογίσουμε την τιμή του $\sin \pi/10$ με ακρίβεια καλύτερη από 10^{-4} χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής. Θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 11.4, από το οποίο έχουμε ότι, για $x_0 = 0$,

$$P_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ένα άνω φράγμα για τις τιμές όλων των παραγώγων του $\sin x$ είναι, βέβαια, το 1. Επομένως, το Πόρισμα 11.1 μας εξασφαλίζει πως

$$|R_n(x)| \leq \frac{(\pi/5)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Εξετάζοντας διαδοχικές τιμές για το n, εύκολα προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας:

n	1	2	3	4	5
$\|R_n(x)\| \leq$	0.1974	0.0413	0.0065	8.16×10^{-4}	8.54×10^{-5}

Επομένως, αν κρατήσουμε τους όρους μέχρι βαθμού $n = 5$ του πολυωνύμου Taylor για να υπολογίσουμε την τιμή του $\sin \pi/5$, το σφάλμα που θα κάνουμε θα είναι μικρότερο του 10^{-4}. Πράγματι,

$$(\pi/5) - \frac{(\pi/5)^3}{3!} + \frac{(\pi/5)^5}{5!} = 0.5877928809\ldots$$

ενώ με χρήση υπολογιστή έχουμε

$$\sin(\pi/5) = 0.5877852522\ldots$$

επομένως πράγματι εντοπίσαμε το $\sin \pi/5$ με την επιθυμητή ακρίβεια. Το σφάλμα είμαι μάλιστα αρκετά μικρότερο, σε αυτή την περίπτωση, και ίσο με $R_n(x) \simeq 7.62 \times 10^{-6}$.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να κάνουμε ορισμένες σημαντικές παρατηρήσεις. Πρώτον, αν επιχειρούσαμε να εντοπίσουμε την τιμή του ημίτονου στην τιμή $\pi/5$ αλλά σε κάποια άλλη, μεγαλύτερη τιμή, τότε ενδεχομένως να έπρεπε να κάνουμε περισσότερες πράξεις. Πράγματι, παρατηρήστε ότι καθώς μεγαλώνει η τιμή $|x - x_0|$, το φράγμα του Πορίσματος 11.1 μεγαλώνει πολύ γρήγορα. Για παράδειγμα, για τη θέση $11\pi/5$, οι τιμές του φράγματος είναι μεγαλύτερες του 1 για όλα τα $n \leq 18$. (Δείτε την Άσκηση 11.19). Φυσικά σε αυτή την περίπτωση θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την περιοδικότητα του ημίτονου, για να γράψουμε απλώς ότι $\sin \frac{11\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5} \simeq 0.5877$. Επομένως, το Πόρισμα 11.1 θέλει προσοχή στην εφαρμογή του.

Δεύτερον, παρατηρήστε ότι όλοι οι υπολογισμοί που χρειάζεται να κάνουμε για να προσδιορίσουμε την τιμή μιας συνάρτησης με χρήση πολυωνύμων Taylor χρησιμοποιούν αποκλειστικά τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής! Δεν χρειάζεται, για παράδειγμα, να υπολογίσουμε τον λογάριθμο κάποιου αριθμού ή το ημίτονο κάποιας γωνίας. Βέβαια, μια εύλογη ερώτηση είναι γιατί να μας ενδιαφέρει να μπορούμε να υπολογίσουμε το $\sin \pi/5$ κάνοντας τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής τιμές όπως η $\sin \pi/5$, από τη στιγμή που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, π.χ., το κομπιουτεράκι μας. Η απάντηση είναι ότι *και* τα κομπιουτεράκια μας (και φυσικά οι υπολογιστές μας) πολύ συχνά βασίζονται στα πολυώνυμα Taylor για να υπολογίσουν όχι μόνο ημίτονα, αλλά και συνημίτονα, λογαρίθμους, κτλ. Χρησιμοποιούν, βεβαίως, και άλλους αλγόριθμους σε συνδυασμό με πολυώνυμα Taylor, για να ελαχιστοποιήσουν τις πράξεις που απαιτούνται και να αποφύγουν ορισμένες παγίδες (δείτε, για παράδειγμα την Άσκηση 11.23). Ο λόγος είναι ότι οι μόνες πράξεις που μπορεί να κάνει ένας υπολογιστής είναι δυαδική πρόσθεση και δυαδικός πολλαπλασιασμός, και, βάσει αυτών, δυαδική αφαίρεση και δυαδική διαίρεση. Επομένως, όλοι οι αριθμητικοί υπολογισμοί που κάνει ένας υπολογιστής πρέπει να αναχθούν σε αυτές, και συχνά ο απλούστερος τρόπος είναι μέσω των πολυωνύμων Taylor.

Ασκήσεις

11.15. **[$\star$] (Υπόλοιπο Lagrange)** Να αποδείξετε τον τύπο για το υπόλοιπο Lagrange του Θεωρήματος 11.1.

11.16. **[$\star$] (Υπόλοιπο Cauchy)** Να αποδείξετε τον τύπο για το υπόλοιπο Cauchy του Θεωρήματος 11.1.

11.17. **(Φράγμα στο υπόλοιπο Taylor)** Να ολοκληρώσετε την απόδειξη του Πορίσματος 11.1 εξετάζοντας την περίπτωση $x < x_0$.

11.18. **(Μηδενική παράγωγος n τάξης)** Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με παράγωγο $n+1$ τάξης $f^{(n+1)}(x) = 0$ παντού στο διάστημα $[x_0, x] \subseteq A$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση ταυτίζεται, στο x, με το πολυώνυμο Taylor στο x_0, δηλαδή $f(x) = P_n(x; f, x_0)$.

11.19. **(Υπολογισμός φράγματος)** Να υπολογίσετε το φράγμα που προβλέπει το Πόρισμα 11.1 για την περίπτωση $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $x = 11\pi/5$ για τις τιμές $n = 1, 2, \ldots, 30$. Για να ελαχιστοποιήσετε τις πράξεις που θα κάνετε, μπορείτε να εκφράσετε την τιμή του φράγματος για το n συναρτήσει της τιμής του φράγματος για το $n - 1$.

11.20. Υπολογίστε τη σταθερά e με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο Taylor του Παραδείγματος 11.2.

11.21. (Προσδιορισμός του $\log 2$**)** Υπολογίστε την τιμή του $\log 2$ με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο Taylor του Παραδείγματος 11.1.

11.22. (Υπολογισμός του $\sin x$**)** Στην άσκηση αυτή πρέπει να δημιουργήσετε ένα πρόγραμμα (σε γλώσσα προγραμματισμού της προτίμησής σας) το οποίο θα υπολογίζει τιμές της συνάρτησης $f(x) = \sin x$ για οποιοδήποτε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. (Η τιμή του ημιτόνου σε άλλα σημεία μπορεί να υπολογιστεί από αυτά με χρήση της περιοδικότητας του ημιτόνου.) Το πρόγραμμα πρέπει να δέχεται ως είσοδο πρώτον μια τιμή x στο παραπάνω διάστημα και δεύτερον ένα μέγιστο επιτρεπτό σφάλμα E, και κατόπιν να υπολογίζει το $\sin x$ μέσω του πολυωνύμου Taylor $P_n(x)$ του ημιτόνου γύρω από το $x_0 = 0$, προσθέτοντας τόσους όρους στο πολυώνυμο ώστε εγγυημένα το σφάλμα, δηλαδή η απόλυτη τιμή $|R_n(x)|$ του υπολοίπου $R_n(x)$, να είναι μικρότερο του E. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον ακόλουθο τύπο που δίνει ένα άνω φράγμα στην τιμή του σφάλματος:

$$|R_n| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{11.8}$$

Το πρόγραμμα πρέπει να παρέχει ως έξοδο την τιμή για το $\sin x$ που υπολόγισε, το άνω φράγμα για το σφάλμα και τα ακόλουθα, ως γραφικές παραστάσεις της τάξης n του πολυώνυμου Taylor:

1. Την τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ στη θέση x.
2. Το υπόλοιπο $R_n(x)$ (θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε τη ρουτίνα που παρέχει η ίδια η γλώσσα προγραμματισμού για το ημίτονο).
3. Το άνω φράγμα στο σφάλμα που δίνει ο τύπος (11.8).

Εξηγήστε γιατί ισχύει ο τύπος (11.8). Κατόπιν, τρέξτε το πρόγραμμά σας για την τιμή $x = 1$ και $E = 10^{-6}$ και τυπώστε την έξοδο του προγράμματος.

11.23. [Σ/Λ] Επαναλάβετε την Άσκηση 11.22 αλλά για την συνάρτηση $f(x) = \exp x$ με $x \in (-\infty, 0)$, $x_0 = 0$, και σε δύο σημεία: το $x = -1$ και το $x = -40$. Εξηγήστε γιατί ισχύει ο τύπος (11.8) και σε αυτή την περίπτωση. Τι παρατηρείτε;

11.24. (Υπολογισμός του $\cos x$**)** Επαναλάβετε την Άσκηση 11.22 για τη συνάρτηση του συνημίτονου, $\cos x$.

11.5 Περαιτέρω Μελέτη

Τα πολυώνυμα Taylor έχουν πολύ πλούσια θεωρία, που δυστυχώς δεν μπορούμε να μελετήσουμε εδώ. Μπορείτε να βρείτε πολύ περισσότερα θεωρητικά αποτελέσματα στο βιβλίο του Apostol [APE1], [APG1], και περισσότερη συζήτηση και ανάπτυξη της βασικής θεωρίας στο βιβλίο του Spivak [SPIE], [SPIG].

Γενικεύσεις του Πολυωνύμου Taylor Το γεγονός ότι για τον υπολογισμό ενός πολυωνύμου χρειάζονται μόνο οι τέσσερις πράξεις της αριθμητικής σημαίνει ότι μπορούμε να γενικεύσουμε τη χρήση του και σε περιπτώσεις που το όρισμα της συνάρτησης δεν είναι πραγματικός αριθμός, αρκεί να μπορούμε να ορίσουμε τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής με κάποιο εύλογο τρόπο, και για την περίπτωσή του. Μπορούμε, για παράδειγμα, να γράψουμε

$$e^A = 1 + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + R_n(A)$$

όπου το A είναι *τετραγωνικός πίνακας*! Εκφράσεις όπως η παραπάνω είναι εξαιρετικά χρήσιμες στη μελέτη της συμπεριφοράς συστημάτων καθώς εξελίσσονται στο χρόνο, καθώς και στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Δείτε, για παράδειγμα, τον δεύτερο τόμο του Apostol [APE1], [APG1] για μια αυστηρή προσέγγιση και το βιβλίο του Strang [STRE], [STRG], για μια πιο προσιτή.

Μπορούμε επίσης να επεκτείνουμε τη θεωρία εξετάζοντας την περίπτωση που γράφουμε *άπειρους* όρους του πολυωνύμου, δημιουργώντας, έτσι, τις λεγόμενες **σειρές Taylor**. Μπορεί να δειχθεί ότι, σε πολλές περιπτώσεις συναρτήσεων, η σειρά Taylor μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 συγκλίνει στη συνάρτηση f για κάθε x που απέχει από το x_0 λιγότερο από κάποια απόσταση που καλείται ακτίνα σύγκλισης. Για παράδειγμα, για κάθε x με $|x-1|<1$, ισχύει

$$\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k.$$

Η άνω ισότητα έχει την έννοια ότι αν το x είναι καθορισμένο και $|x-1|<1$, τότε ισχύει το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k = \log x.$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση, η ακτίνα σύγκλισης είναι 1.

Σαν ένα δεύτερο παράδειγμα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k.$$

Η άνω ισότητα έχει την έννοια ότι αν το x είναι καθορισμένο, τότε ισχύει το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k = \exp x.$$

Σε αυτή την περίπτωση, η ακτίνα σύγκλισης είναι άπειρη.

Κεφάλαιο 12

Σειρές

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε την έννοια της σειράς, δηλαδή του αθροίσματος ενός άπειρου πλήθους πραγματικών αριθμών.

Στην Παράγραφο 12.1 θα ορίσουμε, καταρχάς, τις σειρές, και θα δούμε ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα. Στην Παράγραφο 12.2 θα δούμε ορισμένες βασικές τους ιδιότητες. Στην Παράγραφο 12.3 θα επικεντρωθούμε σε μια πολύ σημαντική ειδική περίπτωσή τους, αυτή των σειρών που αποτελούνται αποκλειστικά από μη αρνητικούς όρους. Στην Παράγραφο 12.4 θα μελετήσουμε μια δεύτερη, επίσης σημαντική περίπτωση σειρών, τις εναλλάσσουσες, των οποίων οι όροι λαμβάνουν, αυστηρώς διαδοχικά, μη αρνητικές και μη θετικές τιμές.

12.1 Ορισμός και Παραδείγματα

12.1.1 Ορισμός

Ορισμός 12.1. ***(Σειρές)*** *Ορίζουμε ως **σειρά** κάθε ακολουθία $s_n : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ πραγματικών αριθμών της μορφής*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

*όπου $a_k : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ είναι μια δοσμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Οι διαδοχικές τιμές s_n της σειράς καλούνται **μερικά αθροίσματα**. Συμβολίζουμε τη σειρά όπως και τις υπόλοιπες ακολουθίες, ως $s(n)$, $\{s_n\}$ ή s_n και, επιπλέον ως $\sum a_k$.*

Συμβολίζουμε το όριο της σειράς s_n, είτε αυτό είναι πεπερασμένο είτε το $\pm\infty$, όπως και τα υπόλοιπα όρια ακολουθιών, ως $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, και, επιπλέον, ως $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Επομένως, εξ ορισμού

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{12.1}$$

Τέλος, για λόγους συνοπτικότητας, θα συμβολίζουμε με

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

τόσο τη σειρά $\sum_{k=1}^{n} a_k$, όσο και το όριό της $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Σε ορισμένες περιπτώσεις θα εξετάζουμε και σειρές οι οποίες προέρχονται από ακολουθίες με πεδίο ορισμού ένα ελαφρώς διαφορετικό σύνολο, για παράδειγμα το $\mathbb{N}^* - \{1\}$ ή το $\mathbb{N}$. Οι περιπτώσεις αυτές δεν παρουσιάζουν κάποια ιδιαίτερη δυσκολία· όταν έχουμε τέτοια περίπτωση, πάντως, θα αναφέρουμε ρητώς το πεδίο ορισμού της σειράς και της ακολουθίας από την οποία έχει προέλθει.

Επομένως, για να υπολογίσουμε το όριο μιας σειράς, πρέπει να κάνουμε δύο διαδοχικά βήματα:

1. Να υπολογίσουμε το άθροισμα εντός του ορίου, και, κατόπιν,

2. να υπολογίσουμε το ίδιο το όριο.

Παρατηρήστε ότι η διαδικασία μοιάζει αρκετά με τη διαδικασία υπολογισμού καταχρηστικών ολοκληρωμάτων. Απλώς, στην περίπτωση των καταχρηστικών ολοκληρωμάτων το πρώτο βήμα περιλαμβάνει ολοκλήρωση, αντί για άθροιση. Δυστυχώς, αν και η άθροιση είναι εν γένει πιο απλή διαδικασία, συνήθως είναι πολύ πιο δύσκολο να βρούμε ένα τύπο σε κλειστή μορφή για το άθροισμα που να επιτρέπει τον υπολογισμό του ορίου στο δεύτερο βήμα. Για αυτό το λόγο, η παραπάνω διαδικασία δεν εφαρμόζεται συχνά. Πάντως, είναι πολύ σημαντικό να μην ξεχνάμε ότι το $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι το όριο ενός αθροίσματος, δηλαδή ισχύει εξίσωση (12.1).

Μερικά παραδείγματα σειρών είναι τα ακόλουθα:

$$
\begin{aligned}
\sum \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots \\
\sum (-1)^k &= (-1) + 1 + (-1) + \dots \\
\sum \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots \\
\sum (-2)^k &= (-2) + (-2)^2 + (-2)^3 + \dots \\
\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\log k} &= \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} + \dots \\
\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots
\end{aligned}
$$

Παρατηρήστε ότι σε ορισμένα από τα παραπάνω αθροίσματα δεν αναφέρουμε όρια άθροισης. Σε αυτές τις περιπτώσεις, αυτομάτως εννοείται ότι η άθροιση γίνεται από το $k = 1$ έως το $k = \infty$. Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις η άθροιση γίνεται με διαφορετικά όρια, επομένως αυτά αναφέρονται ρητώς.

Μας ενδιαφέρουν οι σειρές διότι σε πολλά θεωρητικά προβλήματα, αλλά και πρακτικές εφαρμογές, προκύπτουν αποτελέσματα που μπορεί να μοντελοποιηθούν ώστε να έχουν τη μορφή ενός αθροίσματος όρων των οποίων το πλήθος αυξάνει απεριόριστα και, επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τείνει στο άπειρο. Για παράδειγμα:

1. Έστω διαδοχικοί πελάτες $1, 2, \dots$ ενός ζαχαροπλαστείου, κάθε ένας εκ των οποίων αγοράζει γλυκά αξίας a_k ευρώ. Οι συνολικές αγορές μετά και την άφιξη και του n-οστού πελάτη είναι $\sum_{k=1}^{n} a_k$, ενώ το μέσο ποσό αγοράς είναι

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}.$$

   Μάλιστα, σύμφωνα με τη Θεωρία Πιθανοτήτων, σε περίπτωση που τα ποσά a_i είναι τυχαίοι αριθμοί, υπό πολύ γενικές συνθήκες το παραπάνω άθροισμα θα συγκλίνει, με την έννοια του ορίου ακολουθίας, σε κάποιον αριθμό μ ο οποίος εκφράζει το τυπικό ποσό που ξοδεύει ο κάθε πελάτης.

