Ν. Βαρουχάκης
Λ. Αδαμόπουλος
Χ. Γιαννίκος
Α. Μπέτσης
Δ. Νοταράς
Σ. Φωτόπουλος

μαθηματικά

β΄ λυκείου

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΘΗΝΑ

Οργανισμός
Εκδόσεως
Διδακτικών
Βιβλίων

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ

1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Με τις πολυωνυμικές εξισώσεις ολοκληρώνεται η μελέτη εξισώσεων στο $\mathbb{R}$ *που έγινε στην προηγούμενη τάξη.*
Στην εισαγωγή στο θέμα, τονίζεται ο πολύ χρήσιμος συσχετισμός των εννοιών εξίσωσης και συνάρτησης. Η επίλυση δηλαδή μιας εξίσωσης παρουσιάζεται, όπως συμβαίνει και στην πράξη, ως πρόβλημα της εύρεσης του συνόλου των x στα οποία μια αντίστοιχη συνάρτηση έχει τιμή μηδέν.
Η παρουσίαση του κύριου θέματος έχει ως άξονα την αναζήτηση τρόπων αναγωγής της επίλυσης μιας πολυωνυμικής εξίσωσης σε επίλυση εξίσωσης μικρότερου βαθμού, μια και δεν υπάρχει, όπως απέδειξε ο Galois, γενική θεωρητική λύση του προβλήματος. Για το σκοπό αυτό επιστρατεύονται, συστηματοποιούνται και διευρύνονται προηγούμενες γνώσεις των μαθητών και δίνονται ορισμένα νέα στοιχεία από τη θεωρία των πολυωνύμων.
Από άποψη εκσυγχρονισμού της ύλης σημειώνεται: α) Η χρήση του σχήματος Horner με τη διπλή δυνατότητα του υπολογισμού των τιμών μιας πολυωνυμικής συνάρτησης (προσαρμόσιμη και σε πρόγραμμα μικροϋπολογιστή), καθώς και του πηλίκου και υπολοίπου της διαίρεσης πολυωνύμου με πρωτοβάθμιο παράγοντα. β) Η ορθολογική ένταξη στο κείμενο ορισμένων «παραδοσιακών» μορφών εξισώσεων (π.χ. αντίστροφες), οι οποίες σύμφωνα με τις σύγχρονες αντιλήψεις δεν αποτελούν πια κύρια ύλη του μαθήματος.
Έτσι το εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο, συμπληρωμένο με πολλά παραδείγματα και εφαρμογές, δίνει συχνά ευκαιρίες στο μαθητή α) να επαναλάβει και να συμπληρώσει γνώσεις που ήδη έχει αποκτήσει και β) να διατηρήσει και να αναπτύξει την απαραίτητη ικανότητα και ευχέρεια στον λογισμό, που χωρίς να είναι αυτοσκοπός, παραμένει ένας από τους κύριους στόχους της διδασκαλίας.

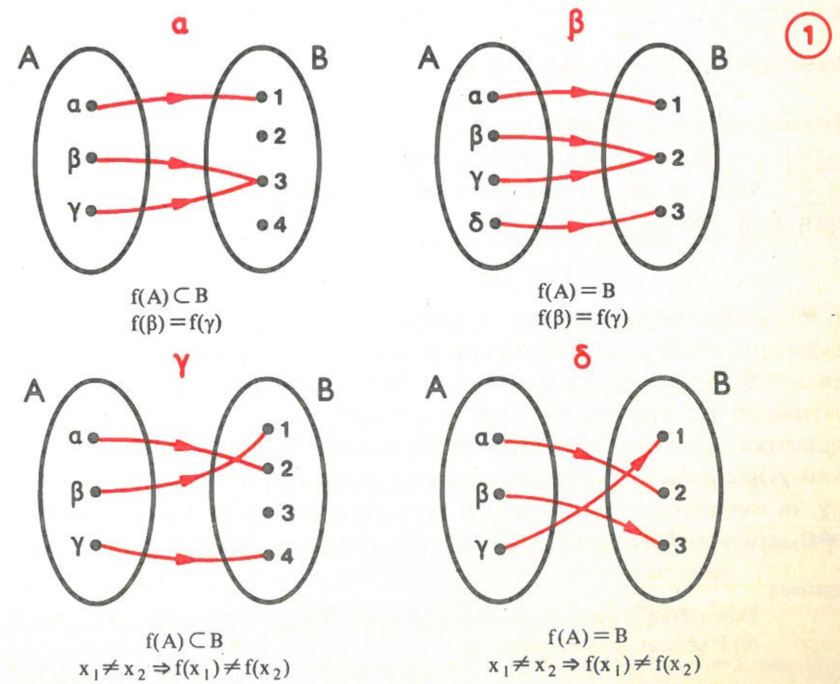
ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ

Συναρτήσεις

1.1 Ξέρουμε ότι μια **απεικόνιση** $f: A \to B$ αντιστοιχίζει σε **κάθε** $x \in A$ ένα **μοναδικό** $y \in B$, που συμβολίζεται $f(x)$ και λέγεται **εικόνα** του x. Η απεικόνιση f λέγεται και **συνάρτηση** με *πεδίο ορισμού* το A και με *τιμές* στο B. Στην περίπτωση αυτή η εικόνα $f(x)$ λέγεται **τιμή** της f στο x και το σύνολο των ζευγών $(x, f(x))$ λέγεται **γράφημα** της f. Το σύνολο των τιμών της f είναι γενικά ένα υποσύνολο του B που συμβολίζεται $f(A)$.

Ειδικότερα μια συνάρτηση f λέγεται:

- **συνάρτηση επί,** όταν $f(A) = B$ (σχ. 1β,δ)
- **συνάρτηση 1−1,** όταν $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (σχ. 1γ,δ).



σχ. 1

Η συνάρτηση του σχήματος 1 δ είναι «1 − 1 και επί», ενώ εκείνη του σχήματος 1α δεν είναι ούτε «1 − 1» ούτε «επί».
Αν μια συνάρτηση $f:A \to B$ είναι «1 − 1 και επί», τότε ορίζεται η αντίστροφή της συνάρτηση $f^{-1}:B \to A$ η οποία σε κάθε $y \in B$ αντιστοιχίζει το $x \in A$ για το οποίο είναι $f(x)=y$. Η f^{-1} είναι επίσης συνάρτηση «1 − 1 και επί». Έτσι έχουμε:

$$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$$

Έστω η συνάρτηση $f:A \to B$. Αν $A_1 \subset A$, τότε η συνάρτηση $f_1:A_1 \to B$ με $f_1(x)=f(x)$ για κάθε $x \in A_1$, λέγεται **περιορισμός** της f στο A_1, ενώ η f λέγεται **επέκταση** της f_1 στο A.

Πραγματικές συναρτήσεις

1.2 Στα επόμενα θα ασχοληθούμε με πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής, δηλαδή με συναρτήσεις $f:A \to B$ με $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$.
Συνήθως, σε μια τέτοια συνάρτηση, δίνεται η τιμή της f(x) στο x με μορφή αλγεβρικής παράστασης χωρίς να αναφέρεται στο σύνολο B. Στην περίπτωση αυτή εννοούμε ότι $B = \mathbb{R}$. Αν δεν αναφέρεται ούτε το πεδίο ορισμού της A, θα εννοούμε ότι είναι το «ευρύτερο» υποσύνολο του $\mathbb{R}$με την ιδιότητα: για κάθε $x \in A$ **μπορεί να οριστεί** ο αριθμός f(x). Π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{x}$, έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$, ενώ $B = \mathbb{R}$.

Πολυωνυμική συνάρτηση

1.3 Έστω $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, με $\alpha_\nu \neq 0$, $\nu+1$ πραγματικοί αριθμοί και η συνάρτηση $P:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$P(x)=\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

Το P(x) λέγεται **πολυώνυμο ν βαθμού με συντελεστές $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$** και η συνάρτηση P λέγεται **πολυωνυμική συνάρτηση ν βαθμού.**
Για $\nu=0$ έχουμε την πολυωνυμική συνάρτηση **μηδενικού** βαθμού, που είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή $P(x)=\alpha_0 \neq 0$.
Συμβατικά, η σταθερή συνάρτηση με $P(x)=0$ θεωρείται και αυτή πολυωνυμική, αλλά **χωρίς βαθμό**· λέγεται μηδενική πολυωνυμική συνάρτηση.
Π.χ. οι συναρτήσεις του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ με τιμή στο x το $\alpha x+\beta$ ή το $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha \neq 0$, είναι πολυωνυμικές πρώτου και δεύτερου βαθμού αντιστοίχως.

Σημείωση

Στην ειδική περίπτωση που $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{\nu-1}=0$ έχουμε $P(x)=\alpha_\nu x^\nu$ και η συνάρτηση P λέγεται **μονωνυμική**.

Πράξεις με συναρτήσεις

1.4 Έστω F_A το σύνολο των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού το A. Αν $f, f_1, f_2 \in F_A$, τότε στο A μπορούμε να ορίσουμε:

- το **άθροισμα f_1+f_2** των συναρτήσεων f_1 και f_2 με

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

- την **αντίθετη −f** της συνάρτησης f με $(-f)(x)=-f(x)$

Το άθροισμα $f_1+(-f_2)$ συμβολίζεται $\mathbf{f_1-f_2}$ και λέγεται **διαφορά** της f_2 από την f_1

- το **γινόμενο λf** του αριθμού $\lambda \in \mathbb{R}$ επί τη συνάρτηση f με $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$
- το **γινόμενο $f_1 f_2$** των συναρτήσεων f_1 και f_2 με

$$(f_1 f_2)(x)=f_1(x) f_2(x)$$

Έστω τώρα $A' =\{x \in A: f_2(x) \neq 0\}$. Τότε στο A′ μπορούμε να ορίσουμε:

- **το λόγο** (το πηλίκο) $\mathbf{\frac{f_1}{f_2}}$ των συναρτήσεων f_1 και f_2 με $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

Αν f_1 και f_2 είναι συναρτήσεις με πεδία ορισμού A_1 και A_2 αντιστοίχως, ορίζουμε συμβατικά ως άθροισμά τους (γινόμενό τους) το άθροισμα (γινόμενο) των περιορισμών τους στο $A = A_1 \cap A_2$ ($\neq \varnothing$).

Ειδικότερα, αν P_1, P_2 είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις ν_1 και ν_2 βαθμού αντιστοίχως, τότε:

- το **άθροισμά** τους P_1+P_2 είναι πολυωνυμική συνάρτηση **βαθμού**[1] $\leq \max\{\nu_1, \nu_2\}$ ή η μηδενική πολυωνυμική συνάρτηση.
- το **γινόμενό** τους $P_1 P_2$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση **βαθμού $\nu_1+\nu_2$**

Αν $B=\{x \in \mathbb{R}: P_2(x) \neq 0\}$, τότε στο B ορίζεται

- ο **λόγος** $\frac{P_1}{P_2}$ των P_1, P_2 που λέγεται **ρητή συνάρτηση.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Το άθροισμα των πολυωνυμικών συναρτήσεων P_1 με $P_1(x)=2x^3-5x+1$ και P_2 με $P_2(x)=-x^2+7x-5$ είναι η πολυωνυμική συνάρτηση P_1+P_2 3ου βαθμού με
$$(P_1+P_2)(x)=P_1(x)+P_2(x)=2x^3-x^2+2x-4.$$

2. Το γινόμενο των πολυωνυμικών συναρτήσεων Q_1 με $Q_1(x)=x^4-3x^2+2$ και Q_2 με $Q_2(x)=x^2-4$ είναι η πολυωνυμική συνάρτηση $Q_1 Q_2$ 6ου βαθμού με

(1) max: αρχικά της λέξης maximum = μέγιστος.

$$(Q_1Q_2)(x) = Q_1(x)\,Q_2(x) = (x^4-3x^2+2)(x^2-4) = x^6-7x^4+14x^2-8.$$

3. Ο λόγος των συναρτήσεων Q_1 και Q_2 του προηγούμενου παραδείγματος ορίζεται στο σύνολο $B=\{x\in\mathbb{R}: x^2-4\neq 0\}=\mathbb{R}-\{2,-2\}$ και είναι η ρητή συνάρτηση $\frac{Q_1}{Q_2}$ με

$$\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)(x) = \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} = \frac{x^4-3x^2+2}{x^2-4}.$$

Ασκήσεις 1, 2, 3, 4.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Συναρτήσεις και εξισώσεις

1.5 Το κόστος μιας εκδρομής με πούλμαν υπολογίζεται σε α δρχ. κατά χιλιόμετρο και προσαυξάνεται με δ δρχ. για διόδια. Έτσι το κόστος για μια διαδρομή k χιλιομ. είναι $\alpha k+\delta$. Το κόστος αυτό είναι η τιμή της συνάρτησης P με

$$P(x)=\alpha x+\delta$$

στο $x=k$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι διαθέτουμε β δρχ. και θέλουμε να υπολογίσουμε τη μέγιστη διαδρομή που μπορούμε να πραγματοποιήσουμε. Αρκεί γι' αυτό να λύσουμε την εξίσωση:

$$\alpha x+\delta=\beta$$

Γενικά, με κάθε συνάρτηση f συνδέονται άμεσα δυο προβλήματα:

- **Να βρεθεί η τιμή της f στο $x=k$.**
- **Να προσδιοριστούν τα x στα οποία η f έχει τιμή β.**

Το πρώτο πρόβλημα, όταν η f(x) είναι αλγεβρική παράσταση, μας είναι γνωστό. Έχει αντιμετωπιστεί και με τη διατύπωση:

«*Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της* f(x) *για* $x=k$».

Το δεύτερο πρόβλημα οδηγεί στην επίλυση της εξίσωσης

$$f(x)=\beta$$

η οποία, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση f_1 με $f_1(x)=f(x)-\beta$, ανάγεται τελικά στην

$$f_1(x)=0 \qquad (1)$$

Έχουμε ήδη ασχοληθεί με επίλυση εξισώσεων ειδικής μορφής. Π.χ. με εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού. Στα επόμενα θα επεκτείνουμε τη μελέτη μας και σε άλλες μορφές εξισώσεων.

Πολυωνυμική εξίσωση

1.6 Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι εξισώσεις $P(x)=0$, όπου P πολυωνυμική συνάρτηση. Τέτοιες εξισώσεις λέγονται «*πολυωνυμικές*». Συγκεκριμένα:

ΟΡΙΣΜΟΣ **Αν P είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση ν βαθμού, τότε η εξίσωση**

$$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0=0$$

λέγεται *πολυωνυμική εξίσωση* **ν βαθμού.**

Π.χ. οι εξισώσεις $6x^3+5x^2-10x-1=0$ και $4x^4+17x^2-2=0$ είναι πολυωνυμικές εξισώσεις 3ου και 4ου βαθμού αντιστοίχως.

Κάθε $\rho\in\mathbb{R}$ στο οποίο η τιμή της πολυωνυμικής συνάρτησης P είναι μηδέν λέγεται *ρίζα* **της πολυωνυμικής εξίσωσης $P(x)=0$.**

Κάθε ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης $P(x)=0$ λέγεται και **ρίζα του πολυωνύμου P(x).**

Λύση πολυωνυμικής εξίσωσης με παραγοντοποίηση

1.7 Είναι γνωστό ότι μπορούμε πάντοτε να επιλύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση 1ου ή 2ου βαθμού.

Για τις πολυωνυμικές εξισώσεις 3ου ή 4ου βαθμού υπάρχουν γενικές μέθοδοι για την επίλυσή τους, αλλά δεν έχουμε τις γνώσεις που απαιτούνται για να τις αναπτύξουμε εδώ. Τέλος έχει αποδειχτεί ότι δεν μπορεί να βρεθεί γενική μέθοδος για την επίλυση πολυωνυμικής εξίσωσης 5ου ή μεγαλύτερου βαθμού.

Είναι όμως γνωστό ότι, αν μπορούμε να λύσουμε δυο εξισώσεις $A(x)=0$ και $B(x)=0$, τότε μπορούμε να λύσουμε και την εξίσωση $A(x)\,B(x)=0$, γιατί

$$A(x)\,B(x)=0 \Leftrightarrow A(x)=0 \text{ ή } B(x)=0$$

και συνεπώς:

Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$A(x)\,B(x)=0$$

είναι η ένωση των συνόλων λύσεων των εξισώσεων

$$A(x)=0 \text{ και } B(x)=0$$

Έτσι, ένας τρόπος για να λύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση $P(x)=0$, είναι να μετασχηματίσουμε το πολυώνυμο $P(x)$ σε γινόμενο πολυωνύμων $A(x)\ B(x)$, οπότε η λύση της $P(x)=0$ ανάγεται στη λύση δυο πολυωνυμικών εξισώσεων **μικρότερου** βαθμού.

Οι βασικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης πολυωνύμων είναι γνωστές από το Γυμνάσιο. Ας τις χρησιμοποιήσουμε για τη λύση πολυωνυμικών εξισώσεων, όπως φαίνεται στα επόμενα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω η εξίσωση: $x^3-8x^2+12x=0$ (1)

Επειδή $x^3-8x^2+12x=x(x^2-8x+12)$ έχουμε:

(1) $\Leftrightarrow x(x^2-8x+12)=0 \Leftrightarrow (x=0$ ή $x^2-8x+12=0)$.

Η $x^2-8x+12=0$ έχει ρίζες $\rho_1=6$ και $\rho_2=2$. Συνεπώς οι ρίζες της (1) είναι οι: 0, 6, 2.

2. Για την εξίσωση: $x^3-5x^2-5x+1=0$ (2)

έχουμε: (2) $\Leftrightarrow (x^3+1)-5x(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)-5x(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1=0$ ή $x^2-6x+1=0)$

Η $x+1=0$ έχει ρίζα το -1 και η $x^2-6x+1=0$ τις $3+2\sqrt{2}$, $3-2\sqrt{2}$.

Άρα το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης (2) είναι το $\{-1,\ 3+2\sqrt{2},\ 3-2\sqrt{2}\}$.

3. Έστω η εξίσωση: $2x^3-5x^2+5x-3=0$ (3)

Είναι: (3) $\Leftrightarrow (2x^3-2x^2+2x)-(3x^2-3x+3)=0 \Leftrightarrow 2x(x^2-x+1)-3(x^2-x+1)=0$

$\Leftrightarrow (2x-3)(x^2-x+1)=0 \Leftrightarrow (2x-3=0$ ή $x^2-x+1=0)$

Η εξίσωση $2x-3=0$ έχει ρίζα το $\frac{3}{2}$, ενώ η $x^2-x+1=0$ είναι αδύνατη, γιατί $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$. Άρα ρίζα της (3) είναι μόνο η $\frac{3}{2}$.

4. Θεωρούμε την εξίσωση: $x^4-3x^3+6x-4=0$ (4)

Έχουμε: (4) $\Leftrightarrow (x^4-4)-3x(x^2-2)=0 \Leftrightarrow (x^2-2)(x^2+2)-3x(x^2-2)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-2)(x^2-3x+2)=0 \Leftrightarrow (x^2-2=0$ ή $x^2-3x+2=0)$

Η $x^2-2=0$ έχει ρίζες $\pm\sqrt{2}$ και η $x^2-3x+2=0$ τις 2 και 1. Άρα το σύνολο λύσεων της (4) είναι το $\{\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ 2,\ 1\}$.

5. Ας πάρουμε την εξίσωση: $9x^3-6x^2+x=2(9x^2-1)-(1-3x)(x+3)$ (5)

Επειδή $9x^3-6x^2+x=x(9x^2-6x+1)=x(3x-1)^2$ και $9x^2-1=(3x-1)(3x+1)$ έχουμε:

(5) $\Leftrightarrow x(3x-1)^2-2(3x-1)(3x+1)+(1-3x)(x+3)=0$

$\Leftrightarrow x(3x-1)^2-2(3x-1)(3x+1)-(3x-1)(x+3)=0$

$\Leftrightarrow (3x-1)(3x^2-x-6x-2-x-3)=0$

$\Leftrightarrow (3x-1)(3x^2-8x-5)=0 \Leftrightarrow (3x-1=0$ ή $3x^2-8x-5=0)$

Η $3x^2-8x-5=0$ έχει ρίζες τις $\frac{4+\sqrt{31}}{3}$, $\frac{4-\sqrt{31}}{3}$, οπότε το σύνολο των λύσεων της (5) είναι $\left\{\frac{1}{3},\ \frac{4+\sqrt{31}}{3},\ \frac{4-\sqrt{31}}{3}\right\}$.

6. Έστω τέλος η εξίσωση: $4x^5+25x^4+34x^3-17x^2-38x-8=0$ (6)

η οποία γίνεται διαδοχικά:

(6) $\Leftrightarrow (4x^5+8x^4)+(17x^4+34x^3)-(17x^2+34x)-(4x+8)=0$

$\Leftrightarrow 4x^4(x+2)+17x^3(x+2)-17x(x+2)-4(x+2)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(4x^4+17x^3-17x-4)=0 \Leftrightarrow (x+2=0$ ή $4x^4+17x^3-17x-4=0)$

Η $x+2=0$ έχει ρίζα το -2, ενώ η $4x^4+17x^3-17x-4=0$ γίνεται διαδοχικά:

$4(x^4-1)+17x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow 4(x^2-1)(x^2+1)+17x(x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(4x^2+17x+4)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-1=0$ ή $4x^2+17x+4=0)$.

Η $x^2-1=0$ έχει ρίζες ±1 και η $4x^2+17x+4=0$ τις -4, $-\frac{1}{4}$. Επομένως το σύνολο λύσεων της (6) είναι το $\left\{-2,\ 1,\ -1,\ -4,\ -\frac{1}{4}\right\}$.

Εύρεση παραγόντων της μορφής $x-\alpha$

1.8 Ας θεωρήσουμε την εξίσωση:

$$P(x)=x^3-2x^2-7x+2=0 \qquad (2)$$

Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέλος της δεν είναι δυνατό να παραγοντοποιηθεί άμεσα, όπως έγινε στα παραδείγματα της προηγούμενης παραγράφου. Αυτό θα μπορούσε να γίνει, αν ήταν γνωστή μια ρίζα ρ της (2). Πράγματι, τότε θα είχαμε $P(\rho)=\rho^3-2\rho^2-7\rho+2=0$ και η (2) θα μπορούσε να γραφεί ισοδύναμα:

$$(2)\Leftrightarrow x^3-2x^2-7x+2=\rho^3-2\rho^2-7\rho+2 \Leftrightarrow (x^3-\rho^3)-2(x^2-\rho^2)-7(x-\rho)=0 \qquad (3)$$

Αλλά ξέρουμε ότι:

$$x^3-\rho^3=(x-\rho)(x^2+\rho x+\rho^2)$$

$$x^2-\rho^2=(x-\rho)(x+\rho)$$

και η (3) γίνεται

$$(x-\rho)\Pi(x)=0$$

όπου $\Pi(x)=x^2+(\rho-2)x+(\rho^2-2\rho-7)$ πολυώνυμο 2ου βαθμού.

Γενικά ισχύει το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0$ έχει παράγοντα το $x-\rho$, αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.**

Απόδειξη. Αν το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$, θα υπάρχει πολυώνυμο $\Pi(x)$, ώστε $P(x)=(x-\rho)\,\Pi(x)$. Τότε θα έχουμε $P(\rho)=(\rho-\rho)\Pi(\rho)=0$ και συνεπώς το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

Αντιστρόφως, **για κάθε** $\rho\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$P(x)-P(\rho)=\alpha_\nu(x^\nu-\rho^\nu)+\alpha_{\nu-1}(x^{\nu-1}-\rho^{\nu-1})+\dots+\alpha_1(x-\rho) \qquad (3)$$

Από το δεύτερο μέλος της (3) βγαίνει κοινός παράγοντας ο $x-\rho$, γιατί, όπως εύκολα επαληθεύουμε, για κάθε $k\in\mathbb{N}^*$ ισχύει η ταυτότητα

$$x^k-\rho^k=(x-\rho)(x^{k-1}+x^{k-2}\rho+x^{k-3}\rho^2+\dots+\rho^{k-1}) \qquad (4)$$

Έτσι η (3) γράφεται

$$P(x)-P(\rho)=(x-\rho)\,\Pi(x) \qquad (5)$$

όπου $\Pi(x)$ πολυώνυμο $\nu-1$ βαθμού.

Αν τώρα το ρ **είναι ρίζα** του $P(x)$, η (5) γίνεται

$$P(x)=(x-\rho)\,\Pi(x)$$

και συνεπώς το $x-\rho$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν **k περιττός**, ισχύει και η ταυτότητα:

$$x^k+\rho^k=(x+\rho)(x^{k-1}-x^{k-2}\rho+x^{k-3}\rho^2-\dots+\rho^{k-1}) \qquad (6)$$

2. Η ισότητα (5) γράφεται:

$$P(x)=(x-\rho)\,\Pi(x)+P(\rho)$$

Τα $\Pi(x)$, $P(\rho)$, που είναι αντίστοιχα το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-\rho)$, προσδιορίζονται ακόμη και με την εκτέλεση της διαίρεσης αυτής, όπως τη μάθαμε στο Γυμνάσιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (2) έχει ρίζα το $\rho=-2$, γιατί

$$P(-2)=(-2)^3-2(-2)^2-7(-2)+2=0.$$

Συνεπώς το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-(-2)=x+2$. Επειδή είναι

$$\Pi(x)=x^2+(\rho-2)x+(\rho^2-2\rho-7)=x^2+(-2-2)x+[(-2)^2-2(-2)-7]=x^2-4x+1$$

θα έχουμε $P(x)=(x+2)(x^2-4x+1)$. Έτσι η εξίσωση (2) γράφεται ισοδύναμα

$$(x+2)(x^2-4x+1)=0 \Leftrightarrow (x+2=0 \text{ ή } x^2-4x+1=0)$$

Η $x^2-4x+1=0$ έχει ρίζες τις $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$ και συνεπώς το σύνολο λύσεων της (2) είναι το $\{-2,\ 2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}\}$.

Ρητές ρίζες πολυωνυμικής εξίσωσης

1.9 Από όσα είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο καταλαβαίνουμε ότι, ένα πρώτο βήμα για να λύσουμε μια εξίσωση $P(x)=0$ είναι συνήθως να προσδιορίσουμε έναν παράγοντα $x-\rho$ του $P(x)$, δηλαδή να εντοπίσουμε μια ρίζα ρ. Όπως θα διαπιστώσουμε αμέσως αυτό είναι δυνατό να γίνει όταν το $P(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές[1] και ρητές ρίζες (ακέραιες ή κλασματικές). Συγκεκριμένα ισχύουν τα επόμενα θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 **Αν η εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0=0$ με ακέραιους συντελεστές έχει ρίζα τον ακέραιο αριθμό $k\neq 0$, τότε ο k είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.**

Απόδειξη. Αφού το k είναι ρίζα της εξίσωσης θα έχουμε:

$\alpha_\nu k^\nu+\alpha_{\nu-1}k^{\nu-1}+\dots+\alpha_1 k+\alpha_0=0$ ή $\alpha_0=k(-\alpha_\nu k^{\nu-1}-\alpha_{\nu-1}k^{\nu-2}-\dots-\alpha_1)$.

Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι ο α_0 είναι πολλαπλάσιο του k, οπότε ο k είναι διαιρέτης του α_0.
Αποδεικνύεται[2] ακόμη και το

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 **Αν η εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0=0$ με ακέραιους συντελεστές έχει ρίζα το ανάγωγο κλάσμα $\frac{k}{\lambda}$ ($k\neq 0$), τότε ο k είναι διαιρέτης του α_0 και ο λ διαιρέτης του α_ν.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν η ρίζα είναι $k=0$, τότε είναι και $\alpha_0=0$. Αντιστρόφως, αν είναι $\alpha_0=0$, η εξίσωση γράφεται $x(\alpha_\nu x^{\nu-1}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-2}+\dots+\alpha_1)=0$, δηλαδή έχει ρίζα το $x=0$.

---

(1) Στα επόμενα θα αναφερόμαστε μόνο σε εξισώσεις με ακέραιους συντελεστές. Αν οι συντελεστές είναι κλασματικοί, με απαλοιφή των παρονομαστών αναγόμαστε σε ισοδύναμη εξίσωση με ακέραιους συντελεστές.

(2) Η απόδειξη παραλείπεται.

Από τα προηγούμενα θεωρήματα καταλαβαίνουμε ότι, για να βρούμε μια ρητή ρίζα της εξίσωσης:

$$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0=0$$

αν έχει, αρκεί να υπολογίσουμε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου P(x) για τους διάφορους διαιρέτες του α_0 και για τα ανάγωγα κλάσματα $\frac{k}{\lambda}$, όπου ο k είναι διαιρέτης του α_0 και ο λ διαιρέτης του α_ν. Π.χ. πιθανές ρητές ρίζες της εξίσωσης (2) της § 1.8 είναι μόνο οι διαιρέτες του 2, δηλαδή οι $\pm 1, \pm 2$ καί, όπως είδαμε στο παράδειγμα της παραγράφου αυτής είναι $P(-2)=0$, οπότε ο -2 είναι ρίζα της.

Σχήμα Horner

1.10 Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση P με

$$P(x)=x^3-5x^2+3x-12.$$

Αν θέλουμε να βρούμε την τιμή της π.χ. στο 28, ή όπως λέμε συνήθως την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου P(x) για x = 28, θα πρέπει να κάνουμε τους επόμενους υπολογισμούς:

$$P(28)=28^3-5\cdot 28^2+3\cdot 28-12=28\cdot 784-5\cdot 784+84-12=$$
$$=21952-3920+84-12=22036-3932=18104$$

Η παραπάνω διαδικασία για την εύρεση της αριθμητικής τιμής του P(x) συντομεύεται, και κυρίως γίνεται με απλούστερους υπολογισμούς, αν παρατηρήσουμε ότι:

$$P(x)=(x^2-5x+3)x-12=[(x-5)x+3]x-12.$$

Έτσι, αρκεί να κάνουμε τους υπολογισμούς:

$$P(28)=[(28-5)28+3]28-12=(23\cdot 28+3)28-12=(644+3)28-12=$$
$$=647\cdot 28-12=18116-12=18104$$

Η πορεία που περιγράψαμε αμέσως παραπάνω φαίνεται στην παρακάτω διάταξη που είναι γνωστή ως *σχήμα* Horner.

$$\begin{array}{cccc|c}
\mathbf{1} & -5 & +3 & -12 & 28 \\
 & 28 & 644 & 18116 & \\
\hline
\mathbf{1} & \mathbf{23} & \mathbf{647} & \boxed{\mathbf{18104}} & \mathbf{P(28)=18104}
\end{array}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Τα στοιχεία της πρώτης γραμμής στην παραπάνω διάταξη είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου P(x), όταν αυτό είναι διατεταγμένο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

2. Αν εκτελέσουμε τη διαίρεση του P(x) με το $x-28$, θα διαπιστώσουμε ότι το πηλίκο έχει συντελεστές τα στοιχεία της τρίτης γραμμής, εκτός από το τελευταίο (το 18104) που είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης αυτής. Δηλαδή με την παραπάνω διάταξη, εκτός από την αριθμητική τιμή του P(x) για $x=28$, βρήκαμε και το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x-28)$ που είναι το $\Pi(x)=x^2+23x+647$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας εφαρμόσουμε την παραπάνω διαδικασία για την εύρεση της αριθμητικής τιμής του $P(x)=6x^4+29x^3+27x^2+9x+1$ για $x=-\frac{1}{2}$. Έχουμε:

$$\begin{array}{ccccc|c}
6 & 29 & 27 & 9 & 1 & -\frac{1}{2} \\
 & -3 & -13 & -7 & -1 & \\
\hline
6 & 26 & 14 & 2 & \boxed{0} &
\end{array} \qquad P\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

Επειδή τώρα $P\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, η διαίρεση $P(x):\left(x+\frac{1}{2}\right)$ είναι τελεία και το πηλίκο της είναι το $6x^3+26x^2+14x+2$. Έτσι θα είναι:

$$6x^4+29x^3+27x^2+9x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)(6x^3+26x^2+14x+2)$$

δηλαδή το P(x) γράφεται ως γινόμενο του διωνύμου (πολυωνύμου 1ου βαθμού) $x+\frac{1}{2}$ με το πολυώνυμο $6x^3+26x^2+14x+2$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί η εξίσωση: $P(x)=6x^4+29x^3+27x^2+9x+1=0$ (1)

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της είναι οι διαιρέτες του 1, δηλαδή οι: ± 1 ενώ οι πιθανές κλασματικές ρίζες της είναι τα ανάγωγα κλάσματα: $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}$.

Με το σχήμα Horner εξετάζουμε κάθε[1] «υποψήφια ρίζα» χωριστά

---

(1) Επειδή όλοι οι συντελεστές του P(x) είναι θετικοί, αποκλείεται η εξίσωση να έχει θετικές ρίζες Γι' αυτό δεν εξετάζουμε αν είναι ρίζες οι αριθμοί $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$.

$$\begin{array}{ccccc|c} 6 & 29 & 27 & 9 & 1 & -1 \\ \downarrow & -6 & -23 & -4 & -5 & \\ \hline 6 & 23 & 4 & 5 & \boxed{-4} & \end{array} \qquad P(-1)=-4\neq 0.$$

$(-1)\cdot 6 \quad (-1)\cdot 23 \quad (-1)\cdot 4 \quad (-1)\cdot 5$

Στο προηγούμενο παράδειγμα διαπιστώσαμε ότι $P\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, οπότε ο $-\frac{1}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x)=0$, και ότι το πηλίκο της διαίρεσης $P(x)$: $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ είναι το $\Pi(x)=$ $=6x^3+26x^2+14x+2$. Επειδή κάθε μια από τις υπόλοιπες[1] ρίζες του $P(x)$ είναι και ρίζα του $\Pi(x)$ και αντιστρόφως, στη συνέχεια θα αναζητήσουμε τις ρητές ρίζες του $\Pi(x)$, που είναι μικρότερου βαθμού, και όχι του $P(x)$.

$$\begin{array}{cccc|c} 6 & 26 & 14 & 2 & -\frac{1}{2} \\ & -3 & -\frac{23}{2}^{(2)} & & \\ \hline 6 & 23 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 6 & 26 & 14 & 2 & -\frac{1}{3} \\ & -2 & -8 & -2 & \\ \hline 6 & 24 & 6 & \boxed{0} & \Pi\left(-\frac{1}{3}\right)=0 \end{array}$$

Επομένως το πηλίκο $\Pi(x)$, άρα και το $P(x)$, διαιρείται ακριβώς με το $x+\frac{1}{3}$ και το πηλίκο της διαίρεσης $\Pi(x)$: $\left(x+\frac{1}{3}\right)$ είναι $6x^2+24x+6$. Συνεπώς έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)\Pi(x)=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)(6x^2+24x+6)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)(x^2+4x+1)=0$$

Επειδή τώρα οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+4x+1=0$ είναι οι $-2+\sqrt{3}$, $-2-\sqrt{3}$, το σύνολο λύσεων της (1) είναι:

$$\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -2+\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}\right\}$$

Ασκήσεις 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

---

(1) Θα δοκιμάσουμε πάλι το $-\frac{1}{2}$, γιατί είναι πιθανό να είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης.

(2) Όταν κάποιο στοιχείο της δεύτερης γραμμής είναι κλάσμα, σταματάμε τη διαδικασία, γιατί αποκλείεται να βρούμε υπόλοιπο μηδέν.