2. Έστω μια μπάλα που αναπηδά σε μια επιφάνεια, και σε κάθε επαφή της με αυτήν χάνει ένα σταθερό ποσοστό της ενέργειάς της. Η συνολική απόσταση που θα διανύσει η μπάλα, και ο χρόνος που θα χρειαστεί αυτό για να γίνει, είναι σειρές. Δείτε την Άσκηση 12.1.

3. Έστω ένας δρομέας A που τρέχει με σταθερή ταχύτητα v_1 και μπροστά του, σε απόσταση L τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, ένας δρομέας B που τρέχει με ταχύτητα $v_2 < v_1$. Ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί ο A για να φτάσει τον B ισούται με τον χρόνο t_1 που χρειάζεται για να φτάσει ο A το σημείο όπου βρισκόταν ο B τη χρονική στιγμή t_0, συν τον επιπλέον χρόνο που θα χρειαστεί ο A για να φτάσει το σημείο όπου βρισκόταν ο B τη χρονική στιγμή t_1, κτλ. Επομένως, μπορούμε να γράφουμε τον συνολικό χρόνο που θα χρειαστεί ο A για να φτάσει τον B ως ένα άπειρο άθροισμα διαδοχικών χρονικών διαστημάτων. Ο συγκεκριμένος τρόπος να υπολογίσουμε τον συνολικό χρόνο που θα χρειαστεί μέχρι να φτάσει ο A τον B είναι, ομολογουμένως, περίεργος. Έχει, όμως, ιστορικό ενδιαφέρον: ο τρόπος αυτός χρησιμοποιήθηκε από πολλούς Έλληνες φιλόσοφους (ιδιαιτέρως τον Ζήνωνα) για να δημιουργήσουν διάφορα παράδοξα. Δείτε την Άσκηση 12.2.

Ας κάνουμε μερικές βασικές παρατηρήσεις. Πρώτον, δεν πρέπει ποτέ να ξεχνάμε ότι οι σειρές είναι και οι ίδιες ακολουθίες. Άρα, μπορούμε να μιλάμε για το όριό τους, και να εφαρμόζουμε θεωρήματα που ισχύουν για τις ακολουθίες. Μάλιστα, δεν είναι καν ένα συγκεκριμένο είδος ακολουθίας, αφού *οποιαδήποτε* ακολουθία μπορεί και αυτή να γραφτεί ως σειρά. Πράγματι, αν μας δοθεί η ακολουθία a_n, μπορούμε να ορίσουμε μια δεύτερη ακολουθία b_n ως

$$b_1 = a_1,\ b_2 = a_2 - a_1,\ a_3 - a_2,$$

και εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} b_k,$$

Άρα, μια σειρά είναι απλώς μια ακολουθία εκφρασμένη με συγκεκριμένο τρόπο, ως άθροισμα των όρων μιας άλλης ακολουθίας.

12.1.2 Παραδείγματα Σειρών

Παράδειγμα 12.1. (Αρμονική σειρά) Η πιο ενδιαφέρουσα σειρά είναι ίσως η ακόλουθη, γνωστή ως **αρμονική**:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots$$

Με δεδομένο ότι η σειρά αυτή αποτελείται από θετικούς όρους, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσα. Άρα, η αρμονική σειρά είτε θα έχει πεπερασμένο όριο, είτε θα τείνει στο άπειρο (Άσκηση 3.64). Πριν συνεχίσετε να διαβάζετε, αξίζει να αναρωτηθείτε τι από τα δύο συμβαίνει.

Οι περισσότεροι, όταν πρωτοβλέπουν την αρμονική σειρά, θεωρούν ότι αυτή θα πρέπει να συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό. Το επιχείρημα είναι ότι δεν είναι δυνατόν να πηγαίνει το άθροισμα όλων των όρων στο άπειρο, με δεδομένο ότι οι όροι τείνουν στο μηδέν! Αν, μάλιστα, χρησιμοποιήσουμε υπολογιστή για να ελέγξουμε αυτή μας την υπόθεση, πιθανόν να αισθανθούμε πιο σίγουροι σε αυτή, καθώς τα μερικά αθροίσματα αλλάζουν πολύ αργά. Για παράδειγμα, έχουμε τα ακόλουθα:

n	10000	10001	10002	10003	10004
s_n	9.7876	9.7877	9.7878	9.7879	9.7880

Στην πραγματικότητα, η αρμονική σειρά αποκλίνει! Ο λόγος είναι ότι, ναι μεν οι διαδοχικοί της όροι τείνουν, *μεμονωμένα*, στο 0, *το άθροισμα*, όμως, αυτών των όρων, τείνει στο άπειρο! Αυτό ακούγεται παράδοξο, κάλλιστα όμως μπορεί να συμβεί.

Υπάρχει, μάλιστα, και μια στοιχειώδης απόδειξη ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει. Συγκεκριμένα, μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τους όρους της σειράς ως εξής:

$$\begin{aligned}\sum \frac{1}{k} = \; & 1 \\ & +\frac{1}{2} \\ & +\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \\ & +\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} \\ & +\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16} \\ & +\dots\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι το άθροισμα των όρων της κάθε γραμμής, με εξαίρεση τη δεύτερη γραμμή, είναι πάντα μεγαλύτερο του $\frac{1}{2}$. Υπάρχουν επιπλέον, *άπειρες* τέτοιες γραμμές που μπορούμε να δημιουργήσουμε. Επομένως, η αρμονική σειρά δεν είναι φραγμένη. Πράγματι, αν υπήρχε κάποιο φράγμα M, αρκεί να περιλαμβάναμε $2(\lfloor M\rfloor + 1)$ γραμμές όπως τις άνω, και θα το ξεπερνάγαμε. Αφού λοιπόν η αρμονική σειρά δεν είναι φραγμένη, θα απειρίζεται (Άσκηση 3.64).

Μπορεί, μάλιστα, να αποδειχθεί, ότι η αρμονική σειρά τείνει στο ∞ περίπου όπως η συνάρτηση του λογαρίθμου, και συγκεκριμένα ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right] = \gamma,$$

όπου $\gamma \simeq 0.5772$ είναι μια σταθερά γνωστή ως η σταθερά του Euler.

Παράδειγμα 12.2. (Γεωμετρικές σειρές) Μια πολύ κοινή κατηγορία σειρών, που εμφανίζονται συχνά σε ασκήσεις είναι οι σειρές που έχουν τη μορφή

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots, \tag{12.2}$$

όπου το a είναι μια πραγματική σταθερά. Οι σειρές αυτές καλούνται **γεωμετρικές**.

Η μορφή που έχει το άθροισμα (12.2) είναι τόσο απλή που μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς υπό ποιες προϋποθέσεις και σε ποια τιμή συγκλίνει η σειρά. Πράγματι, από την Άσκηση 1.10 έχουμε ότι

$$(1 - a^{n+1}) = (1-a)(1 + a + a^2 + \dots + a^n),$$

επομένως τα μερικά αθροίσματα ισούνται, εφόσον $a \neq 1$, με

$$s_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}. \tag{12.3}$$

Εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις για την τιμή του a:

1. Έστω, καταρχάς, ότι $|a| < 1$. Σε αυτή την περίπτωση, με χρήση της Άσκησης 12.3 προκύπτει πως $a^{n+1} \to 0$ και, επομένως,
$$\sum a^k = \frac{1}{1-a}.$$

2. Έστω πως $a > 1$. Τότε, και πάλι με χρήση της Άσκησης 12.3, προκύπτει πως

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a^k = \infty.$$

3. Όταν $a = 1$, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Άσκηση 12.3, διότι δεν μπορούμε να γράψουμε την (12.3), αλλά παρατηρούμε πως

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 1 = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

4. Τέλος, αν $a \leq -1$, από την Άσκηση 12.3 προκύπτει πως δεν υπάρχει το όριο, ούτε ως πεπερασμένο ούτε ως άπειρο.

   Μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι η περίπτωση $a = -1$, οπότε η γεωμετρική σειρά γίνεται η

$$\sum (-1)^k = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \dots,$$

   η οποία, σύμφωνα με τα άνω, δεν συγκλίνει κάπου. Πράγματι, τα διαδοχικά μερικά αθροίσματα «ταλαντώνονται» μεταξύ των τιμών 1 και 0.

Ασκήσεις

12.1. (Αναπηδήσεις) Αφήνουμε μια μεταλλική σφαίρα από ύψος ενός μέτρου να αναπηδήσει σε ένα μεταλλικό δάπεδο. Λόγω τριβών και άλλων λόγων, σε κάθε πρόσκρουση στο δάπεδο η σφαίρα χάνει το $\frac{1}{10}$ της ενέργειας που της έχει απομείνει. (Επομένως, μετά την πρώτη αναπήδηση, η σφαίρα φτάνει μέχρι ύψος 90 εκατοστών.) Να προσδιορίσετε τη συνολική απόσταση που θα διανύσει η σφαίρα μέχρι να ακινητοποιηθεί και τον χρόνο που θα χρειαστεί για να γίνει αυτό.

12.2. (Δρομείς) Έστω δύο δρομείς, ο A και ο B, με ταχύτητες v_1 και $v_2 < v_1$ αντίστοιχα, κινούμενοι επί του άξονα του x και προς τη θετική κατεύθυνση. Στην αρχή του χρόνου ο βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και ο B στη θέση $x = L > 0$. Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα που θα χρειαστεί μέχρι ο A να φτάσει τον B, και τη χρονική στιγμή που θα γίνει αυτό, με δύο τρόπους: πρώτον χρησιμοποιώντας τη σχετική ταχύτητα του A ως προς τον B, και δεύτερον γράφοντας τις ζητούμενες ποσότητες ως σειρές απείρων όρων.

12.3. (Γεωμετρική πρόοδος r^n) Να δείξετε ότι για την ακολουθία $a_n = r^n$ ισχύουν τα εξής:

1. Όταν $|r| < 1$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$.
2. Όταν $r > 1$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$.
3. Όταν $r = 1$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 1$.
4. Όταν $r \leq -1$, τότε το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ δεν υπάρχει, ούτε ως πεπερασμένο ούτε ως άπειρο.

Η ακολουθία $a_n = r^n$ είναι γνωστή ως **γεωμετρική πρόοδος**.

12.2 Βασικές Ιδιότητες Σειρών

Παρατηρήστε ότι, όπως και με τις ακολουθίες, για μια δοσμένη σειρά $\sum a_k$ μπορεί να συμβαίνουν τα ακόλουθα:

1. Σύγκλιση σε πραγματικό αριθμό: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = L$.
2. Σύγκλιση στο ∞: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$.
3. Σύγκλιση στο $-\infty$: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty$.
4. Μη σύγκλιση: Δεν συμβαίνει τίποτα από τα παραπάνω. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι τα διαδοχικά αθροίσματα θα παρουσιάζουν κάποιο είδος «ταλάντωσης».

Για να είμαστε συνοπτικοί στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου, θα αναφερόμαστε στις παραπάνω περιπτώσεις ως **είδη σύγκλισης**, ακόμα και την τελευταία.

Παρατηρήστε ότι σε περίπτωση που η σειρά αποτελείται από μη αρνητικούς όρους, και επομένως είναι αύξουσα, από την Άσκηση 3.64 προκύπτει ότι τα μόνα δυνατά είδη σύγκλισης είναι τα πρώτα δύο, δηλαδή έχουμε σύγκλιση σε πραγματικό αριθμό L, αν η σειρά είναι φραγμένη, ή στο ∞, αν η σειρά δεν είναι φραγμένη.

Αν μας δοθεί μια σειρά, ένα εύλογο ερώτημα που μπορούμε να διατυπώσουμε είναι σε ποιο είδος σύγκλισης εμπίπτει, και ειδικά αν εμπίπτει στο πρώτο, ποια είναι η τιμή του L. Δυστυχώς, με τις γνώσεις που διαθέτουμε εδώ, είναι λίγες οι συγκλίνουσες σειρές για τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο L. Ένα παράδειγμα είναι οι γεωμετρικές σειρές που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Στη συνέχεια του κεφαλαίου, θα αρκεστούμε στο να μπορούμε να αποφανθούμε σε ποιο είδος σύγκλισης εμπίπτει η σειρά, χωρίς να προσδιορίζεται το L, σε περίπτωση που εμπίπτει στο πρώτο. Θα αναπτύξουμε, για αυτό το σκοπό, μια σειρά από χρήσιμα κριτήρια. Όπως θα δούμε, τα αποτελέσματά μας θα είναι συχνά μη αναμενόμενα.

Στη συνέχεια αυτής της παραγράφου θα δούμε μερικές βασικές ιδιότητες των σειρών, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια στην ανάπτυξη της θεωρίας μας. Σε όλες τις περιπτώσεις, οι ιδιότητες προκύπτουν από αντίστοιχες ιδιότητες των ακολουθιών και γι' αυτό οι αποδείξεις τους, που είναι όλες απλές, ζητούνται στις ασκήσεις.

Πρόταση 12.1. ***(Αποκοπή όρων)*** *Έστω η σειρά $\sum a_k$ και η σειρά $\sum a_{k+M}$ που δημιουργείται αν αφαιρέσουμε από το άθροισμα τους πρώτους M όρους της, όπου $M \in \mathbb{N}^*$. Η νέα σειρά $\sum a_{k+M}$ παρουσιάζει το ίδιο είδος σύγκλισης με την $\sum a_k$. Επιπλέον, σε περίπτωση που $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = L$, με $L \in \mathbb{R}$, τότε*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+M} = L - \sum_{k=1}^{M} a_k.$$

Το αποτέλεσμα είναι διαισθητικά ξεκάθαρο: το τι συμβαίνει με τη σειρά καθορίζεται από τη συμπεριφορά των άπειρων όρων της καθώς $n \to \infty$, και όχι από οποιοδήποτε αρχικό πεπερασμένο πλήθος όρων, που πάντοτε αθροίζονται σε μια πεπερασμένη τιμή.

Πρόταση 12.2. ***(Προσθήκη όρων)*** *Έστω η σειρά $\sum a_k$ και η σειρά $\sum b_k$ με $b_k = a_{k-M}$ όταν $k > M$ όπου $M \in \mathbb{N}^*$, δηλαδή η σειρά*

$$b_1,\ b_2, \ldots, b_{M-1}, b_M, a_1, a_2, \ldots$$

που δημιουργείται αν προσθέσουμε M όρους στην αρχή της $\sum a_k$. Η νέα σειρά $\sum b_k$ παρουσιάζει το ίδιο είδος σύγκλισης με την $\sum a_k$. Επιπλέον, σε περίπτωση που $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = L$, με $L \in \mathbb{R}$, τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = L + \sum_{k=1}^{M} b_k.$$

Πρόταση 12.3. ***(Γινόμενο σειράς με αριθμό)*** *Έστω η σειρά* $\sum a_k$ *και έστω αριθμός* $c \in \mathbb{R}^*$.

1. *Αν* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = L \in \mathbb{R}$, *τότε* $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k = cL \in \mathbb{R}$.
2. *Αν* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$, *τότε* $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = \infty$, *αν* $c > 0$, *και* $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = -\infty$, *αν* $c < 0$.
3. *Αν* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty$, *τότε* $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = -\infty$, *αν* $c > 0$, *και* $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = \infty$, *αν* $c < 0$.
4. *Αν η* $\sum a_k$ *δεν συγκλίνει, τότε δεν συγκλίνει και η* $\sum ca_k$.

Πρόταση 12.4. ***(Άθροισμα σειρών)*** *Έστω οι σειρές* $\sum a_k$ *και* $\sum b_k$, *και έστω η νέα σειρά*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k).$$

Ισχύουν τα ακόλουθα:

1. *Αν οι* $\sum a_k$, $\sum b_k$ *συγκλίνουν σε πραγματικούς αριθμούς* L *και* M, *τότε*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k).$$

2. *Αν οι* $\sum a_k$, $\sum b_k$ *συγκλίνουν και οι δύο στο* ∞, *τότε και*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty.$$

3. *Αν οι* $\sum a_k$, $\sum b_k$ *συγκλίνουν και οι δύο στο* $-\infty$, *τότε και*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = -\infty.$$

4. *Αν η μία σειρά συγκλίνει, είτε σε κάποιον πραγματικό αριθμό είτε στο* $\pm\infty$, *ενώ η άλλη δεν συγκλίνει, τότε το άθροισμα δεν συγκλίνει.*

Παρατηρήστε ότι οι περιπτώσεις που αναφέρονται στο παραπάνω θεώρημα είναι ορισμένες μόνο από αυτές που υπάρχουν. Στις περιπτώσεις που δεν αναφέρονται, το άθροισμα μπορεί να εμπίπτει σε οποιοδήποτε από τα 4 είδη σύγκλισης (Δείτε την Άσκηση 12.8.)

Πρόταση 12.5. *Αν η σειρά* $\sum a_k$ *συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό* L, *τότε πρέπει* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Απόδειξη: Εξ υποθέσεως, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = L,$$

επομένως θα ισχύει και ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} a_k = L.$$

(Δείτε την Άσκηση 3.70.) Στη συνέχεια, έχουμε:

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L - L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Παρατηρήστε ότι στην τελευταία συνεπαγωγή χρησιμοποιήσαμε ακόμα μια φορά την Άσκηση 3.70. ■

Το κριτήριο αυτό είναι από τα πλέον κακομεταχειρισμένα κομμάτια της θεωρίας των σειρών· πολλοί νομίζουν ότι το κριτήριο δεν είναι αναγκαίο, αλλά *ικανό*, δηλαδή αν το όριο των επιμέρους όρων είναι το 0, η σειρά, δηλαδή το άθροισμα όλων των όρων της a_n, θα πρέπει να είναι πεπερασμένο. Αυτό δεν ισχύει, και ένα αντιπαράδειγμα που έχουμε ήδη δει είναι η αρμονική σειρά!