Πολυωνυμικές εξισώσεις ειδικής μορφής

1.11 Υπάρχουν πολυωνυμικές εξισώσεις που η επίλυσή τους διευκολύνεται, όταν χρησιμοποιήσουμε μια νέα μεταβλητή (βοηθητικό άγνωστο) που συνδέεται με μια σχέση με τον άγνωστο της εξίσωσης. Δυο τέτοιες περιπτώσεις θα αντιμετωπίσουμε στα επόμενα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Θεωρούμε την εξίσωση: $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ (1)

Κάθε εξίσωση της μορφής (1) λέγεται **διτετράγωνη εξίσωση στο $\mathbb{R}$** και για να την επιλύσουμε, θέτουμε $x^2=y$, οπότε παίρνουμε την εξίσωση $\alpha y^2+\beta y+\gamma=0$ που λέγεται **επιλύουσα** της (1). Επειδή είναι $x^2=y$, οι αρνητικές ρίζες της επιλύουσας απορρίπτονται, ενώ από κάθε ρίζα της $\rho\geqslant 0$ προκύπτουν δυο αντίθετες ρίζες $\pm\sqrt{\rho}$ της (1). Άρα η διτετράγωνη εξίσωση έχει ή τέσσερις ή δύο ή καμμιά ρίζες.
Π.χ. η εξίσωση $4x^4+7x^2-2=0$ έχει επιλύουσα την $4y^2+7y-2=0$, που έχει ρίζες $\rho_1=\frac{1}{4}$ και $\rho_2=-2$. Η ρίζα -2 απορρίπτεται, οπότε οι ρίζες της $4x^4+7x^2-2=0$ είναι οι ρίζες της $x^2=\frac{1}{4}$, δηλαδή οι αριθμοί $\pm\frac{1}{2}$.

2. Έστω ακόμη μια εξίσωση της μορφής $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2\pm\beta x+\alpha=0$. Π.χ.

$$6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0 \tag{2}$$

Επειδή $\alpha_0=6\neq 0$, η (2) δεν έχει ρίζα το 0. Υποθέτουμε λοιπόν ότι είναι $x\neq 0$ και έχουμε:

$$(2)\Leftrightarrow \frac{6x^4}{x^2}+\frac{5x^3}{x^2}-\frac{38x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}=0\Leftrightarrow 6x^2+5x-38+5\frac{1}{x}+6\frac{1}{x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow 6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0 \tag{3}$$

Θέτουμε τώρα $$x+\frac{1}{x}=y \tag{4}$$

οπότε $x^2+\frac{1}{x^2}+2x\frac{1}{x}=y^2$ ή $$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2 \tag{5}$$

και η (3) γίνεται: $6(y^2-2)+5y-38=0$ ή $6y^2+5y-50=0$, που έχει ρίζες $y_1=\frac{5}{2}$ και $y_2=-\frac{10}{3}$.

Για τις τιμές αυτές έχουμε από την (4) τις εξισώσεις:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0 \text{ και } x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}\Leftrightarrow 3x^2+10x+3=0$$

που είναι 2ου βαθμού. Οι ρίζες της πρώτης είναι οι 2 και $\frac{1}{2}$, ενώ της δεύτερης οι -3 και $-\frac{1}{3}$.

Επομένως το σύνολο λύσεων της (2) είναι το $\left\{2, \frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3}\right\}$

Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

1.12 Υπάρχουν εξισώσεις που δεν είναι πολυωνυμικές, αλλά η επίλυσή τους ανάγεται στην επίλυση μιας πολυωνυμικής εξίσωσης. Δυο τέτοιες περιπτώσεις θα δούμε στα επόμενα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω η εξίσωση: $\frac{2x^2}{x+1}+\frac{5}{3-x}=-\frac{x^2+11}{x^2-2x-3}$ (1)

Μια τέτοια εξίσωση, δηλαδή μια εξίσωση της οποίας τουλάχιστο ένας όρος είναι ρητή παράσταση του άγνωστου x, λέγεται, όπως ξέρουμε από το Γυμνάσιο, **ρητή εξίσωση**. Επειδή $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$, η (1) είναι ορισμένη στο σύνολο $A=\mathbb{R}-\{-1,3\}$. Στο σύνολο αυτό έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{2x^2}{x+1}-\frac{5}{x-3}=-\frac{x^2+11}{(x-3)(x+1)}\Leftrightarrow 2x^2(x-3)-5(x+1)=-x^2-11$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-5x^2-5x+6=0 \qquad (1')$$

Είναι

2	−5	−5	6	3
	6	3	−6	
2	1	−2	$\boxed{0}$	

Άρα $(1')\Leftrightarrow(x-3)(2x^2+x-2)=0$

Επειδή τώρα $3\notin A$, ρίζες της (1) είναι μόνο οι ρίζες της $2x^2+x-2=0$, δηλαδή οι $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ και $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$

2. Έστω ακόμη η εξίσωση: $\sqrt{2x^2-1}-x=x-3$ (2)

Μια τέτοια εξίσωση, δηλαδή μια εξίσωση στην οποία εμφανίζεται άγνωστος κάτω από ριζικό, λέγεται **άρρητη**.

Είναι $(2)\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-1}=2x-3$ (2′)

Για να έχει λύση η (2′), πρέπει να είναι $2x^2-1\geqslant 0$ και $2x-3\geqslant 0$. Άρα

$$(2')\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-1\geqslant 0\\ 2x-3\geqslant 0\\ 2x^2-1=(2x-3)^2\end{cases}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}2x-3\geqslant 0\\ 2x^2-1=(2x-3)^2.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant\frac{3}{2}\\ 2x^2-1=4x^2-12x+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant\frac{3}{2}\\ x^2-6x+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant\frac{3}{2}\\ x=5 \text{ ή } x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=5$$

(1) Η πρώτη συνθήκη καλύπτεται από την τρίτη και γι' αυτό παραλείπεται.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να επιλυθεί η εξίσωση: $(x^2+3x+5)^2-(x^2+3x+6)-5=0$ (2)

Θέτουμε $x^2+3x+5=y$, οπότε $x^2+3x+6=y+1$. Επομένως η (2) γίνεται:

$$y^2-(y+1)-5=0\Leftrightarrow y^2-y-6=0 \qquad (2')$$

Η (2′) έχει ρίζες $y_1=-2$ και $y_2=3$. Έχουμε λοιπόν:

- $x^2+3x+5=-2\Leftrightarrow x^2+3x+7=0$, που είναι αδύνατη
- $x^2+3x+5=3\Leftrightarrow x^2+3x+2=0$, που έχει ρίζες τις −2 και −1.

Άρα ρίζες της (2) είναι οι: −2, −1.

2. Να επιλυθεί η εξίσωση: $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}=1$ (3)

Έχουμε:

$$(3)\Leftrightarrow\sqrt{2x+1}=\sqrt{x}+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 0\\ 2x+1=(\sqrt{x}+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 0\\ 2x+1=x+1+2\sqrt{x}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 0\\ 2\sqrt{x}=x\end{cases}\Leftrightarrow 4x=x^2\Leftrightarrow x^2-4x=0\Leftrightarrow x(x-4)=0\Leftrightarrow(x=0 \text{ ή } x=4).$$

Ασκήσεις 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

i) f με $f(x)=\frac{3x}{x^2-x}$ ii) g με $g(x)=\frac{x+1}{x^2-5x+6}$ iii) h με $h(x)=x-\sqrt{1-x^2}$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις f_1 με $f_1(x)=\frac{3}{x-1}$ και f_2 με $f_2(x)=\frac{x}{x^2-1}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις f_1+f_2 και $\frac{f_1}{f_2}$.

3. Θεωρούμε τις πολυωνυμικές συναρτήσεις f με $f(x)=x^3+5x^2+6$ και g με $g(x)=5x^2-3x+6$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις f−g και fg.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις f_1 και f_2 με

$$f_1(x)=\begin{cases}0, \text{ αν } x<0\\ x, \text{ αν } x\geqslant 0\end{cases} \quad\text{και}\quad f_2(x)=\begin{cases}1-x, \text{ αν } x<1\\ 1+2x, \text{ αν } x\geqslant 1\end{cases}$$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις f_1+f_2 και f_1f_2.

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^4+2x^3-x^2-2x=0$ ii) $9x^3-27x^2-x+3=0$ iii) $4x^4-5x^3-4x+5=0$

iv) $3x^4-8x^3=6x^2-16x$ v) $x^3-x^2+3x-27=0$ vi) $(x+2)^3=8x^2+16x$

vii) $3x^4-2x^3-18x^2+6x+27=0$ viii) $2x^2(x+2)=3x^2+15x+18$

6. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)=3x^4+x^3-2\lambda x+2$. i) Να προσδιορίσετε το λ ώστε το P(x) να έχει παράγοντα το $x-1$. ii) Για ποια τιμή του λ το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$ είναι το -2;

7. i) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)=x^4-(\lambda-1)x^3-\lambda x-4$ έχει παράγοντα το $x+1$.

ii) Τα πολυώνυμα που προκύπτουν για τις τιμές του λ που θα βρείτε, να τα γράψετε ως γινόμενα παραγόντων.

8. Να προσδιοριστούν τα α και β ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^4+2x^3-7x^2+\alpha x+\beta$ να έχει παράγοντες τους $x-1$ και $x+3$.

9. Να γίνουν γινόμενο παραγόντων τα διώνυμα:

i) x^5-1 ii) x^5+1 iii) $\alpha^4\beta^{12}-1$ iv) x^5+y^{10} v) α^8-256

10. Να αποδείξετε ότι:

i) Ο αριθμός $17^{14}-1$ διαιρείται ακριβώς με τον 16.

ii) Ο αριθμός 9^9+1 διαιρείται ακριβώς με τον 10.

11. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5+4x+2=0$ δεν έχει ρητή ρίζα.

12. Αν ρ είναι μια ρίζα της εξίσωσης $x^4-3x^3+2x^2-7x-1=0$, να δείξετε ότι:

$$|\rho|\leqslant|-3|+|2|+|-7|+|-1|.$$

13. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x^3-7x-6=0$ ii) $2x^4-3x^3-17x^2+27x-9=0$

iii) $4x^4-9x^2-2x+3=0$ iv) $6x^4+10x^3-x^2+5x-2=0$

v) $x^3+6x^2+12x+8=0$

14. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^4+x^3-(\alpha^3+1)x^2-\alpha^2x+4=0$. i) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση έχει ρίζα το -1. ii) Να λύσετε τις εξισώσεις που προκύπτουν για τις τιμές του α που θα βρείτε.

15. Η εξίσωση $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta\in\mathbb{Q}^*$) έχει ρίζα τον ακέραιο ρ. Αν είναι $\alpha\rho^2+\gamma=0$, να βρείτε τις άλλες δύο ρητές ρίζες της εξίσωσης.

16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^4-12x^2+27=0$ ii) $2y^4-7y^2-4=0$

iii) $3t^4+5t^2+2=0$ iv) $\varphi^4+9\varphi^2+24=0$

17. Να προσδιορίσετε το $\lambda\neq0$, ώστε η εξίσωση $\lambda^2x^4-4(\lambda+1)x^2+4=0$ να έχει: i) δύο διπλές ρίζες, ii) τέσσερις ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

18. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $12x^4+11x^3-146x^2+11x+12=0$

ii) $2x^5-13x^4-61x^3-61x^2-13x+2=0$

19. Να λυθεί η εξίσωση $(\omega^2-3\omega+1)^2-10(\omega^2-3\omega-3)-51=0$

20. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $2\sigma\upsilon\nu^4x+17\sigma\upsilon\nu^2x-9=0$ ii) $2\eta\mu^3x-3\eta\mu^2x-3\eta\mu x+2=0$

21. Να λυθεί η εξίσωση $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{3}{x^2-x-2}$

22. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\dfrac{6}{2x-1}-\dfrac{5}{2x+1}=\dfrac{1-8x}{1-4x^2}$ ii) $\dfrac{3x^2-1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-x}=\dfrac{x^2-3x+2}{x}$

23. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $1+\sqrt{x}=\sqrt{3(x-1)}$ ii) $\sqrt[3]{5\varphi-7}=\varphi-1$

iii) $\sqrt{3y+1}+\sqrt{y-1}=\sqrt{7y+1}$ iv) $t^2-6t-2\sqrt{t^2-6t+2}=1$

2 ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η μελέτη βασικών συναρτήσεων που ο μαθητής έχει ήδη συναντήσει στα γυμνασιακά μαθήματα. Για τη συμπλήρωση των γνώσεών του εκείνων σημαντικό ρόλο θα παίξει η έννοια της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, επειδή με αυτή, που ως τώρα ήταν ένα απλό σύνολο σημείων, θα ερμηνευθούν εποπτικά βασικές έννοιες, όπως η μονοτονία, η περιοδικότητα, η αρτιότητα και άλλες ιδιότητες των συναρτήσεων.

Η μελέτη διευκολύνεται με τη συστηματική χρησιμοποίηση της έννοιας του λόγου μεταβολής μιας συνάρτησης καθώς και της αλλαγής του συστήματος αναφοράς, που επιτρέπει την αναγωγή σε γνωστές ,απλές μορφές συναρτήσεων.

Εκτός από το λόγο μεταβολής, που αποτελεί προεισαγωγή στην έννοια της παραγώγου, εισάγονται ευκαιριακά και ορισμένες απλές περιπτώσεις ορίου συνάρτησης, ακροτάτων κτλ., που αποτελούν μια πρώτη επαφή του μαθητή με θέματα που θα μελετήσει βαθύτερα και εκτενέστερα σε μεγαλύτερη τάξη.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ

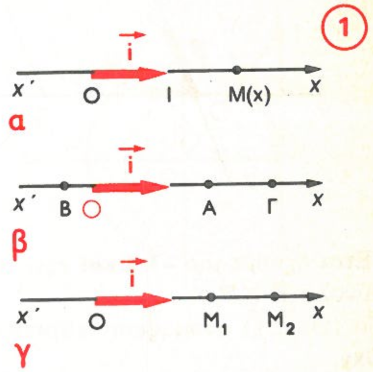
Συστήματα αναφοράς

2.1 **Σύστημα αναφοράς σε ευθεία:** Ένας άξονας $x'x$ με αρχή O και μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$, ορίζει ένα *σύστημα αναφοράς* $(O, \vec{i})$ στην ευθεία $x'x$. Σε κάθε σημείο M της ευθείας $x'x$ (σχ. 1α) αντιστοιχίζεται ένας πραγματικός αριθμός x τέτοιος, ώστε $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}$. Ο αριθμός x, που είναι η αλγεβρική τιμή $\overline{OM}$ του $\overrightarrow{OM}$, λέγεται **τετμημένη** του M.

Αντιστρόφως, σε κάθε πραγματικό αριθμό x αντιστοιχίζεται ένα μοναδικό σημείο M(x) με τετμημένη x.

Έτσι έχουμε μια **«1-1 και επί»** απεικόνιση της ευθείας $x'x$, ως σημειοσυνόλου, στο $\mathbb{R}$.

Το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i})$ γράφεται και απλούστερα με το σύμβολο Ox του θετικού ημιάξονα, όταν το μοναδιαίο τμήμα υπονοείται.



Αν Α,Β,Γ είναι τρία σημεία της $x'x$ (σχ. 1β), οποιαδήποτε και αν είναι η θέση των σημείων αυτών πάνω στον άξονα, ένα από τα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma A}$ είναι αντίθετο προς το άθροισμα των άλλων. Έτσι ισχύει σε κάθε περίπτωση

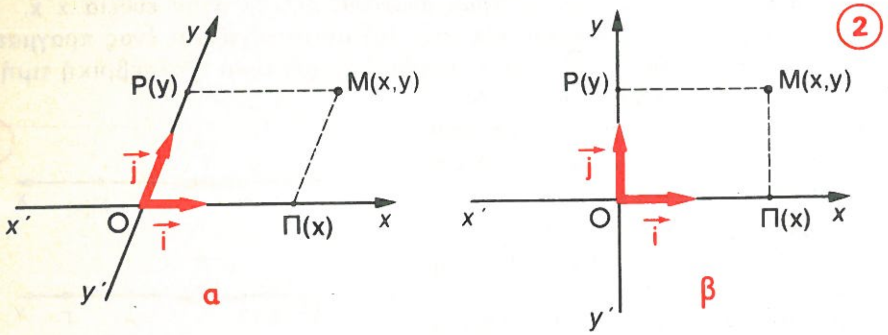
$$\overline{AB}+\overline{B\Gamma}+\overline{\Gamma A}=0 \text{ ή } \overline{A\Gamma}=\overline{AB}+\overline{B\Gamma} \text{ (σχέση Chasles).}$$

Αν εφαρμόσουμε τη σχέση του Chasles για τα σημεία M_1, M_2, O του άξονα (σχ. 1γ) θα έχουμε $\overline{M_1M_2}=\overline{M_1O}+\overline{OM_2}$ ή $\overline{M_1M_2}=\overline{OM_2}-\overline{OM_1}$. Δηλαδή

$$\overline{M_1M_2}=(\text{τετμημένη } M_2)-(\text{τετμημένη } M_1)$$

2.2 **Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς στο επίπεδο:** Δυο τεμνόμενοι άξονες με κοινή αρχή O και μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ αντιστοίχως, ορίζουν ένα σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$ στο επίπεδο ως εξής: Έστω M ένα σημείο του επιπέδου (σχ. 2α). Από το M φέρνουμε παράλληλες προς τους άξονες $y'y$ και $x'x$, οι οποίες τέμνουν τους άξονες $x'x$, $y'y$ αντιστοίχως στα σημεία Π και Ρ. Αν x είναι η τετμημένη του Π στον $x'x$ και y η τετμημένη του Ρ στον $y'y$, τότε στο σημείο M αντιστοιχίζεται ένα συγκεκριμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών, το (x,y).

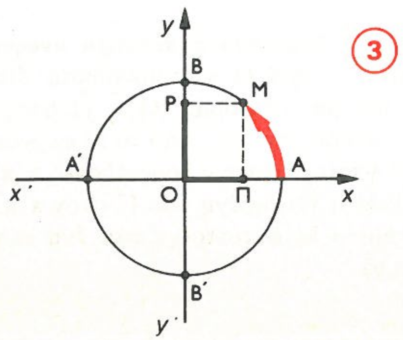
Οι x,y λέγονται **συντεταγμένες** του M και ειδικότερα ο x λέγεται **τετμημένη** και ο y **τεταγμένη**.
Αντιστρόφως, σε κάθε ζεύγος αριθμών (x,y) αντιστοιχίζεται ένα μοναδικό σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες x, y, το σημείο τομής δυο ευθειών: Εκείνης που άγεται από το σημείο Π(x) παραλλήλως προς τον άξονα y΄y και εκείνης που άγεται από το σημείο P(y) παραλλήλως προς τον x΄x. Το σημείο αυτό συμβολίζεται **M(x,y)**.



΄Ετσι έχουμε μια **«1-1 και επί»** απεικόνιση του επιπέδου, ως σημειοσυνόλου, στο σύνολο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
Το $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ονομάζεται καρτεσιανό σύστημα αναφοράς και γράφεται συνήθως Oxy.
Το σύστημα λέγεται **ορθοκανονικό**, όταν οι άξονες είναι κάθετοι και τα i, j ορίζονται από ίσα τμήματα (σχ. 2β).

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

2.3 ΄Ενας προσανατολισμένος κύκλος C με ακτίνα το μοναδιαίο τμήμα, στον οποίο εκλέξαμε (αυθαίρετα) ένα σημείο A, λέγεται **τριγωνομετρικός κύκλος με αρχή A**.
Αν $\widehat{u}$ είναι το μοναδιαίο τόξο (θετικά προσανατολισμένο) του C, τότε σε κάθε πραγματικό αριθμό x αντιστοιχίζεται το τόξο $\widehat{AM}$ τέτοιο, ώστε $\widehat{AM} = x\widehat{u}$, δηλαδή το τόξο με αλγεβρική τιμή x.
Εξάλλου στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι ***προσαρτημένο*** το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy, με αρχή το κέντρο του κύκλου και μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα x΄x το $\overrightarrow{OA}$ (σχ. 3).
Αν ως μοναδιαίο τόξο ληφθεί το 1 rad, μπορούμε να ορίσουμε τις συναρτήσεις **ημίτονο (ημ)** και **συνημίτονο (συν)** ως εξής:



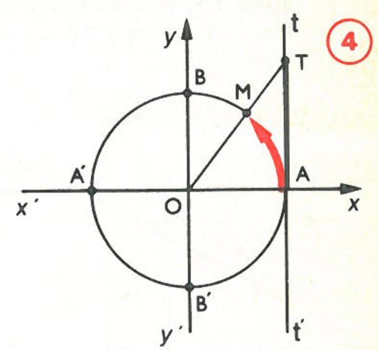
Σε κάθε $x\in\mathbb{R}$ αντιστοιχίζουμε το τόξο $\widehat{AM}$ με αλγεβρική τιμή x. Αν (α,β) είναι οι συντεταγμένες του M, θα έχουμε:

$$\text{συν}x = \text{τετμημένη } \alpha \text{ του } M$$

$$\text{ημ}x = \text{τεταγμένη } \beta \text{ του } M$$

Επίσης στο σύνολο $\mathbb{R}_1 = \{x\in\mathbb{R}: \text{συν}x\neq 0\} = \{x\in\mathbb{R}: x\neq k\pi + \frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\}$ ορίζεται η συνάρτηση **εφαπτομένη (εφ)** ως πηλίκο $\dfrac{\text{ημ}}{\text{συν}}$.

Αν t΄t είναι ο παράλληλος προς τον y΄y άξονας με αρχή το A, και T είναι η τομή της OM και του t΄t, τότε $\text{εφ}x = \overline{AT}$ (σχ. 4).



Σημείωση

Αν το τόξο $\widehat{AM}$ ή η προσανατολισμένη γωνία (OA, OM), έχει αλγεβρική τιμή α rad, τότε οι αριθμοί συνα, ημα, εφα λέγονται αντίστοιχα συνημίτονο, ημίτονο και εφαπτομένη του τόξου ή της γωνίας.

Ασκήσεις 1,2.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Γραφική παράσταση συνάρτησης και η εξίσωσή της

2.4 ΄Εστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A. Για κάθε $x\in A$ ορίζεται το ζεύγος (x, f(x)), που ανήκει στο γράφημα G της f. Αν λοιπόν θεωρήσουμε στο επίπεδο ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, τότε κάθε ζεύγος $(x, y)\in G$ μπορεί να παρασταθεί με ένα σημείο M(x, y), του οποίου συντεταγμένες είναι ακριβώς οι x και y.
Το σύνολο $\mathcal{C}$ των σημείων M(x, y), για τα οποία $(x, y)\in G$, λέγεται **γραφική παράσταση** της συνάρτησης f. Είναι λοιπόν:

$$(x,y)\in G \Leftrightarrow M(x, y)\in\mathcal{C}$$

Επειδή τα στοιχεία του G είναι της μορφής (x, f(x)), είναι προφανές ότι ένα σημείο Μ ανήκει στη γραφική παράσταση $\mathcal{C}$ της f, αν και μόνο αν το ζεύγος (x, y) των συντεταγμένων του επαληθεύει την εξίσωση

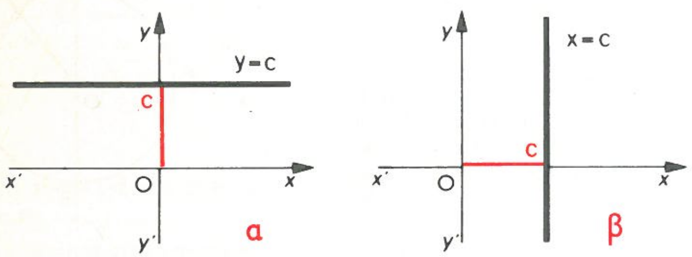
$$y=f(x) \quad (x\in A).$$

Η γραφική παράσταση $\mathcal{C}$ προσδιορίζεται λοιπόν από το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $y=f(x)$, που λέγεται και **εξίσωση της** $\mathcal{C}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η γραφική παράσταση της σταθερής συνάρτησης με τιμή c έχει εξίσωση $y=c$, που επαληθεύεται από όλα τα ζεύγη της μορφής (x, c). Είναι λοιπόν η παράλληλη προς τον άξονα x΄x, η οποία διέρχεται από το σημείο Α (0, c) (σχ. 5α).
Για $c=0$ έχουμε $y=0$, που είναι η εξίσωση του άξονα x΄x.

5



Σημείωση

Γενικότερα μια εξίσωση με μεταβλητές x, y λέγεται και εξίσωση του συνόλου των σημείων, των οποίων οι συντεταγμένες επαληθεύουν αυτή την εξίσωση. Π.χ. η $x^2+y^2=1$ είναι η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου.

Επίσης το σύνολο των σημείων με συντεταγμένες (c, y) έχει ως εξίσωση την $x=c$ και είναι ευθεία παράλληλη προς τον άξονα y΄y (σχ. 5β). Για $c=0$ έχουμε $x=0$, που είναι η εξίσωση του άξονα y΄y. Εδώ, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η εξίσωση δεν είναι της μορφής $y=f(x)$. ΄Αρα έχουμε εξίσωση σημειοσυνόλου που δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

2.5 **Γραφική παράσταση της f με f(x) = αx.** Η ζητούμενη γραφική παράσταση $\mathcal{C}$ έχει εξίσωση $y=\alpha x$ και περιέχει προφανώς την αρχή O(0, 0) των αξόνων. Αν $\alpha=0$, η εξίσωση γίνεται $y=0$ και η $\mathcal{C}$ είναι (§2.4, Παράδ.) η ευθεία x΄x. Υποθέτουμε $\alpha\neq 0$. Τότε.
Εκτός από το O, και το σημείο A(1, α) ανήκει στη $\mathcal{C}$ (σχ. 6). Για κάθε άλλο σημείο της M(x,y) έχουμε $x\neq 0$ και

$$y=\alpha x, \quad \text{ή} \quad \frac{y}{x}=\frac{\alpha}{1} \qquad (1)$$

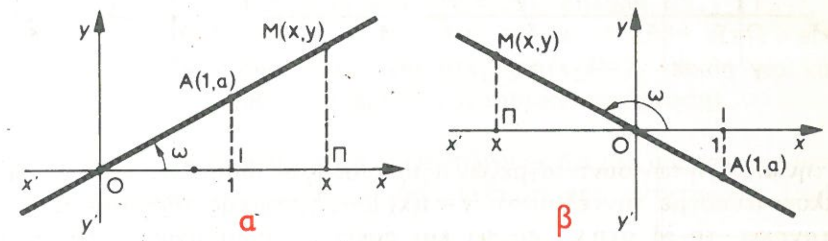
΄Εστω Ι και Π οι προβολές των Α και Μ αντιστοίχως στον άξονα x΄x. Από την

(1) προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΟΙΑ και ΟΠΜ είναι όμοια. Οι ημιευθείες ΟΜ και ΟΑ ή συμπίπτουν ή είναι αντικείμενες, επειδή, λόγω της (1):

- αν $\alpha>0$, το Μ έχει συντεταγμένες ομόσημες και βρίσκεται στο α΄, όπως το Α, ή στο γ΄ τεταρτημόριο (σχ. 6α).
- αν $\alpha<0$, το Μ έχει συντεταγμένες ετερόσημες και βρίσκεται στο β΄ ή στο δ΄, όπως το Α, τεταρτημόριο (σχ. 6β).

΄Αρα το Μ είναι σημείο της ευθείας ΟΑ.
Αντιστρόφως, οι συντεταγμένες κάθε σημείου Μ της ΟΑ επαληθεύουν την (1). Συνεπώς η γραφική παράσταση της f είναι η ευθεία ΟΑ.

6



2.6 **Συντελεστής διευθύνσεως.** Αν ω είναι η *θετική* κυρτή γωνία που σχηματίζει ο ημιάξονας Οx με την ευθεία ΟΑ (σχ. 6), τότε σύμφωνα με την §2.3 έχουμε εφω = $\overline{\text{ΙΑ}}$, δηλαδή

$$\text{εφ}\omega=\alpha \qquad (2)$$

Η εφω, δηλαδή ο α, καθορίζει πλήρως τη διεύθυνση της ευθείας και λέγεται **συντελεστής διευθύνσεως** της ευθείας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

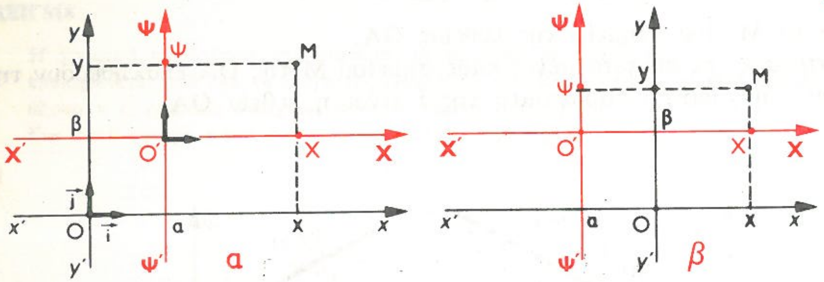
1. Η (2) ισχύει και όταν $\alpha=0$, οπότε $\omega=0$.
2. Είναι $0\leqslant\omega<\pi$ με $\omega\neq\frac{\pi}{2}$, γιατί για $\omega=\frac{\pi}{2}$ η ευθεία συμπίπτει με τον άξονα y΄y, που δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης (§2,4 Σημ.).

Αλλαγή συστήματος αναφοράς

2.7 ΄Εστω Μ ένα σημείο με συντεταγμένες x, y ως προς το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς Oxy (σχ. 7). Αν αλλάξουμε σύστημα αναφοράς, τότε προφανώς το **ίδιο** σημείο Μ έχει **άλλες** συντεταγμένες. Ας θεωρήσουμε π.χ. το σύστημα Ο΄ΧΨ με αρχή Ο΄(α, β) και άξονες παράλληλους[1] προς τους άξονες του πρώτου συστήματος. Αν (Χ, Ψ) είναι οι συντεταγμένες του Μ ως προς το νέο σύστημα αναφοράς, τότε έχουμε:

$$x = X + \alpha \quad \text{και} \quad y = \Psi + \beta \qquad (1)$$

7



Αυτή την αλλαγή των συντεταγμένων αξιοποιούμε σε ορισμένες περιπτώσεις, για να απλουστεύσουμε την εξίσωση $y = f(x)$ μιας γραφικής παράστασης $\mathcal{C}$.
Για να ανήκει το Μ στη $\mathcal{C}$, πρέπει και αρκεί οι συντεταγμένες του x, y, να επαληθεύουν την $y = f(x)$. Λόγω όμως των (1) η εξίσωση γίνεται:

$$\Psi + \beta = f(X + \alpha) \qquad (2)$$

που σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του **ίδιου** σημείου Μ ως προς το νέο σύστημα αναφοράς επαληθεύουν τη (2), που πιθανόν να είναι εξίσωση απλούστερη.
Π.χ. αν η εξίσωση της $\mathcal{C}$ είναι η $y = (x-2)^2 + 3$, θέτοντας $y = \Psi + 3$ και $x = X + 2$, έχουμε την $\Psi = X^2$ που επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των σημείων της $\mathcal{C}$ ως προς σύστημα αναφοράς με άξονες παράλληλους προς τους αρχικούς και διερχόμενους από το σημείο Ο΄(2, 3).

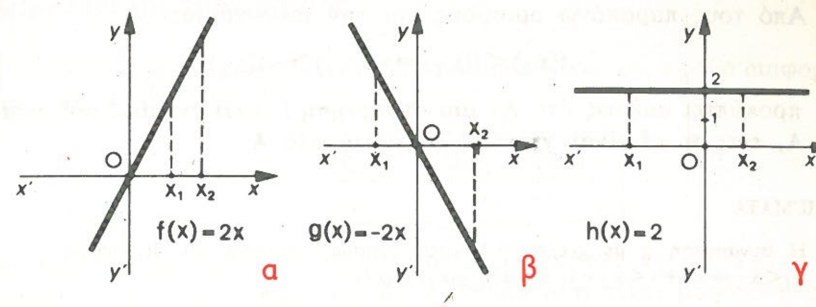
ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μονότονες συναρτήσεις

2.8 Στο σχήμα 8 έχουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f με $f(x) = 2x$, g με $g(x) = -2x$ και h με $h(x) = 2$.

(1) Το Ο΄ΧΨ ορίζεται από το Ο΄ και τα μοναδιαία διανύσματα του Οxy.

8



Μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

Για την f (σχ. 8α): όταν $x_1 < x_2$ είναι $2x_1 < 2x_2$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$.
Για την g (σχ. 8β): όταν $x_1 < x_2$ είναι $-2x_1 > -2x_2$, δηλαδή $g(x_1) > g(x_2)$.
Για την h (σχ. 8γ): όταν $x_1 < x_2$ είναι $h(x_1) = h(x_2) = 2$, επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) = 2$ (σταθερή συνάρτηση).

Από τα προηγούμενα παραδείγματα διαπιστώνουμε ότι μια αύξηση της μεταβλητής x δε συνεπάγεται οπωσδήποτε και αύξηση της αντίστοιχης τιμής της συνάρτησης.
Οι επόμενοι ορισμοί αναφέρονται στο συσχετισμό των μεταβολών των τιμών μεταβλητής και συνάρτησης.
Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, λέγεται:

- **Γνησίως αύξουσα,** όταν $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **Αύξουσα,** όταν $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$
- **Γνησίως φθίνουσα,** όταν $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- **Φθίνουσα,** όταν $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$

Γενικότερα μια συνάρτηση λέγεται **μονότονη,** όταν είναι αύξουσα ή φθίνουσα, και **γνησίως μονότονη,** όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.
Συνήθως εξετάζουμε μια συνάρτηση σε κατάλληλα υποσύνολα του πεδίου ορισμού της, σε καθένα από τα οποία παρουσιάζει ένα συγκεκριμένο είδος μονοτονίας.
Αν ο περιορισμός (§1.1) της f σε ένα υποσύνολο Α΄ του πεδίου ορισμού της Α είναι συνάρτηση γνησίως αύξουσα (αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, φθίνουσα), τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, φθίνουσα) **στο Α΄.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Μια σταθερή συνάρτηση f είναι και αύξουσα και φθίνουσα, αφού για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

2. Από τους παραπάνω ορισμούς και την ισοδυναμία:

$$f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow -f(x_1)>-f(x_2)$$

προκύπτει αμέσως ότι: **Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο A, τότε η $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο A.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η συνάρτηση g με $g(x)=x+1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επειδή $x_1<x_2 \Rightarrow x_1+1<x_2+1$, δηλαδή $g(x_1)<g(x_2)$.

2. Η h με $h(x)=2-x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα. Πράγματι:

$0<x_1<x_2 \Rightarrow x_1^3<x_2^3$

$x_1<0<x_2 \Rightarrow x_1^3<0<x_2^3$

$x_1<x_2<0 \Rightarrow -x_1>-x_2>0 \Rightarrow (-x_1)^3>(-x_2)^3 \Rightarrow x_1^3<x_2^3.$

Άρα σε κάθε περίπτωση, αν $x_1<x_2$, τότε $x_1^3<x_2^3$ ή $-x_1^3>-x_2^3$ ή $2-x_1^3>2-x_2^3$, δηλαδή $h(x_1)>h(x_2)$.