Ασκήσεις

12.4. **(Αποκοπή όρων)** Αποδείξτε την Πρόταση 12.1.

12.5. **(Προσθήκη όρων)** Αποδείξτε την Πρόταση 12.2.

12.6. **(Προσθήκη όρων)** Αποδείξτε την Πρόταση 12.3.

12.7. **(Προσθήκη όρων)** Αποδείξτε την Πρόταση 12.4.

12.8. **(Απροσδιοριστίες)** Να δείξετε ότι στις περιπτώσεις που δεν αναφέρονται στην Πρόταση 12.3 το άθροισμα μπορεί να εμπίπτει σε οποιοδήποτε από τα 4 είδη σύγκλισης.

12.9. **(Μέσος όρος)** Να δείξετε ότι αν $a_n \to L$, τότε και $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = L$.

12.3 Σειρές μη Αρνητικών Όρων

Πριν παρουσιάσουμε το επόμενο θεώρημα, θυμίζουμε οτι μια σειρά μη αρνητικών όρων (και άρα με αύξουσα ακολουθία μερικών αθροισμάτων), συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι φραγμένη.

Θεώρημα 12.1. ***(Κριτήριο σύγκρισης)*** *Έστω δύο ακολουθίες $a_n, b_n \geq 0$. Αν υπάρχουν $c \in \mathbb{R}, c > 0$, και $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε*

$$\forall n > n_0, \;\; a_n \leq cb_n, \tag{12.4}$$

τότε αν συγκλίνει η $\sum b_n$, συγκλίνει και η $\sum a_n$.

Απόδειξη: Παρατηρήστε ότι αν συγκλίνει η $\sum b_n$, θα συγκλίνει και η $\sum b_{n+n_0}$, άρα θα είναι φραγμένα τα μερικά αθροίσματά της. Όμως, από την (12.4) έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{n_0+i} \leq c \sum_{i=1}^{n} b_{n_0+i} \leq cM,$$

όπου M το φράγμα των μερικών αθροισμάτων της $\sum b_{n+n_0}$. Άρα, θα είναι φραγμένα και τα μερικά αθροίσματα της $\sum a_{n+n_0}$, άρα, από την αρχική μας παρατήρηση, θα συγκλίνει και η $\sum a_{n+n_0}$, άρα θα συγκλίνει και η $\sum a_n$. ■

Παράδειγμα 12.3. Η $\sum \frac{1}{n!}$ συγκλίνει, γιατί

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}$$

για κάθε $n > n_0 = 4$, ενώ η $\sum \frac{1}{2^n}$ συγκλίνει ως γεωμετρική ($r = \frac{1}{2}$).

Θεώρημα 12.2. ***(Κριτήριο σύγκρισης στο όριο)*** *Έστω δύο ακολουθίες $a_n, b_n > 0$ και*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c.$$

Τότε:

1. *Αν $c \neq 0, \infty$, τότε η $\sum a_n$ συγκλίνει ανν συγκλίνει και η $\sum b_n$.*
2. *Αν $c = 0$, τότε αν συγκλίνει η $\sum b_n$ συγκλίνει και η $\sum a_n$, ενώ αν αποκλίνει η $\sum a_n$ αποκλίνει και η $\sum b_n$.*
3. *Αν $c = \infty$, τότε αν συγκλίνει η $\sum a_n$ συγκλίνει και η $\sum b_n$, ενώ αν αποκλίνει η $\sum b_n$ αποκλίνει και η $\sum a_n$.*

Απόδειξη: Καταρχάς παρατηρήστε ότι όλα τα σκέλη είναι διαισθητικά προφανή.

Θα αποδείξουμε το πρώτο σκέλος, καθώς τα άλλα προκύπτουν με παρόμοιο τρόπο. Εξ' ορισμού του ορίου, για $\epsilon = \frac{c}{2} > 0$ θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\forall n > n_0, \;\; \frac{c}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3c}{2} \Leftrightarrow \frac{c}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3c}{2} b_n.$$

Το ζητούμενο προκύπτει εφαρμόζοντας το κριτήριο σύγκρισης δύο φορές, μια για την ανισότητα

$$(c/2)b_n \leq a_n \Leftrightarrow b_n \leq (2/c)a_n$$

και μια φορά για την ανισότητα $a_n \leq (3c/2)b_n$. ■

Παράδειγμα 12.4. Αφού η $\sum \frac{1}{n}$ αποκλίνει, θα αποκλίνει και η $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, αφού

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/\sqrt{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n(n+1)}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Επίσης, αφού η $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ συγκλίνει (ως γεωμετρική), και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\log n}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0,$$

θα συγκλίνει και η $\sum \frac{1}{\log n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Θεώρημα 12.3. ***(Κριτήριο λόγου του d' Alembert)*** *Έστω ακολουθία $a_n > 0$ και*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r.$$

1. *Αν $r > 1$, η σειρά $\sum a_n$ αποκλίνει (και για την ακρίβεια τείνει στο ∞).*
2. *Αν $r < 1$, η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει.*

Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

1. Αν $r = 1$, δεν μπορούμε να αποφανθούμε. Δηλαδή και τα δύο παραπάνω ενδεχόμενα (σύγκλιση, απόκλιση) είναι δυνατά.

2. Βεβαιωθείτε ότι έχετε καταλάβει το κριτήριο. Στην πρώτη περίπτωση, η σειρά συμπεριφέρεται ως αποκλίνουσα γεωμετρική, ενώ στη δεύτερη περίπτωση συμπεριφέρεται σαν συγκλίνουσα γεωμετρική. (Παρατηρήστε ότι για τη γεωμετρική πρόοδο $a_n = r^n$ ισχύει $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ πάντα, και όχι μόνο στο όριο.)

3. Το κριτήριο του λόγου είναι εύκολο να εφαρμοστεί όταν η μορφή της a_n είναι τέτοια ώστε ο λόγος $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ να έχει απλή μορφή.

Απόδειξη: Θα εξετάσουμε πρώτα το ενδεχόμενο $r < 1$. Παρατηρήστε ότι, από τον ορισμό του ορίου, προκύπτει πως υπάρχουν $n_0 \in \mathbb{N}$ και $r_0 \in \mathbb{R}$ με $r < r_0 < 1$ τέτοια ώστε για κάθε $n > n_0$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r_0 \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{r_0^{n+1}} < \frac{a_n}{r_0^n},$$

άρα η a_n/r_0^n είναι φθίνουσα για $n > n_0$, και συνεπώς υπάρχει K τέτοιο ώστε

$$\forall n > n_0, \;\; \frac{a_n}{r_0^n} \leq K \Leftrightarrow a_n \leq K r_0^n,$$

και από το κριτήριο της σύγκρισης, επειδή συγκλίνει η $\sum r_0^n$, θα συγκλίνει και η $\sum a_n$.

Εξετάζουμε τώρα το ενδεχόμενο $r > 1$. Παρατηρήστε ότι, από τον ορισμό του ορίου, προκύπτει πως υπάρχουν $n_0 \in \mathbb{N}$ και $r_0 \in \mathbb{R}$ με $r > r_0 > 1$ τέτοια ώστε για κάθε $n > n_0$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > r_0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n,$$

οπότε για όλα τα $n > n_0$, $a_n > a_{n_0}$, οπότε δεν έχουμε σύγκλιση της a_n στο 0, άρα και η σειρά δεν μπορεί να συγκλίνει. ■

Παράδειγμα 12.5. Θα αποφανθούμε για τη σύγκλιση των παρακάτω σειρών χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου:

$$\sum \frac{(n!)^2}{n(2n)!}, \quad \sum \frac{2^n n!}{n^n}, \quad \sum \frac{3^n n!}{n^n}$$

Έχουμε, κατά περίπτωση:

1. Παρατηρήστε ότι όλοι οι όροι $a_n > 0$, άρα μπορώ να χρησιμοποιήσω το κριτήριο του λόγου. Έχουμε:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left[\frac{[(n+1)!]^2}{(n+1)(2(n+1))!}\right]\left[\frac{[n!]^2}{n(2n)!}\right]^{-1}$$
$$= \frac{n(n+1)!(n+1)!(2n)!}{(n+1)[2(n+1)]!n!n!} = \frac{n(n+1)(n+1)}{(n+1)(2n+1)(2n+2)} \to \frac{1}{4},$$

άρα βάσει του κριτηρίου του λόγου η σειρά συγκλίνει.

2. Όλοι οι όροι είναι θετικοί, άρα

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left[\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right]\left[\frac{2^n n!}{n^n}\right]^{-1} = \frac{2^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}2^n n!} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{2}{e} < 1.$$

Επειδή το όριο είναι μικρότερο της μονάδας, η σειρά συγκλίνει.

3. Σε αυτή την περίπτωση, επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία, προκύπτει:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{e} > 1,$$

άρα με αυτή τη μικρή αλλαγή στη μορφή των όρων, η σειρά αποκλίνει.

Παράδειγμα 12.6. Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου για τη σειρά $\sum 1/n^p$, έχουμε:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left[\frac{1}{(n+1)^p}\right]\left[\frac{1}{n^p}\right]^{-1} = \left[\frac{n}{n+1}\right]^p = \left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right]^p \to 1.$$

Άρα βρισκόμαστε στην περίπτωση που δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Θεώρημα 12.4. ***(Κριτήριο της ρίζας του Cauchy)*** *Έστω ακολουθία $a_n > 0$ και*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = r.$$

1. *Αν $r > 1$, η σειρά $\sum a_n$ αποκλίνει (και για την ακρίβεια τείνει στο ∞).*

2. *Αν $r < 1$, η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Η απόδειξη παραλείπεται, γιατί μοιάζει αρκετά με την απόδειξη του κριτηρίου του λόγου. ■

Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

1. Αν $r = 1$, δεν μπορούμε να αποφανθούμε. Δηλαδή και τα δύο παραπάνω ενδεχόμενα είναι δυνατά.

2. Βεβαιωθείτε ότι έχετε καταλάβει το κριτήριο. Στην πρώτη περίπτωση, η σειρά συμπεριφέρεται ως συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά, ενώ στη δεύτερη περίπτωση συμπεριφέρεται σαν αποκλίνουσα γεωμετρική σειρά. (Παρατηρήστε ότι για τη γεωμετρική πρόοδο $a_n = r^n$ ισχύει $(a_n)^{\frac{1}{n}} = r$ ακριβώς, και όχι μόνο στο όριο.)

3. Το κριτήριο της ρίζας είναι εύκολο να εφαρμοστεί όταν η μορφή της a_n είναι τέτοια ώστε η ρίζα $(a_n)^{\frac{1}{n}}$ να έχει απλή μορφή.

Παράδειγμα 12.7. Θα βρούμε αν συγκλίνουν οι ακόλουθες σειρές, εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου:

$$\sum \left(n^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2}\right)^n, \quad \sum e^{-n^2}$$

Έχουμε, κατά περίπτωση:

1. Παρατηρήστε πως
$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2}.$$
Η $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ τείνει στο 1 για $x \to \infty$, οπότε θα έχουμε ότι η $f(n) = n^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2}$ τείνει στο $\frac{1}{2}$ για $n \to \infty$, και η σειρά συγκλίνει.

2. Λόγω της μορφής των όρων της σειράς, είναι και πάλι προφανές ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της ρίζας. Πράγματι:
$$a_n^{\frac{1}{n}} = \left[e^{-n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = e^{-n} \to 0,$$
και η σειρά συγκλίνει.

Παράδειγμα 12.8. Εφαρμόζοντας το κριτήριο της ρίζας για τη σειρά $\sum 1/n^p$, έχουμε:

$$\left[\frac{1}{n^p}\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^p} \to 1,$$

άρα και πάλι δεν μπορούμε να αποφανθούμε. (Χρησιμοποιήσαμε το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ του προηγούμενου παραδείγματος.)

Θεώρημα 12.5. ***(Κριτήριο του ολοκληρώματος)*** *Έστω $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ θετική φθίνουσα συνάρτηση. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ συγκλίνει αν και μόνο αν το καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} f$ είναι πεπερασμένο.*

Το κριτήριο είναι πολύ χρήσιμο, διότι εν γένει είναι πολύ πιο εύκολο να υπολογίζουμε ολοκληρώματα από το να υπολογίζουμε αθροίσματα.

Απόδειξη: Καταρχάς παρατηρήστε ότι, επειδή η f είναι φθίνουσα, ισχύει ότι

$$\sum_{i=2}^{n} f(i) \leq \int_1^n f \leq \sum_{i=1}^{n-1} f(i). \tag{12.5}$$

Αν η ακολουθία $\int_1^n f(x)\,dx$ συγκλίνει, ως αύξουσα (η f είναι θετική) είναι και φραγμένη, άρα από την πρώτη ανισότητα της (12.5) θα είναι φραγμένη και η ακολουθία $\sum_{k=2}^n f(k)$, άρα και η $\sum_{k=1}^n f(k)$, και ως αύξουσα (η f είναι θετική) θα συγκλίνει.

Παρόμοια, αν συγκλίνει η $\sum_{k=1}^n f(k)$, θα είναι φραγμένη, άρα από τη δεύτερη ανισότητα της (12.5) θα είναι φραγμένη και η $\int_1^n f(x)\,dx$, και ως αύξουσα (η f είναι θετική) θα συγκλίνει.

Άρα η σειρά συγκλίνει ανν συγκλίνει το καταχρηστικό ολοκλήρωμα, και επομένως η σειρά αποκλίνει ανν το καταχρηστικό ολοκλήρωμα αποκλίνει. ∎

Παράδειγμα 12.9. Θα δείξουμε ότι η σειρά $\sum \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$, συγκλίνει ανν $p > 1$. Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του ολοκληρώματος για τη συνάρτηση $f(x) = x^{-p}$. Πρέπει να εξετάσουμε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} \frac{n^{1-p}-1}{1-p}, & p \neq 1, \\ \log n, & p = 1. \end{cases}$$

Άρα, αν $p > 1$, η n^{1-p} τείνει στο 0, άρα το καταχρηστικό ολοκλήρωμα συγκλίνει, και από το κριτήριο συγκλίνει και η σειρά. Αν $p = 1$, $\log n \to \infty$, άρα το καταχρηστικό ολοκλήρωμα αποκλίνει, και μαζί του αποκλίνει και η σειρά. Τέλος, αν $p < 1$, η n^{1-p} τείνει στο ∞, άρα και πάλι το καταχρηστικό ολοκλήρωμα αποκλίνει, και μαζί του αποκλίνει και η σειρά.

Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

1. Συνήθως η χρήση ενός κριτηρίου είναι πολύ απλούστερη από τη χρήση των υπόλοιπων, αν και δεν είναι πάντα προφανές ποιο είναι αυτό.

2. Με τα κριτήρια μπορούμε να διαπιστώσουμε αν μια σειρά συγκλίνει ή όχι. Δεν μπορούμε όμως να διαπιστώσουμε σε ποιο αριθμό συγκλίνει. Συνήθως αυτό είναι πολύ δυσκολότερο, εκτός ορισμένων εξαιρέσεων (π.χ. τηλεσκοπικών σειρών.)

Παράδειγμα 12.10. Θα εξετάσουμε τη σύγκλιση της $\sum \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$. Το πιο απλό είναι να παρατηρήσουμε πως η σειρά είναι το άθροισμα δύο σειρών που συγκλίνουν, ως γεωμετρικές, και επομένως προκύπτει ότι συγκλίνει και η δοσμένη. (Σε ποιο όριο συγκλίνει;)

Παράδειγμα 12.11. Θα εξετάσουμε τη σύγκλιση της $\sum n \tan(1/n)$. Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n \tan\left(\frac{1}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \left[\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{-1} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \left[\lim_{x\to 0^+} \cos(x)\right]^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι αν $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L$, τότε και $\lim_{n\to\infty} f(1/n) = L$. Άρα, αφού οι όροι της σειράς δεν συγκλίνουν στο 0, από το αναγκαίο κριτήριο του Cauchy, η σειρά αποκλίνει.

Παράδειγμα 12.12. Θα εξετάσουμε τη σύγκλιση της $\sum (n+\sqrt{n})(n+2)/n!$. Παρατηρούμε πως:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left[\frac{(n+1+\sqrt{n+1})(n+3)}{(n+1)!}\right] \left[\frac{(n+\sqrt{n})(n+2)}{n!}\right]^{-1} \\ &= \frac{(n+1+\sqrt{n+1})(n+3)}{(n+1)(n+\sqrt{n})(n+2)} \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{(1+1/n+\sqrt{1/n+1/n^2})(1+3/n)}{(1+1/n)(1+1/\sqrt{n})(1+2/n)}\right], \end{aligned}$$

που προφανώς τείνει στο 0, οπότε από το κριτήριο του λόγου προκύπτει ότι η σειρά συγκλίνει.

Παράδειγμα 12.13. Θα εξετάσουμε τη σύγκλιση της $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n |\cos\frac{\pi n^2}{11234}|$. Παρατηρούμε πως όλοι οι όροι της είναι θετικοί, και επίσης πως είναι, όρο προς όρο, μικρότερη από τη γεωμετρική σειρά $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ η οποία είναι γνωστό πως συγκλίνει. Άρα, θα συγκλίνει και η $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n |\cos\frac{\pi n^2}{11234}|$.

Παράδειγμα 12.14. Θα εξετάσουμε τη σύγκλιση της $\sum n^{10000}e^{-n}$. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου, προκύπτει πως

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{10000}e^{-n-1}}{n^{10000}e^{-n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10000} e^{-1} \to e^{-1},$$

άρα η σειρά συγκλίνει.

Παράδειγμα 12.15. Θα εξετάσουμε τη σύγκλιση της $\sum \frac{n!}{10000^n}$. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου, προκύπτει πως

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left[\frac{(n+1)!}{10000^{n+1}}\right] \Big/ \left[\frac{n!}{10000^n}\right] = \frac{n+1}{10000} \to \infty,$$

άρα η σειρά αποκλίνει.

Παράδειγμα 12.16. Θα εξετάσουμε τη σύγκλιση της

$$\sum (\log n)^n / e^{n^2+n+1}.$$

Λόγω των δυνάμεων του n, η προφανής προσέγγιση είναι να εφαρμόσουμε το κριτήριο της ρίζας. Πράγματι, έστω $a_n = (\log n)^n / e^{n^2+n+1}$. Έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{e^{n+1+\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{e^{n+1+1/n}\left(1 - 1/n^2\right)} = 0.$$

Στη δεύτερη ισότητα, εφαρμόσαμε τον κανόνα του L'Hôpital. Άρα, από το κριτήριο της ρίζας, προκύπτει πως η σειρά συγκλίνει.

Παράδειγμα 12.17. Θα εξετάσουμε τη σύγκλιση της $\sum (n + \sqrt{n})/(2n^3 - 1)$. Αν δοκιμάσουμε το κριτήριο του λόγου δεν θα βρούμε τη σύγκλιση, καθώς ο σχετικός λόγος θα συγκλίνει στο 1. (Δοκιμάστε το!) Το κριτήριο της ρίζας δεν φαίνεται να είναι εύκολο στην εφαρμογή, και επιπλέον η σχετική ρίζα θα συγκλίνει στο 1. Όμως, αν $a_n = (n + \sqrt{n})/(2n^3 - 1)$ οι όροι της σειράς, παρατηρούμε πως

$$\frac{a_n}{1/n^2} = \frac{n^3 + n^2\sqrt{n}}{2n^3 - 1} = \frac{1 + n^{-1/2}}{2 - n^{-3}} \to \frac{1}{2} > 0,$$

άρα, από το κριτήριο της σύγκρισης στο όριο, αφού συγκλίνει η $\sum \left(1/n^2\right)$ θα συγκλίνει και η δοσμένη.

Παράδειγμα 12.18. Θα εξετάσουμε τη σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} n^2/(n^3 + 4n - 5)$. Αν δοκιμάσουμε το κριτήριο του λόγου, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα δεν θα βρούμε τη σύγκλιση, καθώς ο σχετικός λόγος θα συγκλίνει στο 1. Επίσης, το κριτήριο της ρίζας δεν φαίνεται να είναι κατάλληλο. Παρατηρούμε όμως ότι οι όροι a_n της συγκεκριμένης ακολουθίας, για μεγάλα n, είναι περίπου ίσοι με $\frac{1}{n}$. Η αντίστοιχη σειρά είναι η αρμονική, που αποκλίνει. Άρα η σειρά αναμένουμε να αποκλίνει. Για να το δείξουμε αυστηρά, χρησιμοποιούμε το κριτήριο σύγκρισης στο όριο. Έστω $b_n = \frac{1}{n}$. Τότε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n^2}{n^3+4n-5}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^3}{n^3+4n-5} \to 1,$$

και με δεδομένο ότι αποκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, από το κριτήριο σύγκλισης στο όριο αποκλίνει και η δοσμένη.

Παράδειγμα 12.19. Θα εξετάσουμε τη σύγκλιση της

$$\sum (n^3 \left[2 + \sin n\right]^n)/4^n.$$

Έστω $a_n = (n^3 \left[2 + \sin n\right]^n)/4^n$ οι όροι της σειράς. Λόγω της μορφής τους, είναι λογικό να προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο της ρίζας. Αν το κάνουμε, θα διαπιστώσουμε ότι δεν υπάρχει όριο, λόγω του όρου $\sin n$. (Μπορείτε να το επιβεβαιώσετε;) Αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί αν ορίσουμε την ακολουθία $b_n = (n^3 \left[2 + 1\right]^n)/4^n = n^3(3/4)^n$. Παρατηρούμε πως

$$0 \leq a_n \leq b_n.$$

Σύμφωνα με το κριτήριο της σύγκρισης, η $\sum a_n$ θα συγκλίνει αν συγκλίνει και η $\sum b_n$. Η $\sum b_n$ όμως συγκλίνει, γιατί από το κριτήριο της ρίζας έχουμε:

$$(b_n)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{3}{n}} \left(\frac{3}{4}\right) \to \left(\frac{3}{4}\right) < 1.$$

Παρατηρήστε πως χρησιμοποιήσαμε το όριο $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

Παράδειγμα 12.20. Θα εξετάσουμε τη σύγκλιση της $\sum \left(\frac{1}{n} - n^{10000}e^{-n}\right)$. Η σειρά αποτελείται από δύο σειρές, εκ των οποίων η πρώτη είναι η αρμονική, και αποκλίνει, ενώ η δεύτερη συγκλίνει, σύμφωνα με το Παράδειγμα 12.14. Συνεπώς, η σειρά πρέπει να αποκλίνει. Πράγματι, έστω πως συνέκλινε. Τότε, αφού συγκλίνει και η $\sum n^{10000}e^{-n}$, από γνωστό θεώρημα θα πρέπει να συγκλίνει και το άθροισμα τους, που είναι η $\sum \frac{1}{n}$, και έχουμε άτοπο.

Παράδειγμα 12.21. Θα εξετάσουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι ούτε το κριτήριο της ρίζας, ούτε το κριτήριο του λόγου μπορεί να δώσει κάποια λύση, και θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του ολοκληρώματος. Παρατηρήστε ότι οι όροι της σειράς ξεκινούν από το $n = 2$, και επομένως το κριτήριο θα εφαρμοστεί ανάλογα.

Πρέπει να δούμε αν συγκλίνει το $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^2}$. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = \log x \Rightarrow dy = \frac{dx}{x}$ έχουμε:

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^2} = \int \frac{dy}{y^2} = -y^{-1} + C = -\frac{1}{\log x} + C.$$

Σχετικά με τη σειρά, σύμφωνα με το κριτήριο του ολοκληρώματος, τα

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}, \qquad \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\, dx$$

συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα. Παρατηρούμε όμως πως

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\, dx = \int_2^{\infty} \left(-\frac{1}{\log x}\right)' dx = -0 + (\log 2)^{-1},$$

και επομένως προκύπτει πως η σειρά συγκλίνει.

Ασκήσεις

12.10. Να προσδιορίσετε αν συγκλίνουν ή όχι οι ακόλουθες σειρές:

1. $\sum \frac{n^2 \log n}{n^5+n^3+n}$.
2. $\sum \frac{1}{n \sin(1/n)}$.
3. $\sum \frac{n!}{e^{n^2}}$.
4. $\sum \frac{n+\cos n}{n^2+n \log n+10 \sin n}$.
5. $\sum \frac{1}{n \log(10^6 n)}$.

12.4 Εναλλάσσουσες Σειρές

Ορισμός 12.2. ***(Εναλλάσσουσες σειρές)*** *Αν η ακολουθία $a_k > 0$, η σειρά*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{k-1}a_k + \ldots$$

καλείται ***εναλλάσσουσα****.*

Θεώρημα 12.6. ***(Θεώρημα Leibniz)*** *Αν η a_k είναι φθίνουσα με όριο το 0, τότε η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ συγκλίνει, και μάλιστα*

$$\left|\sum_{i=k}^{\infty} a_i\right| \leq a_{k+1}.$$

Η ανισότητα που δίνει το θεώρημα είναι πολύ χρήσιμη διότι φράσσει το σφάλμα που κάνουμε στον υπολογισμό του άπειρου αθροίσματος αν κρατήσουμε μόνο τους k πρώτους όρους.

Απόδειξη: Παραλείπεται. ■

Παράδειγμα 12.22. Η **εναλλάσσουσα αρμονική σειρά**

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

συγκλίνει (και μάλιστα στο $\log 2$, αλλά αυτό είναι κάτι που δεν μπορούμε να δείξουμε με την υπάρχουσα θεωρία).

Ορισμός 12.3. ***(Απόλυτη και υπό συνθήκη σύγκλιση)***
Η σειρά $\sum a_n$ ***συγκλίνει απόλυτα*** *αν η $\sum |a_n|$ συγκλίνει. Αν η $\sum a_n$ συγκλίνει αλλά η $\sum |a_n|$ δεν συγκλίνει, τότε λέμε ότι η $\sum a_n$ συγκλίνει* ***υπό συνθήκη****.*

Θεώρημα 12.7. ***(Απόλυτη σύγκλιση $\Rightarrow$ σύγκλιση)*** *Αν συγκλίνει η $\sum |a_n|$, τότε συγκλίνει και η $\sum a_n$.*

Απόδειξη: Παραλείπεται. ■

Παράδειγμα 12.23. Η εναλλάσσουσα αρμονική σειρά $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$ συγκλίνει, αλλά η αρμονική σειρά (που προκύπτει παίρνοντας απόλυτα) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$ αποκλίνει, άρα η εναλλάσσουσα αρμονική σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη, και το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.

12.5 Περαιτέρω Μελέτη

Ένας τρόπος για να σκεφτόμαστε μια ακολουθία και τη σειρά που δημιουργεί ως τα διακριτά ανάλογα μιας συνάρτησης $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ και του ολοκληρώματός της $\int_0^x f(t)\,dt$. Πράγματι, και στις δύο περιπτώσεις έχουμε μια συνάρτηση και δημιουργούμε μια νέα προσθέτοντας, σε κάθε σημείο τις τιμές που έχει λάβει η αρχική συνάρτηση μέχρι εκείνο το σημείο. Η αναλογία αυτή είναι αρκετά στενή και βοηθά αρκετά την ανάπτυξη της θεωρίας σε περιοχές των εφαρμοσμένων μαθηματικών όμως η επεξεργασία σήματος. Δείτε, για παράδειγμα το βιβλίο των Oppenheim et al. [OPPE].

Στο κεφάλαιο αυτό δώσαμε τα πιο βασικά από τα κριτήρια που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να αποφανθούμε για την σύγκλιση ή όχι μιας σειρά. Στο εξειδικευμένο βιβλίο του Knopp [KNOP] αλλά και τα βιβλία γενικού ενδιαφέροντος των Νεγρεπόντη [ΝΕΓ1], [ΝΕΓ2], [ΝΕΓ3] και Παντελίδη [ΠΑΝΤ] μπορείτε να βρείτε αρκετά κριτήρια ακόμα.

Παράρτημα Α΄

Κινούμενα Σχήματα

Α΄.1 Κεφάλαιο 2

Στους παρακάτω συνδέσμους μπορείτε να δείτε κινούμενα σχήματα που δείχνουν το σχεδιασμό του γραφήματος μιας συνάρτησης $f(\theta)$ με δύο διαφορετικές μεθόδους: πρώτον σε καρτεσιανές συντεταγμένες, και δεύτερον σε πολικές συντεταγμένες. Παρατηρήστε πως η ίδια συνάρτηση αντιστοιχεί σε δύο πολύ διαφορετικά γραφήματα. Τα γραφήματα έχουν μελετηθεί και στο Παράδειγμα 2.2.

1. $f(\theta) = |\cos\theta|$ με $\theta \in [0, 2\pi]$: http://repfiles.kallipos.gr/file/22611.
2. $f(\theta) = |e^{-\theta/10}|$ με $\theta \in [0, 4\pi]$: http://repfiles.kallipos.gr/file/22612.
3. $f(\theta) = |\sin^2 2\theta|$ με $\theta \in [0, 2\pi]$: http://repfiles.kallipos.gr/file/22613.

Στους παρακάτω συνδέσμους μπορείτε να δείτε κινούμενα σχήματα που δείχνουν το σχεδιασμό του ίχνους μιας καμπύλης που έχει δοθεί στην παραμετρική μορφή

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad a \le t \le b.$$

Καθώς αυξάνει το t, μεταβάλλονται τα $x(t)$, $y(t)$ και επομένως διαγράφεται το ίχνος στο επίπεδο xy. Τα ίχνη έχουν μελετηθεί και στο Παράδειγμα 2.3.

1. $x(t) = \sin t$, $y(t) = \sin 2t$, $0 \le t \le 2\pi$: http://repfiles.kallipos.gr/file/22643.
2. $x(t) = e^{-t/5}\sin 2t$, $y(t) = e^{-t/5}\cos 2t$, $0 \le t \le 2\pi$: http://repfiles.kallipos.gr/file/22644.

Α΄.2 Κεφάλαιο 3

Στον παρακάτω σύνδεσμο μπορείτε να δείτε μια γραφική ερμηνεία του Ορισμού 3.1 του ορίου συνάρτησης:

http://repfiles.kallipos.gr/file/22602.

Στο πρώτο βήμα, ένας αντίπαλος μας δίνει ένα $\epsilon > 0$ για το οποίο πρέπει να βρούμε, στο δεύτερο βήμα, ένα $\delta > 0$ ώστε να ισχύει η συνεπαγωγή του Ορισμού 3.1. Αν μπορούμε να βρούμε ένα $\delta > 0$ για κάθε $\epsilon > 0$, τότε το όριο υπάρχει.

Στον παρακάτω σύνδεσμο μπορείτε να δείτε μια γραφική ερμηνεία της μη ύπαρξης του ορίου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0, σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.

http://repfiles.kallipos.gr/file/22603.

Στο πρώτο βήμα, ένας αντίπαλος μας δίνει ένα $\epsilon >$ για το οποίο πρέπει να βρούμε, στο δεύτερο βήμα, ένα $\delta > 0$ ώστε να ισχύει η συνεπαγωγή του Ορισμού 3.1. Αν δεν μπορούμε να βρούμε ένα $\delta > 0$ για κάποια $\epsilon > 0$, τότε το όριο δεν υπάρχει.

Στον παρακάτω σύνδεσμο μπορείτε να δείτε μια γραφική ερμηνεία του Ορισμού 3.5 του ορίου ακολουθίας.

http://repfiles.kallipos.gr/file/22604.

Στο πρώτο βήμα, ένας αντίπαλος μας δίνει ένα $\epsilon > 0$ για το οποίο πρέπει να βρούμε, στο δεύτερο βήμα, ένα $N_0 \in \mathbb{N}^*$ ώστε να ισχύει η συνεπαγωγή του Ορισμού 3.6. Αν μπορούμε να βρούμε ένα $N_0 \in \mathbb{N}^*$ για κάθε $\epsilon > 0$, τότε το όριο της ακολουθίας υπάρχει.

Α΄.3 Κεφάλαιο 4

Στους παρακάτω συνδέσμους μπορείτε να δείτε παραδείγματα της εκτέλεσης της Μεθόδου της Διχοτόμησης, όπως αυτή περιγράφεται στην Παράγραφο 4.4, για τρεις διαφορετικές περιπτώσεις:

1. $f(x) = x - \cos x$, $a = 0$, $b = \pi$: http://repfiles.kallipos.gr/file/22645.
2. $f(x) = x/8 - \sin(x - 3)$, $a = 0$, $b = 5$: http://repfiles.kallipos.gr/file/22646.
3. $f(x) = x/8 - \sin(x - 3)$, $a = 0$, $b = 4$: http://repfiles.kallipos.gr/file/22631.

Παρατηρήστε ότι με τις δύο τελευταίες εφαρμογές της Μεθόδου της Διχοτόμησης βρίσκουμε δύο διαφορετικές ρίζες της ίδιας συνάρτησης.

Στον παρακάτω σύνδεσμο μπορείτε να δείτε μια γραφική ερμηνεία του Ορισμού 4.5 της Συνέχειας Lipschitz:

http://repfiles.kallipos.gr/file/22637.

Παρατηρήστε ότι καθώς ο σκιασμένος κώνος κινείτε ώστε η κορυφή του να διατρέχει το γράφημα της συνάρτησης, το γράφημα παραμένει συνεχώς εντός του κώνου.

Στον παρακάτω σύνδεσμο μπορείτε να δείτε μια γραφική ερμηνεία της περίπτωσης να μην ισχύει ο Ορισμός 4.5 της Συνέχειας Lipschitz:

http://repfiles.kallipos.gr/file/22638.

Παρατηρήστε ότι καθώς ο σκιασμένος κώνος κινείτε ώστε η κορυφή του να διατρέχει το γράφημα της συνάρτησης, υπάρχουν τμήματα του γραφήματος που βρίσκονται εκτός του κώνου, ανεξάρτητα του πόσο μεγάλη είναι η κλίση των ευθειών που τον οριοθετούν.

Α΄.4 Κεφάλαιο 5

Στον παρακάτω σύνδεσμο μπορείτε να δείτε μια γραφική ερμηνεία του Ορισμού 5.1 της παραγώγου:

http://repfiles.kallipos.gr/file/22639.

Όταν το σημείο x_1 βρίσκεται πολύ κοντά στο σημείο x_0, η κλίση του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία $(x_0, f(x_0))$ και $(x_1, f(x_1))$ είναι πολύ κοντά στην παράγωγο της συνάρτησης στη θέση x_0.