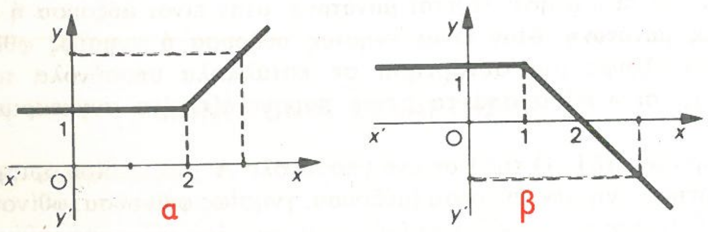
3. Για τη συνάρτηση σ με $\sigma(x)=\begin{cases} 1, & \text{αν } x<2 \\ x-1, & \text{αν } x\geqslant 2 \end{cases}$

έχουμε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow \begin{cases} \sigma(x_1)=1=\sigma(x_2), & \text{αν } x_1,\ x_2<2 \\ \sigma(x_1)=x_1-1<x_2-1=\sigma(x_2), & \text{αν } x_1,\ x_2\geqslant 2 \\ \sigma(x_1)=1=2-1\leqslant x_2-1=\sigma(x_2), & \text{αν } x_1<2\leqslant x_2 \end{cases}$$

Άρα η σ είναι αύξουσα. Ειδικότερα η σ είναι σταθερή στο $(-\infty,\ 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,\ +\infty)$. Η γραφική παράστασή της δίνεται στο σχήμα 9α.

9



Ομοίως διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση φ με

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1, & \text{αν } x<1 \\ 2-x, & \text{αν } x\geqslant 1 \end{cases}$$

είναι φθίνουσα. Η γραφική παράστασή της δίνεται στο σχήμα 9β.

Λόγος μεταβολής συνάρτησης

2.9 Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και x_1, x_2 δύο διαφορετικά στοιχεία του A. Ο λόγος(1)

$$\boxed{\lambda=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}$$

λέγεται **λόγος μεταβολής** της συνάρτησης f μεταξύ των x_1 και x_2.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, αν η συνάρτηση είναι μονότονη σε ένα σύνολο $B\subseteq A$, τότε ο λόγος μεταβολής της μεταξύ δύο οποιωνδήποτε στοιχείων του B διατηρεί σταθερό πρόσημο. Πράγματι, αν η f είναι π.χ. γνησίως αύξουσα, τότε για κάθε $x_1, x_2\in B$ έχουμε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2),$$

που σημαίνει ότι οι αριθμοί x_1-x_2 και $f(x_1)-f(x_2)$ είναι ομόσημοι. Συνεπώς έχουμε $\lambda>0$. Αλλά και αντιστρόφως, αν για κάθε $x_1, x_2\in B$ είναι $\lambda>0$, τότε οι αριθμοί x_1-x_2 και $f(x_1)-f(x_2)$ είναι ομόσημοι.

Άρα έχουμε $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για να είναι η f:

- γνησίως αύξουσα στο B, πρέπει και αρκεί: $\forall x_1,\ x_2\in B,\ \lambda>0$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι, για να είναι η f:

- γνησίως φθίνουσα στο B, πρέπει και αρκεί $\forall x_1, x_2\in B,\ \lambda<0$
- σταθερή » » » » » $\forall x_1, x_2\in B,\ \lambda=0$
- αύξουσα » » » » » $\forall x_1, x_2\in B,\ \lambda\geqslant 0$
- φθίνουσα » » » » » $\forall x_1, x_2\in B,\ \lambda\leqslant 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για τη συνάρτηση f με $f(x)=x$ έχουμε:

$$\lambda=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{x_1-x_2}{x_1-x_2}=1>0$$

Άρα για κάθε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ είναι $\lambda>0$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να εξεταστεί η μονοτονία των συναρτήσεων:

α) f με $f(x)=2x^2+1$

(1) Ο λόγος αυτός συμβολίζεται ακριβέστερα $\lambda(x_1,\ x_2)$.

β) g με $g(x)=2x-|3-x|$.

α) Ο λόγος μεταβολής της συνάρτησης f είναι:

$$\lambda=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(2x_1^2+1)-(2x_2^2+1)}{x_1-x_2}=\frac{2(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1-x_2}=2(x_1+x_2).$$

Το πρόσημο του λ μένει σταθερό στο καθένα από τα σύνολα $\mathbb{R}_-$ και $\mathbb{R}_+$. Πράγματι:

- αν $x_1<x_2\leqslant 0$, τότε $x_1+x_2<0$, άρα $\lambda<0$. Η συνάρτηση λοιπόν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}_-$.
- αν $0\leqslant x_1<x_2$, τότε $x_1+x_2>0$, άρα $\lambda>0$ και η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}_+$.

β) Για τη συνάρτηση g, επειδή $|3-x|=\begin{cases}3-x, & \text{αν } x\leqslant 3\\ x-3, & \text{αν } x\geqslant 3\end{cases}$, έχουμε:

$$g(x)=\begin{cases}3x-3, & \text{αν } x\leqslant 3\\ x+3, & \text{αν } x\geqslant 3\end{cases}$$

- αν $x_1<x_2\leqslant 3$, έχουμε $\lambda=\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{(3x_1-3)-(3x_2-3)}{x_1-x_2}=\dfrac{3(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=3>0.$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα για $x\leqslant 3$.

- αν $3\leqslant x_1<x_2$, έχουμε $\lambda=1>0$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα για $x\geqslant 3$.

2. **Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε η συνάρτηση f με**

$$f(x)=\alpha|x+1|+\beta|x-1|+(\beta-\alpha+1)x-\alpha-\beta$$

να είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$.

Επειδή $x\in(-\infty,-1]$ έχουμε: $|x+1|=-x-1$ και $|x-1|=1-x$. Άρα

$$f(x)=\alpha(-x-1)+\beta(-x+1)+(\beta-\alpha+1)x-\alpha-\beta=(-2\alpha+1)x-2\alpha$$

Για να είναι η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$ πρέπει και αρκεί:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0 \Leftrightarrow \frac{(1-2\alpha)x_1-2\alpha-(1-2\alpha)x_2+2\alpha}{x_1-x_2}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-2\alpha)(x_1-x_2)}{x_1-x_2}>0$$

$$\Leftrightarrow 1-2\alpha>0$$

$$\Leftrightarrow \alpha<\frac{1}{2}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ 1]$ όταν $\alpha<\frac{1}{2}$ και $\beta\in\mathbb{R}$.

Ασκήσεις 3, 4, 5.

Μελέτη της συνάρτησης f με $f(x)=\alpha x+\beta$

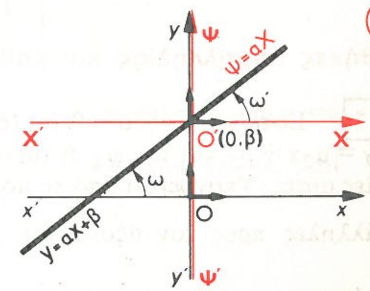
2.10 Η συνάρτηση f με $f(x)=\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, λέγεται **ομοπαραλληλική** συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $y=\alpha x+\beta$ της γραφικής παράστασης της f ως προς σύστημα αναφοράς Oxy γράφεται:

$$y-\beta=\alpha x \qquad (1)$$

Αν θέσουμε $x=X$ και $y-\beta=\Psi$, η (1) γίνεται $\Psi=\alpha X$. Η εξίσωση αυτή, ως προς νέο σύστημα αναφοράς το $O'X\Psi$ (§2.7), που έχει αρχή το $O'(0,\beta)$ και άξονες $X'X$, $\Psi'\Psi$, παράλληλους αντιστοίχως προς τους $x'x$, $y'y$, είναι (§2.5) εξίσωση ευθείας ε (σχ. 10), η οποία διέρχεται από το O' και έχει συντελεστή διευθύνσεως $\alpha=\varepsilon\varphi\omega'$.

Συνεπώς και η $y=\alpha x+\beta$ είναι ως προς το Oxy εξίσωση της ευθείας ε, που τέμνει τον Oy στο σημείο $(0,\beta)$.

Ο συντελεστής διευθύνσεώς της είναι $\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi\omega'=\alpha$.



10

Για $y=0$, είναι $x=\dfrac{-\beta}{\alpha}$, δηλαδή η ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\left(\dfrac{-\beta}{\alpha},\ 0\right)$.

Εξάλλου ο λόγος μεταβολής της f είναι

$$\lambda=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\alpha x_1+\beta-\alpha x_2-\beta}{x_1-x_2}=\frac{\alpha(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=\alpha$$

Δηλαδή ο λ είναι **σταθερός** και μάλιστα ίσος με το συντελεστή διευθύνσεως της ευθείας.

Άρα έχουμε (§2.9):

- αν $\alpha>0$, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα,
- αν $\alpha<0$, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα,
- αν $\alpha=0$, η συνάρτηση είναι σταθερή.

Σημείωση

Αν για μια συνάρτηση f ο λόγος μεταβολής λ είναι σταθερός, έστω $\lambda=\alpha$, τότε η συνάρτηση είναι ομοπαραλληλική με συντελεστή διευθύνσεως α.

Πράγματι, ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ των x και 0 είναι $\alpha=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Άρα $f(x)=\alpha x+f(0)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{2}{3}x-5$ είναι γνησίως αύξουσα, γιατί $\alpha=\dfrac{2}{3}>0$, ενώ η συνάρτηση g με $g(x)=-x+6$ είναι γνησίως φθίνουσα, γιατί $\alpha=-1<0$.

Ειδικότερα για $\beta=0$ έχουμε τη γνωστή μας συνάρτηση f με $f(x)=\alpha x$, που λέγεται **γραμμική** συνάρτηση και η οποία παρουσιάζει το ίδιο είδος μονοτονίας με την προηγούμενη. Επιπλέον η συνάρτηση αυτή έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $f(x_1+x_2)=\alpha(x_1+x_2)=\alpha x_1+\alpha x_2$, δηλαδή $\mathbf{f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)}$
2. $f(\lambda x)=\alpha(\lambda x)=\lambda(\alpha x)$, δηλαδή $\mathbf{f(\lambda x)=\lambda f(x)}$

Συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας

2.11 Έστω ε_1, ε_2 δύο ευθείες (σχ. 11) με αντίστοιχες εξισώσεις $y=\alpha_1x+\beta_1$ και $y=\alpha_2x+\beta_2$ και ω_1,ω_2 οι (θετικές κυρτές) γωνίες του ημιάξονα Ox με τις ευθείες αυτές. Υπονοείται από τη μορφή των εξισώσεών τους ότι οι ε_1, ε_2 δεν είναι παράλληλες προς τον άξονα y΄y, δηλαδή $\omega_1,\ \omega_2\neq\dfrac{\pi}{2}$.

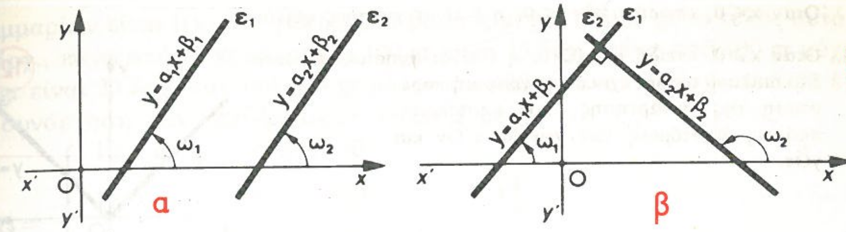
Έτσι έχουμε: $\varepsilon_1//\varepsilon_2 \Leftrightarrow \omega_1=\omega_2$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_1=\varepsilon\varphi\omega_2,\ \text{αφού } 0\leqslant\omega_1,\ \omega_2<\pi$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2 \quad (§2.6).$$

Άρα η ικανή και αναγκαία συνθήκη παραλληλίας των ευθειών $y=\alpha_1x+\beta_1$ και $y=\alpha_2x+\beta_2$ είναι η

$$\boxed{\alpha_1=\alpha_2}$$



(11)

Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 (σχ. 11β) είναι κάθετες, τότε, υποθέτοντας(1) $0<\omega_1<\dfrac{\pi}{2}$ θα είναι $\omega_2=\dfrac{\pi}{2}+\omega_1$, και αντιστρόφως.

Άρα $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2 \Leftrightarrow \omega_2=\dfrac{\pi}{2}+\omega_1$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_2=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\omega_1\right),\quad \text{αφού } \frac{\pi}{2}<\omega_2<\pi,$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_2=-\sigma\varphi\omega_1$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_2=-\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega_1}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_1\,\varepsilon\varphi\omega_2=-1.$$

Επομένως η ικανή και αναγκαία συνθήκη καθετότητας των ευθειών $y=\alpha_1x+\beta_1$ και $y=\alpha_2x+\beta_2$ είναι η

$$\boxed{\alpha_1\alpha_2=-1}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Οι ευθείες με εξισώσεις $y=2x+3$ και $y=2x-1$ είναι παράλληλες, γιατί $\alpha_1=\alpha_2=2$, ενώ οι ευθείες με εξισώσεις $y=\dfrac{2}{3}x+1$ και $y=-\dfrac{3}{2}x+7$ είναι κάθετες, γιατί

$$\alpha_1\alpha_2=\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)=-1.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x)=|x|$.

Για τη συνάρτηση f είναι:

$$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{αν } x\leqslant 0\\ x, & \text{αν } x\geqslant 0.\end{cases}$$

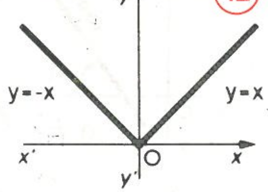
(1) Η περίπτωση $\omega_1=0$ αποκλείεται, γιατί τότε $\omega_2=\dfrac{\pi}{2}$.

Όταν $x \leqslant 0$, επειδή $\alpha = -1 < 0$, η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Όταν $x \geqslant 0$, επειδή $\alpha = 1 > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα.

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, που αποτελείται από τις διχοτόμους των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $y\hat{O}x$.

(12)



2. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = -2|x+1| + 1$ στο διάστημα $[-3, 3]$.

Για τη συνάρτηση f, επειδή $|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \geqslant -1 \\ -(x+1), & \text{αν } x \leqslant -1, \end{cases}$

έχουμε:

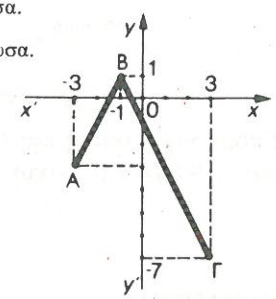
$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{αν } x \leqslant -1 \\ -2x-1, & \text{αν } x \geqslant -1 \end{cases}$$

(13)

Όταν $x \leqslant -1$, επειδή $\alpha = 2 > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα.

Όταν $x \geqslant -1$, επειδή $\alpha = -2 < 0$, η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, που αποτελείται από τα δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΒΓ.



3. Να εξετάσετε για ποιες τιμές του λ οι ευθείες με εξισώσεις

$$y = (\lambda - 1)x + 5 \quad \text{και} \quad y = (2\lambda + 1)x + 7 \quad \text{είναι:}$$

α) παράλληλες και β) κάθετες.

α) Για να είναι οι ευθείες παράλληλες, πρέπει $\alpha_1 = \alpha_2$, δηλαδή $\lambda - 1 = 2\lambda + 1$ ή $\lambda = -2$.

β) Για να είναι κάθετες, θα πρέπει $\alpha_1\alpha_2 = -1$, δηλαδή $(\lambda - 1)(2\lambda + 1) = -1$

ή $2\lambda^2 - \lambda = 0$ ή $\lambda(2\lambda - 1) = 0$, οπότε $\lambda = 0$ ή $\lambda = \frac{1}{2}$.

Ασκήσεις 6, 7, 8, 9.

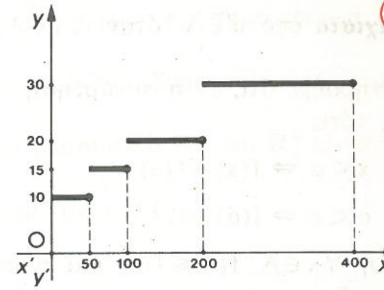
Συνάρτηση μονότονη κατά διαστήματα

2.12 Έστω ότι το ταχυδρομικό τέλος σε δραχμές ενός δέματος βάρους x

γραμμαρίων είναι f(x). Αν για δέματα βάρους μέχρι και 50 gr το τέλος αυτό είναι 10 δρχ., πάνω από 50 gr μέχρι και 100 gr είναι 15 δρχ., πάνω από 100 gr μέχρι και 200gr είναι 20 δρχ. και από 200 gr μέχρι και 400 gr είναι 30 δρχ., τότε θα έχουμε τη συνάρτηση των *ταχυδρομικών τελών* f με

$$f(x) = \begin{cases} 10, & \text{αν } 0 < x \leqslant 50 \\ 15, & \text{αν } 50 < x \leqslant 100 \\ 20, & \text{αν } 100 < x \leqslant 200 \\ 30, & \text{αν } 200 < x \leqslant 400. \end{cases}$$

(14)

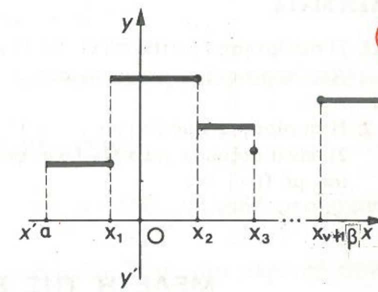


Η συνάρτηση αυτή είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα (0, 50], (50, 100], (100, 200], (200, 400] και λέγεται **κλιμακωτή** συνάρτηση (σχ. 14).

Γενικά μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα (α, β) λέγεται **κλιμακωτή** στο (α, β) όταν:

- υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός διαστημάτων τα οποία αποτελούν μια διαμέριση του (α, β).
- η f είναι σταθερή σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

(15)



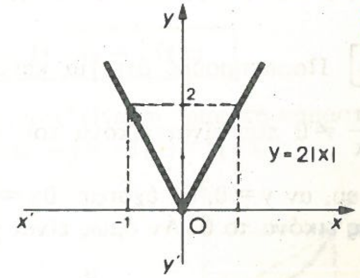
Έτσι π.χ. (σχ. 15) η f είναι σταθερή στα διαστήματα $(\alpha, x_1]$, $(x_1, x_2]$, (x_2, x_3), $[x_3, x_3]$, ..., $[x_{\nu+1}, \beta)$.

Αν γενικότερα η f είναι **μονότονη** σε καθένα από τα παραπάνω διαστήματα, τότε θα λέγεται **μονότονη κατά διαστήματα.**

Π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = 2|x|$ (σχ. 16) είναι μονότονη κατά διαστήματα[1] αφού:

- για $x \geqslant 0$ είναι $f(x) = 2x$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- για $x \leqslant 0$ είναι $f(x) = -2x$, επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

(16)



Άσκηση 10.

(1) και ειδικότερα **ομοπαραλληλική** κατά διαστήματα.

Μέγιστο και ελάχιστο συνάρτησης

2.13 Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A. Θα λέμε ότι f παρουσιάζει:

- **μέγιστο** στο $\alpha \in A$, όταν $\forall x \in A,\ f(x) \leqslant f(\alpha)$.
- **ελάχιστο** στο $\alpha \in A$, όταν $\forall x \in A,\ f(x) \geqslant f(\alpha)$.

Παρατηρούμε ότι, αν η συνάρτηση f είναι αύξουσα για $x \leqslant \alpha$ και φθίνουσα για $x \geqslant \alpha$, τότε:

$$x < \alpha \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(\alpha)$$

$$\alpha < x \Leftrightarrow f(\alpha) \geqslant f(x),$$

δηλαδή $\forall x \in A,\ f(x) \leqslant f(\alpha)$ και η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στο α. Ομοίως διαπιστώνουμε ότι, αν η f είναι φθίνουσα για $x \leqslant \alpha$ και αύξουσα για $x \geqslant \alpha$, τότε παρουσιάζει ελάχιστο στο α.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η συνάρτηση f με $f(x) = |x|$ (§ 2.11 Εφ. 1), είναι φθίνουσα για $x \leqslant 0$ και αύξουσα για $x \geqslant 0$. Άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 ίσο με $f(0) = 0$.

2. Η συνάρτηση f με $f(x) = -2|x+1| + 1$, με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3, 3]$ (§ 2.11 Εφ. 2), είναι αύξουσα για $x \leqslant -1$ και φθίνουσα για $x \geqslant -1$. Άρα παρουσιάζει μέγιστο στο -1 ίσο με $f(-1) = 1$.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $y = \frac{\alpha}{x}$

Γενική μελέτη της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$

2.14 Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \neq 0$ υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $y = \frac{\alpha}{x} \neq 0$ που είναι εικόνα του x. Άρα πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}^*$.

Εξάλλου, αν $y = 0$, θα έχουμε $0x = \alpha \neq 0$, επομένως δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}^*$ που να έχει ως εικόνα το 0. Αν όμως είναι $y \neq 0$, τότε υπάρχει πάντοτε ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός $x = \frac{\alpha}{y} \neq 0$ που έχει ως εικόνα τον y.

Έστω τώρα x_1, x_2 δύο οποιεσδήποτε διαφορετικές τιμές του x. Τότε ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ των x_1, x_2 θα είναι:

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{\alpha}{x_1} - \frac{\alpha}{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{-\alpha(x_1 - x_2)}{x_1 x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{-\alpha}{x_1 x_2}.$$

Όταν οι x_1, x_2 είναι ομόσημοι, όταν δηλαδή $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*_-$ ή $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*_+$, τότε και $x_1 x_2 > 0$. Συνεπώς ο λόγος μεταβολής $\frac{-\alpha}{x_1 x_2}$ έχει το πρόσημο του $-\alpha$, δηλαδή είναι θετικός, αν $\alpha < 0$, και αρνητικός, αν $\alpha > 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$ στα υποσύνολα $\mathbb{R}^*_-$ και $\mathbb{R}^*_+$ είναι **γνησίως αύξουσα, αν $\alpha < 0$,** και **γνησίως φθίνουσα, αν $\alpha > 0$.**

Εξάλλου

- αν $\alpha > 0$, επειδή οι x και $y = \frac{\alpha}{x}$ είναι ομόσημοι, η γραφική παράσταση της f έχει δύο κλάδους στο **α΄ και γ΄** τεταρτημόριο
- αν $\alpha < 0$, επειδή οι x και $y = \frac{\alpha}{x}$ είναι ετερόσημοι, η γραφική παράσταση της f έχει δύο κλάδους στο **β΄ και δ΄** τεταρτημόριο.

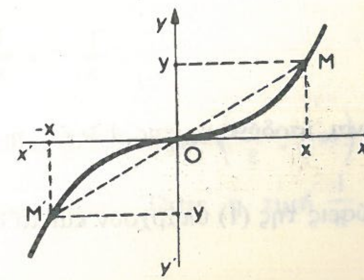
Τέλος παρατηρούμε ότι $f(-x) = \frac{\alpha}{-x} = -\frac{\alpha}{x} = -f(x)$. Δηλαδή στους **αντίθετους** x και $-x$ η f έχει **αντίθετες** τιμές. Είναι, όπως θα λέμε, μια **περιττή** συνάρτηση.

2.15 **Περιττή συνάρτηση.** Θα λέμε ότι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι **περιττή**, όταν

$$\boxed{\forall x \in A,\ -x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)}$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι, αν $\mathcal{C}$ είναι η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης και $M(x,y) \in \mathcal{C}$, τότε $-y = -f(x) = f(-x)$. Άρα και το $M'(-x, -y)$, συμμετρικό του M ως προς το O, είναι σημείο της $\mathcal{C}$.

Με άλλα λόγια η γραφική παράσταση (σχ. 17) μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.



17

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Η συνάρτηση $f(x)=x^3$ είναι περιττή στο $\mathbb{R}$, γιατί

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

Επίσης η συνάρτηση f με $f(x)=\eta\mu x$ είναι περιττή, γιατί

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(-x)=\eta\mu(-x)=-\eta\mu x=-f(x)$.

Μελέτη της συνάρτησης f με $f(x)=\dfrac{1}{x}$

2.16 Επειδή $\alpha=1>0$, η συνάρτηση αυτή είναι (§ 2.14) γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,\ 0)$ και $(0,\ +\infty)$. Η γραφική της παράσταση περιέχει τα σημεία π.χ. $M(1,\ 1)$, $N\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$, $P\left(\frac{1}{3},\ 3\right)$ άρα (§2.15) και τα σημεία $M'(-1,\ -1)$, $N'\left(-2,\ -\frac{1}{2}\right)$, $P'\left(-\frac{1}{3},\ -3\right)$.

Ας δούμε τώρα πώς συμπεριφέρεται η συνάρτηση αυτή για *«πολύ μικρές»* και *«πολύ μεγάλες»* τιμές του $|x|$.

α) Μελέτη για «πολύ μικρές» τιμές του $|x|$.

Έστω ότι ο x παίρνει τις θετικές τιμές $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{100000}$, ... Τότε οι αντίστοιχες τιμές $\frac{1}{x}$ της συνάρτησης θα είναι 10, 100, 100000, ...

Γεννιέται τώρα το ερώτημα: Μπορούμε να βρούμε μια τιμή του $\frac{1}{x}$ οσοδήποτε μεγάλη θέλουμε; Με άλλα λόγια, αν δοθεί ένας θετικός αριθμός A, (οσοδήποτε μεγάλος) υπάρχει θετική τιμή του x τέτοια, ώστε να είναι $\frac{1}{x}>A$; Έχουμε λοιπόν να λύσουμε στο $\mathbb{R}_+^*$ την ανίσωση

$$\frac{1}{x}>A \qquad (1)$$

που είναι ισοδύναμη της $1>xA$ ή της $x<\frac{1}{A}$.

Άρα λύσεις της (1) υπάρχουν και το σύνολό τους είναι το διάστημα $\left(0,\ \frac{1}{A}\right)$,

του οποίου το πλάτος ελαττώνεται, όσο το A αυξάνει, επειδή

$$A<A' \Rightarrow \frac{1}{A}>\frac{1}{A'}$$

Ώστε η τιμή $\frac{1}{x}$ της συνάρτησης γίνεται όσο θέλουμε μεγάλη, αρκεί ο *θετικός* x να παίρνει τιμές «αρκετά κοντά» στο μηδέν.

Αυτό το εκφράζουμε λέγοντας ότι

ο $\frac{1}{x}$ τείνει στο $+\infty$, όταν ο x τείνει στο 0 με θετικές τιμές.

Ομοίως διαπιστώνουμε ότι, οσοδήποτε μεγάλος και αν είναι ο αριθμός $A>0$, υπάρχει *αρνητική* τιμή του x τέτοια, ώστε $\frac{1}{x}<-A$. Πράγματι, σύνολο λύσεων της $\frac{1}{x}<-A$ στο $\mathbb{R}_-^*$ είναι το διάστημα $\left(-\frac{1}{A},\ 0\right)$. Λέμε λοιπόν ότι

ο $\frac{1}{x}$ τείνει στο $-\infty$, όταν ο x τείνει στο 0 με αρνητικές τιμές.

β) Μελέτη για «πολύ μεγάλες» τιμές του $|x|$.

Αν ο x παίρνει π.χ. τις τιμές 10, 100, 1000000, ... ο $\frac{1}{x}$ παίρνει τις τιμές $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000000}$, ... Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να βρούμε θετική τιμή της συνάρτησης όσο μικρή θέλουμε. Δηλαδή, αν δοθεί ένας θετικός αριθμός ε (οσοδήποτε μικρός), υπάρχει θετική τιμή του x τέτοια, ώστε $\frac{1}{x}<\varepsilon$. Πράγματι για $x>0$ έχουμε

$$\frac{1}{x}<\varepsilon \Leftrightarrow 1<x\varepsilon \Leftrightarrow x>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Άρα λύσεις υπάρχουν και το σύνολό τους είναι το διάστημα $\left(\frac{1}{\varepsilon},\ +\infty\right)$, του οποίου το άκρο $\frac{1}{\varepsilon}$ αυξάνει, όσο το ε μικραίνει. Ώστε η τιμή $\frac{1}{x}$ της συνάρτησης γίνεται όσο θέλουμε μικρή, αρκεί ο *θετικός* x να παίρνει τιμές «αρκετά μεγάλες». Αυτό το εκφράζουμε λέγοντας ότι

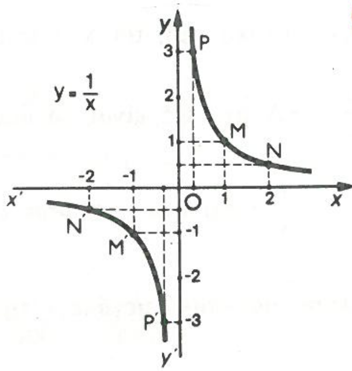
$$\text{ο } \frac{1}{x} \text{ τείνει στο 0, όταν ο x τείνει στο } +\infty.$$

Ομοίως διαπιστώνουμε ότι, οσοδήποτε μικρός και αν είναι ο αριθμός ε, υπάρχει *αρνητική* τιμή του x τέτοια, ώστε $\frac{1}{x} > -\varepsilon$.

Λέμε τότε ότι

$$\text{ο } \frac{1}{x} \text{ τείνει στο 0, όταν ο x τείνει στο } -\infty.$$

18



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{1}{x}$ δίνεται στο σχήμα 18 και λέγεται **υπερβολή**.
Αποτελείται από δύο κλάδους, που βρίσκονται στο α΄ και γ΄ τεταρτημόριο και είναι συμμετρικοί ως προς την αρχή O των αξόνων. Παρατηρούμε ότι οι κλάδοι αυτοί της υπερβολής «πλησιάζουν όλο και πιο πολύ τις ευθείες x΄x και y΄y χωρίς να τις συναντήσουν». Γιαυτό λέμε ότι οι ευθείες x΄x και y΄y είναι **ασύμπτωτες** της υπερβολής.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = -\frac{6}{x}$.

Επειδή $\alpha = -6 < 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και η γραφική της παράσταση αποτελείται από δύο κλάδους συμμετρικούς ως προς την αρχή O.

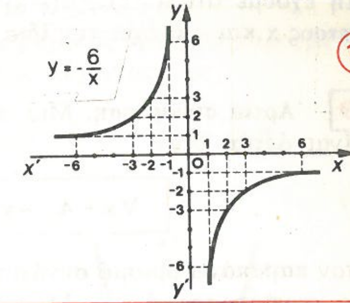
Αν τώρα εργαστούμε όπως στην §2.16 βρίσκουμε ότι η τιμή $-\frac{6}{x}$ της συνάρτησης τείνει:

στο $-\infty$, όταν ο x τείνει στο 0 με θετικές τιμές

στο $+\infty$, όταν ο x τείνει στο 0 με αρνητικές τιμές

στο 0, όταν ο x τείνει στο $+\infty$ ή $-\infty$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δίνεται στο σχήμα 19, και είναι, όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή, υπερβολή.
Αποτελείται από δύο κλάδους, που βρίσκονται όμως στο β΄ και στο δ΄ τεταρτημόριο.



19

2.17 Από την προηγούμενη παράγραφο προκύπτει ότι γενικότερα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$, είναι υπερβολή με κέντρο συμμετρίας το O(0, 0) και ασύμπτωτες τους άξονες x΄x και y΄y.

Ασκήσεις 11, 12.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $y = \alpha x^2$

Γενική μελέτη της συνάρτησης f με $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$.

2.18 Η συνάρτηση αυτή ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή $f(0) = 0$, η γραφική της παράσταση περιέχει το σημείο O(0, 0).
Ο λόγος μεταβολής της είναι

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha x_1^2 - \alpha x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \alpha(x_1 + x_2).$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\alpha > 0$. Τότε, αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-$, είναι $\lambda < 0$, ενώ αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, είναι $\lambda > 0$. Άρα η συνάρτηση είναι **φθίνουσα στο** $\mathbb{R}_-$ και **αύξουσα στο** $\mathbb{R}_+$ (γνησίως). Επομένως (§2.13) η f παρουσιάζει **ελάχιστο** $f(0) = 0$.
Εξάλλου, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f(x) \geqslant 0$ και η γραφική παράσταση της f βρίσκεται στο **α΄ και β΄** τεταρτημόριο.

- $\alpha < 0$. Τότε, αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-$, είναι $\lambda > 0$, ενώ αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ είναι $\lambda < 0$. Άρα η συνάρτηση είναι **αύξουσα στο** $\mathbb{R}_-$ και **φθίνουσα στο** $\mathbb{R}_+$. Επομένως (§2.13) η f παρουσιάζει **μέγιστο** $f(0) = 0$.
Εξάλλου, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f(x) \leqslant 0$ και η γραφική παράσταση της f βρίσκεται στο **γ΄ και δ΄** τεταρτημόριο.

Ακόμη έχουμε ότι $f(-x)=\alpha(-x)^2=\alpha x^2=f(x)$. Δηλαδή η συνάρτηση f στους **αντίθετους** x και $-x$, έχει την **ίδια** τιμή. Είναι, όπως θα λέμε, **άρτια** συνάρτηση.

2.19 **Άρτια συνάρτηση.** Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A \subseteq \mathbb{R}$ θα λέμε ότι είναι **άρτια**, όταν

$$\boxed{\forall x \in A,\ -x \in A \text{ και } f(-x)=f(x)}$$

Από τον παραπάνω ορισμό συνάγεται ότι, αν $\mathcal{C}$ είναι η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης f και $M(x, y) \in \mathcal{C}$, τότε $y=f(x)=f(-x)$. Άρα και το $M'(-x, y)$, συμμετρικό του M ως προς τον άξονα $y'y$ είναι σημείο της $\mathcal{C}$, πράγμα που σημαίνει ότι η $\mathcal{C}$ έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ (σχ. 20).

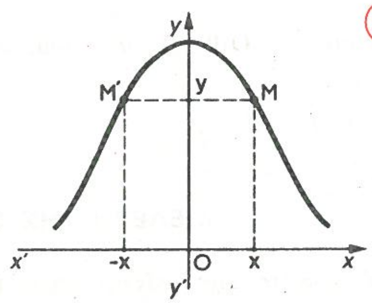
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η συνάρτηση f με $f(x)=x^4$ είναι άρτια, γιατί

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x).$$

2. Η συνάρτηση f με $f(x)=\text{συν}x$ είναι άρτια, γιατί

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{συν}(-x)=\text{συν}x.$$



(20)

Μελέτη της συνάρτησης f με $f(x)=x^2$

2.20 Σύμφωνα με την §2.18 (περίπτ. $\alpha>0$), η συνάρτηση αυτή θα είναι φθίνουσα στο $\mathbb{R}_-$ και αύξουσα στο $\mathbb{R}_+$ και παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με $f(0)=0$. Η γραφική της παράσταση περιέχει τα σημεία π.χ. $M(1,1)$, $N(2,4)$, $P\left(2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4}\right)$. Άρα (§2.19) και τα σημεία $M'(-1,1)$, $N'(-2,4)$, $P'\left(-2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4}\right)$.

Ας εξετάσουμε τώρα πώς μεταβάλλεται η τιμή x^2 της συνάρτησης για «πολύ μεγάλες» τιμές του $|x|$.

Έστω A ένας (οσοδήποτε μεγάλος) θετικός αριθμός. Τότε υπάρχει $\alpha>0$, ώστε να είναι $\alpha^2=A$. Επομένως:

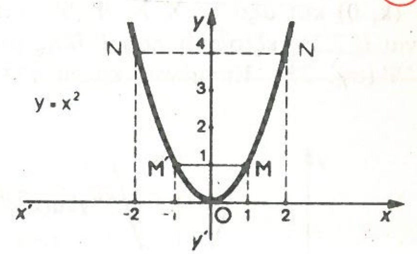
$$\begin{aligned} x^2>A &\Leftrightarrow x^2>\alpha^2 \\ &\Leftrightarrow |x|>\alpha \\ &\Leftrightarrow x>\alpha \text{ ή } x<-\alpha. \end{aligned}$$

Έτσι, γιά κάθε $x \in (-\infty, -\alpha)$ ή $x \in (\alpha, +\infty)$ το $x^2 \in (A, +\infty)$

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο x^2 γίνεται όσο θέλουμε μεγάλος αρκεί να πάρουμε τον x απολύτως «αρκετά μεγάλο». Αυτό το εκφράζουμε λέγοντας ότι:

το x^2 τείνει στο $+\infty$, όταν το x τείνει στο $-\infty$ ή το $+\infty$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=x^2$ δίνεται στο σχήμα 21 και λέγεται **παραβολή** με **κορυφή** την αρχή των αξόνων O(0, 0) και άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.