Α΄.5 Κεφάλαιο 6

Στον παρακάτω σύνδεσμο μπορείτε να δείτε μια γραφική ερμηνεία του Ορισμού 6.2 της κυρτότητας:

http://repfiles.kallipos.gr/file/22622.

Παρατηρήστε ότι για κάθε ζεύγος σημείων που ανήκουν στο γράφημα της συνάρτησης, το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει βρίσκεται συνεχώς πάνω από το γράφημα ή το πολύ συμπίπτει με αυτό.

Στον παρακάτω σύνδεσμο μπορείτε να δείτε μια γραφική ερμηνεία της περίπτωσης που μια συνάρτηση δεν είναι κυρτή, σύμφωνα με τον Ορισμό 6.2:

http://repfiles.kallipos.gr/file/22623.

Παρατηρήστε για ορισμένα ζεύγη σημείων που ανήκουν στο γράφημα της συνάρτησης, ένα μέρος του ευθυγράμμου τμήματος που τα ενώνει βρίσκεται κάτω από το γράφημα.

Στους παρακάτω συνδέσμους μπορείτε να δείτε παραδείγματα της εκτέλεσης της Μεθόδου του Νεύτωνα, όπως αυτή περιγράφεται στην Παράγραφο 6.4, για τρεις διαφορετικές περιπτώσεις:

1. $f(x) = x - \cos x$, $x_0 = 0$: http://repfiles.kallipos.gr/file/22625 (Παράδειγμα 6.10).

2. $f(x) = x - \cos x$, $x_0 = 4$: http://repfiles.kallipos.gr/file/22626 (Παράδειγμα 6.11).

3. $f(x) = x/8 - \sin(x - 3)$, $x_0 = 0$: http://repfiles.kallipos.gr/file/22627 (Παράδειγμα 6.12).

Α΄.6 Κεφάλαιο 7

Στους παρακάτω συνδέσμους μπορείτε να δείτε παραδείγματα σύγκλισης αθροισμάτων Riemann στο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x) = 2\cos x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Τα αθροίσματα δημιουργούνται επιλέγοντας αυθαίρετα διαμερίσεις με αυξανόμενο αριθμό σημείων, και διαφέρουν στον τρόπο που επιλέγεται το σημείο του κάθε υποδιαστήματος της διαμέρισης όπου υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης. Έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Επιλέγεται ένα σημείο αυθαίρετα: http://repfiles.kallipos.gr/file/22608.

2. Επιλέγεται το σημείο στη μέση του υποδιαστήματος: http://repfiles.kallipos.gr/file/22607.

3. Επιλέγεται ένα σημείο στο οποίο ελαχιστοποιείται η τιμή της συνάρτησης σε αυτό το υποδιάστημα. Επομένως, το άθροισμα που δημιουργείται είναι επιπλέον και ένα κάτω άθροισμα Darboux: http://repfiles.kallipos.gr/file/22609.

4. Επιλέγεται ένα σημείο στο οποίο μεγιστοποιείται η τιμή της συνάρτησης σε αυτό το υποδιάστημα. Επομένως, το άθροισμα που δημιουργείται είναι επιπλέον και ένα άνω άθροισμα Darboux: http://repfiles.kallipos.gr/file/22610.

Α΄.7 Κεφάλαιο 8

Στον παρακάτω σύνδεσμο μπορείτε να δείτε τη γεωμετρική ερμηνεία των Θεμελιωδών Θεωρημάτων του Λογισμού:

http://repfiles.kallipos.gr/file/22640.

Παρατηρήστε ότι η $F(x)$, που εμφανίζεται στην κάτω γραφική παράσταση, ισούται σε κάθε x με το ολοκλήρωμα $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, δηλαδή το προσημασμένο εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου στην άνω γραφική παράσταση της $f(x)$. Αντιστρόφως, η $f(x)$ ισούται με την παράγωγο της $F(x)$, δηλαδή την κλίση της εφαπτόμενης της $F(x)$ στο σημείο x.

Στον παρακάτω σύνδεσμο μπορείτε να δείτε το γράφημα της εκθετικής συνάρτησης b^x και της αντίστροφής της, λογαριθμικής $\log_b x$, για διάφορες τιμές του b:

http://repfiles.kallipos.gr/file/22641.

Παρατηρήστε ότι οι συναρτήσεις b^x και $\log_b x$ είναι αύξουσες για $b > 1$ και φθίνουσες για $b < 1$. Παρατηρήστε, επίσης, ότι για $b = 1$ η μεν b^x είναι σταθερή για $b = 1$, η δε $\log_b x$ δεν ορίζεται.

Α΄.8 Κεφάλαιο 9

Στους παρακάτω συνδέσμους μπορείτε να δείτε γραφικά τη δημιουργία του στερεού εκ περιστροφής **περί τον άξονα των** x του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ του γραφήματος μιας συνάρτησης $f(x) \geq 0$, του άξονα των x, και των ευθειών $x = a$, $x = b$. Συγκεκριμένα, εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. (Παράδειγμα 9.9) $f(x) = \sin(x-1)+1$, $a = 1$ $b = 1+\pi$: http://repfiles.kallipos.gr/file/22615.
2. (Παράδειγμα 9.10) $f(x) = 2\exp[-|x-3|]$, $a = 1$ $b = 5$: http://repfiles.kallipos.gr/file/22616.

Στους παρακάτω συνδέσμους μπορείτε να δείτε γραφικά τη δημιουργία του στερεού εκ περιστροφής **περί τον άξονα των** y του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ του γραφήματος μιας συνάρτησης $f(x) \geq 0$, του άξονα των x, και των ευθειών $x = a$, $x = b$. Συγκεκριμένα, εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. (Παράδειγμα 9.11) $f(x) = \sin(x-1)+1$, $a = 1$ $b = 1+\pi$: http://repfiles.kallipos.gr/file/22617.
2. (Παράδειγμα 9.12) $f(x) = 2\exp[-|x-3|]$, $a = 1$ $b = 5$: http://repfiles.kallipos.gr/file/22618.

Α΄.9 Κεφάλαιο 10

Στους παρακάτω συνδέσμους μπορείτε να δείτε γραφικά τη δημιουργία πεδίων διευθύνσεων για τις ακόλουθες ΔΕ:

1. $y'(x) = y(x) - x$, http://repfiles.kallipos.gr/file/22619.
2. $y'(x) = \cos(y(x) - x)$, http://repfiles.kallipos.gr/file/22620.

Στον παρακάτω σύνδεσμο μπορείτε να δείτε γραφικά την εκτέλεση της Μεθόδου του Euler για την ΔΕ $y(x) = \cos x$ με αρχική συνθήκη την $y(0) = 0$:

http://repfiles.kallipos.gr/file/22621.

Παρατηρήστε ότι γνωρίζουμε ότι η λύση της ΔΕ είναι η $y(x) = \sin x$. Στόχος μας εδώ είναι να δούμε πώς εκτελείται η μέθοδος, και η γνώση της λύσης μας διευκολύνει.

Α΄.10 Κεφάλαιο 11

Στους παρακάτω συνδέσμους μπορείτε να δείτε τη δημιουργία ενός πολυωνύμου Taylor καθώς προστίθενται όροι σε αυτό, για τις ακόλουθες περιπτώσεις συναρτήσεων και θέσεις x_0:

1. (Παράδειγμα 11.1) $f(x) = \log x$, $x_0 = 0$: http://repfiles.kallipos.gr/file/22632.
2. (Παράδειγμα 11.2) $f(x) = \exp x$, $x_0 = 0$: http://repfiles.kallipos.gr/file/22635.
3. (Παράδειγμα 11.3) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$: http://repfiles.kallipos.gr/file/22633.
4. (Παράδειγμα 11.4) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$: http://repfiles.kallipos.gr/file/22634.
5. (Παράδειγμα 11.5) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \pi/2$: http://repfiles.kallipos.gr/file/22636.

Παράρτημα Β΄

Βιβλιογραφία

Β΄.1 Ελληνική Βιβλιογραφία

ΑΚΡΙ Γ. Δ. Ακρίβης, Β. Α. Δουγαλής, *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*, 4η έκδοση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2015, ISBN 978 960 524 022 6.

ΑΝΔΡ Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Μέτης, Κ. Μπρουχούτας, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος, *Μαθηματικά Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου, Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση*, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, ISBN 960 06 0703 6.

ΓΑΛΑ Ε. Γαλάνης, *Εισαγωγή στην Πραγματική Ανάλυση*, 2η έκδοση, Εκδόσεις Συμεών, 1991.

ΚΑΤΕ Π. Κατερίνης, Η. Φλυτζάνης, *Ανώτερα Μαθηματικά, Τόμος Α*, Εκδόσεις Γ. Μπένου, 2010, ISBN 978 960 8249 73 8.

ΚΟΥΤ Μ. Κούτρας, *Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές*, Εκδόσεις Σταμούλη, ISBN 978 960 351 903 4.

ΝΕΓ1 Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός, Τόμος Ι*, Εκδόσεις Συμμετρία, 1999, ISBN 960 266 020 1.

ΝΕΓ2 Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός, Τόμος ΙΙα*, Εκδόσεις Συμμετρία, 2000, ISBN 960 266 077 5.

ΝΕΓ3 Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός, Τόμος ΙΙβ*, Εκδόσεις Συμμετρία, 1999, ISBN 978 960 266 085 0.

ΠΑΝΔ Γ. Ν. Παντελίδης, Δ. Χ. Κραββαρίτης, Ν. Χ. Χατζησάββας, *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, 2η έκδοση, Εκδόσεις Ζήτη, Αθήνα, 1996, ISBN 978 960 431 227 8.

ΠΑΝΤ Γ. Ν. Παντελίδης, *Μαθηματική Ανάλυση, Τόμος Ι&ΙΙ*, Εκδόσεις Ζήτη, 1994, ISBN 960 431 108 5.

ΦΛΥΤ Η. Φλυτζάνης, *Μαθηματικός Λογισμός Ι, Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής*, University Studio Press, 1985.

ΦΛΥΑ Η. Φλυτζάνης, *Ανώτερα Μαθηματικά*, Εκδόσεις Α. Σταμούλης, 1993, ISBN 960 7306 36 8.

APG1 T. M. Apostol, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, Εκδόσεις Ατλαντίς, 1962, ISBN 978 960 070 067 1.

APG2 T. M. Apostol, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, Εκδόσεις Ατλαντίς, 1962, ISBN 978 960 070 069 5.

BETG Δ. Μπερτσεκάς, Ι. Τσιτσικλής, *Εισαγωγή στις Πιθανότητες*, Εκδόσεις Τζιόλα, 2010, ISBN 978 960 418 248 8.

FORG G. E. Forsythe, M. A. Malcolm, C. B. Moler, *Αριθμητικές Μέθοδοι και Προγράμματα για Μαθηματικούς Υπολογισμούς*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1993, ISBN 978 960 7309 55 3.

FRAG J. B. Fraleigh, *Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2011, ISBN 978 960 7309 71 6.

HRG1 D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Φυσική, Τόμος Α (Μηχανική Κυματική, Θερμοδυναμική)*, Gutenberg, 2012, ISBN 978 960 01 1493 5.

HRG2 D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Φυσική, Τόμος Β (Ηλεκτρομαγνητισμός, Σύγχρονη Φυσική, Σχετικότητα)*, 2013, ISBN 987 960 01 1594 9.

OHG1 H. Ohanian, *Φυσική, Τόμος Α (Μηχανική - Θερμοδυναμική)*, Εκδόσεις Συμμετρία, 1989, ISBN 978 960 266 192 5.

OHG2 H. Ohanian, *Φυσική, Τόμος Β (Ηλεκτρομαγνητισμός - Οπτική)*, Εκδόσεις Συμμετρία, 1991, ISBN 978 960 266 049 X.

ROSG S. Ross, *Βασικές Αρχές Θεωρίας Πιθανοτήτων*, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2012, ISBN 978 960 461 457 8.

SPIG M. Spivak, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, 2η έκδοση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2010, ISBN 978 960 524 302 9.

STRG G. Strang, *Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης,1995, ISBN 978 960 7309 70 9.

THOG R. L. Finney, F. R. Giordano, M. D. Weir, *Thomas Απειροστικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2010, ISBN 978 960 524 182 7.

Β΄.2 Αγγλική Βιβλιογραφία

ABRA M. Abramowitz, I. A. Stegun (editors), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publication, Inc., New York, 1965, ISBN 0 486 61272 4.

APE1 T. M. Apostol, *Calculus*, 2nd Edition, Wiley, 1967, ISBN 978 0 471 00005 1.

APE2 T. M. Apostol, *Calculus*, 2nd Edition, Wiley, 1969, ISBN 978 0 471 00007 5.

BERT D. Bertsekas, *Convex Analysis and Optimization*, Athena Scientific, ISBN 978 1 88 652945 8.

BETE D. Bertsekas, J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, 2nd Edition, Athena Scientific, 2008, ISBN 978 1 886529 23 6.

BOYD S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004, ISBN 978 0 521 83378 3. Διαθέσιμο εδώ: http://stanford.edu/~boyd/cvxbook/

COUR R. Courant, F. John, *Introduction to Calculus and Analysis, Volume 1*, Springer, 1999, ISBN 978-3540650584.

DUFO D. S. Dummit, R. M. Foote, *Abstract Algebra*, 3rd Edition, Wiley, 2003, ISBN 978 0471433347.

FORE G. E. Forsythe, M. A. Malcolm, C. B. Moler, *Computer Methods for Mathematical Computations*, Prentice Hall Inc., 1977, ISBN 978 0131653320.

FRAE J. B. Fraleigh, *A First Course in Abstract Algebra*, 7th Edition, Pearson, 2002, ISBN 978 0 20 17639 04.

GRAD I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 7th Edition, Academic Press, 2007, ISBN 978 0123736376.

HALL D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fundamentals of Physics*, 9th edition, Wiley, ISBN 978 0470556535.

KNOP K. Knopp, *Theory and Application of Infinite Series*, Dover Publications, 1990 ISBN 978 0 48 666165 0.

MARS J. E. Marsden, M. J. Hoffman, *Elementary Classical Analysis*, 2nd edition, W. H. Freeman, 1993, ISBN 978 0716721055.

OHE1 H. C. Ohanian, J. T. Markert, *Physics for Engineers and Scientists, Volume 1*, 3rd edition, W. W. Norton & Company, 2007, ISBN 978 0393930030.

OHE2 H. C. Ohanian, J. T. Markert, *Physics for Engineers and Scientists, Volume 2*, 3rd edition, W. W. Norton & Company, 2007, ISBN 978 0393930047.

OPPE A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. H. Nawab, *Signals and Systems*, 2nd Edition, Prentice Hall, 1996 ISBN 978-0138147570.

PRES W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipies in C: The Art of Scientific Computing*, 3rd Edition, Cambridge University Press, 2007, ISBN 978 0521880688.

ROSE S. Ross, *A First Course in Probability*, 9th Edition, Pearson, 2012, ISBN 978 0321794772.

ROYD H. L. Royden, *Real Analysis*, 3rd Edition, Prentice Hall, 1988, ISBN 978 0 02 404151 3.

RUDI W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill, 1976, ISBN 0 07 054234 X.

SAGA H. Sagan, *Advanced Calculus*, Houghton Mifflin Co, 1974, ISBN 978 0395170908.

SPIE M. Spivak, *Calculus*, 4th edition, Publish or Perish, 2008, ISBN 978 0914098911.

STEW J. Stewart, *Calculus*, Cengage Learning, 7th Edition, 2012, ISBN 978 0538497817.

STRA W. A. Strauss, *Partial Differential Equations, An Introduction*, 2nd edition, John Wiley and Sons, Inc., 2007, ISBN 978 0470054567.

STRE G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, 4th edition, Thomson Brooks/Cole, 2006, ISBN 978 0030105678.

STRO K. D. Stroyan, *Mathematical Background: Foundations of Infinitesimal Calculus*, 2nd edition, Academic Press, Inc., 1997.

STRU D. J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, 4th edition, Dover Publications, Inc., ISBN 978 0 486 60255 9.

THOE R. L. Finney, Maurice D. Weir, and Frank R. Giordano, *Thomas's Calculus*, Pearson, 13th Edition, 2014, ISBN 978 0321878960.

VARB D. Varberg, E. Purcell, S. Rigdon, *Calculus*, 9th Edition, Pearson, 2006, ISBN 978 0131429246.

Παράρτημα Γ΄

Συμβολισμοί

Συντομογραφίες

- $\forall$ σημαίνει «για κάθε».
- $\exists$ σημαίνει «υπάρχει».
- Το $:$ και το $|$ σημαίνουν «τέτοιο ώστε».
- Το $\triangleq$ και το $\equiv$ συμβολίζουν «ορίζεται ως».
- «ανν»= «αν και μόνο αν».
- Στους ορισμούς, το «αν» εννοείται ως «ανν».
- $\vee$ σημαίνει «ή» και $\wedge$ σημαίνει «και».

Σύνολα

- $\mathbb{R}$ είναι οι πραγματικοί, $\mathbb{Q}$ είναι οι ρητοί, $\mathbb{N}$ είναι οι φυσικοί $0, 1, 2, 3, \ldots$, και $\mathbb{Z}$ είναι οι ακέραιοι αριθμοί. $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{N}^*$ και $\mathbb{Z}^*$ είναι τα ίδια σύνολα χωρίς το 0.
- $\mathbb{R}^+$ είναι οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.
- $\mathbb{Q}^+$ είναι οι θετικοί ρητοί αριθμοί.
- Το κενό σύνολο συμβολίζεται ως $\emptyset$.
- $\subseteq$ σημαίνει «είναι υποσύνολο» και το $\subset$ σημαίνει «είναι γνήσιο υποσύνολο».
- $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ είναι η τομή δύο συνόλων.
- $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ είναι η ένωση δύο συνόλων.
- $A^c = \{x : x \notin A\}$ είναι το συμπλήρωμα ενός συνόλου.
- $A \setminus B = A \cap B^c$ είναι η διαφορά δύο συνόλων.
- $\in$ σημαίνει «ανήκει» και $\notin$ σημαίνει «δεν ανήκει».

Συναρτήσεις

- $\mathrm{dom}\, f$ είναι το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης.

- $\sin x$ είναι το ημίτονο του x («sine»), $\cos x$ είναι το συνημίτονο του x («cosine»), $\tan x$ είναι η εφαπτομένη του x («tangent») και $\cot x$ είναι η συνεφαπτομένη του x («cotangent»).
- το ακέραιο μέρος $\lfloor x \rfloor$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος με τον x. Παραδείγματα: $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor 1.999999 \rfloor = 1$, $\lfloor -2.3 \rfloor = -3$, $\lfloor -10 \rfloor = -10$.
- $\lceil x \rceil$ είναι ο μικρότερος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον x. Παραδείγματα: $\lceil 2.3 \rceil = 3,\ \lceil 2 \rceil = 2,\ \lceil 1.999999 \rceil = 2,\ \lceil -1.999999 \rceil = -1,\ \lceil -1 \rceil = -1.$
- $f|_x$ σημαίνει η f υπολογισμένη στο x.

Παράρτημα Δ΄

Λεξικό

Ακέραιος: Integer
Αναγκαίο: Necessary
Άξονας: Axis
Άνω: Upper
Άθροισμα: Sum, summation
Ακολουθία: Sequence
Άκρο (συνόλου ή διαστήματος): End point
Ακρότατο(α): Extremum (extrema)
Αλγόριθμος: Algorithm
Ανισότητα: Inequality
Ανοικτό (διάστημα): Open
Αντίθετος: Opposite
Αντικατάσταση: Substitution
Αντιπαράγωγος: Antiderivative
Αντίστροφος: Inverse
Αντιμεταθετικότητα: Commutativity
Αντιπαράδειγμα: Counterexample
Άνω φραγμένο/η: Upper bounded
Αξίωμα: Axiom
Αόριστο ολοκλήρωμα: Indefinite integral
Άπειρο: Infinite, infinity
Απόδειξη: Proof
Αποκλίνω: Diverge
Αποκοπή: Truncation
Απόλυτη τιμή: Absolute value
Αρμονικός: Harmonic
Άρρητος: Irrational
Άρτιος: Even
Αρχή: Principle
Αύξων: Increasing
Βάση: Base
Γειτονιά: Neighborhood
Γενική αντιπαράγωγος: General antiderivative
Γεωμετρικός: Geometric
Γεωμετρικός τόπος: Locus
Γνήσιο υποσύνολο: Strict (proper) subset
Γνησίως αύξων: Strictly increasing
Γνησίως φθίνων: Strictly decreasing
Γνησίως μονότονος: Strictly monotonous
Γραμμικός: Linear
Γραμμική Άλγεβρα: Linear Algebra
Γραμμικός συνδυασμός: Linear combination
Γράφημα: Graph
Γωνία: Angle
Διαμέριση: Partition
Διάνυσμα: Vector
Διανυσματικός χώρος: Vector space, linear space
Διάστημα: Interval
Διάταξη: Ordering
Διαφορά: Difference
Διαχωρίσιμος: Separable
Διαφορικό: Differential
Διευθετούσα (παραβολής): Directrix
Διχοτόμηση: Bisection
Εκθετικός: Exponential
Εκκεντρότητα (κωνικής τομής): Eccentricity
Εκλέπτυνση: Refinement
Ελάχιστο(α): Minimum (minima)
Έλλειψη: Ellipse
Ένα προς ένα: One on one
Εναλλάσσουσα: Alternating
Ενδιάμεση (τιμή): Intermediate
Ένωση: Union
Εξίσωση: Equation
Εστία(ες) (κωνικής τομής): Focus (foci)
Εσωτερικό γινόμενο: Inner product, dot product
Επιμεριστική ιδιότητα: Distributive law
Επίπεδο: Plane
Επιφάνεια: Surface, area
Εσωτερικό (συνόλου): Interior
Ευθεία: Line
Εφαπτόμενη: Tangent
Ημιεπίπεδο: Half-plane
Ημίτονο: Sine

Θεμελιώδες Θεώρημα: Fundamental Theorem
Θεώρημα: Theorem
Ικανό: Sufficient
Κάθετος: Vertical
Καμπύλη: Curve
Κανόνας: Rule, law
Κανόνας της αλυσίδας: Chain rule
Καρτεσιανός: Cartesian
Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα: Improper Integral
Κάτω: Lower
Κάτω φραγμένος: Lower bounded
Κέλυφος: Shell
Κενό Σύνολο: Empty set
Κέντρο: Center
Κλειστό διάστημα: Closed interval
Κλιμακωτή συνάρτηση: Step function
Κοίλος: Concave
Κορυφή (κωνικής τομής): Vertex
Κριτήριο: Criterion
Κύκλος: Circle (όχι cycle
Κύλινδρος: Cylinder
Κυματική Εξίσωση: Wave Equation
Κυρτότητα: Convexity
Κυρτός: Convex
Κωνική τομή: Conic section
Λείος: Smooth
Λογάριθμος: Logarithm
Λήμμα: Lemma
Λογισμός: Calculus
Μέγιστο(α): Maximum (maxima)
Μέθοδος: Method
Μερική: Partial
Μετασχηματισμός: Transformation
Μετατόπιση: Translation
Μέσος: Mean
Μήκος: Length
Μιγαδικός: Complex
Μοναδιαίο διάνυσμα: Unit vector
Μονότονος: Monotonous, monotone
Νόρμα: Norm
Όγκος: Volume
Ολικός: Total
Ολοκλήρωμα: Integral
Ολοκλήρωση: Integration
Ολοκληρώσιμος/η/ο: Integrable
Ολοκληρωσιμότητα: Integrability
Ομογενής: Homogeneous
Ομοιόμορφος: Uniform
Ορθογώνιος: Orthogonal
Όριο: Limit
Ορισμένος: Defined
Όρος: Term
Ουδέτερο στοιχείο: Identity element
Παραβολή: Parabola
Παράγουσα: Antiderivative
Παράγοντας: Factor
Παράγωγος: Derivative
Παράγ ανώτ. τάξης: Higher order derivατive
Παραγωγίσιμος/η/ο: Differentiable
Παραγωγισιμότητα: Differentiability
Παράλληλος: Parallel
Παραμετρικός: Parametric
Παράμετρος: Parameter
Πεδίο: Field
Πεδίο Διεύθυνσης: Slope Field
Πεδίο ορισμού: Domain
Πεδίο τιμών: Range, image
Περιοδικός: Periodic
Περιστροφή: Rotation
Περιττός: Odd
Πίνακας: Matrix
Πλευρικός: Side
Πολικός: Polar
Πολυώνυμο: Polynomial
Προβολή: Projection
Προσέγγιση: Approximation
Προσεταιριστική ιδιότητα: Associative law
Πρόσημο: Sign
Πόρισμα: Corollary
Πρόοδος: Progression
Πρώτης Τάξης: First Order
Πυκνό (σύνολο): Dense
Ορθογωνιότητα: Orthogonality
Ρητός: Rational
Ρίζα: Root
Ρυθμός: Rate
Σειρά: Series
Σημείο Καμπής: Inflection Point
Σταθερός: Constant
Στερεό: Solid
Στοιχείο: Element
Συγκλίνω: Converge
Σύγκλιση: Convergence
Συμπλήρωμα: Complement
Συνάρτηση: Function
Συνεφαπτόμενη: Cotangent

Συνημίτονο: Cosine
Συνήθης: Ordinary
Συνιστώσα: Component
Συντελεστής: Coefficient
Συντεταγμένη: Coordinate
Σύνολο: Set
Συνέχεια: Continuity
Τείνω: Tend
Τετραγωνική ρίζα: Square root
Τηλεσκοπικός: Telescopic
Τομή: Intersection
Τόξο: Arc
Τοπικός: Local
Τριγωνική ανισότητα: Triangle inequality
Τριγωνομετρικός: Trigonometric
Υπακολουθία: Subsequence
Υπερβολή: Hyperbola
Υπερβολικό: Hyperbolic
Υπό συνθήκη: Conditional
Υπόλοιπο: Remainder
Υποσύνολο: Subset
Φθίνων: Decreasing
Φράγμα: Bound
Φραγμένος: Bounded
Φυσικός: Natural
Χορδή: Chord
Χωρίο: Region
Χώρος: Space

Παράρτημα Ε΄

Λύσεις Επιλεγμένων Ασκήσεων

Σε αυτό το παράρτημα μπορείτε να βρείτε τις λύσεις ορισμένων από τις ασκήσεις του βιβλίου, και συγκεκριμένα αυτές που εμφανίζουν ένα «Π» στην αρχή της εκφώνησής τους

Λύση της Άσκησης 1.5: Το σύνολο δεν είναι πεδίο, διότι το 4 (που προφανώς δεν είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης) δεν έχει αντίστροφο. Πράγματι, παρατηρήστε πως

$$4 \odot 0 = 0, \quad 4 \odot 1 = 4, \quad 4 \odot 2 = 2, \quad 4 \odot 3 = 0, \quad 4 \odot 4 = 4, \quad 4 \odot 5 = 2,$$

επομένως δεν υπάρχει αριθμός που αν πολλαπλασιαστεί, modulo 6, με το 4 να δίνει μονάδα. Μπορείτε να βρείτε άλλους αριθμούς σε αυτό το σύνολο που δεν έχουν αντίστροφο;

Λύση της Άσκησης 1.22: Η πρόταση είναι λάθος. Πράγματι, έχουμε ότι $\{0, 1\} \subset \{0, 0.5, 1\}$, όμως $\sup\{0, 1\} = \sup\{0, 0.5, 1\} = 1$.

Λύση της Άσκησης 1.23: Η πρόταση είναι λάθος. Πράγματι, έχουμε ότι $(0, 1) \subset [0, 1]$, όμως $\sup(0, 1) = \sup[0, 1] = 1$.

Λύση της Άσκησης 2.1: Η πρόταση είναι αληθής. Πράγματι, έστω οι συναρτήσεις

$$f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

οι οποίες είναι η μεν πρώτη άρτια, η δε δεύτερη περιττή αφού:

$$\begin{aligned} f_e(-x) &= \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(+x)}{2} = f_e(x), \\ f_o(-x) &= \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -f_o(x). \end{aligned}$$

Όμως, έχουμε

$$f_e(x) + f_o(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x),$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Λύση της Άσκησης 2.2: Η πρόταση είναι ψευδής. Το πρόβλημα είναι ότι δεν εξασφαλίζεται κάπως η συνέχεια στο c. Εξετάστε, για παράδειγμα, τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0, \\ 1/2, & x = 0. \end{cases}$$

Η συγκεκριμένη ικανοποιεί τις προϋποθέσεις με $c = 0$, αλλά δεν έχει ελάχιστο εκεί.

Λύση της Άσκησης 2.8: Στην περίπτωση συναρτήσεων f, g που είναι γνησίως αύξουσες, πολύ απλά παρατηρούμε πως

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) < f(g(x_2)) \Rightarrow f \circ g(x_1) < f \circ g(x_2),$$

άρα και η σύνθεση $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

Η απόδειξη για την περίπτωση συναρτήσεων που είναι απλώς αύξουσες είναι ανάλογη:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) \leq f(g(x_2)) \Rightarrow f \circ g(x_1) \leq f \circ g(x_2),$$

άρα και η σύνθεση $f \circ g$ είναι αύξουσα.

Λύση της Άσκησης 3.5: Έστω $\epsilon > 0$. Θέτουμε $\delta = \epsilon > 0$. Παρατηρήστε πως

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow 0 < |x| < \epsilon \Rightarrow 0 < |f(x) - 0| < \epsilon,$$

και επομένως εξ ορισμού $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$.

Λύση της Άσκησης 3.14: Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ιδιότητα αυτή ισχύει ως εξής: Έστω $\epsilon > 0$. Γι' αυτό το ϵ, αφού $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = L$, θα έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \tag{Ε΄.1}$$

Θέτουμε $\delta' = \min\{\delta, 1\}$, επομένως $\delta' \leq 1 \Rightarrow \delta'^2 \leq \delta'$ και $\delta' \leq \delta$ και παρατηρούμε πως

$$0 < |x - 0| < \delta' \Rightarrow 0 < x^2 < \delta'^2 \leq \delta' \leq \delta \Rightarrow 0 < |x^2 - 0| < \delta \Rightarrow |f(x^x) - L| < \epsilon.$$

Η τελευταία συνεπαγωγή ισχύει θέτοντας αντί για x το x^2 στην (Ε΄.1).

Λύση της Άσκησης 3.15: Η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει. Ο λόγος είναι ότι μπορεί η $f(x)$ να έχει διαφορετικά πλευρικά όρια στο 0, κάτι που κρύβει ο τετραγωνισμός του x. Σαν ένα συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα, εξετάστε τη συνάρτηση Heaviside, $u(x)$, για την οποία ξέρουμε ότι δεν έχει όριο στο 0. Όμως, το όριο $\lim\limits_{x \to 0} u(x^2)$ υπάρχει. Πράγματι, η $u(x^2) = 1$, όπως προκύπτει αν πάρουμε τις περιπτώσεις $x > 0$, $x < 0$ και $x = 0$, επομένως $\lim u(x^2) = 1$.

Λύση της Άσκησης 3.24: Η πρόταση είναι σωστή. Πράγματι, έστω πως υπήρχε το $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$. Τότε, από την Πρόταση 3.5 θα υπήρχε και το όριο της διαφοράς $(f(x)+g(x))-f(x)=g(x)$, κάτι που αντιβαίνει στην υπόθεση.

Λύση της Άσκησης 3.25: Η πρόταση είναι λάθος. Πράγματι, η συνάρτηση Dirichlet $f_D(x)$ έχουμε δει ότι δεν έχει όριο πουθενά (Παράδειγμα 3.17). Ομοίως, και η συνάρτηση $-f_D(x)$ δεν έχει όριο πουθενά. (Αυτό προκύπτει είτε βάσει της απόδειξης του ορίου, είτε παρατηρώντας ότι, αν υπήρχε κάπου το όριο, θα φτάναμε σε άτοπο με χρήση του δεύτερου σκέλους της Πρότασης 3.5 για $k=-1$.) Όμως το άθροισμα $u(x)+(-u(x))=0$ έχει όριο παντού, το 0.

Λύση της Άσκησης 3.27: Η πρόταση φαίνεται απολύτως εύλογη, αλλά είναι λάθος! Το πρόβλημα είναι ότι δεν ξέρουμε τι συμβαίνει στην f όταν $x=x_0$. Για να καταλάβετε το πρόβλημα, σκεφτείτε το αντιπαράδειγμα

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad g(x)=0.$$

Λύση της Άσκησης 3.35: Η πρόταση είναι σωστή. Πράγματι, έστω $\epsilon>0$. Πρέπει να βρούμε $\delta>0$ τέτοιο ώστε αν $0<|x-x_0|<\delta$ θα έχουμε και $|1/f(x)-0|<\epsilon$. Όμως, έχουμε

$$\left|\frac{1}{f(x)}-0\right|<\epsilon\Leftrightarrow|f(x)|>\frac{1}{\epsilon}\Leftarrow f(x)>\frac{1}{\epsilon}.$$

Έστω $M=\frac{1}{\epsilon}>0$. Από τον ορισμό του ορίου $\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$ προκύπτει ότι για το συγκεκριμένο M υπάρχει κάποιο $\delta>0$ τέτοιο ώστε όποτε $0<|x-x_0|<\delta$, να έχουμε και $f(x)>\frac{1}{\epsilon}$, και επομένως, $|1/f(x)-0|<\epsilon$. Ολοκληρώνεται έτσι η απόδειξη.

Λύση της Άσκησης 3.36: Η πρόταση είναι λάθος. Ένα πρώτο πρόβλημα είναι ότι η ύπαρξη του πρώτου ορίου δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη του δεύτερου ορίου, γιατί μπορεί η $f(x)$ να μην ορίζεται σε μια ανοικτή γειτονιά γύρω από το x_0. Σκεφτείτε, για παράδειγμα, την ακραία περίπτωση $f(x)=0$. Ακόμα και αν δεν τίθεται τέτοιο πρόβλημα, όμως, και πάλι μπορεί να μην υπάρχει το όριο. Σαν αντιπαράδειγμα, παρατηρήστε πως

$$\lim_{x\to 0}x=0,\qquad\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty,\qquad\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty,$$

και επομένως δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0}(1/x)$.

Λύση της Άσκησης 3.37: Η πρόταση είναι λάθος. Σε σχέση με την Άσκηση 3.36, τώρα είναι κάπως πιο δύσκολο να βρούμε αντιπαραδείγματα. Ένα αντιπαράδειγμα είναι το ακόλουθο:

$$f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Από το Κριτήριο της Παρεμβολής εύκολα προκύπτει πως $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=0$. Όμως, σε κάθε διάστημα της μορφής $(0,a)$, η συνάρτηση $f(x)$ λαμβάνει αρνητικές τιμές, άρα δεν μπορεί να έχει όριο το ∞. Μάλιστα, αφού σε κάθε διάστημα της μορφής $(0,a)$, η συνάρτηση $f(x)$ λαμβάνει *και* αυθαίρετα μεγάλες *και* αυθαίρετα μικρές τιμές, η συνάρτηση $f(x)$ δεν έχει κανενός είδους όριο.