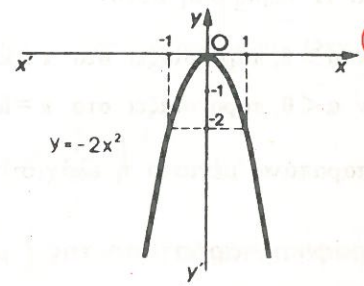
(21)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x)=-2x^2$.

Επειδή $-2<0$, η συνάρτηση αυτή (§2.18) είναι αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Επομένως η f έχει μέγιστο στο $x=0$, που είναι $f(0)=0$. Αν εργαστούμε όπως στην §2.20, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, όταν x τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, τότε το $-2x^2$ τείνει στο $-\infty$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης, που είναι παραβολή με κορυφή το O(0,0) και άξονα συμμετρίας τον $y'y$, δίνεται στο σχήμα 22.



(22)

2.21 Από τα προηγούμενα προκύπτει γενικότερα ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

$$f(x)=\alpha x^2,\ \alpha \neq 0 \qquad (1)$$

είναι παραβολή με κορυφή το O(0, 0) και άξονα συμμετρίας τον $y'y$.
Η παραβολή αυτή

- **αν $\alpha>0$, παρουσιάζει στο $x=0$ ελάχιστο**
- **αν $\alpha<0$, παρουσιάζει στο $x=0$ μέγιστο.**

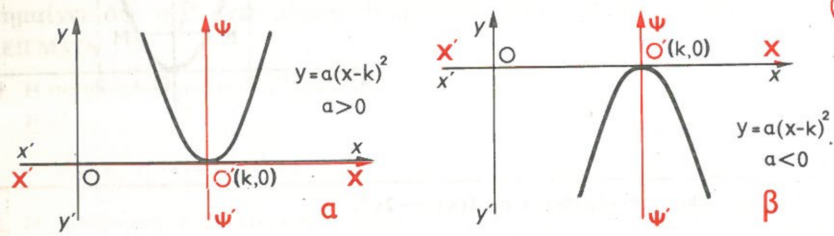
Το παραπάνω μέγιστο ή ελάχιστο είναι $f(0)=0$.

Η γραφική παράσταση της f με $f(x)=\alpha(x-k)^2$, $\alpha\neq 0$

2.22 Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $y=\alpha(x-k)^2$, αν θέσουμε $x-k=X$ και $y=\Psi$, γίνεται:

$$\Psi=\alpha X^2 \qquad (1)$$

Η (1) όμως, ως προς νέο σύστημα αναφοράς το Ο΄ΧΨ (§2.7) που έχει αρχή Ο΄(k, 0) και άξονες Χ΄Χ, Ψ΄Ψ αντιστοίχως παράλληλους προς τους x΄x, y΄y, είναι (§2.21) εξίσωση παραβολής με κορυφή το Ο΄ και άξονα συμμετρίας τον Ψ΄Ψ (σχ. 23). Επομένως και η $y=\alpha(x-k)^2$, ως προς το Oxy, είναι εξίσωση



(23)

παραβολής με κορυφή το σημείο Ο΄(k, 0) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=k$. Η παραβολή αυτή:

- **αν $\alpha>0$, παρουσιάζει στο $x=k$ ελάχιστο**
- **αν $\alpha<0$, παρουσιάζει στο $x=k$ μέγιστο.**

Το παραπάνω μέγιστο ή ελάχιστο είναι $f(k)=\alpha(k-k)^2=0$.

Η γραφική παράσταση της f με $f(x)=\alpha x^2+k$

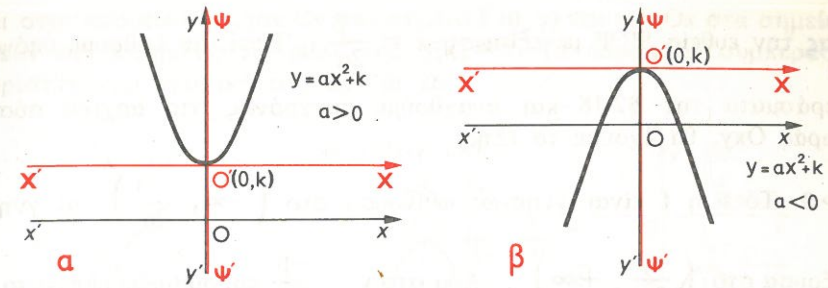
2.23 Η εξίσωση $y=\alpha x^2+k$ γράφεται $y-k=\alpha x^2$ και αν θέσουμε $x=X$ και $y-k=\Psi$ γίνεται

$$\Psi=\alpha X^2$$

Με ανάλογο τρόπο της §2.22 διαπιστώνουμε ότι η $y=\alpha x^2+k$ είναι εξίσωση παραβολής με κορυφή το σημείο Ο΄(0, k) και άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y. Η παραβολή αυτή:

- **αν $\alpha>0$, παρουσιάζει στο $x=0$ ελάχιστο**
- **αν $\alpha<0$, παρουσιάζει στο $x=0$ μέγιστο.**

Το παραπάνω μέγιστο ή ελάχιστο είναι $f(0)=k$.



(24)

Ασκήσεις 13, 14.

Μελέτη της συνάρτησης f με $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$

2.24 Η f(x), όπως ξέρουμε, γράφεται:

$$f(x)=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha}\right]$$

$$=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha},\ \text{όπου } \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$$

Έστω $\mathcal{C}$ η γραφική παράσταση της f ως προς σύστημα αναφοράς Oxy. Τότε η εξίσωση $y=f(x)$ της $\mathcal{C}$ γίνεται

$$y+\frac{\Delta}{4\alpha}=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \qquad (1)$$

Αν τώρα θέσουμε $x+\frac{\beta}{2\alpha}=X$ και $y+\frac{\Delta}{4\alpha}=\Psi$ η (1) γίνεται

$$\Psi=\alpha X^2 \qquad (2)$$

Η (2) είναι εξίσωση της $\mathcal{C}$ ως προς νέο σύστημα αναφοράς το Ο΄ΧΨ(§2.7) που έχει αρχή το $O'\left(\frac{-\beta}{2\alpha},\frac{-\Delta}{4\alpha}\right)$ και άξονες Χ΄Χ, Ψ΄Ψ, αντιστοίχως παράλληλους προς τους x΄x, y΄y.
Η (2) όμως (§2.21) είναι εξίσωση παραβολής, η οποία έχει κορυφή το Ο΄ και άξονα συμμετρίας τον Ψ΄Ψ. Επομένως και η (1) ως προς το αρχικό σύστημα Oxy θα είναι εξίσωση παραβολής με κορυφή το $O'\left(\frac{-\beta}{2\alpha},\frac{-\Delta}{4\alpha}\right)$ και άξονα συμ-

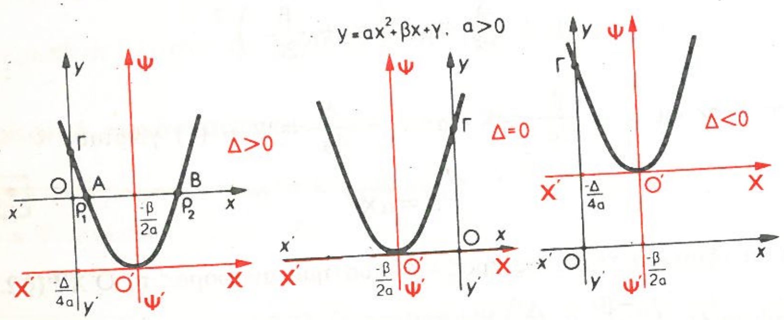
μετρίας την ευθεία Ψ΄Ψ με εξίσωση $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$. Έτσι, αν λάβουμε υπόψη τα συμπεράσματα της §2.18 και αναχθούμε συγχρόνως στο αρχικό σύστημα αναφοράς Oxy, θα έχουμε τα εξής:

1. $\alpha > 0$. Τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{-\beta}{2\alpha}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$. Άρα στο $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$ παρουσιάζει ελάχιστο, που είναι ίσο με $f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = \frac{-\Delta}{4\alpha}$. Για $x=0$ έχουμε $y=\gamma$ και το $y=0$, όταν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Άρα η C τέμνει τον Oy στο σημείο Γ(0, γ) και τον Ox στα σημεία που έχουν ως τετμημένες τις ρίζες ρ_1, ρ_2 της $f(x)=0$. Επομένως ο άξονας των τετμημένων έχει με τη C:

- Δύο κοινά σημεία, τα $A(\rho_1, 0)$ και $B(\rho_2, 0)$, αν $\Delta > 0$.
- Ένα κοινό σημείο, το $O΄\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, 0\right)$, αν $\Delta = 0$.
- κανένα κοινό σημείο, αν $\Delta < 0$.

Τα παραπάνω συμπεράσματα παριστάνονται γραφικά στο σχήμα 25.

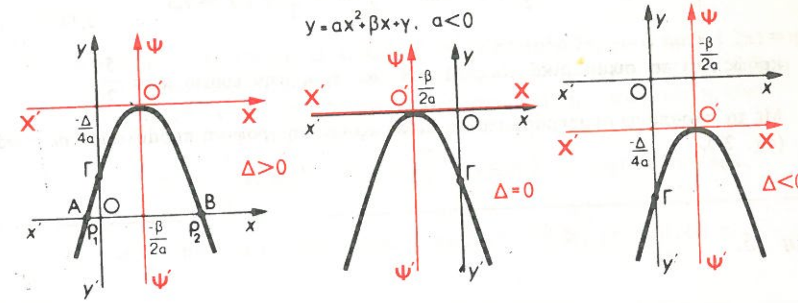
25



2. $\alpha < 0$. Τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, \frac{-\beta}{2\alpha}\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$. Άρα στο $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$ παρουσιάζει μέγιστο, που είναι ίσο με $f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = \frac{-\Delta}{4\alpha}$. Η γραφική παράσταση C της f τέμνει, όπως

και στην περίπτωση 1, τον Oy στο σημείο Γ(0, γ) και τον Ox στα σημεία που έχουν ως τετμημένη τις ρίζες της $f(x)=0$. Τα παραπάνω συμπεράσματα παριστάνονται γραφικά στο σχήμα 26.

26



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι παραβολές με εξισώσεις $y = \alpha x^2$ και $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι ίσα γεωμετρικά σχήματα. Οι δύο παραβολές διαφέρουν μόνο ως προς τη θέση της κορυφής τους.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$

Επειδή $\alpha = 2 > 0$ και $\frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{5}{2}$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = \frac{5}{2}$, που είναι:

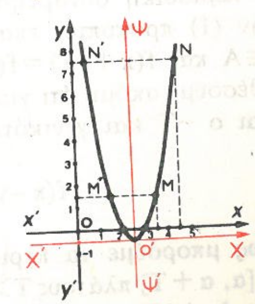
$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{-\Delta}{4\alpha} = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = \frac{4\cdot 2\cdot 12 - 10^2}{4\cdot 2} = -\frac{1}{2}$$

Για $y=0$, έχουμε $2x^2 - 10x + 12 = 0$ με ρίζες $\rho_1 = 2$ και $\rho_2 = 3$. Άρα η γραφική της παράσταση C τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία A(2, 0) και B(3, 0).
Για $x=0$, έχουμε $y=12$. Άρα η C τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Γ(0, 12).

Επειδή $\frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{5}{2}$, η C έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = \frac{5}{2}$.

Στην C ανήκουν π.χ. και τα σημεία M και N με συντεταγμένες αντιστοίχως

27



$$x = \frac{5}{2} + 1 = 3{,}5, \quad y = -\frac{1}{2} + 2 \cdot 1^2 = 1{,}5$$

$$\text{και} \quad x = \frac{5}{2} + 2 = 4{,}5, \quad y = -\frac{1}{2} + 2 \cdot 2^2 = 7{,}5$$

καθώς και τα συμμετρικά τους M', N' ως προς την ευθεία $x = \frac{5}{2}$.

Με τα παραπάνω συμπεράσματα κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης (σχ. 27).

'Ασκηση 15.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Περιοδικές συναρτήσεις

2.25 'Εστω η συνάρτηση f με $f(x) = συνx$. Αν $k \in \mathbb{Z}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $συν(x + 2k\pi) = συνx$.

Π.χ. για $k = 1$ έχουμε $συν(x + 2\pi) = συνx$.

Μια τέτοια συνάρτηση λέγεται **περιοδική συνάρτηση.**

Συγκεκριμένα:

Μια συνάρτηση f, ορισμένη στο A, λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει $T \in \mathbb{R}^*$ τέτοιο, ώστε:

$$\forall x \in A, \ x + T \in A \ \text{και} \ f(x + T) = f(x) \qquad (1)$$

O αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης.

'Εστω f περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο A και T μια περίοδος της f. Από την (1) προκύπτει επαγωγικά ότι αν $x \in A$, τότε για κάθε $\nu \in N^*$ είναι $x + \nu T \in A$ και $f(x + \nu T) = f(x)$. 'Αρα και ο αριθμός νT είναι περίοδος.

Αν υποθέσουμε ακόμη ότι για κάθε $x \in A$ είναι και $x - T \in A$, τότε περίοδος της f είναι και ο $-T$ και γενικότερα ο $-\nu T$, αφού

$$f(x - \nu T) = f[(x - \nu T) + \nu T] = f(x)$$

Επομένως μπορούμε να περιορίσουμε τη μελέτη της f σε ένα διάστημα της μορφής $[\alpha, \alpha + T]$ πλάτους $T > 0$, γιατί οι τιμές της f επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα $[\alpha + kT, \ \alpha + (k+1)T]$ με $k \in \mathbb{Z}$.

Στα επόμενα ορίζεται κάθε φορά η **μικρότερη θετική περίοδος** της f και αυτή αναφέρεται απλά ως «*η περίοδος της* f».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Η συνάρτηση f με $f(x) = ημx$ είναι περιοδική με περίοδο 2π, γιατί $ημ(x + 2\pi) = ημx$ και ο 2π είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει αυτή η σχέση.

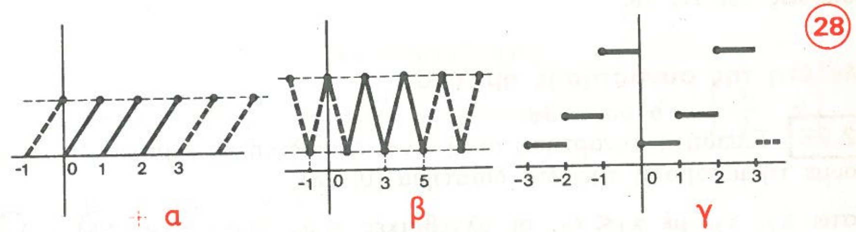
Επίσης, αν $\mathbb{R}_1$ είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης εφαπτομένη, είναι

$$\mathbb{R}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}: \ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{και} \quad εφ(x + \pi) = εφx.$$

'Αρα η συνάρτηση εφαπτομένη είναι περιοδική στο $\mathbb{R}_1$ με περίοδο π.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί η περίοδος των συναρτήσεων των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο παρακάτω σχήμα



Οι συναρτήσεις του σχήματος έχουν περιόδους 1 (28α), 2 (28β) και 3 (28γ).

2. Να βρεθεί η περίοδος των συναρτήσεων:

f με $f(x) = ημ5x$ ή γενικότερα $ημλx$, $συνλx$, $εφλx$,

'Εστω T μία περίοδος. Τότε θα είναι $f(x + T) = f(x)$, οπότε:

$$ημ\,5(x + T) = ημ\,5x$$

$$5(x + T) = 2k\pi + 5x, \ k \in \mathbb{Z} \qquad (1)$$

$$\text{ή} \quad 5(x + T) = (2k + 1)\pi - 5x \qquad (2)$$

Από την (1) έχουμε $T = \frac{2k\pi}{5}$ (3)

Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ η (3) δίνει και μια περίοδο της f

$$\text{Πράγματι είναι } f\left(x + \frac{2k\pi}{5}\right) = ημ\,5\left(x + \frac{2k\pi}{5}\right) = ημ\,(5x + 2k\pi) = ημ\,5x = f(x).$$

Από τη (2) έχουμε:

$$5T = (2k+1)\pi - 10x$$

$$T = \frac{(2k+1)\pi - 10x}{5}.$$

Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι για κάθε τιμή του x έχουμε και διαφορετική τιμή του T. Άρα ο T δεν είναι σταθερός. Επομένως δεν μπορεί να είναι περίοδος. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η (μικρότερη θετική) περίοδος της f προκύπτει από την (3) για $k=1$ και είναι ο αριθμός $\frac{2\pi}{5}$.

Γενικότερα αποδεικνύεται ότι για τις συναρτήσεις f με $f(x) = ημλx$ και g με $g(x) = συνλx$ η περίοδος είναι ο $\frac{2\pi}{|\lambda|}$, ενώ για τη συνάρτηση φ με $φ(x) = εφλx$ περίοδος είναι ο $\frac{\pi}{|\lambda|}$.

Ασκήσεις 16, 17, 18.

Μελέτη της συνάρτησης ημίτονο

2.26 Επειδή η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π, θα μελετήσουμε τη μεταβολή της στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Έστω x_1, x_2, με $x_1 < x_2$, οι αλγεβρικές τιμές δύο τόξων $\overset{\frown}{AM}_1$, $\overset{\frown}{AM}_2$ του τριγωνομετρικού κύκλου, τα οποία βρίσκονται στο α΄ τεταρτημόριο και M_1', M_2' αντιστοίχως τα συμμετρικά των M_1, M_2, ως προς τον άξονα των συνημιτόνων (σχ. 29α). Τότε (§2.3) θα είναι:

$$\begin{aligned}(M_1'M_1) &= 2\,ημx_1 \text{ και}\\ (M_2'M_2) &= 2\,ημx_2\end{aligned} \qquad (1)$$

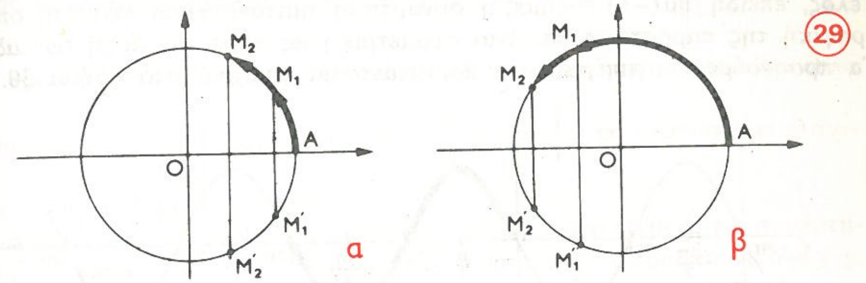
Έχουμε όμως

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2\\ &\Leftrightarrow \text{τόξο } M_1'M_1 < \text{τόξο } M_2'M_2\\ &\Leftrightarrow \text{χορδή } M_1'M_1 < \text{χορδή } M_2'M_2\\ &\Leftrightarrow (M_1'M_1) < (M_2'M_2) \end{aligned} \qquad (2)$$

οπότε από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\forall x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \; x_1 < x_2 \Rightarrow ημx_1 < ημx_2$$

δηλαδή η συνάρτηση ημίτονο είναι γνησίως **αύξουσα στο** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



Ομοίως αποδεικνύεται ότι:

- αν $x_1, x_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, τότε (σχ. 29β)

  $$x_1 < x_2 \Rightarrow ημx_1 > ημx_2,$$

  δηλαδή η συνάρτηση ημίτονο είναι γνησίως **φθίνουσα στο** $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

- αν $x_1, x_2 \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, τότε

  $$x_1 < x_2 \Rightarrow ημx_1 > ημx_2,$$

  δηλαδή η συνάρτηση ημίτονο είναι γνησίως **φθίνουσα στο** $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

- αν $x_1, x_2 \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, τότε

  $$x_1 < x_2 \Rightarrow ημx_1 < ημx_2,$$

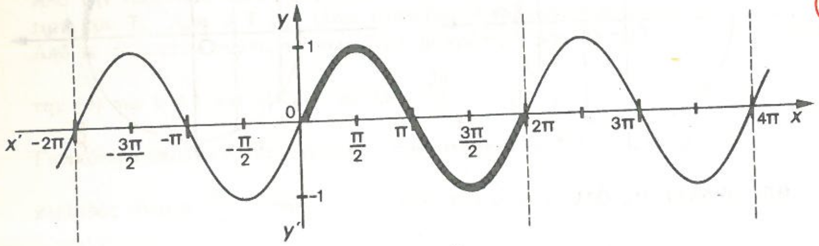
  δηλαδή η συνάρτηση ημίτονο είναι γνησίως **αύξουσα στο** $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι, αφού η συνάρτηση ημίτονο είναι αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, θα παρουσιάζει μέγιστο στο $x = \frac{\pi}{2}$ ίσο με $ημ\frac{\pi}{2} = 1$.

Ομοίως, επειδή αυτή είναι φθίνουσα στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ και αύξουσα στο $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, θα παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=\frac{3\pi}{2}$ ίσο με ημ $\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$.

Τέλος, επειδή ημ$(-x)=-$ημx, η συνάρτηση ημίτονο είναι περιττή, οπότε η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων. Τα προηγούμενα συμπεράσματα παριστάνονται γραφικά στο σχήμα 30.

30



Η συνάρτηση συνημίτονο

2.27 Επειδή η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π, αρκεί να τη μελετήσουμε στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Αν λοιπόν εργαστούμε όπως στην περίπτωση του ημιτόνου, θα έχουμε:

- αν $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε

$$x_1<x_2 \Rightarrow \text{συν}x_1>\text{συν}x_2,$$

δηλαδή η συνάρτηση συνημίτονο είναι γνησίως **φθίνουσα στο** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

- αν $x_1, x_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, τότε

$$x_1<x_2 \Rightarrow \text{συν}x_1>\text{συν}x_2,$$

δηλαδή η συνάρτηση συνημίτονο είναι γνησίως **φθίνουσα στο** $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$,

- αν $x_1, x_2 \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, τότε

$$x_1<x_2 \Rightarrow \text{συν}x_1<\text{συν}x_2,$$

δηλαδή η συνάρτηση συνημίτονο είναι γνησίως **αύξουσα στο** $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$,

- αν $x_1, x_2 \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, τότε

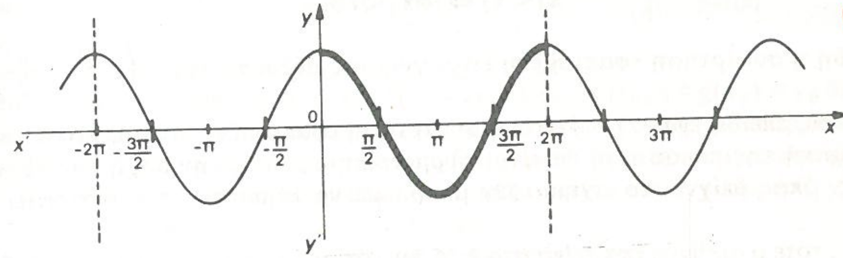
$$x_1<x_2 \Rightarrow \text{συν}x_1<\text{συν}x_2,$$

δηλαδή η συνάρτηση συνημίτονο είναι γνησίως **αύξουσα στο** $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι, αφού η συνάρτηση συνημίτονο είναι φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και αύξουσα στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, θα παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=\pi$, ίσο με συν$\pi=-1$.

Τέλος, επειδή συν$(-x)=$συνx, η συνάρτηση συνημίτονο είναι άρτια συνάρτηση, οπότε η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$. Τα προηγούμενα συμπεράσματα παριστάνονται γραφικά στο σχήμα 31.

31



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η γραφική παράσταση της $y=$συνx μπορεί να προκύψει από τη γραφική παράσταση της $y=$ημx, αν λάβουμε υπόψη ότι συν$x=$ημ$\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

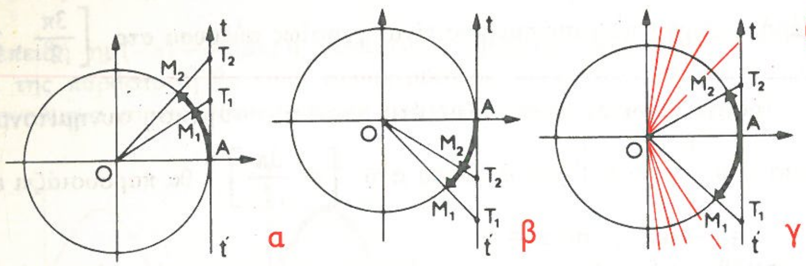
Η συνάρτηση εφαπτομένη

2.28 Επειδή είναι εφ$(x+\pi)=$εφx, η συνάρτηση εφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π. Επομένως αρκεί να τη μελετήσουμε στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, αφού όπως είδαμε (§2.3) η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x=\pm\frac{\pi}{2}$.

Έστω x_1, x_2, με $x_1<x_2$, οι αλγεβρικές τιμές δύο τόξων $\overset{\frown}{AM}_1$, $\overset{\frown}{AM}_2$ του τριγωνομετρικού κύκλου (σχ. 32), τα οποία ανήκουν στο α΄ ή δ΄ τεταρτημόριο. Τότε (§2.3) θα είναι:

$$\text{εφ}x_1=\overline{AT}_1$$
$$\text{εφ}x_2=\overline{AT}_2.$$

Είναι όμως $\overline{AT}_1<\overline{AT}_2$, άρα και εφ$x_1<$εφ$x_2$.



(32)

Επομένως, αν $x_1, x_2 \in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε

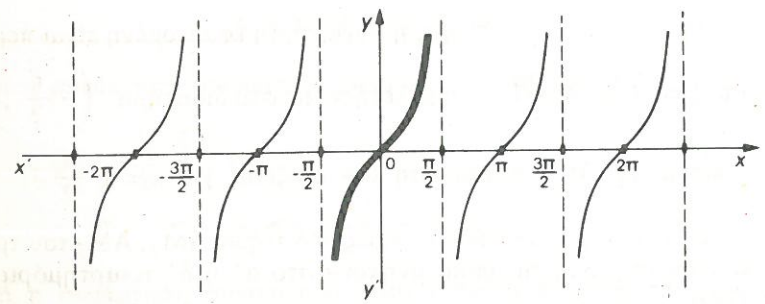
$$x_1<x_2 \Rightarrow \text{εφ}x_1<\text{εφ}x_2,$$

δηλαδή η συνάρτηση εφαπτομένη είναι γνησίως **αύξουσα στο** $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Εξάλλου, επειδή εφ$(-x)=-$εφx, η συνάρτηση εφαπτομένη είναι **περιττή**, οπότε η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων. Τέλος, όπως δείχνει το σχήμα 32γ μπορούμε να λέμε ότι, όταν ο x *τείνει στο* $+\frac{\pi}{2}$, τότε ο αριθμός εφx *τείνει στο* $+\infty$, ενώ όταν ο x *τείνει στο* $-\frac{\pi}{2}$, ο αριθμός εφx *τείνει στο* $-\infty$. Επομένως η γραφική παράσταση της εφαπτομένης έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$ και περνάει από την αρχή των αξόνων Ο, αφού είναι εφ$0=0$.

Τα παραπάνω συμπεράσματα παριστάνονται γραφικά στο σχήμα 33.

(33)



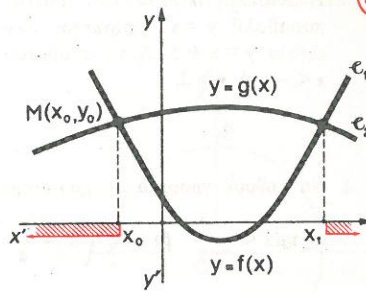
Ασκήσεις 19, 20.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΗΣ

2.29 Οι ρίζες μιας εξίσωσης $f(x)=g(x)$ μπορούν να προσδιοριστούν με τη βοήθεια γραφικών παραστάσεων. Πράγματι οι εξισώσεις

$$y=f(x)$$
$$y=g(x)$$

(34)



ορίζουν δύο συναρτήσεις f και g με αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις, έστω C_1 και C_2. Αν $M(x_0, y_0)$ είναι κοινό σημείο των C_1 και C_2, τότε $y_0=f(x_0)=g(x_0)$, δηλαδή ο x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.

Αντιστρόφως, για κάθε ρίζα x_0 της $f(x)=g(x)$ έχουμε $f(x_0)=g(x_0)=y_0$ δηλαδή $M(x_0, y_0)\in C_1\cap C_2$. Ώστε οι **τετμημένες** των σημείων τομής, αν υπάρχουν, των C_1 και C_2 θα είναι **οι ρίζες** της εξίσωσης $f(x)=g(x)$. Ομοίως συμπεραίνουμε ότι: Η ανίσωση $f(x)>g(x)$ αληθεύει στα διαστήματα εκείνα που η γραμμή C_1 $y=f(x)$ βρίσκεται *πάνω* από τη γραμμή C_2 $y=g(x)$.

Π.χ. στο σχήμα 34 αληθεύει για $x<x_0$ και για $x>x_1$.

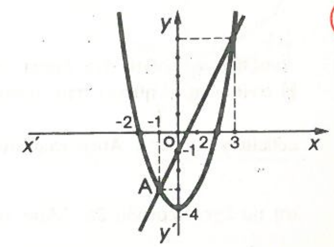
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να λυθεί γραφικά η εξίσωση $x^2-4=2x-1$.

Βρίσκουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=x^2-4$ και $y=2x-1$ που είναι παραβολή και ευθεία αντιστοίχως (σχ. 35).

Αυτές τέμνονται στα σημεία Α και Β με τετμημένες -1 και 3, που είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-4=2x-1$.

(35)



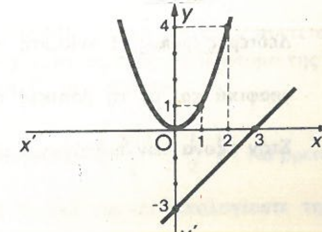
2. Να λυθεί γραφικά η εξίσωση $x^2-x+3=0$.

Η εξίσωση γράφεται και $x^2=x-3$, οπότε βρίσκουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$y=x^2 \quad \text{και} \quad y=x-3 \quad (\text{σχ. } 36).$$

Αυτές δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, άρα η εξίσωση δεν έχει λύση.

(36)



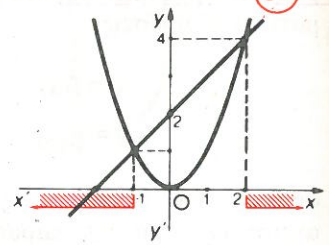
3. **Να λυθεί γραφικά η ανίσωση $x^2-x-2>0$.**

Η ανίσωση γράφεται $x^2>x+2$. Βρίσκουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$y=x^2$ και $y=x+2$ (σχ. 37).

Η ανίσωση αληθεύει στα διαστήματα όπου η παραβολή $y=x^2$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=x+2$. Αυτό συμβαίνει, όταν $x<-1$ ή $x>2$.

37

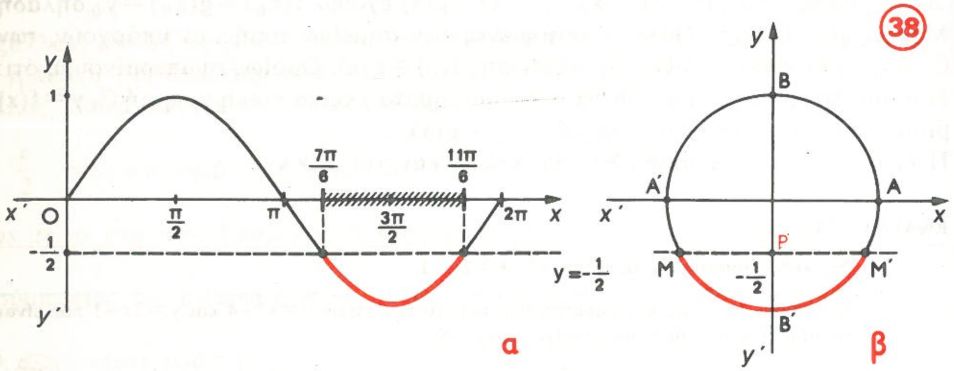


4. **Να λυθούν γραφικά οι τριγωνομετρικές ανισώσεις**

α) $ημx<-\frac{1}{2}$ β) $συν\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 0$ γ) $εφ2x>1$

α) Παριστάνουμε γραφικά τις συναρτήσεις $y=ημx$ και $y=-\frac{1}{2}$ (σχ. 38α).

38



Αναζητάμε πρώτα τις λύσεις στο $[0,\ 2\pi]$.
Η ανίσωση αληθεύει στο διάστημα που η ημιτονοειδής καμπύλη βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=-\frac{1}{2}$. Αυτό συμβαίνει όταν $\frac{7\pi}{6}<x<\frac{11\pi}{6}$. Ξέρουμε όμως ότι η συνάρτηση ημ έχει περίοδο 2π. Άρα λύσεις της ανίσωσης στο $\mathbb{R}$ είναι οι

$$2k\pi+\frac{7\pi}{6}<x<2k\pi+\frac{11\pi}{6}\quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Δεύτερος τρόπος: Η ανίσωση $ημx<-\frac{1}{2}$, όπως και κάθε τριγωνομετρική ανίσωση, λύνεται γραφικά και με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου.

Στον άξονα των ημιτόνων παίρνουμε το σημείο $P\left(-\frac{1}{2}\right)$ και από το P φέρνουμε τη

$MM'//AA'$ (σχ. 38β), οπότε στα σημεία Μ και Μ΄ απεικονίζονται οι αριθμοί $\frac{7\pi}{6}$ και $\frac{11\pi}{6}$ αντιστοίχως. Επομένως λύσεις της ανίσωσης $ημx<-\frac{1}{2}$ είναι οι αριθμοί που απεικονίζονται στα εσωτερικά σημεία των τόξων $\overset{\frown}{MB'M'}$, δηλαδή οι $2k\pi+\frac{7\pi}{6}<x<2k\pi+\frac{11\pi}{6}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

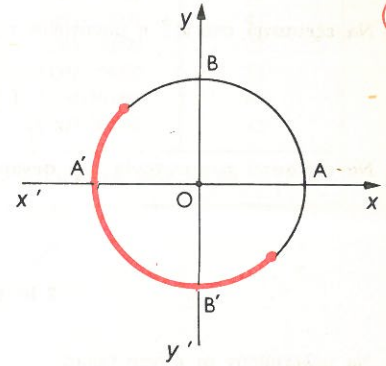
β) Θέτουμε $x-\frac{\pi}{4}=\omega$ καί παίρνουμε την ανίσωση $συνω\leqslant 0$. Από τον τριγωνομετρικό κύκλο βρίσκουμε ότι

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\omega\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}.\ \text{Άρα}$$

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\ \text{ή}$$

$$2k\pi+\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{7\pi}{4}\quad (k\in\mathbb{Z})$$

39



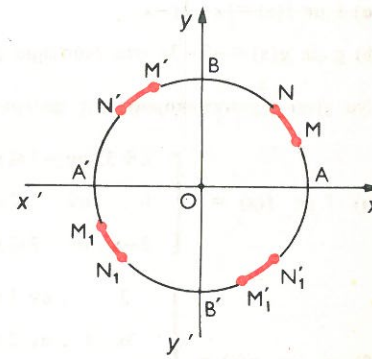
γ) Θέτουμε $2x=\omega$ και παίρνουμε την ανίσωση $εφω>1$. Από τον τριγωνομετρικό κύκλο βρίσκουμε ότι λύσεις της ανίσωσης αυτής είναι οι αριθμοί που αντιστοιχούν στα εσωτερικά σημεία των τόξων $\overset{\frown}{MPB}$ και $\overset{\frown}{M'P'B'}$

Άρα $k\pi+\frac{\pi}{4}<\omega<k\pi+\frac{\pi}{2}$, οπότε

$$k\pi+\frac{\pi}{4}<2x<k\pi+\frac{\pi}{2}\ \text{ή}$$

$$\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}<x<\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\quad (k\in\mathbb{Z}).$$

40



Ασκήσεις 21, 22.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy δίνεται το σημείο $M(3,\ 2)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του Μ: i) ως προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$, ii) ως προς τη διχοτόμο της γωνίας των ημιαξόνων Ox και Oy και iii) ως προς την αρχή O των αξόνων.