Λύση της Άσκησης 3.39: Έστω

$$c = \sup\{f(x) : x \in [a, \infty)\},$$

που υπάρχει, καθώς η $f(x)$ είναι φραγμένη άνω. Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c. \tag{Ε΄.2}$$

Έστω $\epsilon > 0$. Αφού το c είναι supremum του συνόλου $\{f(x) : x \in [a, \infty)\}$, θα υπάρχει κάποιο X τέτοιο ώστε $f(X) > c - \epsilon$, επομένως, αφού η $f(x)$ είναι αύξουσα, $f(x) \geq f(X) > c - \epsilon$ για κάθε $x > X$. Επιπλέον, για κάθε $x > X$ θα έχουμε και $f(x) \leq c < c + \epsilon$, αφού το c είναι άνω φράγμα. Συνδυάζοντας τα άνω, προκύπτει ότι για το δοσμένο $\epsilon > 0$ βρήκαμε κάποιο X τέτοιο ώστε για κάθε $x > X$ να έχουμε

$$c - \epsilon < f(x) < c + \epsilon \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon,$$

και επομένως αποδείξαμε την (Ε΄.2).

Λύση της Άσκησης 3.57: Η πρόταση είναι λάθος. Ο λόγος είναι ότι μπορεί το όριο της $g(x)$ να είναι το 0. Σαν ένα απλό παράδειγμα, εξετάστε την περίπτωση που η $g(x) = 0$ παντού στο $\mathbb{R}$ και η $h(x)$ είναι η συνάρτηση Dirichlet του Παραδείγματος 3.17. Τότε οι $g(x)$ και $g(x)h(x)$ έχουν όριο στο 0 το 0, ενώ η $h(x)$ δεν έχει όριο στο 0. Δείτε, όμως, την Άσκηση 3.58. Δείτε, επίσης, την Άσκηση 3.24.

Λύση της Άσκησης 3.60: Η πρόταση δεν ισχύει. Σαν αντιπαράδειγμα, παρατηρήστε ότι στην περίπτωση της συνάρτησης $f(x) = \sin(2\pi x)$, το όριο $\lim_{x\to\infty} f(x)$ δεν υπάρχει, όμως $f(n) = \sin(2\pi n) = 0$, και επομένως $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$.

Λύση της Άσκησης 3.73: Η πρόταση δεν ισχύει. Για παράδειγμα, εξετάστε τις

$$a(n) = \cos \pi n, \qquad b(n) = a(n) + \frac{1}{n},$$

οι οποίες δεν συγκλίνουν σε κάποιο όριο, αλλά η διαφορά τους τείνει στο 0. Δείτε, όμως, την Άσκηση 3.74.

Λύση της Άσκησης 4.13: Η πρόταση δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η μη συνεχής συνάρτηση Dirichlet του Παραδείγματος 3.17 ορισμένη στο μη κλειστό και μη φραγμένο διάστημα $(0, \infty)$ λαμβάνει σε άπειρα σημεία (όλους τους ρητούς εντός του $(0, \infty)$) την ελάχιστη τιμή της 0 και σε άπειρα σημεία (όλους τους άρρητους εντός του $(0, \infty)$) τη μέγιστη τιμή της 1.

Λύση της Άσκησης 4.20: Η πρόταση ισχύει, και ένα παράδειγμα είναι η $f(x) = 0$ όπου $x \in \mathbb{R}$.

Λύση της Άσκησης 4.21: Η πρόταση ισχύει, και ένα παράδειγμα είναι η συνάρτηση Dirichlet του Παραδείγματος 3.17.

Λύση της Άσκησης 4.22: Η πρόταση ισχύει, και ένα παράδειγμα είναι η $f(x) = \sin x$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

Λύση της Άσκησης 4.23: Η πρόταση ισχύει, και ένα παράδειγμα είναι η $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ του Σχήματος 3.2 ορισμένη στο διάστημα $(0, 1]$. Παρατηρήστε ότι η $f(x)$ δεν ορίζεται στο 0, και ακόμα και αν την ορίζαμε, θέτοντας οποιαδήποτε τιμή για το $f(0)$, θα είχε μια ουσιώδη ασυνέχεια στο 0. Επομένως, δεν μπορεί να επεκταθεί ώστε να γίνει συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$.

Λύση της Άσκησης 4.24: Η πρόταση ισχύει, και ένα παράδειγμα είναι η

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-1, 1], \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

η οποία, τυπικά, δεν είναι σταθερή, γιατί λαμβάνει δύο διαφορετικές τιμές στο πεδίο ορισμού της.

Λύση της Άσκησης 4.25: Η πρόταση είναι αληθής. Πράγματι, ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x \sin \frac{1}{x}, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \end{cases}$$

η οποία προκύπτει από τη συνάρτηση του Παραδείγματος 3.16 αν της αφαιρέσουμε την επουσιώδη ασυνέχεια στο $x = 0$, και η οποία προφανώς δεν είναι σταθερή. Η συνέχεια της f στο $[-1, 1] \setminus \{0\}$ προκύπτει άμεσα από γνωστά θεωρήματα. Η συνέχεια της f στο 0 προκύπτει από το Κριτήριο της Παρεμβολής, παρατηρώντας πως

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \Rightarrow \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|.$$

Πράγματι, αφού έχουμε $\lim_{x \to 0} |x| = \lim_{x \to 0} -|x|$, θα έχουμε και

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

άρα τελικά η f είναι παντού συνεχής στο $[-1, 1]$. Παρατηρήστε, επιπλέον, ότι η $f(x)$ μηδενίζεται σε άπειρα σημεία εντός του $[-1, 1]$, και συγκεκριμένα σε όλα τα x για τα οποία ισχύει η $\frac{1}{x} = k\pi$, όπου $k \in \mathbb{Z}^*$, δηλαδή σε όλα τα

$$x = \frac{1}{k\pi}, \qquad k \in \mathbb{Z}^*.$$

Επομένως, η f ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις της εκφώνησης.

Λύση της Άσκησης 4.32: Η πρόταση δεν ισχύει. Σαν αντιπαράδειγμα, παρατηρήστε ότι η μεν $f(x) = x^2$ είναι Lipschitz συνεχής στο $[0, a]$, η δε όμως αντίστροφή της $x^{\frac{1}{2}}$ δεν είναι Lipschitz συνεχής στην εικόνα $f([0, a]) = [0, a^2]$.

Λύση της Άσκησης 5.7: Η πρόταση δεν ισχύει. Πράγματι, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0, \end{cases}$$

για την οποία εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη, με παράγωγο $f'(x) = |x|$, η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη.

Λύση της Άσκησης 5.8: Έστω πως η f είναι άρτια. Οι τιμές της παραγώγου της στις θέσεις x_0 και $-x_0$ ισούνται, αντίστοιχα, με

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \\ f'(-x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x_0+h)-f(-x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{y\to 0} -\frac{f(x_0+y)-f(x_0)}{y} = -f'(x_0). \end{aligned}$$

Στον προσδιορισμό της $f'(-x_0)$, στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι η f είναι άρτια, και στην τρίτη ισότητα η γνωστή ιδιότητα $\lim_{h\to 0} f(h) = \lim_{y\to 0} f(-y)$, που εφαρμόζεται θέτοντας $y = -h$, και που εύκολα αποδεικνύεται με χρήση του ορισμού του ορίου.

Έστω, τώρα, πως η f είναι περιττή. Οι τιμές της παραγώγου της στις θέσεις x_0 και x_0 ισούνται με

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(-x_0)}{h}, \\ f'(-x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x_0+h)-f(-x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-f(x_0-h)-f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{f(x_0+y)-f(x_0)}{y} = f'(x_0). \end{aligned}$$

Στον προσδιορισμό της $f'(-x_0)$, στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι η f είναι άρτια, και στην τρίτη ισότητα η γνωστή ιδιότητα $\lim_{h\to 0} f(h) = \lim_{y\to 0} f(-y)$, που εύκολα αποδεικνύεται με χρήση του ορισμού του ορίου.

Λύση της Άσκησης 5.9: Η πρόταση είναι λάθος. Το πρόβλημα είναι να βρούμε μια τέτοια συνάρτηση, καθώς οι συναρτήσεις που συνήθως εξετάζουμε έχουν αυτή την ιδιότητα. Ας εξετάσουμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x \leq 0. \end{cases}$$

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε πως η πρώτη παράγωγος της είναι η

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0, \\ -2x, & x < 0, \end{cases}$$

δηλαδή η $f(x) = |x|$, η οποία δεν είναι, με τη σειρά της, παραγωγίσιμη στο 0.

Λύση της Άσκησης 5.16: Η πρόταση δεν ισχύει. Παρατηρήστε, για παράδειγμα, ότι για τη συνάρτηση $f(x) = x^3$ έχουμε $f'(0) = 0$, αλλά η συνάρτηση δεν έχει ακρότατο στο 0.

Λύση της Άσκησης 5.17: Η πρόταση είναι λάθος. Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [1,2), \\ x+1, & x \in [2,3], \end{cases}$$

είναι μεν γνησίως αύξουσα στο $[1,3]$, είναι όμως ασυνεχής.

Λύση της Άσκησης 5.18: Η πρόταση είναι λάθος. Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x) = x^3$$

είναι μεν γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$, έχει όμως μηδενική παράγωγο στο 0.

Λύση της Άσκησης 5.19: Η πρόταση είναι λάθος. Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x) = -x^3$$

είναι μεν γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$, έχει όμως μηδενική παράγωγο στο 0.

Λύση της Άσκησης 5.26: Σε αυτή την περίπτωση το θεώρημα δεν ισχύει, διότι για το μεν αριστερό μέλος της 5.1 έχουμε

$$\int 0\,dx = \{C : C \in \mathbb{R}\},$$

για το δε δεξί μέλος έχουμε

$$0\int f(x)\,dx + 0\int g(x)\,dx = \{0+0\} = \{0\},$$

επομένως τα δύο σύνολο διαφέρουν. Παρατηρήστε ότι το θεώρημα θα ίσχυε αν ένα από τα a, b ήταν διάφορο του 0, αλλά σε αυτή την περίπτωση θα έπρεπε να γράψουμε λίγο διαφορετικά την απόδειξη.

Λύση της Άσκησης 5.27: Ο κανόνας δεν ισχύει γενικά! Σαν αντιπαράδειγμα, εξετάστε την περίπτωση

$$\mathcal{V} = \{f(x) = 0\}, \quad \mathcal{W} = \{g(x) = x, h(x) = x^2\}, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{W}.$$

Από τις παραπάνω ισχύει μεν η ισότητα $\mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathcal{Y}$, όχι όμως και η $\mathcal{V} = \mathcal{Y} - \mathcal{W}$. Παρατηρήστε ότι στην ειδική περίπτωση που τα σύνολα συναρτήσεων έχουν τη μορφή $\{f(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$, για παράδειγμα είναι αόριστα ολοκληρώματα, τότε ο κανόνας ισχύει, όπως αποδείξαμε στην Πρόταση 5.10.

Λύση της Άσκησης 6.8: Η πρόταση είναι λάθος. Σαν αντιπαράδειγμα, εξετάστε τις κυρτές συναρτήσεις $f(x) = x$, $g(x) = -x$. Το μέγιστό τους είναι η $|x|$, που εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι δεν είναι κοίλη.

Λύση της Άσκησης 6.9: Η πρόταση ισχύει. Πράγματι, έστω f, g κοίλες με $h = \min\{f, g\}$. Έχουμε ότι

$$-h = -\min\{f, g\} = \max\{-f, -g\}.$$

Η ισότητα προέκυψε με χρήση της Άσκησης 6.7 Αφού οι f, g είναι κοίλες, οι $-f, -g$ είναι κυρτές, άρα, από το Λήμμα 6.1, το μέγιστό τους $-h$ είναι κυρτή, άρα η h είναι κοίλη.

Λύση της Άσκησης 6.10: Η πρόταση είναι λάθος. Σαν αντιπαράδειγμα, εξετάστε τις συναρτήσεις $f(x) = x$ και $g(x) = -x$ που είναι κυρτές και έχουν ελάχιστη $h(x) = \min\{f(x), g(x)\} = -|x|$, που δεν είναι κυρτή.

Λύση της Άσκησης 7.6: Η ιδιότητα δεν ισχύει. Σαν αντιπαράδειγμα, δείτε το Παράδειγμα 7.3.

Λύση της Άσκησης 7.19: Η πρόταση είναι ψευδής. Πράγματι, εξετάστε τη συνάρτηση $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1], \\ -\frac{1}{2}, & x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [-1, 1]. \end{cases}$$

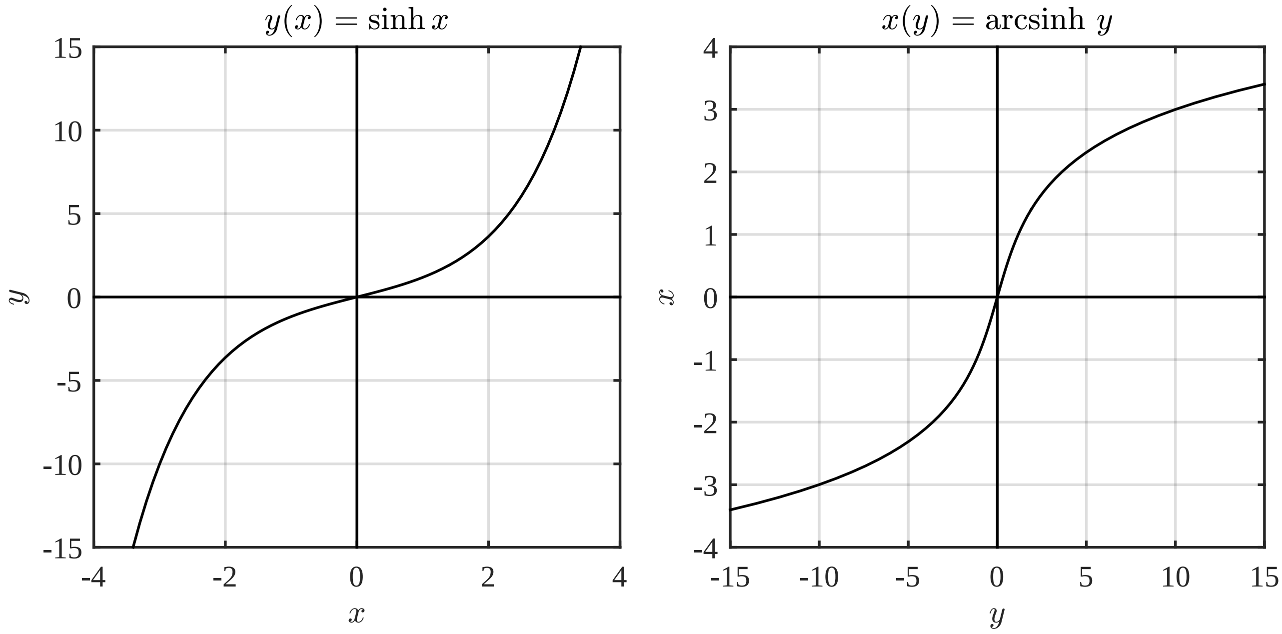
Η συνάρτηση αυτή δεν είναι ολοκληρώσιμη, όπως εύκολα μπορούμε να δούμε από τον ορισμό (δείτε την Άσκηση 7.3), αλλά η $|f|$ είναι σταθερά και ίση με $|f| = \frac{1}{2}$, επομένως είναι ολοκληρώσιμη.

Λύση της Άσκησης 7.21: Η ισότητα εμφανίζεται πολύ συχνά σε γραπτά τελικών εξετάσεων. Δυστυχώς, δεν ισχύει. Σαν αντιπαράδειγμα, εξετάστε την περίπτωση $a = 0$, $b = 2$, με συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x \leq 2, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

Λύση της Άσκησης 7.22: Και αυτή η ισότητα εμφανίζεται πολύ συχνά σε γραπτά τελικών εξετάσεων, χωρίς να ισχύει. Σαν αντιπαράδειγμα, εξετάστε την περίπτωση $a = 1$, $b = 10$, με συναρτήσεις

$$f(x) = g(x) = 10.$$



Σχήμα Ε΄.1: Η συνάρτηση του υπερβολικού ημιτόνου και η αντίστροφή της.

Λύση της Άσκησης 8.4: Παρατηρούμε πως

$$\int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^{-a} f(-t)\,dt = \int_0^{-a} f(t)\,dt = -\int_{-a}^0 f(x)\,dx.$$

Η πρώτη ισότητα προέκυψε με την αλλαγή μεταβλητής $t = -x$. Η δεύτερη χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $f(x)$ είναι περιττή. Επομένως

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx - \int_{-a}^0 f(x)\,dx = 0,$$

και αποδείχθηκε το ζητούμενο.