2. Ένα σημείο Μ του τριγωνομετρικού κύκλου έχει συντεταγμένες $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της οξείας γωνίας $\widehat{AOM}=\alpha\,\text{rad}$ και να υπολογίσετε την α.

3. Για τις συναρτήσεις:

$$f \text{ με } f(x)=x^3+5x^2+6 \qquad \text{και}$$

$$g \text{ με } g(x) = \frac{1}{x^2}+2x+5$$

να υπολογιστεί ο λόγος μεταβολής για τα ζεύγη των τιμών $(-1, 2)$, $(3, 5)$.

4. Να εξεταστεί στο $\mathbb{R}^*_+$ η μονοτονία της συνάρτησης:

$$f \text{ με } f(x) = \frac{1}{x^3}+1$$

5. Να εξεταστεί η μονοτονία των συναρτήσεων:

$$f \text{ με } f(x)=|x|+|1-x|-x$$

$$g \text{ με } g(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$$

6. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις:

α) f με $f(x)=|x-2|-x$

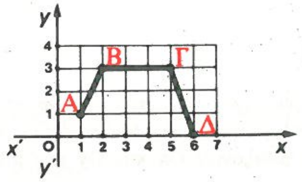
β) g με $g(x)=-2-3x$ στο διάστημα $[-5, +5]$.

7. Να γίνει γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

$$\text{α) } f \text{ με } f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{αν } -3\leqslant x\leqslant -2 \\ 1, & \text{αν } -2<x<2 \\ 3-x, & \text{αν } 2\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$$

$$\text{β) } g \text{ με } g(x) = \begin{cases} 2, & \text{αν } 1\leqslant x<2 \\ 3x-4, & \text{αν } 2\leqslant x<3 \\ -3x+14, & \text{αν } 3\leqslant x<4 \\ 2, & \text{αν } 4\leqslant x\leqslant 5 \end{cases}$$

8. Να βρεθεί η τιμή $f(x)$ της συνάρτησης f της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα.



9. Να προσδιοριστεί ο λ, ώστε οι ευθείες

$$y=(2\lambda+1)x+3 \quad \text{και} \quad y=(5\lambda-1)x-2$$

α) να είναι παράλληλες και β) να είναι κάθετες.

10. Τα ταχυδρομικά τέλη για μια ταχυδρομική επιταγή καθορίζονται από το διπλανό πίνακα. Να γίνει γραφική παράσταση της αντίστοιχης συνάρτησης

Επιταγή σε δραχμές	Τέλη σε δραχμές
1- 200	10
201- 500	20
501- 1000	29
1001- 2000	35
2001- 3000	41
3001- 4000	47
4001- 5000	53
5001-10000	60
10001-20000	75

ΣΤΟΙΧΕΙΑ των ΕΛΤΑ 7.12.79

11. Να δειχτεί ότι είναι περιττές οι συναρτήσεις:

α) f με $f(x) = \frac{1}{x}+\varepsilon\varphi x$

β) g με $g(x) = x^3+\eta\mu x$

12. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις:

α) f με $f(x) = \frac{2}{x}$ β) g με $g(x) = \frac{1}{x-2}+1$ γ) φ με $\varphi(x) = \frac{2x-4}{x+1}$

13. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις:

α) f με $f(x) = \frac{x^2}{2}$ β) φ με $\varphi(x) = (x-3)^2$ και

γ) g με $g(x) = \frac{-x^2}{3}+1$

14. Να αποδειχτεί ότι είναι άρτιες οι συναρτήσεις:

α) f με $f(x)=\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$ β) g με $g(x)=x^2+\sigma\upsilon\nu x$.

15. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις:

α) f με $f(x)=3x^2+5x+2$

β) g με $g(x)=-x^2+3x-4$

γ) h με $h(x)=4x^2-4x+1$

16. Να βρεθεί η περίοδος των συναρτήσεων

α) f με $f(x)=\eta\mu 3x$ β) g με $g(x)=\eta\mu \frac{x}{2}$ γ) φ με $\varphi(x)=\sigma\upsilon\nu \frac{x}{3}$.

17. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ αν } x \text{ άρτιος} \\ 0, \text{ αν } x \text{ περιττός}. \end{cases}$

Να αποδειχτεί ότι η f είναι περιοδική συνάρτηση, να βρεθεί η περίοδός της και να γίνει η γραφική της παράσταση.

18. Να δειχτεί ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu(x^2 - 2x + 5)$ δεν είναι περιοδική.

19. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) f με $f(x) = \eta\mu 2x$ β) g με $g(x) = 3\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} - 1$

γ) φ με $\varphi(\chi) = \varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1.$

20. Να αποδείξετε με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων τις σχέσεις:

α) $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\eta\mu x$ β) $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sigma\upsilon\nu x.$

21. Να λυθούν γραφικά οι εξισώσεις:

α) $\frac{4}{x} = x$ β) $x^2 = |x|$ γ) $x^2 - 4 = -\frac{3}{x}$.

22. Να λυθούν γραφικά οι ανισώσεις:

α) $|x| > 5$ β) $\frac{1}{x} > x^2$ γ) $\eta\mu 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ δ) $\sigma\upsilon\nu x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ ε) $\varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > 0.$

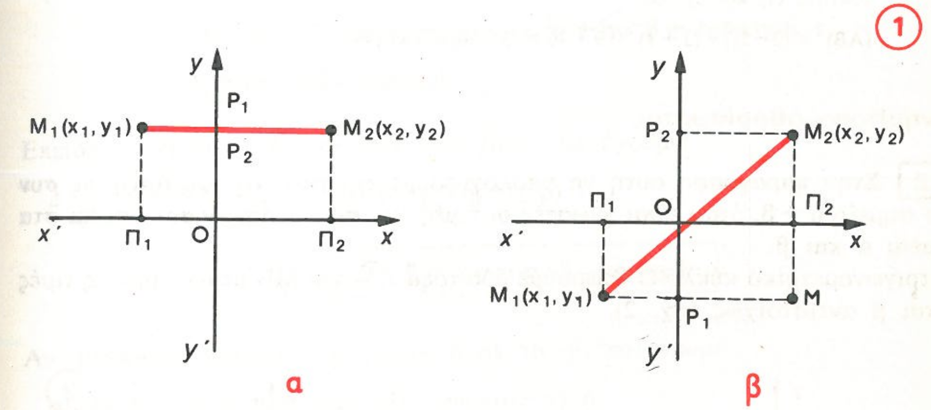
3 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί την απαραίτητη συμπλήρωση της γνωστής από την Α΄ Λυκείου ύλης της Τριγωνομετρίας.
Η συναρτησιακή θεώρηση των τριγωνομετρικών εννοιών οδηγεί αρχικά στον υπολογισμό του συν(α+β).
Η ανάπτυξη στη συνέχεια του λοιπού «τυπολόγιου» είναι απαλλαγμένη από καθετί που είναι περιττό ή αυτονόητο. Έτσι, κάθε «κατηγορία» τύπων δίνεται με μια μόνο μορφή. Για παράδειγμα στους «τύπους του διπλάσιου» σχετίζονται το 2α με το α, αλλά όχι το α με το α/2.
Γενικά, το τυπολόγιο είναι διαρθρωμένο έτσι, ώστε να φαίνεται η όλη εξάρτησή του από λίγα βασικά συμπεράσματα, όπως π.χ. οι αρχικοί «τύποι του αθροίσματος». Αυτό σημαίνει λιγότερη επιβάρυνση της μνήμης και περισσότερα περιθώρια δημιουργικής εργασίας για το μαθητή, πράγμα που αποτελεί βασική επιδίωξη της διδασκαλίας.
Το κεφάλαιο κλείνει με τις κλασικές περιπτώσεις επίλυσης τριγώνου και τις εφαρμογές τους. Η ανάπτυξη του θέματος είναι λιτή, αφού η απαίτηση εκφράσεων «λογιστών με λογαρίθμους» δεν έχει σήμερα πρακτική σκοπιμότητα.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

Απόσταση δύο σημείων

3.1 Έστω Oxy ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς και M_1, M_2 δύο σημεία του επιπέδου. Θα υπολογίσουμε την απόσταση (M_1M_2) από τις συντεταγμένες x_1, y_1 και x_2, y_2 των M_1 και M_2 αντιστοίχως.
Προβάλουμε τα M_1 και M_2 στους άξονες, οπότε θα έχουμε (σχ. 1)



$\overline{\Pi_1\Pi_2}=x_2-x_1$ και $\overline{P_1P_2}=y_2-y_1$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $\mathbf{M_1M_2 \parallel x'x}$ (σχ. 1α). Τότε

$$(M_1M_2)=(\Pi_1\Pi_2)=|\overline{\Pi_1\Pi_2}|=|x_2-x_1|$$

ii) $\mathbf{M_1M_2 \parallel y'y}$. Ομοίως, αποδεικνύεται ότι είναι

$$(M_1M_2)=|y_2-y_1|$$

iii) $\mathbf{M_1M_2 \nparallel x'x}$ **και** $\mathbf{M_1M_2 \nparallel y'y}$ (σχ. 1β).

Έστω M η τομή των ευθειών M_1P_1 και $M_2\Pi_2$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο MM_1M_2 έχουμε

$$(M_1M_2)^2=(MM_1)^2+(MM_2)^2=(\Pi_1\Pi_2)^2+(P_1P_2)^2=\overline{\Pi_1\Pi_2}^2+\overline{P_1P_2}^2$$
$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

Δηλαδή

$$\boxed{(M_1M_2)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$

Από την ισότητα (1) υπολογίζουμε την απόσταση (M_1M_2).
Η (1) ισχύει γενικά, γιατί καλύπτει και τις περιπτώσεις (i) και (ii).

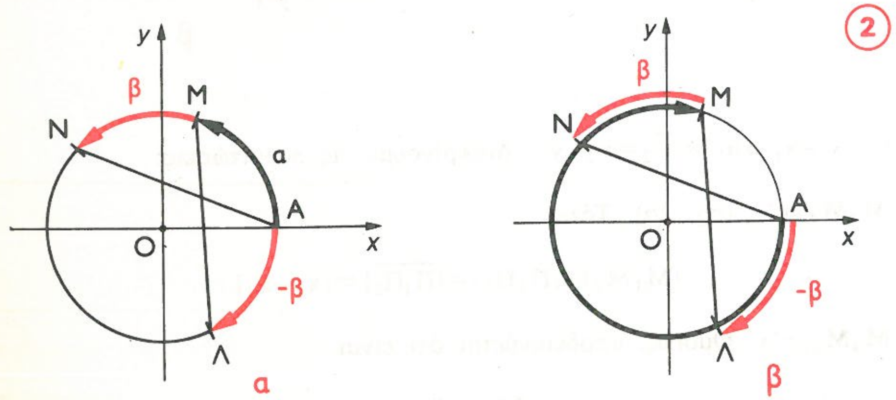
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για να υπολογίσουμε την απόσταση των σημείων $A(5,-1)$ και $B(2,3)$ εφαρμόζουμε την ισότητα (1) και έχουμε

$(AB)^2=(2-5)^2+(3+1)^2=9+16=25$. Άρα $(AB)=5$

Συνημίτονο αθροίσματος

3.2 Στην παράγραφο αυτή θα υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης **συν** στο σημείο $\alpha+\beta$, όταν είναι γνωστές οι τιμές των συναρτήσεων **συν** και **ημ** στα σημεία α και β.
Σε τριγωνομετρικό κύκλο O θεωρούμε δύο τόξα $\widehat{AM}$ και $\widehat{MN}$ με αλγεβρικές τιμές α και β αντιστοίχως (σχ. 2).



Τότε η αλγεβρική τιμή του τόξου $\widehat{AN}=\widehat{AM}+\widehat{MN}$ είναι $\alpha+\beta$. Αν θεωρήσουμε και το τόξο $\widehat{A\Lambda}$ με αλγεβρική τιμή $-\beta$, η αλγεβρική τιμή του τόξου $\widehat{\Lambda M}=\widehat{\Lambda A}+\widehat{AM}$ είναι $\beta+\alpha$. Επομένως είναι $\widehat{AN}=\widehat{\Lambda M}$, οπότε είναι και

$$\text{χορδή } AN=\text{χορδή } \Lambda M$$

Τα άκρα των χορδών αυτών έχουν συντεταγμένες:

το A:	τετμημένη	1	και	τεταγμένη	0
το N:	»	$\text{συν}(\alpha+\beta)$	»	»	$\text{ημ}(\alpha+\beta)$
το Λ:	»	$\text{συν}(-\beta)=\text{συν}\beta$	»	»	$\text{ημ}(-\beta)=-\text{ημ}\beta$
το M:	»	$\text{συν}\alpha$	»	»	$\text{ημ}\alpha$

Επομένως με τη βοήθεια της ισότητας (1) βρίσκουμε:

$$(AN)^2=[\text{συν}(\alpha+\beta)-1]^2+[\text{ημ}(\alpha+\beta)-0]^2$$
$$=\text{συν}^2(\alpha+\beta)+1-2\text{συν}(\alpha+\beta)+\text{ημ}^2(\alpha+\beta)$$
$$=2-2\text{συν}(\alpha+\beta)$$

$$(\Lambda M)^2=(\text{συν}\alpha-\text{συν}\beta)^2+(\text{ημ}\alpha+\text{ημ}\beta)^2$$
$$=\text{συν}^2\alpha+\text{συν}^2\beta-2\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta+\text{ημ}^2\alpha+\text{ημ}^2\beta+2\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta$$
$$=2-2(\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta)$$

Επειδή οι χορδές AN και ΛM είναι ίσες, θα έχουμε:

$2-2\text{συν}(\alpha+\beta)=2-2(\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta)$ ή

$$\boxed{\text{συν}(\alpha+\beta)=\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta} \qquad (2)$$

Αν αντικαταστήσουμε στη (2) το β με το $-\beta$, παίρνουμε

$\text{συν}(\alpha+(-\beta))=\text{συν}\alpha\,\text{συν}(-\beta)-\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}(-\beta)$ ή

$$\boxed{\text{συν}(\alpha-\beta)=\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta+\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta} \qquad (3)$$

Με τη βοήθεια των τύπων (2) και (3) μπορούμε να απλοποιούμε διάφορες τριγωνομετρικές παραστάσεις καθώς και να υπολογίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ορισμένων τόξων χωρίς να χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικούς πίνακες ή υπολογιστικές μηχανές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $\text{συν}15^0$. Επειδή είναι $15^0=45^0-30^0$ έχουμε:

$$\text{συν}15^0=\text{συν}(45^0-30^0)=\text{συν}45^0\text{συν}30^0+\text{ημ}45^0\text{ημ}30^0=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

2. Ομοίως, επειδή είναι $75^0=45^0+30^0$ έχουμε

$$\text{συν}75^0=\text{συν}(45^0+30^0)=\text{συν}45^0\text{συν}30^0-\text{ημ}45^0\text{ημ}30^0=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να απλοποιήσουμε την παράσταση $\text{συν}80{,}5^0\text{συν}9{,}5^0-\text{ημ}80{,}5^0\text{ημ}9{,}5^0$. Με τη βοήθεια του τύπου (2) βρίσκουμε

$$\text{συν}80{,}5^0\text{συν}9{,}5^0-\text{ημ}80{,}5^0\text{ημ}9{,}5^0=\text{συν}(80{,}5^0+9{,}5^0)=\text{συν}90^0=0$$

4. Ομοίως, εφαρμόζοντας τον τύπο (3) βρίσκουμε

$$\text{συν}(\alpha+\beta)\,\text{συν}(\alpha-\beta)+\text{ημ}(\alpha+\beta)\,\text{ημ}(\alpha-\beta)=\text{συν}[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]=\text{συν}2\beta$$

Ημίτονο αθροίσματος

3.3 Θα υπολογίσουμε τώρα την τιμή της συνάρτησης **ημ** στο σημείο $\alpha+\beta$, όταν είναι γνωστές οι τιμές των συναρτήσεων **ημ** και **συν** στα σημεία α και β. Επειδή στα συμπληρωματικά τόξα το ημίτονο του καθενός ισούται με το συνημίτονο του άλλου, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\text{ημ}(\alpha+\beta) &= \text{συν}\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\text{συν}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]\\ &= \text{συν}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\text{συν}\beta+\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\text{ημ}\beta\\ &= \text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta+\text{συν}\alpha\,\text{ημ}\beta\end{aligned}$$

Ώστε:

$$\boxed{\text{ημ}(\alpha+\beta)=\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta+\text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha} \quad (4)$$

Στην ισότητα (4) αντικαθιστούμε το β με το $-\beta$, οπότε προκύπτει:

$$\text{ημ}(\alpha+(-\beta))=\text{ημ}\alpha\,\text{συν}(-\beta)+\text{ημ}(-\beta)\,\text{συν}\alpha \quad \text{ή}$$

$$\boxed{\text{ημ}(\alpha-\beta)=\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha} \quad (5)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Επειδή είναι $15^0=60^0-45^0$, μπορούμε να υπολογίσουμε το $\text{ημ}15^0$. Πράγματι έχουμε:

$$\text{ημ}15^0=\text{ημ}60^0\text{συν}45^0-\text{ημ}45^0\text{συν}60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

2. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $\text{ημ}(x+y)$, αν είναι γνωστό ότι $\text{ημ}x=\frac{3}{5}$, $\text{συν}y=-\frac{5}{13}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$ και $\pi<y<\frac{3\pi}{2}$.

Για να εφαρμόσουμε τον τύπο (4), πρέπει να ξέρουμε και τα συνx, ημy, τα οποία είναι:

$$\text{συν}x=\sqrt{1-\text{ημ}^2x}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

$$\text{ημ}y=-\sqrt{1-\text{συν}^2y}=-\sqrt{1-\frac{25}{169}}=-\sqrt{\frac{144}{169}}=-\frac{12}{13}$$

$$\text{Άρα: } \text{ημ}(x+y)=\text{ημ}x\,\text{συν}y+\text{ημ}y\,\text{συν}x=\frac{3}{5}\left(-\frac{5}{13}\right)+\left(-\frac{12}{13}\right)\frac{4}{5}=-\frac{15}{65}-\frac{48}{65}=-\frac{63}{65}$$

Ασκήσεις 1, 2, 3, 4, 5.

Εφαπτομένη αθροίσματος

3.4 Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση εφ, με $\text{εφ}x=\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}$, ορίζεται στο σύνολο $\mathbb{R}_1=\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, γιατί για κάθε $x\in\mathbb{R}_1$ είναι $\text{συν}x\neq 0$.

Αν λοιπόν οι αριθμοί α, β και $\alpha+\beta$ είναι στοιχεία του $\mathbb{R}_1$, θα έχουμε:

$$\text{εφ}(\alpha+\beta)=\frac{\text{ημ}(\alpha+\beta)}{\text{συν}(\alpha+\beta)}=\frac{\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta+\text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha}{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta}=\frac{\dfrac{\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta}{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta}+\dfrac{\text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha}{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta}}{\dfrac{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta}{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta}-\dfrac{\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta}{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta}}=\frac{\text{εφ}\alpha+\text{εφ}\beta}{1-\text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\beta}$$

Δηλαδή

$$\boxed{\text{εφ}(\alpha+\beta)=\frac{\text{εφ}\alpha+\text{εφ}\beta}{1-\text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\beta}} \quad (6)$$

Η (6), αν αντικαταστήσουμε το β με το $-\beta$, δίνει την

$$\boxed{\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}} \qquad (7)$$

Σημείωση

Στο εξής όταν γράφουμε εφx, θα εννοούμε, όταν δεν το αναφέρουμε, ότι $x\in\mathbb{R}_1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για να απλοποιήσουμε την παράσταση $\dfrac{\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)+\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)}{1-\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)\,\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)}$ εφαρμόζουμε τον τύπο (6) και έχουμε:

$$\frac{\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)+\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)}{1-\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)\,\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)}=\varepsilon\varphi[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=\varepsilon\varphi2\alpha$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ισχύει:

$$\eta\mu(\alpha+\beta)\,\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta$$

Εφαρμόζουμε τους τύπους (4) και (5) και έχουμε:

$$\begin{aligned}\eta\mu(\alpha+\beta)\,\eta\mu(\alpha-\beta)&=(\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha)(\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha)\\&=\eta\mu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\beta-\eta\mu^2\beta\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha\\&=\eta\mu^2\alpha(1-\eta\mu^2\beta)-\eta\mu^2\beta(1-\eta\mu^2\alpha)\\&=\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha\,\eta\mu^2\beta-\eta\mu^2\beta+\eta\mu^2\alpha\,\eta\mu^2\beta\\&=\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta\end{aligned}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση(1) $3\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{3}\eta\mu x=3$

Είναι $3\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{3}\eta\mu x=3\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\eta\mu x=1$ (I)

Επειδή $\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{6}$, η (I) γίνεται ισοδύναμα:

$$\sigma\upsilon\nu x+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}\eta\mu x=1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x+\frac{\eta\mu\frac{\pi}{6}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}}\eta\mu x=1$$

(1) Στη βιβλιογραφία εξισώσεις της μορφής αημx + βσυνx = γ είναι γνωστές ως «γραμμικές». Ο όρος αυτός καλό είναι να αποφεύγεται.

$$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}+\eta\mu\frac{\pi}{6}\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}x-\dfrac{\pi}{6}=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\\ \text{ή}\\ x-\dfrac{\pi}{6}=2k\pi-\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=2k\pi\end{cases}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

3. Σε κάθε μη ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma=\varepsilon\varphi A\,\varepsilon\varphi B\,\varepsilon\varphi\Gamma$$

Αφού το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο, ορίζονται οι εφΑ, εφΒ και εφΓ, γιατί είναι $A,B,\Gamma\neq\dfrac{\pi}{2}$. Είναι ακόμη $A+B=\pi-\Gamma\neq\dfrac{\pi}{2}$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\varepsilon\varphi(A+B)=\varepsilon\varphi(\pi-\Gamma)&\Rightarrow\frac{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B}{1-\varepsilon\varphi A\,\varepsilon\varphi B}=-\varepsilon\varphi\Gamma\\&\Rightarrow\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B=-\varepsilon\varphi\Gamma+\varepsilon\varphi A\,\varepsilon\varphi B\,\varepsilon\varphi\Gamma\\&\Rightarrow\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma=\varepsilon\varphi A\,\varepsilon\varphi B\,\varepsilon\varphi\Gamma\end{aligned}$$

Ασκήσεις 6, 7, 8, 9, 10.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί του 2α

3.5 Από τους τύπους (4) και (2), για β = α έχουμε:

- $\eta\mu2\alpha=\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha=\mathbf{2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}$
- $\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu2\alpha&=\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\alpha=\mathbf{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha}\\&=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\mathbf{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1}\\&=2(1-\eta\mu^2\alpha)-1=2-2\eta\mu^2\alpha-1=\mathbf{1-2\eta\mu^2\alpha}\end{aligned}$

Ειδικότερα, για $\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$ έχουμε:

- $\eta\mu2\alpha=\dfrac{2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha}=\dfrac{\dfrac{2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}+\dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}=\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

● $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha} = \dfrac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} - \dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} + \dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}} = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

Αν είναι και $2\alpha \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$, με διαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε

● $\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$

Έχουμε λοιπόν τους τύπους

$$\boxed{\begin{aligned} \eta\mu 2\alpha &= 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha & (8)\\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha &= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha & (9)\\ &= 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 & (9')\\ &= 1 - 2\eta\mu^2\alpha & (9'')\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \eta\mu 2\alpha &= \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha} & (10)\\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha &= \frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha} & (11)\\ \varepsilon\varphi 2\alpha &= \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha} & (12)\end{aligned}}$$

3.6 Αν είναι γνωστό το συν2α, μπορούμε να υπολογίσουμε τα ημα, συνα και εφα. Πράγματι, από τις (9΄΄) και (9΄) προκύπτουν οι τύποι

$$\boxed{2\eta\mu^2\alpha = 1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \quad (13) \text{ και } \quad \boxed{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \quad (14)$$

από τους οποίους, αν $\alpha \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, με διαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε

$$\boxed{\varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}} \qquad (15)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι τύποι (10) και (11) χρησιμοποιούνται και για τη λύση των εξισώσεων της μορφής αημx + βσυνx = γ. Πράγματι, αν $x \neq 2k\pi + \pi$ μια εξίσωση της μορφής αυτής γράφεται ισοδύναμα

$$\alpha \frac{2\varepsilon\varphi \frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2 \frac{x}{2}} + \beta \frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}} = \gamma \text{ ή}$$

$(\beta+\gamma)\,\varepsilon\varphi^2\dfrac{x}{2} - 2\alpha\,\varepsilon\varphi\dfrac{x}{2} - (\beta-\gamma) = 0$, που είναι δευτεροβάθμια ως προς $\varepsilon\varphi\dfrac{x}{2}$ και λύνεται κατά τα γνωστά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του $\dfrac{\omega}{2}$, αν ξέρουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -0{,}6$ και $180^0 < \omega < 270^0$. Τότε:

$2\eta\mu^2\dfrac{\omega}{2} = 1 - \sigma\upsilon\nu\omega = 1 + 0{,}6 = 1{,}6$ και $2\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\omega}{2} = 1 + \sigma\upsilon\nu\omega = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

Επειδή $180^0 < \omega < 270^0$, θα είναι $90^0 < \dfrac{\omega}{2} < 135^0$, οπότε $\eta\mu\dfrac{\omega}{2} > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\omega}{2} < 0$. Άρα έχουμε:

$$\eta\mu\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1{,}6}{2}} = \sqrt{0{,}8}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2} = -\sqrt{\frac{0{,}4}{2}} = -\sqrt{0{,}2}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2} = -\frac{\sqrt{0{,}8}}{\sqrt{0{,}2}} = -\sqrt{4} = -2$$

2. Αν είναι $\varepsilon\varphi\dfrac{\omega}{2} = -3$, τότε από τους τύπους (10) και (11) θα έχουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{2\,(-3)}{1+(-3)^2} = \frac{-6}{10} = -0{,}6, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1-(-3)^2}{1+(-3)^2} = \frac{1-9}{10} = -0{,}8$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχτεί ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$:**

i) $\eta\mu 3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$

i) $\eta\mu 3\alpha = \eta\mu(2\alpha + \alpha) = \eta\mu 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha(1 - 2\eta\mu^2\alpha)$
$= 2\eta\mu\alpha(1-\eta\mu^2\alpha) + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha = 2\eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha$

$$= 3ημα - 4ημ^3α$$

ii) $συν3α = συν(2α+α) = συν2α συνα - ημ2α\, ημα = (2συν^2α - 1)συνα - 2ημα\, συνα\, ημα$

$$= 2συν^3α - συνα - 2συνα(1 - συν^2α) = 2συν^3α - συνα - 2συνα + 2συν^3α$$

$$= 4συν^3α - 3συνα.$$

2. **Να επιλυθεί στο $[0, 2\pi]$ η εξίσωση $συν2x - 3ημx + 1 = 0$**

Είναι: $συν2x - 3ημx + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2ημ^2x - 3ημx + 1 = 0 \Leftrightarrow 2ημ^2x + 3ημx - 2 = 0$

Αν θέσουμε $ημx = y$, προκύπτει η $2y^2 + 3y - 2 = 0$ με $y \in [-1, 1]$. Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες $ρ_1 = \frac{1}{2}$ και $ρ_2 = -2$, από τις οποίες η $ρ_2$ απορρίπτεται, γιατί $-2 \notin [-1, 1]$. Από την $ρ_1 = \frac{1}{2}$ έχουμε:

$$ημx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow ημx = ημ\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left(x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z} \right) \Leftrightarrow \left(x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z} \right)$$

Επειδή $x \in [0, 2\pi]$ θα έχουμε:

- $0 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2k + \frac{1}{6} \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq 2k \leq 2 - \frac{1}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq κ \leq \frac{11}{12}$.

  Άρα $k = 0$, οπότε $x = \frac{\pi}{6}$

- Από την $0 \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi$, με όμοια εργασία βρίσκουμε $κ = 0$, οπότε $x = \frac{5\pi}{6}$.

3. **Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $ημ^4x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}συν2x + \frac{1}{8}συν4x$ (I)**

Αρκεί να δείξουμε την $8ημ^4x = 3 - 4συν2x + συν4x$, που είναι ισοδύναμη με την (I). Έχουμε:

$$8ημ^4x = 2(4ημ^4x) = 2(2ημ^2x)^2 = 2(1 - συν2x)^2 = 2(1 - 2συν2x + συν^2 2x)$$

$$= 2 - 4συν2x + 2συν^2 2x = 2 - 4συν2x + 1 + συν4x = 3 - 4συν2x + συν4x$$

4. **Να λύσετε την εξίσωση[1] $3συν^2x - ημ^2x - ημx\, συνx = 0$ (II)**

(1) Στη βιβλιογραφία η εξίσωση (II) είναι γνωστή ως «ομογενής 2ου βαθμού». Ο όρος αυτός καλό είναι να αποφεύγεται.

Είναι: $(II) \Leftrightarrow 6συν^2x - 2ημ^2x - 2ημx συνx = 0 \Leftrightarrow 3(1 + συν2x) - (1 - συν2x) - ημ2x = 0$

$$\Leftrightarrow 4συν2x - ημ2x = -2 \Leftrightarrow συν2x - \frac{1}{4}ημ2x = -\frac{1}{2} \quad (III)$$

Έστω $θ \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ο πραγματικός αριθμός για τον οποίο είναι $εφθ = \frac{1}{4}$. Τότε:

$$(III) \Leftrightarrow συν2x - εφθ\, ημ2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow συν2x - \frac{ημθ}{συνθ}ημ2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow συν2x\, συνθ - ημ2x\, ημθ = -\frac{1}{2}συνθ \Leftrightarrow συν(2x + θ) = -\frac{1}{2}συνθ \quad (IV)$$

Έστω ακόμη $φ \in [0, \pi]$ ο αριθμός για τον οποίο είναι $συνφ = -\frac{1}{2}συνθ$. Τότε

$$(IV) \Leftrightarrow συν(2x + θ) = συνφ \Leftrightarrow (2x + θ = 2k\pi + φ \text{ ή } 2x + θ = 2k\pi - φ,\ k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left(x = k\pi + \frac{φ - θ}{2} \text{ ή } x = k\pi - \frac{φ + θ}{2} \right)$$

Αν x είναι η αλγεβρική τιμή ενός τόξου, μπορούμε να υπολογίσουμε το τόξο (κατά προσέγγιση) σε μοίρες χρησιμοποιώντας τους πίνακες των τριγωνομετρικών αριθμών. Πράγματι, από την $εφθ = \frac{1}{4}$ βρίσκουμε στους πίνακες ότι $θ \simeq 14^0$ και $συνθ \simeq 0{,}9703$. Άρα $συνφ \simeq -\frac{1}{2} \cdot 0{,}9703 \simeq -0{,}4851$ και συνεπώς $φ \simeq 180^0 - 61^0 = 119^0$. Επομένως είναι

$$x \simeq 180^0k + \frac{119^0 - 14^0}{2} = 180^0k + 52{,}5^0 \text{ ή } x \simeq 180^0k - \frac{119^0 + 14^0}{2} = 180^0k - 66{,}5^0 \ (k \in \mathbb{Z})$$

Σημείωση

Η εξίσωση (II) λύνεται και ως εξής: Επειδή δεν επαληθεύεται για $συνx = 0$ (γιατί τότε προκύπτει ότι θα ήταν και $ημx = 0$, που είναι άτοπο) διαιρούμε και τα δύο μέλη της με το $συν^2x \neq 0$. Έτσι προκύπτει ισοδύναμη εξίσωση της μορφής $αεφ^2x + βεφx + γ = 0$, την οποία λύνουμε κατά τα γνωστά.

Ασκήσεις 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

3.7 Ο μετασχηματισμός αθροίσματος τριγωνομετρικών αριθμών σε γινόμενο και αντιστρόφως, είναι μια πολύ χρήσιμη διαδικασία γιατί μας βοηθάει στην

απλοποίηση τριγωνομετρικών παραστάσεων, επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων κτλ.
Στις επόμενες παραγράφους θα αναζητήσουμε τους τύπους με τους οποίους γίνονται οι μετασχηματισμοί αυτοί.

Μετασχηματισμός γινομένων σε αθροίσματα

3.8 Θεωρούμε τις γνωστές ισότητες (§3.2, 3.3)

$$\etaμα\, συνβ + ημβ\, συνα = ημ(α+β)$$

$$ημα\, συνβ - ημβ\, συνα = ημ(α-β)$$

$$συνα\, συνβ - ημα\, ημβ = συν(α+β)$$

$$συνα\, συνβ + ημα\, ημβ = συν(α-β)$$

Με πρόθεση κατά μέλη των δύο πρώτων προκύπτει η ισότητα

$$\boxed{2ημα\, συνβ = ημ(α+β) + ημ(α-β)} \quad (1)$$

ενώ με πρόσθεση και αφαίρεση των δύο άλλων προκύπτουν αντίστοιχα οι

$$\boxed{\begin{aligned} 2συνα\, συνβ &= συν(α+β) + συν(α-β) \quad (2)\\ 2ημα\, ημβ &= συν(α-β) - συν(α+β) \quad (3)\end{aligned}}$$

Οι ισότητες (1), (2) και (3) μετασχηματίζουν γινόμενα τριγωνομετρικών αριθμών σε αθροίσματα ή διαφορές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $2ημ75^0 συν15^0 = ημ(75^0+15^0) + ημ(75^0-15^0) = ημ90^0 + ημ60^0 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$

2. $ημ37{,}5^0\; ημ7{,}5^0 = \frac{1}{2}\left[συν(37{,}5^0-7{,}5^0) - συν(37{,}5^0+7{,}5^0)\right] = \frac{1}{2}(συν30^0 - συν45^0)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$:**

$$\mathbf{4ημ2x\, συν3x\, ημ5x = 1 - συν4x + συν6x - συν10x}$$

Είναι: $4ημ2x\, συν3x\, ημ5x = 2ημ2x(2ημ5x\, συν3x) = 2ημ2x[ημ(5x+3x) + ημ(5x-3x)] =$

$= 2ημ2x(ημ8x + ημ2x) = 2ημ2x\, ημ8x + 2ημ^2 2x$

$= συν(8x-2x) - συν(8x+2x) + 1 - συν4x = συν6x - συν10x + 1 - συν4x$

$= 1 - συν4x + συν6x - συν10x.$

2. **Να λυθεί η εξίσωση $συν7x\, συν2x = ημ6x\, ημx$**

Έχουμε: $συν7x\, συν2x = ημ6x\, ημx \Leftrightarrow 2συν7x\, συν2x = 2ημ6x\, ημx$

$\Leftrightarrow συν(7x+2x) + συν(7x-2x) = συν(6x-x) - συν(6x+x)$

$\Leftrightarrow συν9x + συν5x = συν5x - συν7x \Leftrightarrow συν9x = -συν7x$

$\Leftrightarrow συν9x = συν(π+7x)$

$\Leftrightarrow (9x = 2kπ + π + 7x \text{ ή } 9x = 2kπ - π - 7x),\quad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow (2x = 2kπ + π \text{ ή } 16x = 2kπ - π)$

$\Leftrightarrow \left(x = kπ + \frac{π}{2} \text{ ή } x = \frac{kπ}{8} - \frac{π}{16}\right)$

Ασκήσεις 21, 22, 23, 24.

Μετασχηματισμός αθροισμάτων σε γινόμενα

3.9 Με τους τύπους της προηγούμενης παραγράφου μπορούμε να μετασχηματίσουμε και αθροίσματα τριγωνομετρικών αριθμών σε γινόμενα. Πράγματι, αν θέσουμε

$$α+β = Α \quad \text{και} \quad α-β = Β$$

και λύσουμε το σύστημα των δύο αυτών εξισώσεων, βρίσκουμε

$$α = \frac{Α+Β}{2} \quad \text{και} \quad β = \frac{Α-Β}{2}$$

Τότε ο τύπος (1) γίνεται $2ημ\frac{Α+Β}{2} συν\frac{Α-Β}{2} = ημΑ + ημΒ$

Δηλαδή έχουμε:

$$\boxed{\eta\mu A+\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}} \qquad (4)$$

Αν στον (4) αντικαταστήσουμε το B με το −B, βρίσκουμε

$$\boxed{\eta\mu A-\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A-B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}} \qquad (5)$$

Εξάλλου από τον τύπο (2) βρίσκουμε

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B=2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}} \qquad (6)$$

ενώ από τον τύπο (3) έχουμε $\sigma\upsilon\nu B-\sigma\upsilon\nu A=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\eta\mu\frac{A-B}{2}$ ή

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B&=-2\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\eta\mu\frac{A-B}{2}\\&=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\eta\mu\frac{B-A}{2}\end{aligned}} \qquad (7)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $1-\eta\mu A=\eta\mu\frac{\pi}{2}-\eta\mu A=2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)$

$$=2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\eta\mu\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)\right]=2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)$$

$$=2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)$$

2. $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x+\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$=2\eta\mu\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{x-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}=2\eta\mu\frac{\pi}{4}\,\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδείξετε ότι:** $\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B=\frac{\eta\mu(A+B)}{\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B}$ **(I),** $\varepsilon\varphi A-\varepsilon\varphi B=\frac{\eta\mu(A-B)}{\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B}$ **(II)**

Είναι: $\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B=\frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A}+\frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B}=\frac{\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B+\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B}=\frac{\eta\mu(A+B)}{\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B}$

Η (II) προκύπτει από την (I), αν θέσουμε το −B στη θέση του B.

2. **Αν A,B,Γ είναι γωνίες τριγώνου, να αποδείξετε την ισότητα**

$$\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}.$$

Επειδή $A+B+\Gamma=\pi$, είναι $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\Gamma}{2}$, οπότε $\eta\mu\frac{A+B}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}=\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$. Έτσι έχουμε:

$$\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}+2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=$$

$$=2\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}+2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=2\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=2\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\;2\sigma\upsilon\nu\frac{\frac{A-B}{2}+\frac{A+B}{2}}{2}\;\sigma\upsilon\nu\frac{\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}{2}=4\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$$

3. **Να λυθεί η εξίσωση** $\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu 3x-\sigma\upsilon\nu 5x+\sigma\upsilon\nu 7x=0$.

Είναι: $\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu 3x-\sigma\upsilon\nu 5x+\sigma\upsilon\nu 7x=0\Leftrightarrow(\sigma\upsilon\nu 7x+\sigma\upsilon\nu x)-(\sigma\upsilon\nu 5x+\sigma\upsilon\nu 3x)=0$

$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 4x\,\sigma\upsilon\nu 3x-2\sigma\upsilon\nu 4x\,\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 4x(\sigma\upsilon\nu 3x-\sigma\upsilon\nu x)=0$

$\Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu 4x\,\eta\mu 2x\,\eta\mu(-x)=0\Leftrightarrow-\sigma\upsilon\nu 4x\,\eta\mu 2x\,\eta\mu x=0\Leftrightarrow(\sigma\upsilon\nu 4x=0 \text{ ή } \eta\mu 2x=0 \text{ ή } \eta\mu x=0)$

Από την $\sigma\upsilon\nu 4x=0$ έχουμε $4x=k_1\pi+\frac{\pi}{2}$ ή $x=\frac{k_1\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$ $(k_1\in\mathbb{Z})$

Από την $\eta\mu 2x=0$ έχουμε $2x=k_2\pi$ ή $x=\frac{k_2\pi}{2}$ $(k_2\in\mathbb{Z})$

Από την $\eta\mu x=0$ έχουμε $x=k_3\pi$ $(k_3\in\mathbb{Z})$

4. **Να λυθεί το σύστημα:** $\begin{cases} x+y=\pi & \text{(I)} \\ \text{συν}x-\text{συν}y=-\sqrt{3} & \text{(II)} \end{cases}$

Η (II) λόγω και της (I) γίνεται $2\text{ημ}\dfrac{y-x}{2}\,\text{ημ}\dfrac{x+y}{2}=-\sqrt{3}$ ή $\text{ημ}\dfrac{y-x}{2}\cdot 1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Έχουμε λοιπόν:

$$\text{ημ}\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \text{ημ}\frac{x-y}{2}=\text{ημ}\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{x-y}{2}=2k\pi+\frac{\pi}{3} \text{ ή } \frac{x-y}{2}=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y=4k\pi+\frac{2\pi}{3} \text{ ή } x-y=4k\pi+\frac{4\pi}{3}\right)$$

Επομένως το αρχικό σύστημα γίνεται:

$$\left(\begin{cases} x+y=\pi \\ x-y=4k\pi+\dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x+y=\pi \\ x-y=4k\pi+\dfrac{4\pi}{3} \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} y=\pi-x \\ 2x=4k\pi+\dfrac{5\pi}{3} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=\pi-x \\ 2x=4k\pi+\dfrac{7\pi}{3} \end{cases}\right)$$

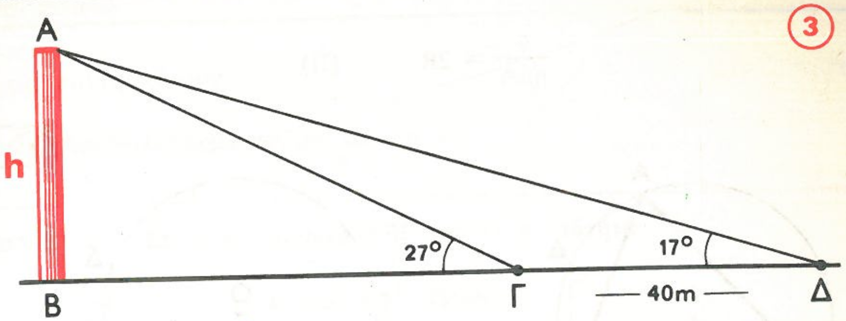
$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} y=-2k\pi+\dfrac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\dfrac{5\pi}{6} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=-2k\pi-\dfrac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\dfrac{7\pi}{6} \end{cases}\right)$$

Ασκήσεις 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Γενικά

3.10 Το «κλασικό» πρόβλημα της Τριγωνομετρίας, από το οποίο άλλωστε πήρε και το όνομά της, είναι ο υπολογισμός των άγνωστων κύριων στοιχείων ενός τριγώνου, όταν δίνονται επαρκή στοιχεία του (επίλυση τριγώνου). Στο Γυμνάσιο γνωρίσαμε τις βασικές περιπτώσεις επίλυσης ορθογώνιων τριγώνων και είδαμε πόσο μας βοήθησαν στην αντιμετώπιση πολλών πρακτικών προβλημάτων. Ας θυμηθούμε μια τέτοια περίπτωση.
Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ύψος h ενός πύργου ΑΒ, του οποίου η βάση Β είναι απρόσιτη (σχ. 3). Στο οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το Β παίρνουμε δύο σημεία Γ και Δ έτσι, ώστε τα Β,Γ,Δ να είναι συνευθειακά. Μετράμε με ένα γωνιόμετρο τις γωνίες ύψους του Α από τα σημεία Γ και Δ και έστω ότι είναι $\Gamma=27^0$, $\Delta=17^0$. Με μια μετροταινία βρίσκουμε ότι π.χ. είναι ΓΔ = 40m. Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ έχουμε:



- $\text{εφ}\Delta=\dfrac{AB}{B\Delta}$ ή $B\Delta=\dfrac{AB}{\text{εφ}17^o}$ ή $B\Delta\simeq\dfrac{h}{0{,}3057}$
- $\text{εφ}\Gamma=\dfrac{AB}{B\Gamma}$ ή $B\Gamma=\dfrac{AB}{\text{εφ}27^o}$ ή $B\Gamma\simeq\dfrac{h}{0{,}5095}$

Άρα $\Gamma\Delta=B\Delta-B\Gamma\simeq\dfrac{h}{0{,}3057}-\dfrac{h}{0{,}5095}=\dfrac{(0{,}5095-0{,}3057)h}{0{,}3057\cdot 0{,}5095}\simeq 1{,}3089h$

και $h\simeq\dfrac{\Gamma\Delta}{1{,}3089}=\dfrac{40}{1{,}3089}\simeq 30{,}56\text{m}$

Πριν προχωρήσουμε στο πρόβλημα της επίλυσης ενός οποιουδήποτε τριγώνου, θα βρούμε ορισμένες βασικές σχέσεις ανάμεσα στα κύρια στοιχεία του.

Νόμος ημιτόνων

3.11 Αποδεικνύουμε το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 **Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει**

$$\frac{\alpha}{\text{ημ}A}=\frac{\beta}{\text{ημ}B}=\frac{\gamma}{\text{ημ}\Gamma}=2R$$

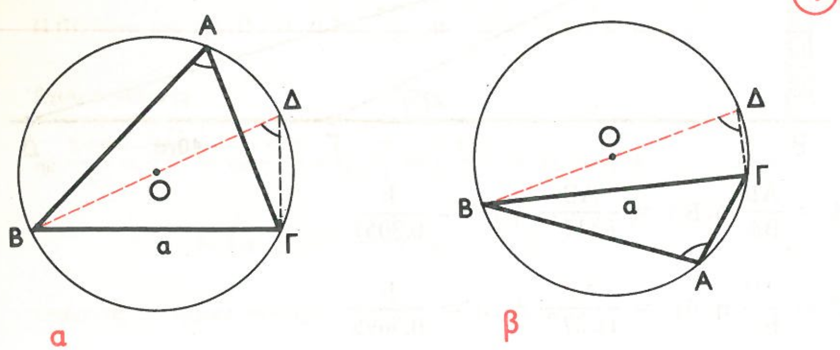
Απόδειξη. Έστω (Ο, R) ο περιγεγραμμένος κύκλος στο ΑΒΓ. Αν φέρουμε τη διάμετρο ΒΔ (σχ. 4), το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο στο Γ. Έτσι έχουμε

$$\text{ημ}\Delta=\frac{B\Gamma}{B\Delta}=\frac{\alpha}{2R} \text{ ή } \frac{\alpha}{\text{ημ}\Delta}=2R \qquad \text{(I)}$$

Αλλά είναι $A=\Delta$ (σχ. 4α) ή $A+\Delta=180^0$ (σχ. 4β), οπότε ημΔ = ημΑ. Επομένως η (I) γίνεται:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R \qquad \text{(II)}$$

4



Η (II) ισχύει και όταν $A = 1$ ορθή, γιατί τότε είναι $\alpha = 2R$ και $\eta\mu A = 1$.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $\frac{\beta}{\eta\mu B} = 2R$ και $\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2R$. Έχουμε λοιπόν τους τύπους:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2R} \qquad (1)$$

οι οποίοι εκφράζουν το *«νόμο των ημιτόνων»* σ' ένα τρίγωνο.
Ο νόμος αυτός θα χρησιμοποιηθεί αργότερα για την επίλυση τριγώνου του οποίου δίνονται μια πλευρά και δυο γωνίες ή δυο πλευρές και μια γωνία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A = 120^0$, $B = 45^0$, και $R = 4$cm. Τότε:

$\alpha = 2R\eta\mu A$ ή $\alpha = 2\cdot 4\cdot \eta\mu 120^0 = 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm.

$\beta = 2R\eta\mu B$ ή $\beta = 8\ \eta\mu 45^0 = 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ cm.

$\gamma = 2R\eta\mu\Gamma$ ή $\gamma = 8\ \eta\mu 15^0 = 8\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ cm.

Ασκήσεις 33, 34, 35, 36.

Νόμος συνημιτόνων

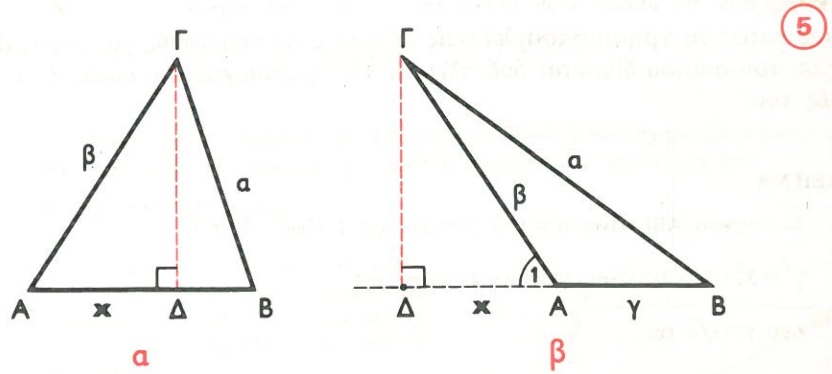
3.12 Αποδεικνύουμε ακόμη και το

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 **Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα**

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$

Απόδειξη. Αν ΓΔ είναι το ύψος του τριγώνου, από τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΓΔ και ΑΓΔ έχουμε (σχ. 5).

5



$(B\Gamma)^2 = (B\Delta)^2 + (\Delta\Gamma)^2$ και $(\Delta\Gamma)^2 = (A\Gamma)^2 - (A\Delta)^2$.

Άρα $(B\Gamma)^2 = (B\Delta)^2 + (A\Gamma)^2 - (A\Delta)^2$ ή $\alpha^2 = \beta^2 + (B\Delta)^2 - x^2$ (I)

i) Αν $A < 90^0$ (σχ. 5α) είναι $B\Delta = \gamma - x$, οπότε η (I) γίνεται
$\alpha^2 = \beta^2 + (\gamma - x)^2 - x^2 = \beta^2 + \gamma^2 + x^2 - 2\gamma x - x^2$ ή $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma x$.

Αλλά $\frac{x}{A\Gamma} = \sigma\upsilon\nu A$ ή $x = \beta\sigma\upsilon\nu A$. Άρα $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$ (II)

ii) Αν $A > 90^0$ (σχ. 5β) είναι $B\Delta = \gamma + x$, οπότε η (I) γίνεται
$\alpha^2 = \beta^2 + (\gamma + x)^2 - x^2 = \beta^2 + \gamma^2 + x^2 + 2\gamma x - x^2$ ή $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma x$

Αλλά $\frac{x}{A\Gamma} = \sigma\upsilon\nu A_1$ ή $x = \beta\sigma\upsilon\nu A_1 = \beta\sigma\upsilon\nu(180^0 - A) = -\beta\sigma\upsilon\nu A$.

Άρα $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$.

iii) Αν $A=90^0$, τότε είναι συν$A=0$, οπότε η γνωστή ισότητα $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ (πυθαγόρειο θεώρημα) γράφεται $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-0=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\text{συν}A$

Ώστε η (II) αληθεύει σε κάθε τρίγωνο.
Αν εργαστούμε με όμοιο τρόπο και για τις άλλες πλευρές, παίρνουμε τις ισότητες

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha^2&=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\text{συν}A\\ \beta^2&=\gamma^2+\alpha^2-2\gamma\alpha\,\text{συν}B\\ \gamma^2&=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\,\text{συν}\Gamma\end{aligned}} \qquad (2)$$

που εκφράζουν το *«νόμο των συνημιτόνων»* σ' ένα τρίγωνο.
Ο νόμος αυτός θα χρησιμοποιηθεί στις επόμενες παραγράφους για την επίλυση τριγώνου του οποίου δίνονται δυο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία ή οι τρεις πλευρές του.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha=3$cm, $\beta=2$cm και $\Gamma=60^0$. Τότε:

$$\gamma^2=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cdot\text{συν}60^0=9+4-12\cdot\frac{1}{2}=7$$

Άρα $\gamma=\sqrt{7}$ cm.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ αληθεύει η ισότητα

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\text{εφ}\,\frac{A-B}{2}\;\text{εφ}\,\frac{\Gamma}{2}.$$

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των αναλογιών, από την ισότητα

$$\frac{\alpha}{\text{ημ}A}=\frac{\beta}{\text{ημ}B}$$ έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\text{ημ}A}{\text{ημ}B}$$

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\text{ημ}A-\text{ημ}B}{\text{ημ}A+\text{ημ}B}=\frac{2\text{ημ}\frac{A-B}{2}\,\text{συν}\frac{A+B}{2}}{2\text{ημ}\frac{A+B}{2}\,\text{συν}\frac{A-B}{2}}=\text{εφ}\,\frac{A-B}{2}\,\text{σφ}\,\frac{A+B}{2}=\text{εφ}\,\frac{A-B}{2}\,\text{εφ}\,\frac{\Gamma}{2}$$

$$\left(\text{είναι } \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\Gamma}{2},\ \text{οπότε σφ}\,\frac{A+B}{2}=\text{εφ}\frac{\Gamma}{2}\right).$$

2. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ αληθεύει η ισότητα συν $\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$, όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε συν$A=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$. Επομένως η γνωστή ισότητα $2\text{συν}^2\frac{A}{2}=1+\text{συν}A$ γίνεται:

$$2\text{συν}^2\frac{A}{2}=1+\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}=\frac{2\beta\gamma+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}=\frac{(\beta+\gamma)^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$$

$$=\frac{(\beta+\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha)}{2\beta\gamma}$$

Αλλά $\beta+\gamma+\alpha=2\tau$, οπότε $\beta+\gamma-\alpha=2\tau-2\alpha=2(\tau-\alpha)$. Άρα:

$$\text{συν}^2\frac{A}{2}=\frac{2\tau\cdot2(\tau-\alpha)}{4\beta\gamma}\ \text{ και συνεπώς συν}\,\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$$

3. Δύο δυνάμεις έχουν μέτρα F_1 και F_2 και οι διευθύνσεις τους σχηματίζουν γωνία ω. Αν Σ είναι το μέτρο της συνισταμένης των δύο δυνάμεων, να αποδείξετε ότι:

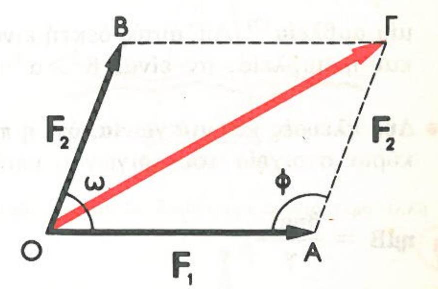
$\Sigma^2=F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\text{συν}\omega$ 6

Οι πλευρές του τριγώνου ΟΑΓ έχουν μήκη ίσα (αριθμητικά) με τα μέτρα των δυνάμεων F_1, F_2 και Σ. Αν εφαρμόσουμε το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο αυτό έχουμε:

$$\Sigma^2=F_1^2+F_2^2-2F_1F_2\text{συν}\varphi \qquad (1)$$

Επειδή είναι $\omega+\varphi=\pi$, θα έχουμε συν$\varphi=-$συνω, οπότε η (1) γίνεται

$$\Sigma^2=F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\text{συν}\omega.$$



Ασκήσεις 37, 38, 39, 40, 41, 42.

Επίλυση τριγώνων

3.13 Με τη βοήθεια των νόμων ημιτόνων και συνημιτόνων μπορούμε να επιλύσουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, αρκεί να είναι γνωστά τρία κύρια στοιχεία(1) του,

(1) Υποθέτουμε ότι υπάρχει τρίγωνο που να έχει τα δοσμένα στοιχεία.

από τα οποία το ένα τουλάχιστο να είναι πλευρά. Έτσι, αν είναι γνωστές:

- **Μια πλευρά και δυο γωνίες**, π.χ. οι α, Β και Γ, τότε έχουμε:

$$A=180^0-(B+\Gamma)$$

$$\beta=\frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A} \qquad \text{(νόμος ημιτόνων)}$$

$$\gamma=\frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$$

- **Δυο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία**[1], π.χ. οι β, γ και Α, τότε τα άγνωστα στοιχεία του τριγώνου υπολογίζονται από τις ισότητες:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$

$$\eta\mu B=\frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}$$

$$\Gamma=180^0-(A+B)$$

Από την ισότητα $\eta\mu B=\dfrac{\beta\eta\mu A}{\alpha}$ προκύπτουν δύο τιμές για τη Β, μία οξεία και μία αμβλεία[2]. Απ' αυτές δεκτή είναι μόνο η μία· η οξεία, αν είναι $\beta^2<\alpha^2+\gamma^2$ και η αμβλεία, αν είναι $\beta^2>\alpha^2+\gamma^2$.

- **Δυο πλευρές και μια γωνία, όχι η περιεχόμενη**, π.χ. οι β,γ και Γ, τότε τα άλλα κύρια στοιχεία του τριγώνου υπολογίζονται από τις ισότητες:

$$\eta\mu B=\frac{\beta\eta\mu\Gamma}{\gamma}$$

$$A=180^0-(B+\Gamma)$$

$$\alpha=\frac{\beta\eta\mu A}{\eta\mu B}$$

Από την ισότητα $\eta\mu B=\dfrac{\beta\eta\mu\Gamma}{\gamma}$ βρίσκουμε μια οξεία και μια αμβλεία γωνία[2].

(1) Στην περίπτωση αυτή το τρίγωνο επιλύεται και με τη βοήθεια των ισοτήτων της εφαρμ. 1, §3.12.
(2) Αν είναι ημΒ = 1, τότε η Β είναι ορθή.

Αν είναι $\gamma\geqslant\beta$, θα είναι και $\Gamma\geqslant B$ οπότε δεκτή είναι μόνο η οξεία. Αν όμως είναι $\gamma<\beta$, τότε υπάρχουν δύο τρίγωνα (όχι ίσα) που έχουν τα δοσμένα στοιχεία. Στο ένα τρίγωνο η Β είναι οξεία και στο άλλο είναι αμβλεία.

- **Οι τρεις πλευρές α, β και γ**, τότε έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu A=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} \qquad \text{(νόμος συνημιτόνων)}$$

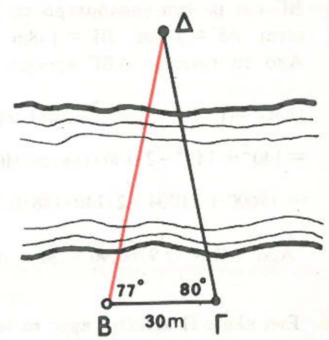
$$\sigma\upsilon\nu B=\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\gamma\alpha}$$

$$\Gamma=180^0-(A+B)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Βρισκόμαστε στη μια όχθη ενός ποταμού. Πώς θα βρούμε πόσο απέχει από τη θέση μας ένα δέντρο Δ, που βρίσκεται στην απέναντι όχθη;**

7

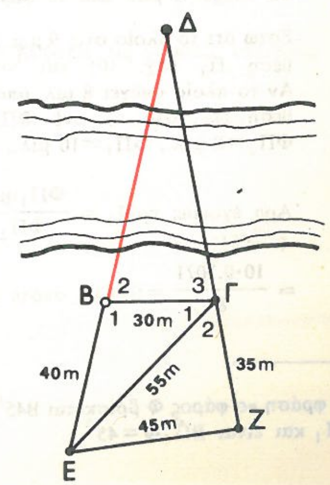


Έστω Β η θέση μας (σχ. 7). Παίρνουμε και ένα άλλο σημείο Γ και μετράμε την απόσταση ΒΓ. Έστω ότι είναι ΒΓ = 30m.
Με ένα γωνιόμετρο μετράμε τις γωνίες $\Delta\hat{B}\Gamma$ και $\Delta\hat{\Gamma}B$.
Αν υποθέσουμε ότι είναι $\Delta\hat{B}\Gamma=77^0$ και $\Delta\hat{\Gamma}B=80^0$, τότε $B\hat{\Delta}\Gamma=180^0-(77^0+80^0)=$ $=23^0$, οπότε από το τρίγωνο ΒΔΓ έχουμε:

$$B\Delta=\frac{B\Gamma\ \eta\mu\Gamma}{\eta\mu\Delta}\simeq\frac{30\cdot 0{,}9848}{0{,}3907}\simeq 75{,}6\text{m}.$$

2. **Πώς θα αντιμετωπίσουμε το προηγούμενο πρόβλημα, αν δε διαθέτουμε γωνιόμετρο αλλά μόνο μετροταινία;**

8



Παίρνουμε πρώτα ένα άλλο σημείο Γ και κατόπιν τα σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των ΔΒ και ΔΓ αντιστοίχως (σχ. 8). Μετράμε τις αποστάσεις ΒΓ, ΒΕ, ΓΖ, ΓΕ, ΕΖ και έστω ότι είναι ΒΓ = 30m, ΒΕ = 40m, ΓΖ = 35m, ΓΕ = 55m, ΕΖ = 45m.
Από το τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε:

- $\sigma\upsilon\nu B_1=\dfrac{40^2+30^2-55^2}{2\cdot 40\cdot 30}=-\dfrac{525}{2400}\simeq$

$\simeq -0{,}2187$, οπότε $\sigma\upsilon\nu B_2=-\sigma\upsilon\nu B_1=0{,}2187$.

Άρα $B_2\simeq 77^0$.

● $συνΓ_1 = \dfrac{30^2+55^2-40^2}{2\cdot 30\cdot 55} = \dfrac{2325}{3300} \simeq 0{,}7045$. Άρα $Γ_1 \simeq 45^0$

Από το τρίγωνο ΓΕΖ βρίσκουμε:

$$συνΓ_2 = \frac{55^2+35^2-45^2}{2\cdot 55\cdot 35} = \frac{2225}{3850} \simeq 0{,}5779. \text{ Άρα } Γ_2 \simeq 55^0$$

Επομένως είναι $Γ_3 \simeq 180^0-(45^0+55^0)=80^0$, οπότε από το τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε

$Δ=180^0-(Β_2+Γ_3)\simeq 180^0-(77^0+80^0)=23^0$.

Στο τρίγωνο ΔΒΓ είναι $ΒΓ=30m$, $Γ_3=80^0$ και $Δ=23^0$, οπότε (βλέπε εφαρμογή 1) θα είναι $ΒΔ\simeq 75{,}6$ m.

3. **Για να δώσει ένας εργολάβος προσφορά σε μια δημοπρασία για τη διάνοιξη ενός τούνελ, πρέπει να ξέρει το μήκος του ΑΒ (σχ. 9). Πώς θα το υπολογίσει;**

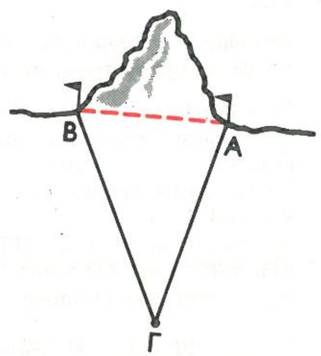
Παίρνουμε ένα σημείο Γ από το οποίο να είναι ορατά και προσιτά τα σημεία Α και Β. Μετράμε με μια μετροταινία τα τμήματα ΑΓ, ΒΓ και με ένα γωνιόμετρο τη $\hat{Γ}$. Έστω ότι είναι $ΑΓ=140m$, $ΒΓ=148m$ και $Γ=40^0$. Από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$(ΑΒ)^2=(ΑΓ)^2+(ΒΓ)^2-2(ΑΓ)(ΒΓ)συνΓ=$

$=140^2+148^2-2\cdot 140\cdot 148\cdot συν40^0\simeq$

$\simeq 19600+21904-2\cdot 140\cdot 148\cdot 0{,}766=9760{,}96$

Άρα $ΑΒ\simeq\sqrt{9760{,}96}\simeq 98{,}8$ m.



9

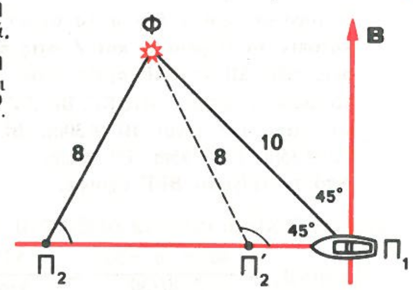
4. **Ένα πλοίο Π κινείται προς τα δυτικά με σταθερή ταχύτητα 20 μίλια την ώρα. Στις 9 μ.μ. το πλοίο απέχει 10 μίλ. από φάρο Φ, ο οποίος βρίσκεται Β45⁰Δ[(1)] του πλοίου. Ποια ώρα το Π θα απέχει 8 μίλ. από το φάρο;**

10

Έστω ότι το πλοίο στις 9 μ.μ. βρίσκεται στη θέση $Π_1$ (σχ. 10) και κινείται δυτικά. Αν το πλοίο απέχει 8 μίλ. από το φάρο στη θέση $Π_2$, στο τρίγωνο $ΦΠ_1Π_2$ θα είναι $ΦΠ_2=8$ μίλ., $ΦΠ_1=10$ μίλ., $Φ\hat{Π_1}Π_2=45^0$.

Άρα έχουμε: $ημΠ_2 = \dfrac{ΦΠ_1 ημΠ_1}{ΦΠ_2}\simeq$

$\simeq \dfrac{10\cdot 0{,}7071}{8}=0{,}8838$, οπότε $Π_2\simeq 62^0$ ή



(1) Η φράση «ο φάρος Φ βρίσκεται Β45⁰Δ του πλοίου $Π_1$» σημαίνει ότι ο Φ βρίσκεται βορειοδυτικά του $Π_1$ και είναι $Β\hat{Π_1}Φ=45^0$.

$Π'_2\simeq 180^0-62^0=118^0$.

● Αν $Π_2\simeq 62^0$, τότε $Π_1\hat{Φ}Π_2\simeq 180^0-(62^0+45^0)=73^0$, οπότε είναι

$$Π_1Π_2\simeq\frac{Π_2Φ\ ημ73^0}{ημ45^0}\simeq\frac{8\cdot 0{,}8838}{0{,}7071}\simeq 10 \text{ μίλ.}$$

Επομένως για να φτάσει το πλοίο στη θέση $Π_2$ χρειάζεται $10:20=0{,}5h=30$ min. Συνεπώς θα βρίσκεται στο $Π_2$ στις 9.30 μ.μ.

● Αν $Π'_2\simeq 118^0$, τότε $Π'_2\hat{Φ}Π_1\simeq 180^0-(118^0+45^0)=17^0$, οπότε είναι

$$Π_1Π'_2\simeq\frac{Π'_2Φ\ ημ17^0}{ημ45^0}\simeq\frac{8\cdot 0{,}2924}{0{,}7071}\simeq 3{,}3 \text{ μίλ.}$$

Άρα για να φτάσει το πλοίο στο $Π'_2$ χρειάζεται $3{,}3:20=0{,}165h\simeq 10$min, δηλαδή θα είναι στο $Π'_2$ στις 9.10 μ.μ.

Ασκήσεις 43,44,45,46,47,48,49.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Η απόσταση του σημείου Β από το $Α(-1,3)$ είναι 5. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Β, αν η τεταγμένη του είναι διπλάσια από την τετμημένη του.

2. Να υπολογίσετε το $ημ\dfrac{5π}{12}$ και το $συν\dfrac{5π}{12}$.

3. Με τη βοήθεια των τύπων των §3.2 και 3.3 να επαληθεύσετε τις γνωστές ισότητες:

   i) $ημ(π-ω)=ημω$ ii) $συν\left(\dfrac{3π}{2}-ω\right)=-ημω$ iii) $ημ\left(\dfrac{π}{2}+ω\right)=συνω$

   iv) $συν(π+ω)=-συνω$.

4. Να δείξετε ότι: i) $ημ(x+30^0)+συν(x+60^0)=συνx$ ii) $συν(40^0-x)=ημ(130^0-x)$.

5. Να αποδείξετε την ταυτότητα

   $ημ(Α+Β)+συν(Α-Β)=(ημΑ+συνΑ)(ημΒ+συνΒ)$

6. Για ποιες τιμές του $x\in[0^0, 180^0]$ ισχύει η ισότητα

   $εφ(45^0+x)-εφ(45^0-x)=2\sqrt{3}$.

7. Αν α,β και α+β είναι στοιχεία του συνόλου $\mathbb{R}_2=\{x\in\mathbb{R}: x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, τότε

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}.$$

8. Να αποδείξετε τη συνεπαγωγή

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\beta\,\varepsilon\varphi\gamma+\varepsilon\varphi\gamma\,\varepsilon\varphi\alpha=1$$

9. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 6cm να βρεθεί σημείο Γ τέτοιο, ώστε να είναι ΑΓ + ΓΒ = 8cm.

10. Να λυθεί στο $[0^0, 360^0]$ η εξίσωση $3\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu x=2$.

11. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\sigma\upsilon\nu2\theta=\sigma\upsilon\nu^4\theta-\eta\mu^4\theta$ ii) $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu2\theta+\eta\mu2\theta}{1+\sigma\upsilon\nu2\theta+\eta\mu2\theta}=\varepsilon\varphi\theta.$

iii) $\sigma\varphi2\alpha=\dfrac{\sigma\varphi^2\alpha-1}{2\sigma\varphi\alpha}\quad\left(\alpha\neq\dfrac{k\pi}{2}\right)$

12. Αν είναι $\eta\mu\alpha=-\dfrac{5}{13}$, $\sigma\upsilon\nu\beta=\dfrac{4}{5}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$ και $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$, να υπολογίσετε το $\eta\mu(2\alpha+\beta)$ και το $\sigma\upsilon\nu(2\alpha-\beta)$.

13. Αν είναι $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=0$, τότε $\eta\mu(\alpha+2\beta)=\eta\mu\alpha$.

14. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του $\dfrac{\omega}{4}$, αν είναι $\sigma\upsilon\nu\omega=\dfrac{1}{8}$ και $\pi<\omega<2\pi$.