Λύση της Άσκησης 8.19: Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \sinh x &= \lim_{x\to\infty} \frac{\exp x - \exp(-x)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \exp x - \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \exp(-x) = \infty - 0 = \infty, \\
\lim_{x\to-\infty} \sinh x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\exp x - \exp(-x)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty} \exp x - \frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty} \exp(-x) = 0 - \infty = -\infty.
\end{aligned}$$

Από την Άσκηση 8.18 γνωρίζουμε, επίσης, ότι η συνάρτηση $\sinh x$ είναι γνησίως αύξουσα. Η συνάρτηση έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα Ε΄.1. Αφού το υπερβολικό ημίτονο είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με πεδίο τιμών στο $\mathbb{R}$, θα έχει αντίστροφη στο $\mathbb{R}$ με πεδίο τιμών επίσης το $\mathbb{R}$. Η αντίστροφη έχει επίσης σχεδιαστεί στο Σχήμα Ε΄.1. Έστω $y(x)$ η αντίστροφη του $\sinh x$. Ακολουθώντας τη συνήθη μέθοδο για τον προσδιορισμό του τύπου μιας αντίστροφης συνάρτησης, έχουμε

$$y = \sinh x = \frac{\exp x - \exp(-x)}{2} \Leftrightarrow 2y = \exp x - \exp(-x) \Leftrightarrow \exp 2x - 2y \exp x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \exp x = \frac{2y + \sqrt{4y^2+4}}{2} \Leftrightarrow x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

Στην τρίτη συνεπαγωγή χρησιμοποιήσαμε τον τύπο για τις ρίζες τριωνύμου, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\exp x > 0$, επομένως η μια ρίζα πρέπει να αποκλειστεί. Τελικά, η αντίστροφη συνάρτηση της $\sinh x$ είναι η

$$\operatorname{arcsinh} y = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right), \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Η παράγωγός της προκύπτει εύκολα με χρήση του κανόνα της αλυσίδας:

$$\begin{aligned}(\operatorname{arcsinh} y)' &= \left(\log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)\right)' = \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}\left(1 + \frac{2y}{2\sqrt{y^2+1}}\right) \\ &= \frac{(y+\sqrt{y^2+1})}{(y+\sqrt{y^2+1})\sqrt{y^2+1}}.\end{aligned}$$

και τελικά

$$(\operatorname{arcsinh} y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Λύση της Άσκησης 9.2: Έστω, καταρχάς, $n > 1$. Παρατηρήστε πως

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx &= \lim_{a\to\infty}\int_0^a x^n e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a x^n(-e^{-x})'\,dx \\ &= \lim_{a\to\infty}\left[x^n e^{-x}\right]_0^a + \lim_{a\to\infty} n\int_0^a x^{n-1}e^{-x}\,dx \\ &= \lim_{a\to\infty}\left[a^n e^{-a} - 0\right] + n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx \\ &= n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx.\end{aligned}$$

Στην πέμπτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το όριο

$$\lim_{a\to\infty}\frac{a^n}{e^a} = 0,$$

που προκύπτει εφαρμόζοντας τον κανόνα του L'Hôpital n φορές.

Επιπλέον, ειδικά για την περίπτωση $n = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}\,dx &= \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \left(-e^{-x}\right)'\,dx \\ &= \lim_{a\to\infty}\left[e^{-x}\right]_a^0 = \lim_{a\to\infty}(1-e^{-a}) = 1.\end{aligned}$$

Είμαστε, πλέον, έτοιμοι να αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας επαγωγή, πως

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!, \tag{Ε΄.3}$$

όπου το n παραγοντικό $n!$ ορίζεται ως

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1,$$

για φυσικούς $n > 1$. Επίσης, $0! = 1$. Παρατηρούμε πως η ισότητα (Ε΄.3) ισχύει για το $n = 0$, όπως έχουμε ήδη αποδείξει. Έστω πως ισχύει για ένα οποιοδήποτε n. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n+1$. Πράγματι,

$$\int_0^\infty x^{n+1} e^{-x}\, dx = (n+1) \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = (n+1)n! = (n+1)!,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Λύση της Άσκησης 9.6: Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, το εμβαδόν του χωρίου είναι

$$\begin{aligned} A(R) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\cos k\theta/2|^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2(k\theta/2)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos k\theta}{2}\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos k\theta\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4k}\int_0^{2\pi} (\sin k\theta)'\, d\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4k}\left[\sin 2k\pi - \sin 0\right] = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε πως το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από το k. Στο Σχήμα Ε΄.2 έχουμε σχεδιάσει το χωρίο για δύο διαφορετικές τιμές του k, και συγκεκριμένα τις $k = 1$ και $k = 10$.

Τα δύο χωρία έχουν το ίδιο εμβαδόν! Ένας τρόπος να δικαιολογηθεί το αποτέλεσμα είναι να παρατηρήσουμε ότι, ανεξάρτητα από την τιμή του k, το ποσοστό των γωνιών για τις οποίες η συνάρτηση είναι εντός οποιουδήποτε εύρους είναι σταθερό. Σκεφτείτε ότι μπορούμε να κόψουμε το ένα σχήμα σε ένα πολύ μεγάλο πλήθος απειροστών κυκλικών τομέων, καθένας εκ των οποίων αντιστοιχεί σε απειροστή γωνία, και να τους αναδιατάξουμε δημιουργώντας το άλλο σχήμα. Αυτό μπορεί να συμβεί διότι τα κομμάτια της κάθε ακτίνας εμφανίζονται στη σωστή αναλογία.

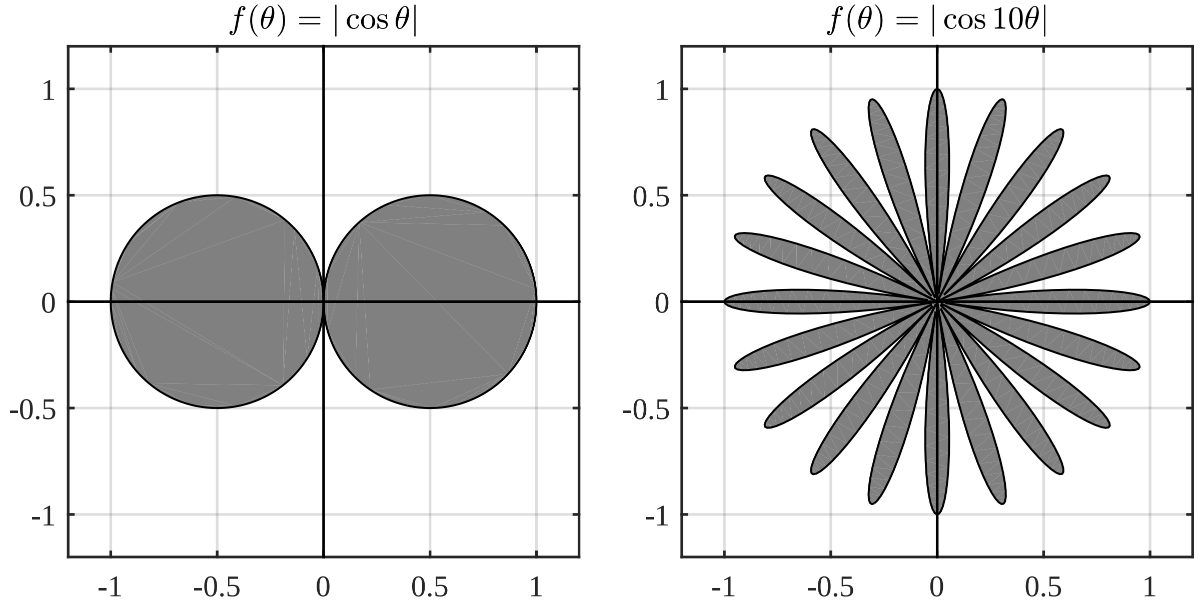
Λύση της Άσκησης 9.14:

1. Κατά τα γνωστά από την θεωρία έχουμε

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pi(\cos x)^2\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pi\frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{\pi}{2}\left(\pi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2x\, dx\right) = \pi^2/2.$$

2. Παρατηρούμε ότι ο συγκεκριμένος όγκος είναι ίδιος με τον όγκο του στερεού που προκύπτει αν περιστρέψουμε περί τον άξονα των x το γράφημα της συνάρτησης $g(x) = 1 + \cos x$. Επομένως,

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pi(1+\cos x)^2\, dx = \pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx + \pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos x\, dx + \pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\, dx \\ &= \pi^2 + 2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin x)'\, dx + \pi^2/2 = \frac{3}{2}\pi^2 + 4\pi. \end{aligned}$$



Σχήμα Ε΄.2: Το χωρίο της Άσκησης 9.6 για $k = 1$ και για $k = 10$. Το εμβαδόν του χωρίου είναι το ίδιο, ανεξάρτητα της τιμής του k.

Λύση της Άσκησης 9.19: Περιγράφουμε την παραβολή ως το ίχνος της καμπύλης

$$x(t) = t, \qquad y(t) = at^2, \qquad 0 \le t \le 1,$$

οπότε το ζητούμενο μήκος δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$l(C) = \int_0^1 \sqrt{((t)')^2 + ((at^2)')^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + (2at)^2}\, dt.$$

Θέτουμε $x = 2at$, και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} l(C) &= \frac{1}{2a}\int_0^{2a} \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^{2a} \\ &= \frac{1}{4a}\left[2a\sqrt{1+4a^2} + \log\left(2a + \sqrt{4a^2+1}\right)\right]. \end{aligned}$$

Λύση της Άσκησης 10.4: Παρατηρούμε πως η ΔΕ είναι γραμμική πρώτης τάξης, επομένως πρέπει σαν πρώτο βήμα να βρούμε την παράγουσα του $\log x$. Παρατηρούμε πως

$$\int \log x\, dx = \int (x)' \log x\, dx = x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x\log x - x + C,$$

επομένως, κατά τα γνωστά για τις γραμμικές ΔΕ πρώτης τάξης,

$$\begin{aligned} y'(x) + (\log x)y(x) = e^{-x\log x} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{x\log x - x}y'(x) + e^{x\log x - x}(\log x)y(x) = e^{-x} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(e^{x\log x - x}y(x)\right)' = -(e^{-x})' \\ &\Leftrightarrow \quad y(x)e^{x\log x - x} = -e^{-x} + C \\ &\Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{C - e^{-x}}{e^{-x}e^{x\log x}} = \frac{Ce^x - 1}{e^{x\log x}}. \end{aligned}$$

Σχετικά με το όριο στο ∞, παρατηρούμε πως

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{C - e^{-x}}{e^{x(\log x - 1)}} = 0.$$

Πράγματι, ο αριθμητής τείνει στο C, ενώ για τον παρονομαστή έχουμε ότι ο εκθέτης $x(\log x - 1)$ τείνει στο ∞, άρα και όλος ο παρονομαστής τείνει στο ∞.

Λύση της Άσκησης 10.5: Παρατηρήστε πως

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Κατά τα γνωστά από τη θεωρία των γραμμικών ΔΕ πρώτης τάξης, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο σκέλη της ΔΕ με το $e^{\tan x}$ και έχουμε

$$e^{\tan x} y'(x) + e^{\tan x} \frac{1}{\cos^2 x} y(x) = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \left(e^{\tan x} y(x)\right)' = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} = \left(e^{\tan x}\right)'$$
$$\Leftrightarrow y(x) e^{\tan x} = e^{\tan x} + C \Leftrightarrow y(x) = 1 + \frac{C}{e^{\tan x}}.$$

Σχετικά με τα όρια των λύσεων, παρατηρήστε πως $\tan x \to \infty$ καθώς $x \to \pi/2$ και $\tan x \to -\infty$ καθώς $x \to -\pi/2$. Επομένως,

$$\lim_{x\to\pi/2} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to-\pi/2} f(x) = \begin{cases} \infty, & C > 0, \\ 1, & C = 0, \\ -\infty, & C < 0. \end{cases}$$

Λύση της Άσκησης 10.9: Παρατηρούμε πως η ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών, και επομένως έχουμε

$$y'(x)y(x) = -x \quad \Leftrightarrow \quad y\,dy = -x\,dx \Leftrightarrow \int y\,dy = -\int x\,dx$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow y(x) = \pm\sqrt{C - x^2}.$$

Το C πρέπει να είναι τέτοιο ώστε να ορίζεται η $y(x)$ παντού στο $(-10, 10)$. Προκύπτει, λοιπόν, πως η γενική λύση είναι όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$y(x) = \pm\sqrt{C - x^2}, \qquad C \geq 100.$$

Προφανώς κάθε λύση θα πρέπει να είναι αποκλειστικά θετική ή αποκλειστικά αρνητική, προκειμένου να είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη). Παρατηρήστε ότι οι λύσεις είναι ημικύκλια ακτίνας C.

Σχετικά με την ειδική λύση που διέρχεται από το σημείο $(0, 10)$, θα χρησιμοποιήσουμε το θετικό πρόσημο, και έχουμε

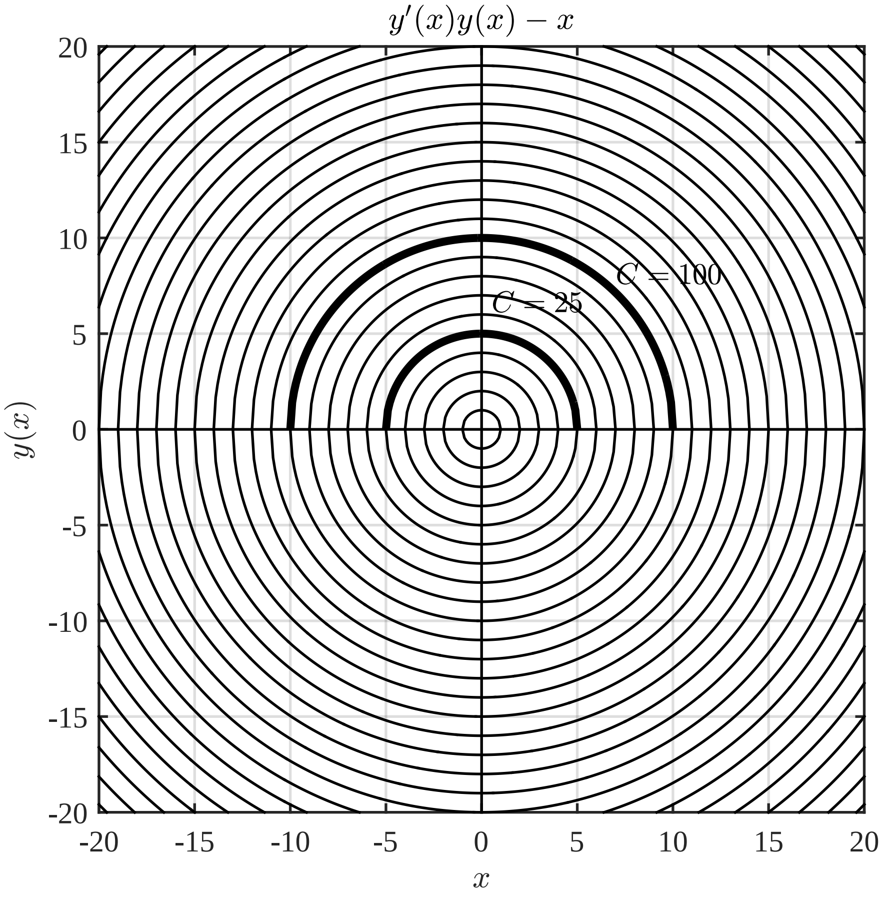
$$10 = \sqrt{C - 0^2} \Rightarrow C = 100,$$

επομένως η λύση είναι η

$$y(x) = \pm\sqrt{100 - x^2}.$$

Σχετικά με την ειδική λύση που διέρχεται από το $(0, 5)$, πρέπει και πάλι να χρησιμοποιηθεί το θετικό πρόσημο, αλλά τώρα έχουμε

$$5 = \sqrt{C - 0^2} \Rightarrow C = 25,$$



Σχήμα Ε΄.3: Λύσεις της Άσκησης 10.9.

που δεν είναι επιτρεπτή τιμή του C. Ουσιαστικά, για να μπορεί μια λύση να περάσει από το σημείο $(0, 5)$ και να ικανοποιεί την δοσμένη ΔΕ, θα πρέπει να συναντήσει τον άξονα των x εντός του διαστήματος $(-10, 10)$ και επομένως δεν μπορεί να ορίζεται παντού σε αυτό.

Δείτε το Σχήμα Ε΄.3 για να καταλάβετε το πρόβλημα που υπάρχει. Στο σχήμα εμφανίζεται η γενική λύση της δοσμένης ΔΕ. Τα ημικύκλια άνω του άξονα των x προκύπτουν από τις λύσεις με θετικό πρόσημο, ενώ τα ημικύκλια κάτω του άξονα των x προκύπτουν με αρνητικό πρόσημο. Οι ειδικές λύσεις για $C = 100$ και $C = 25$ εμφανίζονται τονισμένες. Η ειδική λύση που αντιστοιχεί στο $C = 100$ ορίζεται μόνο στο $(-10, 10)$. Η ειδική λύση που αντιστοιχεί στο $C = 25$ ορίζεται μόνο στο $(-5, 5)$ και όχι σε όλο το $(-10, 10)$, όπως ζητά η άσκηση.

Λύση της Άσκησης 11.3: Υπολογίζουμε τις παραγώγους μέχρι 4ου βαθμού της δοσμένης συνάρτησης

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x - x \sin x, \\ f''(x) &= -\sin x - \sin x - x \cos x = -2 \sin x - x \cos x, \\ f'''(x) &= -2 \cos x - \cos x + x \sin x = -3 \cos x + x \sin x, \\ f^{(4)}(x) &= 3 \sin x + \sin x + x \cos x = 4 \sin x + x \cos x, \end{aligned}$$

επομένως

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 1 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = -3 \quad f^{(4)}(0) = 0,$$

και το πολυώνυμο Taylor τέταρτου βαθμού είναι το

$$f(x) = x - \frac{3}{3!} x^3 = x - \frac{x^3}{2}.$$

Ευρετήριο