15. Να αποδείξετε ότι: i) $\sigma\upsilon\nu4\theta=8\sigma\upsilon\nu^4\theta-8\sigma\upsilon\nu^2\theta+1$ ii) $8\sigma\upsilon\nu^4\theta=3+4\sigma\upsilon\nu2\theta+\sigma\upsilon\nu4\theta$

16. Να αποδείξετε την ισότητα

$$\sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{8}+\sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8}+\sigma\upsilon\nu^4\frac{5\pi}{8}+\sigma\upsilon\nu^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}.$$

17. Αν $\sigma\upsilon\nu x=\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}$, $\sigma\upsilon\nu y=\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$, τότε

$$\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}+\varepsilon\varphi^2\frac{y}{2}+\varepsilon\varphi^2\frac{\omega}{2}=1.$$

18. Να αποδείξετε ότι: i) $4\eta\mu\theta\,\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)=\eta\mu3\theta$

ii) $4\sigma\upsilon\nu\theta\,\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu3\theta$

19. Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $\sigma\upsilon\nu2x+3\sigma\upsilon\nu x=1$ ii) $\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu\dfrac{x}{2}=1$

20. Να λυθεί η εξίσωση $3\eta\mu^2x-2\sqrt{3}\,\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2x=0$

21. Να αποδείξετε ότι: i) $\eta\mu52^0\eta\mu68^0-\eta\mu47^0\sigma\upsilon\nu77^0-\sigma\upsilon\nu65^0\sigma\upsilon\nu81^0=\dfrac{1}{2}$

ii) $\dfrac{1}{4\eta\mu10^0}-\eta\mu70^0=\dfrac{1}{2}$

22. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu(\alpha-\beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\beta-\gamma)\sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma)+\eta\mu(\gamma-\alpha)\sigma\upsilon\nu(\gamma+\alpha)=0$

ii) $\eta\mu(\alpha+\beta)\eta\mu(\alpha-\beta)+\eta\mu(\beta+\gamma)\eta\mu(\beta-\gamma)+\eta\mu(\gamma+\alpha)\eta\mu(\gamma-\alpha)=0$

23. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(A=90^0)$ είναι $\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma=\dfrac{1}{4}$. Να αποδείξετε ότι $B=30^0$.

24. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu7x\,\sigma\upsilon\nu2x=\eta\mu2x\,\sigma\upsilon\nu3x$

25. Να αποδείξετε τις ισότητες: i) $\sigma\upsilon\nu20^0-\sigma\upsilon\nu40^0=\eta\mu10^0$ ii) $\eta\mu\dfrac{7\pi}{12}+\eta\mu\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

26. Να γίνουν γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις:

i) $1+\sigma\upsilon\nu\alpha$ ii) $1-\eta\mu2\alpha$

27. Να αποδείξετε ότι: i) $\dfrac{\eta\mu5\theta-\eta\mu3\theta}{\sigma\upsilon\nu5\theta+\sigma\upsilon\nu3\theta}=\varepsilon\varphi\theta$

ii) $\dfrac{\eta\mu\theta+\eta\mu3\theta+\eta\mu5\theta+\eta\mu7\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu3\theta-\sigma\upsilon\nu5\theta-\sigma\upsilon\nu7\theta}=\sigma\varphi2\theta$

iii) $\dfrac{\eta\mu\theta\,\eta\mu2\theta+\eta\mu3\theta\,\eta\mu6\theta}{\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu2\theta+\eta\mu3\theta\,\sigma\upsilon\nu6\theta}=\varepsilon\varphi5\theta$

28. Να αποδείξετε τις ισότητες: i) $\sigma\upsilon\nu80^0+\sigma\upsilon\nu40^0+\sigma\upsilon\nu160^0=0$ ii) $\varepsilon\varphi70^0-\varepsilon\varphi20^0=2\varepsilon\varphi50^0$.

29. Αν Α,Β και Γ είναι γωνίες τριγώνου, τότε:

i) $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma=1+4\eta\mu\dfrac{A}{2}\eta\mu\dfrac{B}{2}\eta\mu\dfrac{\Gamma}{2}$

ii) $\eta\mu2A+\eta\mu2B+\eta\mu2\Gamma=4\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma$

30. Να γίνουν γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις:

i) $\eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta$ ii) $1+\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$

31. Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $\eta\mu x+\eta\mu3x=\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu3x$ ii) $\eta\mu7x+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu8x-1=0$.

32. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x+y = \dfrac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu x\, \sigma\upsilon\nu y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

33. Αν ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ, τότε $\dfrac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \dfrac{\gamma}{\beta}$.

34. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ αληθεύει η συνεπαγωγή

$$B=2A \Rightarrow \sigma\upsilon\nu A = \frac{\beta}{2\alpha}$$

35. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα $\eta\mu^2 A = \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

36. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα $\alpha = 2\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

37. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\alpha = \beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B$.

38. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ αληθεύουν οι συνεπαγωγές:

i) $A<90^0 \Rightarrow \alpha^2<\beta^2+\gamma^2$ ii) $A>90^0 \Rightarrow \alpha^2>\beta^2+\gamma^2$.

39. Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha = x^2+x+1$, $\beta = 2x+1$, $\gamma = x^2-1$, τότε $A = 120^0$.

40. Αν Ε είναι το εμβαδό ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

i) $E = \dfrac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$ ii) $E = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$

41. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ αληθεύει η ισότητα $\eta\mu\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}$, όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

42. Δύο δυνάμεις 12kp και 7kp εφαρμόζονται στο ίδιο σημείο ενός σώματος. Αν οι διευθύνσεις τους σχηματίζουν γωνία 64^0, να υπολογίσετε τη συνισταμένη τους.

43. Να υπολογίσετε το εμβαδό ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, αν $AB = 8cm$, $A = 42^0$ και η περίμετρός του είναι 26cm.

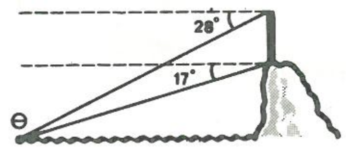
44. Δύο πλοία Π_1 και Π_2 έχουν ασυρμάτους με εμβέλεια 300km. Το Π_1 βρίσκεται 230km $B42^0A$ από ένα λιμάνι Λ και το Π_2 βρίσκεται 240km $B46^0\Delta$ από το Λ. Μπορούν τα δύο πλοία να επικοινωνήσουν απ' ευθείας με τους ασυρμάτους τους;

45. Δύο πλοία Π_1 και Π_2 αναχωρούν συγχρόνως από ένα λιμάνι Λ. Το Π_1 κινείται $B45^0A$ με ταχύτητα 12 μίλια την ώρα και το Π_2 κινείται δυτικά. Μετά από πέντε ώρες τα πλοία απέχουν 125,5 μίλ. Να βρείτε την ταχύτητα του πλοίου Π_2.

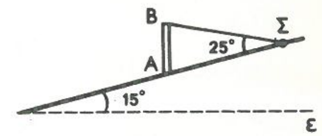
46. Σε ένα τριγωνικό οικόπεδο που έχει πλευρές 50m, 54m και 70m θέλουμε να χτίσουμε ένα σπίτι που να καλύπτει το 10% της επιφάνειας του οικοπέδου. Να βρείτε τις διαστάσεις του σπιτιού

(μήκος, πλάτος) αν η μία διάσταση είναι τα $\dfrac{3}{5}$ της άλλης.

47. Ένας πύργος ύψους 35m βρίσκεται στην κορυφή ενός λόφου που είναι στη μια όχθη ενός ποταμού (σχ. α). Από την κορυφή του πύργου, η γωνία βάθους ενός θάμνου Θ που βρίσκεται στην απέναντι όχθη είναι 28^0. Η γωνία βάθους του Θ από τη βάση του πύργου είναι 17^0. Να βρείτε το πλάτος του ποταμού και το ύψος του λόφου.



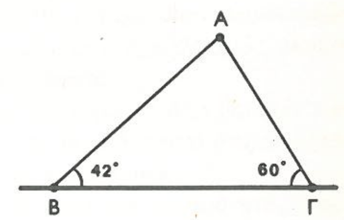
α



β

48. Ένας στύλος βρίσκεται σε ανηφορικό δρόμο που έχει κλίση 15^0 ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Ο στύλος φαίνεται υπό γωνία 25^0 από ένα σημείο του δρόμου που απέχει από το στύλο 30m (σχ. β). Να βρείτε το ύψος του στύλου.

49. Οι γωνίες ύψους ενός αερόστατου Α από δύο σημεία Β και Γ του εδάφους είναι 42^0 και 60^0 αντιστοίχως. Να βρείτε το ύψος στο οποίο βρίσκεται το αερόστατο, αν τα Α,Β και Γ βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο και ΒΓ = 100m (δύο περιπτώσεις).



4 ΠΡΟΟΔΟΙ

Στο κεφάλαιο αυτό δεσπόζει η βασική έννοια της ακολουθίας. Αρχικά εφαρμόζονται όσα ειπώθηκαν στο 2ο κεφάλαιο για γραφική παράσταση και μονοτονία συνάρτησης, στην ειδική περίπτωση ακολουθίας, και επισημαίνονται οι ιδιαιτερότητες που παρουσιάζονται. Επίσης δίνεται ο «επαγωγικός» ορισμός ακολουθίας που χρησιμοποιείται άμεσα.

Στη συνέχεια αναπτύσσονται οι δύο βασικές κατηγορίες ακολουθιών με το παραδοσιακό όνομα «πρόοδοι»: η αριθμητική και η γεωμετρική.

Οι πρόοδοι, γνωστές από την αρχαιότητα, εξακολουθούν και σήμερα να χρησιμοποιούνται ευρύτατα, γιατί συνδέονται με προβλήματα της καθημερινής ζωής.

Το γεγονός ότι η αριθμητική πρόοδος σχετίζεται με την πρόσθεση όπως ακριβώς η γεωμετρική με τον πολλαπλασιασμό, μας επιτρέπει τον παράλληλο και συντονισμένο τρόπο παρουσίασής τους, που διευκολύνει τον αναγνώστη.

Τέλος, με τη μελέτη της φθίνουσας γεωμετρικής προόδου παρέχεται η ευκαιρία να δοθεί ο ορισμός της λεπτής έννοιας του ορίου ακολουθίας,με βάση φυσικά την προπαρασκευή του μαθητή με όσα διδάχτηκε στο 2ο κεφάλαιο. Αυτός ο ορισμός θα αποτελέσει τον «προπομπό» για τη γενικότερη έννοια του ορίου συνάρτησης που εισάγεται σε επόμενο κεφάλαιο.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ακολουθίες

4.1 Όταν μισθώνουμε ένα ταξί, πληρώνουμε ως δικαίωμα χρήσης (σημαία) 20 δρχ. και για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής 15 δρχ. Έτσι οι ενδείξεις του ταξίμετρου στο τέλος κάθε χιλιόμετρου της διαδρομής είναι εκείνες που σημειώνονται στον επόμενο πίνακα.

χιλιόμετρα	1	2	3	...	10	...	ν	...
ένδειξη ταξίμετρου	20 + 15	50	65	...	170	...	20 + 15ν	...

Από τον πίνακα αυτό φαίνεται ότι σε κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ αντιστοιχίζεται ο $20 + 15\nu$. Άρα ορίζεται μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}^*$. Μια τέτοια συνάρτηση και συγκεκριμένα κάθε συνάρτηση:

$$\alpha : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} \qquad \text{ή} \qquad \alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

λέγεται, όπως ξέρουμε από την Α΄ τάξη, **ακολουθία πραγματικών αριθμών** ή απλούστερα **πραγματική ακολουθία.**
Η τιμή μιας ακολουθίας α στο ν συμβολίζεται α_ν (αντί $\alpha(\nu)$) και λέγεται **όρος με δείκτη ν.** Η ακολουθία συμβολίζεται

$$(\alpha_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*} \quad \text{ή} \quad (\alpha_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \quad \text{και απλά} \quad (\alpha_\nu)$$

ή αναλυτικότερα

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3.\ \ldots,\ \alpha_\nu,\ \ldots \qquad \text{ή} \qquad \alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_\nu,\ \ldots$$

Συνήθως για να οριστεί μια ακολουθία δίνεται η έκφραση του **γενικού της όρου** α_ν από την οποία προκύπτουν οι όροι της ακολουθίας για τις διάφορες τιμές του $\nu \in \mathbb{N}^*$ ή $\nu \in \mathbb{N}$.
Στα επόμενα, όταν δεν αναφέρεται το πεδίο ορισμού της ακολουθίας, θα εννοείται ότι είναι το $\mathbb{N}^*$. Π.χ. η ακολουθία:

$(2\nu-3)$ είναι η $-1, 1, 3, 5, ..., 2\nu-3, ...$

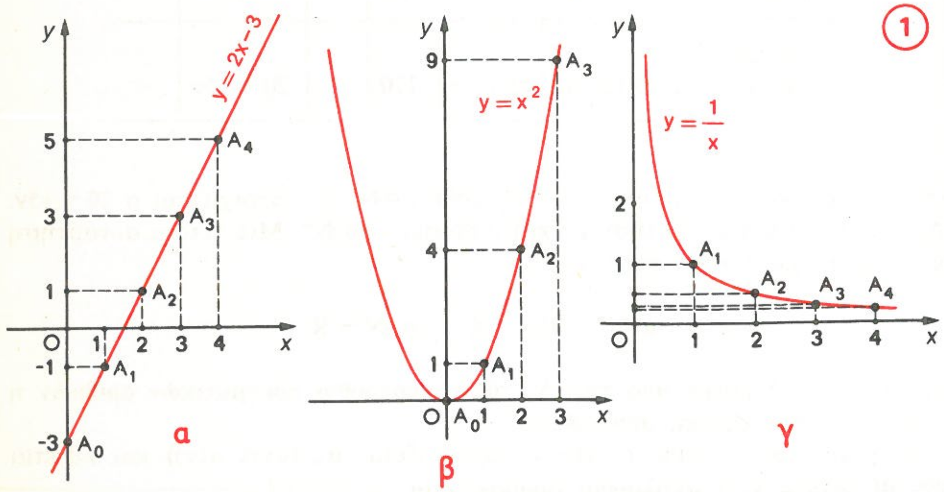
ενώ η $(\nu^2), \nu\in\mathbb{N}$ είναι η $0, 1, 4, 9, ..., \nu^2, ...$

Σημείωση

Μια απεικόνιση ενός συνόλου $A\subseteq\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$ λέγεται *ακολουθία ορισμένη στο A*. Ειδικότερα, αν το A είναι πεπερασμένο σύνολο, η ακολουθία λέγεται *πεπερασμένη*.

Γραφική παράσταση ακολουθίας

4.2 Μια ακολουθία, όπως κάθε συνάρτηση, μπορεί να παρασταθεί γραφικά. Π.χ. η γραφική παράσταση της ακολουθίας με γενικό όρο $\alpha_\nu=2\nu-3$ αποτελείται από τα σημεία $A_1, A_2, A_3, ...$ του σχήματος 1. Επειδή η ακολουθία αυτή



είναι περιορισμός στο $\mathbb{N}^*$ της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2x-3$, τα σημεία αυτά βρίσκονται στην ευθεία $y=2x-3$ πόύ είναι η γραφική παράσταση της f. Γενικά η κατασκευή της γραφικής παράστασης μιας ακολουθίας διευκολύνεται, αν η ακολουθία είναι περιορισμός μιας συνάρτησης με γνωστή γραφική παράσταση.

Στα σχήματα 2 και 3 έχουμε ακόμη τις γραφικές παραστάσεις των ακολουθιών με γενικούς όρους ν^2 και $\frac{1}{\nu}$, πάνω στις γνωστές καμπύλες $y=x^2$ και $y=\frac{1}{x}$ αντιστοίχως.

Ακολουθίες που ορίζονται επαγωγικά

4.3 Για την ακολουθία $(2\nu-3): -1, 1, 3, ..., 2\nu-3, ...$ έχουμε

$$\alpha_{\nu+1}=2(\nu+1)-3=(2\nu-3)+2, \text{ ή } \alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+2.$$

Έτσι η ακολουθία αυτή μπορεί να οριστεί **και** *«επαγωγικά»*, όταν δοθούν:

- *ο πρώτος όρος της* $\alpha_1=-1$
- *η ισότητα* $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+2$ (1)

από την οποία ορίζονται διαδοχικά οι άλλοι όροι της.

Η ισότητα (1) είναι περίπτωση **αναδρομικού τύπου** και εκφράζει τη διαδικασία με την οποία βρίσκουμε οποιοδήποτε όρο της ακολουθίας, όταν ξέρουμε τον προηγούμενό του.

Π.χ. επειδή ο 37ος όρος της (α_ν) είναι $2\cdot37-3=71$, ο 38ος θα είναι $71+2=73$.

Ομοίως η ακολουθία: $1, 2, 4, 8, ..., 2^\nu, ...$ μπορεί να οριστεί **και** επαγωγικά από τον πρώτο όρο της 1 και τον αναδρομικό τύπο $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\cdot2$.

Σημείωση

Υπάρχουν ακολουθίες που ορίζονται όταν δίνονται k αρχικοί όροι και ένας αναδρομικός τύπος με τον οποίο βρίσκουμε καθένα από τους άλλους όρους, αν γνωρίζουμε τους k προηγούμενούς του. Π.χ. από τους $\alpha_1=1$, $\alpha_2=1$ και τον αναδρομικό τύπο $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}$ ορίζεται η ακολουθία 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... που είναι γνωστή ως ακολουθία Fibonacci.

Μονότονες ακολουθίες

4.4 Οι ορισμοί για τη μονοτονία συνάρτησης που μάθαμε στο κεφάλαιο 2, ισχύουν φυσικά και για τις ακολουθίες. Αν π.χ. μια ακολουθία (α_ν) είναι γνησίως αύξουσα, τότε για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς $k<\lambda$, θα έχουμε $\alpha_k<\alpha_\lambda$, δηλαδή σε μεγαλύτερο δείκτη θα αντιστοιχεί μεγαλύτερος όρος της ακολουθίας. Ειδικότερα, αφού για κάθε φυσικό ν είναι $\nu<\nu+1$, θα είναι $\alpha_\nu<\alpha_{\nu+1}$.

Αντιστρόφως, αν για κάθε ν είναι $\alpha_\nu<\alpha_{\nu+1}$, τότε για οποιουσδήποτε φυσικούς k, λ με $k<\lambda=k+\rho$, θα έχουμε $\alpha_k<\alpha_{k+1}<\alpha_{k+2}<...<\alpha_{k+\rho}=\alpha_\lambda$ και η ακολουθία (α_ν) θα είναι γνησίως αύξουσα. Συνεπώς μια ακολουθία (α_ν) είναι:

- **γνησίως αύξουσα**, αν και μόνο αν για κάθε φυσικό ν είναι $\alpha_\nu<\alpha_{\nu+1}$.

Ομοίως βρίσκουμε ότι μια ακολουθία (α_ν) είναι:

- **γνησίως φθίνουσα**, αν και μόνο αν για κάθε φυσικό ν είναι $\alpha_\nu>\alpha_{\nu+1}$
- **αύξουσα**, αν και μόνο αν για κάθε φυσικό ν είναι $\alpha_\nu\leqslant\alpha_{\nu+1}$
- **φθίνουσα**, αν και μόνο αν για κάθε φυσικό ν είναι $\alpha_\nu\geqslant\alpha_{\nu+1}$

Συνήθως, για να εξετάσουμε τη μονοτονία μιας ακολουθίας (α_ν), συγκρίνουμε, για κάθε ν, τη διαφορά $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu$ με το μηδέν. Π.χ. για την ακολουθία της §4.3 έχουμε, για κάθε ν, $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=2>0$ και συνεπώς είναι γνησίως αύξουσα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Είναι φανερό ότι, αν οι όροι μιας ακολουθίας είναι εναλλάξ θετικοί και αρνητικοί, τότε η ακολουθία **δεν είναι μονότονη**. Π.χ. η ακολουθία $((-1)^\nu)$: $-1,\ 1,\ -1,\ \dots\ (-1)^\nu,\ \dots$ δεν είναι μονότονη.

2. Αν οι όροι μιας ακολουθίας είναι **ομόσημοι** (οπότε είναι μη μηδενικοί), τότε, για να εξετάσουμε τη μονοτονία της μπορούμε να συγκρίνουμε το λόγο $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$ με τη μονάδα. Π.χ. για την ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu=-\dfrac{1}{2^\nu}$, έχουμε, για κάθε ν, $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=\dfrac{-\dfrac{1}{2^{\nu+1}}}{-\dfrac{1}{2^\nu}}=\dfrac{1}{2}<1$, από την οποία, αφού $\alpha_\nu<0$, προκύπτει $\alpha_{\nu+1}>\alpha_\nu$. Άρα η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.

Ασκήσεις 1, 2, 3, 4.

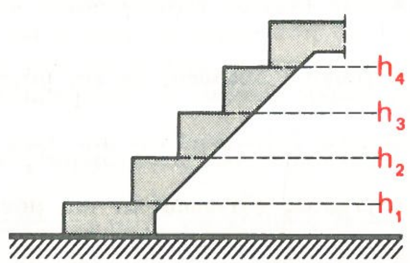
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Έννοια της αριθμητικής προόδου

4.5 Οι σκάλες των οικοδομών κατασκευάζονται συνήθως με ύψος σκαλοπατιού 17cm. Ανεβαίνοντας ένα ένα τα σκαλοπάτια βρισκόμαστε κάθε φορά σε υψόμετρο μεγαλύτερο κατά 17cm. Έτσι αν h_1 cm είναι το υψόμετρο του 1ου σκαλοπατιού, τότε το υψόμετρο:

του 2ου θα είναι $h_2=h_1+17$
του 3ου $h_3=h_2+17$
....
του 26ου $h_{26}=h_{25}+17$ κτλ.

2



Δηλαδή παρατηρούμε ότι τα υψόμετρα των σκαλοπατιών είναι όροι της ακολουθίας που ορίζεται επαγωγικά από το h_1 και τον αναδρομικό τύπο

$$h_{\nu+1}=h_\nu+17,\quad \nu\in\mathbb{N}^*$$

Ας θεωρήσουμε ακόμη ένα κινητό που πέφτει κατακόρυφα σ' ένα τόπο με επιτάχυνση βαρύτητας $g=10$ m/sec^2, και το οποίο στη χρονική στιγμή $t=0$ έχει ταχύτητα υ_0. Τότε στις χρονικές στιγμές $t=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 14\dots$ sec, η ταχύτητά του θα δίνεται από τους όρους της ακολουθίας:

$$\upsilon_0,\ \upsilon_1=\upsilon_0+10,\ \upsilon_2=\upsilon_1+10,\ \dots,\ \upsilon_{15}=\upsilon_{14}+10,\ \text{κτλ.}$$

η οποία ορίζεται επαγωγικά από τον υ_0 και τον αναδρομικό τύπο

$$\upsilon_{\nu+1}=\upsilon_\nu+10,\quad \nu\in\mathbb{N}$$

Παρατηρούμε ότι στις παραπάνω ακολουθίες, αλλά και στην ακολουθία της §4.3, κάθε όρος (εκτός από τον πρώτο) προκύπτει, αν προσθέσουμε στον προηγούμενό του ένα σταθερό αριθμό. Οι ακολουθίες αυτές χαρακτηρίζονται με τον όρο *«αριθμητικές πρόοδοι»*. Συγκεκριμένα έχουμε τον επόμενο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ **Μια ακολουθία (α_ν) ονομάζεται** ***αριθμητική πρόοδος,*** **αν υπάρχει $\omega\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε**

$$\forall\nu,\quad \alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\omega \qquad (1)$$

Ο αριθμός $\omega=\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu$ λέγεται **διαφορά** της αριθμητικής προόδου. Π.χ. η ακολουθία: 3, 6, 9, ... με γενικό όρο $\alpha_\nu=3\nu$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά 3, η ακολουθία: $3,\ 2\frac{1}{2},\ 2,\ 1\frac{1}{2},\ \dots$ με γενικό όρο $\alpha_\nu=3-\frac{1}{2}\nu,\ \nu\in\mathbb{N}$, είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $-\frac{1}{2}$ κτλ.

Σημείωση

Είναι φανερό ότι κάθε όρος α_k αριθμητικής προόδου και οι επόμενοί του σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο με την ίδια διαφορά ω. Επίσης ο α_k και οι προηγούμενοί του είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_k και διαφορά $-\omega$.

Γενικός όρος αριθμητικής προόδου

4.6 Από τον ορισμό προκύπτει ότι μια αριθμητική πρόοδος είναι ορισμένη, όταν δίνεται ο πρώτος όρος της α_1 και η διαφορά της ω. Τότε είναι $\alpha_2=\alpha_1+\omega$,

$\alpha_3=\alpha_2+\omega=(\alpha_1+\omega)+\omega=\alpha_1+2\omega,\ \alpha_4=\alpha_3+\omega=\alpha_1+3\omega,\ \ldots$
Γενικά με τη μέθοδο της επαγωγής θα δείξουμε ότι:

$$\boxed{\forall \nu,\quad \alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega} \tag{2}$$

Πράγματι η ισότητα (2) αληθεύει για $\nu=1$. Έστω ότι αληθεύει για την τιμή ν. Τότε από τον ορισμό της προόδου προκύπτει:

$$\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\omega=[\alpha_1+(\nu-1)\omega]+\omega=\alpha_1+\nu\omega.$$

Άρα η ισότητα αληθεύει και για την τιμή $\nu+1$, οπότε αληθεύει για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ο 5ος όρος αριθμητικής προόδου με $\alpha_1=7$ και $\omega=-\frac{1}{2}$ είναι: $\alpha_5=7+(5-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=$ $=7-2=5$. Ο 16ος όρος της: $\alpha_{16}=7+(16-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=7-\frac{15}{2}=-\frac{1}{2}$ κτλ.

Μονοτονία αριθμητικής προόδου

4.7 Έστω η αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω. Τότε για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ θα είναι $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\omega$ και συνεπώς (§4.4), αν:

- $\omega>0$, η πρόοδος θα είναι **γνησίως αύξουσα,**
- $\omega<0$, η πρόοδος θα είναι **γνησίως φθίνουσα,**
- $\omega=0$, έχουμε τη **σταθερή** ακολουθία (πρόοδο) με τιμή α_1.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ο 9ος όρος αριθμητικής προόδου είναι 5 και ο 21ος όρος της 23. Να βρεθεί η πρόοδος.**

Αν είναι α ο πρώτος όρος και ω η διαφορά της προόδου, θα έχουμε:

$$\begin{cases}5=\alpha+(9-1)\omega\\ 23=\alpha+(21-1)\omega\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+8\omega=5\\ \alpha+20\omega=23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+8\omega=5\\ 12\omega=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-7\\ \omega=\frac{3}{2}\end{cases}$$

Συνεπώς η πρόοδος είναι: $-7,\ -5\frac{1}{2},\ -4,\ -2\frac{1}{2},\ -1,\ \ldots$

2. **Να δειχτεί ότι, για να είναι τρεις αριθμοί α,β,γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου[1], πρέπει και αρκεί:**

$$\boxed{2\beta=\alpha+\gamma} \tag{3}$$

(1) Δηλαδή ο β είναι ο *αριθμητικός μέσος* ή *μέσος όρος* των α και γ.

Αν α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά ω, θα έχουμε:

$$\beta=\alpha+\omega,\quad \beta+\omega=\gamma$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε την σχέση (3).
Αντιστρόφως, από την (3) προκύπτει $\beta-\alpha=\gamma-\beta$. Αν καλέσουμε τις διαφορές αυτές ω, θα έχουμε $\beta=\alpha+\omega$, $\gamma=\beta+\omega$ και συνεπώς οι α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

3. **Μεταξύ των αριθμών α και β να παρεμβληθούν ν άλλοι $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$, ώστε οι αριθμοί $\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \beta$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.**

Έστω ω η διαφορά της προόδου. Τότε θα είναι $\alpha_1=\alpha$ και $\alpha_{\nu+2}=\beta$ και συνεπώς (§4.6) θα έχουμε: $\beta=\alpha_{\nu+2}=\alpha+(\nu+1)\omega$, από την οποία βρίσκουμε:

$$\omega=\frac{\beta-\alpha}{\nu+1}$$

Έτσι οι ζητούμενοι αριθμοί είναι:

$$x_1=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{\nu+1},\ x_2=\alpha+2\cdot\frac{\beta-\alpha}{\nu+1},\ x_3=\alpha+3\cdot\frac{\beta-\alpha}{\nu+1},\ \ldots,\ x_\nu=\alpha+\nu\cdot\frac{\beta-\alpha}{\nu+1}$$

Σημείωση
Οι αριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ λέγονται *αριθμητικοί ενδιάμεσοι* μεταξύ των α και β.

Ασκήσεις 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου

4.8 Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu$ ν διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου. Θα υπολογίσουμε το άθροισμά τους: $\Sigma_\nu=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\cdots+\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu$
που γράφεται και ως εξής: $\Sigma_\nu=\alpha_\nu+\alpha_{\nu-1}+\cdots+\alpha_{\nu-k+1}+\cdots+\alpha_2+\alpha_1$
Οι δείκτες των όρων του πρώτου αθροίσματος βαίνουν αυξανόμενοι και εκείνοι των όρων του δεύτερου αθροίσματος ελαττούμενοι, ενώ το άθροισμα των δεικτών δυο όρων που βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφη στήλη είναι $\nu+1$.

Από τις παραπάνω ισότητες, με πρόσθεση κατά μέλη, βρίσκουμε

$$2\Sigma_\nu=(\alpha_1+\alpha_\nu)+(\alpha_2+\alpha_{\nu-1})+\cdots+(\alpha_k+\alpha_{\nu-k+1})+\cdots+(\alpha_\nu+\alpha_1) \tag{5}$$

Αλλά σύμφωνα με τον τύπο (2) της §4.6 είναι

$$\alpha_k+\alpha_{\nu-k+1}=[\alpha_1+(k-1)\omega]+[\alpha_1+(\nu-k)\omega\ ]=\alpha_1+[\alpha_1+(k-1+\nu-k)\omega]$$
$$=\alpha_1+[\alpha_1+(\nu-1)\omega]=\alpha_1+\alpha_\nu$$

Από την ισότητα αυτή για $k=1, 2, 3, ..., \nu$ βρίσκουμε

$\alpha_1+\alpha_\nu=\alpha_2+\alpha_{\nu-1}=\cdots=\alpha_k+\alpha_{\nu-k+1}=\cdots=\alpha_{\nu-1}+\alpha_2=\alpha_\nu+\alpha_1$ (ν αθροίσματα)

και συνεπώς η (5) γίνεται $2\Sigma_\nu=(\alpha_1+\alpha_\nu)\nu$ ή

$$\boxed{\Sigma_\nu=\frac{\alpha_1+\alpha_\nu}{2}\ \nu} \qquad (6)$$

Ο τύπος (6), αν πάρουμε υπόψη μας ότι $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$, γράφεται

$$\boxed{\Sigma_\nu=\frac{2\alpha_1+(\nu-1)\omega}{2}\ \nu} \qquad (7)$$

Οι τύποι (6) και (7) δίνουν το *άθροισμα των ν πρώτων όρων* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_\nu$ αριθμητικής προόδου.

Π.χ. το άθροισμα των 13 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1=2$ και $\omega=-5$ είναι $\Sigma_{13}=\dfrac{2\cdot2+(13-1)(-5)}{2}\cdot13=\dfrac{4-60}{2}\cdot13=-364.$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Η διαφορά αριθμητικής προόδου είναι 3 και ο 15ος όρος της 38. Να βρείτε τα αθροίσματα: (i) Σ_{15} και (ii) Σ_{53}.

Αν είναι α_1 ο πρώτος όρος της προόδου, τότε από τον τύπο (2) θα έχουμε:

$$\alpha_{15}=\alpha_1+(15-1)\omega \ \text{ή}\ 38=\alpha_1+14\cdot3 \ \text{ή}\ \alpha_1=-4.$$

(i) Από τον τύπο (6) έχουμε: $\Sigma_{15}=\dfrac{\alpha_1+\alpha_{15}}{2}\cdot15=\dfrac{-4+38}{2}\cdot15=255.$

(ii) Από τον τύπο (7) έχουμε: $\Sigma_{53}=\dfrac{2\ \alpha_1+(53-1)\ \omega}{2}\cdot53=\dfrac{2\cdot(-4)+52\cdot3}{2}\cdot53=3922.$

2. Να βρεθούν τα αθροίσματα:

(i) $S_1=1+2+3+\cdots+\nu$, (ii) $S_2=1^2+2^2+3^2+\cdots+\nu^2$.

(i) Είναι φανερό ότι πρόκειται για το άθροισμα των ν πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1=1$ και $\alpha_\nu=\nu$. Συνεπώς είναι $S_1=\dfrac{1+\nu}{2}\cdot\nu$ ή

$$\boxed{S_1=\frac{\nu(\nu+1)}{2}} \qquad (8)$$

(ii) Από την ταυτότητα $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$ έχουμε:

$$\begin{array}{lllll}
\text{για } x=1, & 2^3=1^3 & +3\cdot1^2 & +3\cdot1 & +1\\
\text{» } x=2, & 3^3=2^3 & +3\cdot2^2 & +3\cdot2 & +1\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\text{» } x=\nu-1, & \nu^3=(\nu-1)^3 & +3(\nu-1)^2 & +3\ (\nu-1) & +1\\
\text{» } x=\nu, & (\nu+1)^3=\nu^3 & +3\cdot\nu^2 & +3\cdot\nu & +1
\end{array}$$

Από την πρόσθεση των ισοτήτων αυτών κατά μέλη, μετά τις απλοποιήσεις, έχουμε: $(\nu+1)^3=1^3+3\ S_2+3\ S_1+\nu$ ή λόγω της (8):

$(\nu+1)^3=1+3\ S_2+3\ \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}+\nu$ ή $2(\nu+1)^3=2+6\ S_2+3\nu(\nu+1)+2\nu$. Άρα

$6\ S_2=2(\nu+1)^3-2(\nu+1)-3\nu(\nu+1)=(\nu+1)[2(\nu+1)^2-2-3\nu]=$

$=(\nu+1)(2\nu^2+4\nu+2-2-3\nu)=(\nu+1)(2\nu^2+\nu)=\nu(\nu+1)(2\nu+1)$. Συνεπώς

$$\boxed{S_2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}} \qquad (9)$$

3. Να βρεθούν πέντε διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν το άθροισμά τους είναι 15 και το γινόμενό τους 120.

Έστω α ο τρίτος (μεσαίος) από τους πέντε όρους και ω η διαφορά της προόδου. Τότε οι πέντε διαδοχικοί όροι της προόδου θα είναι

$$\alpha-2\omega,\ \alpha-\omega,\ \alpha,\ \alpha+\omega,\ \alpha+2\omega.$$

Έτσι θα έχουμε το σύστημα: $\begin{cases}(\alpha-2\omega)+(\alpha-\omega)+\alpha+(\alpha+\omega)+(\alpha+2\omega)=15\\(\alpha-2\omega)\ (\alpha-\omega)\ \alpha\ (\alpha+\omega)\ (\alpha+2\omega)=120\end{cases}$

που γράφεται ισοδύναμα:

$\begin{cases}5\alpha=15.\\ \alpha(\alpha^2-\omega^2)(\alpha^2-4\omega^2)=120.\end{cases}$ Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $\alpha=3$, οπότε η δεύτερη γίνεται $4\omega^4-45\omega^2+41=0$. Θέτουμε $\omega^2=y$ και έχουμε την εξίσωση $4y^2-45y+41=0$, που έχει ρίζες $\rho_1=1$, $\rho_2=\dfrac{41}{4}$. Συνεπώς η $4\omega^4-45\omega^2+41=0$ έχει ρίζες

$$\omega_1=1,\quad \omega_2=-1,\quad \omega_3=\frac{\sqrt{41}}{2},\quad \omega_4=-\frac{\sqrt{41}}{2}.$$

Για $\omega=1$ έχουμε τους όρους: 1, 2, 3, 4, 5

Για $\omega=-1$ έχουμε τους όρους: 5, 4, 3, 2, 1

Για $\omega=\frac{\sqrt{41}}{2}$ έχουμε τους όρους: $3-\sqrt{41},\ 3-\frac{\sqrt{41}}{2},\ 3,\ 3+\frac{\sqrt{41}}{2},\ 3+\sqrt{41}$

Τέλος για $\omega=-\frac{\sqrt{41}}{2}$ τους όρους: $3+\sqrt{41},\ 3+\frac{\sqrt{41}}{2},\ 3,\ 3-\frac{\sqrt{41}}{2},\ 3-\sqrt{41}$.

4. *Η ακολουθία: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ με $\alpha_\nu \neq 0$ για κάθε ν, λέγεται* **αρμονική πρόοδος,** *όταν η ακολουθία $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}, \ldots, \frac{1}{\alpha_\nu}, \ldots$ είναι αριθμητική πρόοδος.*

Να δειχτεί ότι, για να είναι τρεις αριθμοί α, β, γ με $\alpha\beta\gamma \neq 0$ διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου, πρέπει και αρκεί:

$$\boxed{\beta=\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}} \tag{10}$$

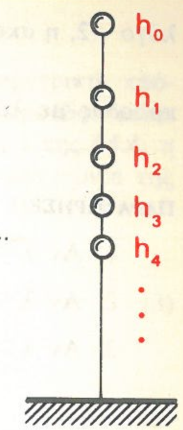
Για να είναι οι α, β, γ διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου πρέπει και αρκεί οι $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Δηλαδή (εφαρμ. 2, § 4.7) πρέπει και αρκεί $2\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}$ ή $2\alpha\gamma=(\alpha+\gamma)\beta$. Από την τελευταία, επειδή $2\alpha\gamma\neq 0$, θα είναι $(\alpha+\gamma)\beta\neq 0$, δηλαδή $\alpha+\gamma\neq 0$. Έτσι η $2\alpha\gamma=(\alpha+\gamma)\beta$ είναι ισοδύναμη με την (10).

Ασκήσεις 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Η έννοια της γεωμετρικής προόδου

4.9 Αφήνουμε από ένα ύψος h_0 να πέσει μια ελαστική σφαίρα σε οριζόντιο



και λείο επίπεδο (σχ. 3). Αν η σφαίρα αναπηδά κάθε φορά σε ύψος ίσο με τα $\frac{4}{5}$ του προηγούμενου, τότε το αρχικό ύψος h_0 και τα ύψη στα οποία βρίσκεται η σφαίρα μετά την 1η, 2η, 3η κτλ. αναπήδηση θα είναι όροι της ακολουθίας:

$$h_0,\ h_1=h_0\cdot\frac{4}{5},\ h_2=h_1\cdot\frac{4}{5},\ h_3=h_2\cdot\frac{4}{5},\ \ldots,\ h_{18}=h_{17}\cdot\frac{4}{5},\ldots$$

η οποία ορίζεται επαγωγικά από τον h_0 και τον αναδρομικό τύπο

$$h_{\nu+1}=h_\nu\cdot\frac{4}{5},\quad \nu\in\mathbb{N}$$

Ας θεωρήσουμε ακόμη την περίπτωση που καταθέτουμε ένα ποσό *(κεφάλαιο)* π.χ. 10000 δρχ.στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο με *επιτόκιο* 15%. Αυτό σημαίνει ότι σ' ένα έτος για κάθε δραχμή παίρνουμε *τόκο* $\frac{15}{100}=0{,}15$ δρχ. Ο τόκος στο τέλος κάθε έτους προστίθεται στο κεφάλαιο (κεφαλαιοποιείται, όπως λέμε, και έχουμε *ανατοκισμό*). Έτσι, στο τέλος του 1ου έτους οι 10000 δρχ. θα γίνουν $\alpha_1=10000+10000\cdot 0{,}15=10000(1+0{,}15)=11500$ δρχ. Ομοίως στο τέλος του 2ου έτους θα γίνουν $\alpha_2=\alpha_1\cdot 1{,}15$ δρχ., στο τέλος του 3ου έτους $\alpha_3=\alpha_2\cdot 1{,}15$ δρχ., ..., στο τέλος του 8ου έτους $\alpha_8=\alpha_7\cdot 1{,}15$ δρχ. κτλ. Δηλαδή τα ποσά που μπορούμε να πάρουμε στο τέλος κάθε έτους είναι όροι της ακολουθίας που ορίζεται επαγωγικά από τον $\alpha_1=11500$ και τον αναδρομικό τύπο

$$\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\cdot 1{,}15,\quad \nu\in\mathbb{N}^*$$

Παρατηρούμε ότι στις παραπάνω ακολουθίες κάθε όρος (εκτός από τον πρώτο) προκύπτει, αν πολλαπλασιάσουμε τον προηγούμενό του με ένα σταθερό αριθμό. Οι ακολουθίες αυτές χαρακτηρίζονται με τον όρο *«γεωμετρικές πρόοδοι»*. Συγκεκριμένα έχουμε τον επόμενο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ **Μια ακολουθία (α_ν) με πρώτο όρο διάφορο του μηδενός ονομάζεται** *γεωμετρική πρόοδος,* **αν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}^*$ τέτοιο ώστε**

$$\forall \nu,\quad \alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\,\lambda \tag{1}$$

Ο αριθμός $\lambda=\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$ λέγεται **λόγος** της γεωμετρικής προόδου. Π.χ. η ακολουθία: $5, -10, 20, -40, \ldots$ με γενικό όρο $\alpha_\nu=5(-2)^{\nu-1}$ είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο -2, η ακολουθία: 18, 6, 2, $\frac{2}{3}$, ... με γενικό όρο $\alpha_\nu = 18\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^\nu$ γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\frac{1}{3}$ κτλ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν $\lambda=1$, έχουμε τη σταθερή ακολουθία (πρόοδο) με τιμή α_1.
2. Αν $\lambda<0$, οι όροι της προόδου είναι εναλλάξ θετικοί και αρνητικοί.
3. Αν $\lambda>0$, οι όροι της προόδου είναι ομόσημοι του α_1.

Σημείωση

Είναι φανερό ότι κάθε όρος α_k γεωμετρικής προόδου και οι επόμενοί του σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο με τον ίδιο λόγο λ. Επίσης ο α_k και οι προηγούμενοί του είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_k και λόγο $\frac{1}{\lambda}$.

Γενικός όρος γεωμετρικής προόδου

4.10 Έστω α_1 και λ ο πρώτος όρος και ο λόγος μιας γεωμετρικής προόδου. Τότε είναι: $\alpha_2=\alpha_1\cdot\lambda$, $\alpha_3=\alpha_2\cdot\lambda=(\alpha_1\cdot\lambda)\cdot\lambda=\alpha_1\lambda^2$, ... Γενικά θα δείξουμε ότι:

$$\boxed{\forall\nu,\quad \alpha_\nu=\alpha_1\lambda^{\nu-1}} \qquad (2)$$

Πράγματι η ισότητα (2) αληθεύει για $\nu=1$. Έστω ότι αληθεύει για την τιμή ν. Τότε από τον ορισμό της προόδου προκύπτει: $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\,\lambda=(\alpha_1\lambda^{\nu-1})\,\lambda=\alpha_1\lambda^\nu$, δηλαδή η ισότητα (2) αληθεύει για την τιμή $\nu+1$. Συνεπώς αληθεύει για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ο 6ος όρος της γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1=12$ και $\lambda=\frac{2}{3}$ είναι $\alpha_6=12\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{6-1}=$ $=12\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{128}{81}$, ο 9ος όρος της είναι $\alpha_9=12\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{9-1}=12\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^8=\frac{1024}{2187}$ κτλ.

Μονοτονία γεωμετρικής προόδου

4.11 Όπως είδαμε στις παρατηρήσεις της §4.9, μια γεωμετρική πρόοδος είναι σταθερή, όταν $\lambda=1$. Επίσης, αν $\lambda<0$ οι όροι της προόδου είναι εναλλάξ θετικοί και αρνητικοί και σύμφωνα με την παρατήρηση 1 της §4.4, η πρόοδος δεν είναι μονότονη. Μένει επομένως να εξετάσουμε τη μονοτονία της προόδου στις περιπτώσεις $\lambda>1$ και $0<\lambda<1$.
Από την πρόταση της §4.10 προκύπτει ότι η πρόοδος γράφεται:

$$\alpha_1,\ \alpha_1\lambda,\ \alpha_1\lambda^2,\ \dots,\ \alpha_1\lambda^{\nu-1},\ \dots \qquad (3)$$

και επειδή $\lambda>0$, οι όροι της είναι **ομόσημοι του α_1**. Έτσι, αν:

- **$\lambda>1$**, για κάθε ν θα είναι $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}>1$. Τότε, αν επιπλέον είναι:
  - **$\alpha_1>0$**, θα έχουμε $\alpha_{\nu+1}>\alpha_\nu$ και η πρόοδος είναι **γνησίως αύξουσα.**
  - **$\alpha_1<0$**, θα έχουμε $\alpha_{\nu+1}<\alpha_\nu$ και η πρόοδος είναι **γνησίως φθίνουσα.**
- **$0<\lambda<1$**, για κάθε ν θα είναι $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}<1$. Τότε, αν επιπλέον είναι:
  - **$\alpha_1>0$**, θα έχουμε $\alpha_{\nu+1}<\alpha_\nu$ και η πρόοδος είναι **γνησίως φθίνουσα.**
  - **$\alpha_1<0$**, θα έχουμε $\alpha_{\nu+1}>\alpha_\nu$ και η πρόοδος είναι **γνησίως αύξουσα.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η γεωμετρική πρόοδος με γενικό όρο $\alpha_\nu=18\left(\frac{2}{3}\right)^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$, έχει $\lambda=\frac{2}{3}<1$ και $\alpha_1=18>0$. Συνεπώς είναι γνησίως φθίνουσα.
2. Η πρόοδος με γενικό όρο $\alpha_\nu=-3\cdot2^{\nu-1}$, έχει $\lambda=2>1$ και $\alpha_1=-3$. Άρα είναι γνησίως φθίνουσα.
3. Η πρόοδος με γενικό όρο $\alpha_\nu=-5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$, έχει $\lambda=\frac{1}{3}<1$ και $\alpha_1=-5$. Επομένως είναι γνησίως αύξουσα.
4. Η πρόοδος με $\alpha_\nu=8\left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$ έχει $\lambda=-\frac{1}{2}<0$ και συνεπώς δεν είναι μονότονη.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να βρεθεί πόσο θα γίνει ένα κεφάλαιο α δρχ., όταν ανατοκιστεί για ν έτη προς ε%.**

Αφού το επιτόκιο είναι ε%, ο τόκος της μιας δραχμής σε ένα έτος θα είναι $\tau=\frac{\varepsilon}{100}$ δρχ.

Έτσι το κεφάλαιο των α δρχ. στο τέλος του 1ου έτους θα γίνει (μαζί με τους τόκους) $\alpha_1 = \alpha + \alpha\tau = \alpha(1+\tau)$ δρχ., στο τέλος του 2ου έτους $\alpha_2 = \alpha_1(1+\tau)$ δρχ. στο τέλος του 3ου έτους $\alpha_3 = \alpha_2(1+\tau)$ δρχ. ... και γενικά στο τέλος του νου έτους $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1}(1+\tau)$ δρχ. Δηλαδή το κεφάλαιο των α δρχ. στο τέλος του νου έτους θα γίνει ίσο με το γενικό (νιοστό) όρο γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = \alpha\ (1+\tau)$ και λόγο $\lambda = (1+\tau)$. Τότε, σύμφωνα με την παράγραφο 4.10, θα έχουμε $\alpha_\nu = \alpha_1\ \lambda^{\nu-1}$ ή

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha(1+\tau)^\nu} \tag{4}$$

Ο τύπος (4) είναι γνωστός ως **τύπος του ανατοκισμού.**

Π.χ. αν $\alpha = 10\,000$ δραχμές, $\varepsilon = 15\%$ $\left(\text{οπότε } \tau = \dfrac{15}{100} = 0{,}15\right)$ και $\nu = 5$ έτη, θα έχουμε

$$\alpha_\nu = 10000(1+0{,}15)^5 = 10000(1{,}15)^5 \simeq 10000\cdot 2{,}0114 = 20114 \text{ δραχμές.}$$

Σημείωση

Για τη λύση προβλημάτων ανατοκισμού σήμερα χρησιμοποιούνται ηλεκτρονικοί μικροϋπολογιστές.

2. Ο 5ος όρος γεωμετρικής προόδου είναι 48 και ο 11ος 3072. Να βρεθεί ο 20ος όρος της προόδου.

Έστω α ο πρώτος όρος και λ ο λόγος της προόδου. Τότε σύμφωνα με τον τύπο (2) θα έχουμε

το σύστημα: $\begin{cases} \alpha\lambda^4 = 48 \\ \alpha\lambda^{10} = 3072 \end{cases}$. Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τη δεύτερη με την πρώτη

εξίσωση του συστήματος, βρίσκουμε $\lambda^6 = 64 = (\pm 2)^6$ και συνεπώς $\lambda = 2$ ή $\lambda = -2$. Τότε από την πρώτη εξίσωση του συστήματος έχουμε $\alpha\cdot 16 = 48$ ή $\alpha = 3$. Έτσι έχουμε δυο προόδους, μια με $\alpha = 3$, $\lambda = 2$ και δεύτερη με $\alpha = 3$, $\lambda = -2$. Από την πρώτη βρίσκουμε $\alpha_{20} = 3\cdot 2^{19} = 3\cdot 524288 = 1572864$, ενώ από τη δεύτερη $\alpha_{20} = 3\ (-2)^{19} = -1572864$.

3. Να δειχτεί ότι, για να είναι τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α,β,γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου[1], πρέπει και αρκεί:

$$\boxed{\beta^2 = \alpha\gamma} \tag{5}$$

Αν οι α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, θα έχουμε $\beta = \alpha\lambda$ καθώς και $\beta\lambda = \gamma$, από τις οποίες, με πολλαπλασιασμό κατά μέλη, προκύπτει η (5).

Αντιστρόφως, από την (5) προκύπτει ότι $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\gamma}{\beta}$. Αν καλέσουμε τους λόγους αυτούς λ, θα έχουμε $\beta = \alpha\lambda$, $\gamma = \beta\lambda$ και συνεπώς οι α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(1) Ο $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$ είναι ο *γεωμετρικός μέσος* ή *μέσος ανάλογος* των α και γ.

4. Μεταξύ των αριθμών α και β με $\alpha\beta \neq 0$, να παρεμβληθούν ν άλλοι $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$, ώστε οι αριθμοί α, $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, β να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Έχουμε $\alpha_1 = \alpha$ και $\alpha_{\nu+2} = \beta$. Συνεπώς, αν λ είναι ο λόγος της προόδου, θα είναι (§4.10) $\beta = \alpha\ \lambda^{\nu+1}$ ή

$$\lambda^{\nu+1} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Από τη λύση της εξίσωσης αυτής βρίσκουμε (αν υπάρχει) το λ.

Σημείωση

Οι αριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ λέγονται **γεωμετρικοί ενδιάμεσοι** μεταξύ των α και β.

Έτσι π.χ., αν:

- $\alpha = -5$, $\beta = -320$ και $\nu = 5$, θα έχουμε $\lambda^{5+1} = \dfrac{-320}{-5}$ ή $\lambda^6 = 64 = (\pm 2)^6$ ή $\lambda = \pm 2$.

  Για $\lambda = 2$ έχουμε τους: $x_1 = (-5)\ 2 = -10$, $x_2 = -20$, $x_3 = -40$, $x_4 = -80$, $x_5 = -160$, ενώ για $\lambda = -2$ έχουμε τους: $x_1 = (-5)\cdot(-2) = 10$, $x_2 = -20$, $x_3 = 40$, $x_4 = -80$, $x_5 = 160$.

- $\alpha = 4$, $\beta = -324$ και $\nu = 5$, θα έχουμε $\lambda^6 = \dfrac{-324}{4} = -81$, που είναι αδύνατη και το πρόβλημα δεν έχει λύση.

- $\alpha = 2$, $\beta = -486$ και $\nu = 4$, θα έχουμε $\lambda^5 = -243 = (-3)^5$ ή $\lambda = -3$. Συνεπώς $x_1 = 2\cdot(-3) = -6$, $x_2 = 18$, $x_3 = -54$, $x_4 = 162$.

5. Μεταξύ κάθε ζεύγους των διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda > 0$ παρεμβάλλουμε k γεωμετρικούς ενδιάμεσους. Να δειχτεί ότι η ακολουθία που προκύπτει είναι επίσης γεωμετρική πρόοδος.

Έστω η γεωμετρική πρόοδος $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ Αν $x_1, x_2, \ldots x_k$ είναι οι γεωμετρικοί ενδιάμεσοι που παρεμβάλλονται μεταξύ των α_ν και $\alpha_{\nu+1}$, τότε οι αριθμοί $\alpha_\nu, x_1, x_2, \ldots, x_k, \alpha_{\nu+1}$ θα είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο λ_1 που θα δίνεται (βλέπε εφαρμ. 4) από τον τύπο

$$\lambda_1^{k+1} = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$$

Επειδή όμως για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda > 0$, θα έχουμε $\lambda_1^{k+1} = \lambda$ ή $\lambda_1 = \sqrt[k+1]{\lambda}$.

Δηλαδή το λ_1 εξαρτάται μόνο από το λόγο λ της προόδου (α_ν) και συνεπώς η ακολουθία που προκύπτει από την παρεμβολή k γεωμετρικών ενδιαμέσων μεταξύ κάθε ζεύγους διαδοχικών όρων της (α_ν) είναι επίσης γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\sqrt[k+1]{\lambda}$.

Ασκήσεις 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33.

Άθροισμα ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου

4.12 Έστω $\Sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_\nu$ το άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο λ. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\lambda = 1$, οπότε έχουμε σταθερή πρόοδο με τιμή α_1. Έτσι θα είναι

$$\boxed{\Sigma_\nu = \nu\,\alpha_1} \qquad (6)$$

- $\lambda \neq 1$, τότε (§4.10) θα είναι: $\Sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \cdots + \alpha_1\lambda^{\nu-1}$

και συνεπώς: $\lambda\Sigma_\nu = \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_1\lambda^3 + \cdots + \alpha_1\lambda^\nu$

Από τις ισότητες αυτές, με αφαίρεση κατά μέλη, βρίσκουμε

$$(\lambda - 1)\Sigma_\nu = \alpha_1\lambda^\nu - \alpha_1 = \alpha_1(\lambda^\nu - 1) \qquad \text{ή}$$

$$\boxed{\Sigma_\nu = \frac{\alpha_1(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}} \qquad (7)$$

Οι τύποι (6) και (7) δίνουν το *άθροισμα των ν πρώτων όρων* γεωμετρικής προόδου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = -2$. Τότε θα είναι:

$$\Sigma_6 = \frac{1\cdot[(-2)^6 - 1]}{-2-1} = \frac{64-1}{-3} = -21, \quad \Sigma_{11} = \frac{1\cdot[(-2)^{11} - 1]}{-2-1} = \frac{-2047}{-3} = 682\ \frac{1}{3}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν πέντε διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν το γινόμενό τους είναι −243 και το άθροισμα του 2ου και 4ου είναι $\frac{15}{2}$.

Έστω α ο τρίτος (μεσαίος) όρος και λ ο λόγος της προόδου. Τότε οι πέντε διαδοχικοί όροι θα είναι:

$$\frac{\alpha}{\lambda^2},\ \frac{\alpha}{\lambda},\ \alpha,\ \alpha\lambda,\ \alpha\lambda^2$$

Έτσι θα έχουμε: $\frac{\alpha}{\lambda^2}\cdot\frac{\alpha}{\lambda}\,\alpha\cdot\alpha\lambda\cdot\alpha\lambda^2 = -243$ ή $\alpha^5 = -243$ ή $\alpha = -3$.

Εξάλλου είναι: $\frac{\alpha}{\lambda} + \alpha\lambda = \frac{15}{2}$ ή $\frac{-3}{\lambda} - 3\lambda = \frac{15}{2}$ ή $2\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0$. Οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Συνεπώς οι όροι που ζητάμε θα είναι:

$$-\frac{3}{4},\ \frac{3}{2},\ -3,\ 6,\ -12 \quad \text{ή} \quad -12,\ 6,\ -3,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{4}.$$

2. Καταθέτουμε σε μια Τράπεζα στην αρχή κάθε έτους α δραχμές με ανατοκισμό και τόκο της 1 δραχμής τ. Τι ποσό θα πάρουμε μετά ν έτη;

Η πρώτη κατάθεση θα ανατοκιστεί ν έτη και συνεπώς (εφαρ. 1, §4.11) θα δώσει $\alpha(1+\tau)^\nu$ δρχ. Η δεύτερη κατάθεση θα ανατοκιστεί $\nu-1$ έτη και θα δώσει $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$ δρχ. Ομοίως η τρίτη κατάθεση θα δώσει $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$ δρχ. κ.ο.κ., ενώ η τελευταία κατάθεση, που θα ανατοκιστεί 1 έτος, θα δώσει $\alpha(1+\tau)$ δρχ. Συνεπώς μετά ν έτη θα πάρουμε συνολικά:

$$\Sigma = \alpha(1+\tau)^\nu + \alpha(1+\tau)^{\nu-1} + \cdots + \alpha(1+\tau) = \alpha(1+\tau)[1 + (1+\tau) + (1+\tau)^2 + \cdots + (1+\tau)^{\nu-1}]$$

ή επειδή $1 + (1+\tau) + (1+\tau)^2 + \cdots + (1+\tau)^{\nu-1} = \frac{1\cdot[(1+\tau)^\nu - 1]}{(1+\tau) - 1} = \frac{(1+\tau)^\nu - 1}{\tau}$

θα έχουμε τελικά

$$\boxed{\Sigma = \alpha(1+\tau)\,\frac{(1+\tau)^\nu - 1}{\tau}} \qquad (8)$$

Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως **πρόβλημα ίσων καταθέσεων** και η ισότητα (8) ως **τύπος ίσων καταθέσεων.**

Π.χ. έστω $\alpha = 50000$ δρχ., $\tau = 0{,}14$ δρχ. και $\nu = 34$ έτη. Μ' ένα μικροϋπολογιστή τσέπης βρίσκουμε $(1+\tau)^\nu = (1{,}14)^{34} \simeq 86{,}05$ και συνεπώς $\Sigma \simeq 50000\cdot1{,}14\cdot\frac{86{,}05 - 1}{0{,}14} = 34627500$ δραχμές περίπου.

3. Παίρνουμε από μια Τράπεζα στεγαστικό δάνειο α δραχμών με ανατοκισμό και επιτόκιο τ. Το δάνειο αυτό έχουμε υποχρέωση να το εξοφλήσουμε σε ν ίσες δόσεις, που θα τις πληρώνουμε στο τέλος κάθε έτους. Να βρεθεί το ποσό κάθε δόσης.

Έχουμε υποχρέωση να επιστρέψουμε στην Τράπεζα συνολικά $\alpha(1+\tau)^\nu$ δρχ. Αν είναι x δρχ. κάθε δόση, τότε η 1η δόση θα ανατοκιστεί $\nu-1$ έτη και θα γίνει $x(1+\tau)^{\nu-1}$, η 2η δόση θα ανατοκιστεί $\nu-2$ έτη και θα γίνει $x(1+\tau)^{\nu-2}$ κ.ο.κ., ενώ η τελευταία δόση δε θα ανατοκιστεί και θα είναι x δρχ. Έτσι συνολικά θα επιστρέψουμε στην Τράπεζα:

$$x(1+\tau)^{\nu-1}+x(1+\tau)^{\nu-2}+\dots+x=x\;\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}\;\text{δραχμές.}$$

Συνεπώς θα έχουμε την εξίσωση:

$$\boxed{x\cdot\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}=\alpha(1+\tau)^{\nu}} \qquad (9)$$

από την οποία βρίσκουμε:

$$\boxed{x=\frac{\alpha\tau(1+\tau)^{\nu}}{(1+\tau)^{\nu}-1}} \qquad (10)$$

Το ποσό x κάθε δόσης λέγεται **χρεωλύσιο** και η σχέση (10) **εξίσωση της χρεωλυσίας**.

Π.χ. αν $\alpha=1\,000\,000$ δρχ., $\tau=0{,}12$ και $\nu=25$ έτη, τότε βρίσκουμε $(1+\tau)^{\nu}=(1{,}12)^{25}\simeq$

$\simeq 17$ και συνεπώς $x\simeq\dfrac{1\,000\,000\cdot 0{,}12\cdot 17}{17-1}=127\,500$ δραχμές.

Ασκήσεις 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40.

Ακολουθίες με όριο το μηδέν

4.13 Θεωρούμε την ακολουθία: $-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots$ με γενικό όρο

$$\alpha_{\nu}=(-1)^{\nu}\frac{1}{\nu}$$

Οι όροι της (α_{ν}), **κατ' απόλυτη τιμή**, διαρκώς μικραίνουν και γίνονται όσο θέλουμε μικροί, αρκεί ο ν να γίνει αρκετά μεγάλος. Αυτό σημαίνει ακριβέστερα, ότι αν δοθεί οποιοσδήποτε αριθμός $\varepsilon>0$ υπάρχει όρος της ακολουθίας (α_{ν}) τέτοιος, ώστε:

$$|\alpha_{\nu}|<\varepsilon$$

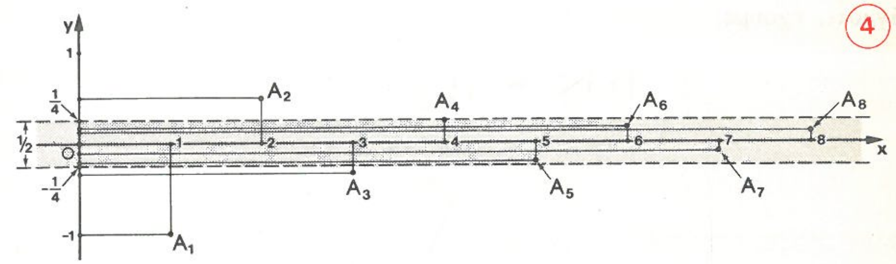
Αυτό είναι φανερό όταν $\varepsilon=1$ (άρα και για κάθε $\varepsilon>1$) αφού π.χ. $|\alpha_2|=\frac{1}{2}<1$.

Παρατηρούμε μάλιστα, ότι όχι μόνο ένας, αλλά όλοι οι όροι της (α_{ν}) με δείκτη

$\nu>1$, δηλαδή οι όροι: $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots$, είναι, κατ' απόλυτη τιμή, μικρότεροι από το $\varepsilon=1$.

Ομοίως αν $\varepsilon=\frac{1}{4}$, όλοι οι όροι της (α_{ν}) με δείκτη $\nu>4$ είναι, κατ' απόλυτη τιμή, μικρότεροι από το ε (σχ. 4).

Μ' άλλα λόγια, αν εξαιρέσουμε τους 4 πρώτους όρους της (α_{ν}), όλοι οι άλλοι όροι της είναι μικρότεροι, κατ' απόλυτη τιμή, από το $\varepsilon=\frac{1}{4}$.



4

Το ίδιο συμβαίνει και για «οσοδήποτε μικρό» ε. Π.χ. έστω $\varepsilon=0{,}000037$. Τότε επειδή $0{,}000037>0{,}00001=\frac{1}{100\,000}$, αν εξαιρέσουμε τους 100 000 πρώτους όρους της (α_{ν}), όλοι οι άλλοι όροι της είναι, κατ' απόλυτη τιμή, μικρότεροι από το ε.

Γενικά, για κάθε $\varepsilon>0$ έχουμε:

$$|\alpha_{\nu}|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|(-1)^{\nu}\frac{1}{\nu}\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\nu}<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \nu>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Αλλά υπάρχει φυσικός αριθμός $\nu_0>\frac{1}{\varepsilon}$. Άρα η $\nu>\frac{1}{\varepsilon}$, συνεπώς και η ισοδύναμή της $|\alpha_{\nu}|<\varepsilon$, αληθεύει για κάθε όρο της ακολουθίας με δείκτη $\nu\geqslant\nu_0$.

Δηλαδή, *αν εξαιρέσουμε ένα πεπερασμένο πλήθος αρχικών όρων της ακολουθίας*

$\left(\text{εκείνους που αντιστοιχούν σε } \nu \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\right)$, *όλοι οι άλλοι όροι της είναι μικρότεροι, κατ' απόλυτη τιμή, από το ε.*

Έστω ακόμη η γεωμετρική πρόοδος με γενικό όρο $\alpha_\nu = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, δηλαδή η

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots,\ \frac{1}{2^\nu},\ \ldots$$

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ όλοι οι όροι της προόδου, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος αρχικών όρων της, είναι μικρότεροι (κατ' απόλυτη τιμή) από το ε.

Πράγματι, έχουμε:

$$|\alpha_\nu| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\left(\frac{1}{2}\right)^\nu\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2^\nu} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^\nu > \frac{1}{\varepsilon}$$

Αλλά υπάρχει φυσικός $\nu_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (π.χ. αν $\varepsilon = 0{,}000001$, είναι $\nu_0 = 1000001$). Τότε η ανίσωση $2^\nu > \frac{1}{\varepsilon}$ αληθεύει για κάθε $\nu \geqslant \nu_0$, αφού $2^\nu \geqslant 2^{\nu_0} > \nu_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Συνεπώς, αν εξαιρέσουμε τους $\nu_0 - 1$ αρχικούς όρους της προόδου, όλοι οι άλλοι όροι της είναι μικρότεροι από το ε.

Ακολουθίες όπως αυτές που εξετάσαμε προηγουμένως λέμε ότι έχουν *όριο το μηδέν*. Γενικά:

Μια ακολουθία (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}$ θα λέμε ότι έχει όριο το μηδέν ή ότι ο γενικός όρος της τείνει στο μηδέν, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ όλοι οι όροι της, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος αρχικών όρων της, είναι μικρότεροι, κατ' απόλυτη τιμή, από το ε.

Για να δηλώσουμε αυτό γράφουμε:

$\boxed{\lim\limits_{\nu \to +\infty} \alpha_\nu = 0 \ \text{ ή } \ \alpha_\nu \xrightarrow[\nu \to +\infty]{} 0}$ ή απλούστερα $\boxed{\lim \alpha_\nu = 0 \ \text{ ή } \ \alpha_\nu \to 0}$

Ισχύει γενικά το επόμενο θεώρημα, που θα αποδειχτεί σε άλλη τάξη.

ΘΕΩΡΗΜΑ **Κάθε γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ τέτοιο, ώστε $|\lambda| < 1$, έχει όριο το μηδέν.**

Ακολουθίες με όριο πραγματικό αριθμό

4.14 Έστω η ακολουθία

$$(\alpha_\nu):\quad 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \ldots,\ \frac{\nu+1}{\nu},\ \ldots$$

Παρατηρούμε ότι είναι

$$\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{\nu} \ \text{ ή } \ \alpha_\nu - 1 = \frac{1}{\nu}.$$

Η ακολουθία όμως $\left(\frac{1}{\nu}\right)$, μ' άλλα λόγια η $(\alpha_\nu - 1)$, έχει όριο μηδέν. Δηλαδή $\lim(\alpha_\nu - 1) = 0$. Τότε λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει *όριο τον αριθμό* 1. Γενικά:

Μια ακολουθία (α_ν) λέμε ότι έχει όριο τον αριθμό $\ell \in \mathbb{R}$ (ή τείνει στον αριθμό $\ell \in \mathbb{R}$), όταν η ακολουθία $(\alpha_\nu - \ell)$ έχει όριο το 0.

Γράφουμε αντιστοίχως:

$\boxed{\lim\limits_{\nu \to +\infty} \alpha_\nu = \ell \ \text{ ή } \ \alpha_\nu \xrightarrow[\nu \to +\infty]{} \ell}$ ή απλούστερα $\boxed{\lim \alpha_\nu = \ell \ \text{ ή } \ \alpha_\nu \to \ell}$

Από τον παραπάνω ορισμό έχουμε την ισοδυναμία:

$$\boxed{\lim \alpha_\nu = \ell \ \Leftrightarrow \ \lim(\alpha_\nu - \ell) = 0} \tag{11}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να δειχτεί ότι η ακολουθία (α_ν): $0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots$ με γενικό όρο $\alpha_\nu = \frac{\nu-1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ έχει όριο τον αριθμό 1.**

Έχουμε $\lim(\alpha_\nu - 1) = \lim\left(\frac{\nu-1}{\nu} - 1\right) = \lim\left(\frac{\nu-1-\nu}{\nu}\right) = \lim\left(-\frac{1}{\nu}\right) = 0$ (§4.13).

Συνεπώς θα είναι $\lim \alpha_\nu = 1$.

2. **Έστω η ακολουθία (α_ν) με γενικό όρο $\alpha_\nu = \frac{8+3\lambda^\nu}{4}$, $\nu \in \mathbb{N}$ και $|\lambda|<1$. Να δειχτεί ότι**

$\lim \alpha_\nu = 2$.

Έχουμε $\lim(\alpha_\nu - 2) = \lim\left(\frac{8+3\lambda^\nu}{4} - 2\right) = \lim \frac{3\lambda^\nu}{4}$. Αλλά (Θεώρημα §4.13)

$\lim\left(\frac{3}{4}\lambda^\nu\right) = 0$ και συνεπώς $\lim(\alpha_\nu - 2) = 0$ ή $\lim \alpha_\nu = 2$.

Ασκήσεις 41, 42.

Άθροισμα των άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, αν $|\lambda|<1$

4.15 Έστω η γεωμετρική πρόοδος: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ με λόγο λ, όπου $|\lambda|<1$, και $\Sigma_2 = \alpha_1+\alpha_2$, $\Sigma_3 = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, ..., $\Sigma_\nu = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_\nu$ τα αθροίσματα των 2, 3, ..., ν, ... πρώτων όρων της αντίστοιχα. Αν θέσουμε $\Sigma_1 = \alpha_1$, τότε σχηματίζεται η ακολουθία (Σ_ν) με γενικό όρο (βλέπε §4.12)

$$\Sigma_\nu = \frac{\alpha_1(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}.$$

Ο γενικός όρος Σ_ν γράφεται:

$$\Sigma_\nu = \frac{\alpha_1\lambda^\nu - \alpha_1}{\lambda-1} = \frac{\alpha_1}{\lambda-1}\lambda^\nu - \frac{\alpha_1}{\lambda-1} = \frac{\alpha_1}{\lambda-1}\lambda^\nu + \frac{\alpha_1}{1-\lambda},$$

οπότε έχουμε:

$$\Sigma_\nu - \frac{\alpha_1}{1-\lambda} = \frac{\alpha_1}{\lambda-1}\lambda^\nu$$

Επειδή $\frac{\alpha_1}{\lambda-1}\lambda^\nu$ είναι ο γενικός όρος γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το σταθερό αριθμό $\frac{\alpha_1}{\lambda-1}$ και $|\lambda|<1$, θα είναι (Θεώρημα §4.13) $\lim\left(\frac{\alpha_1}{\lambda-1}\lambda^\nu\right) = 0$.

Συνεπώς $\lim\left(\Sigma_\nu - \frac{\alpha_1}{1-\lambda}\right) = 0$ ή $\lim \Sigma_\nu = \frac{\alpha_1}{1-\lambda}$ και, αν θέσουμε $\lim \Sigma_\nu = \Sigma$, παίρνουμε:

$$\boxed{\Sigma = \frac{\alpha_1}{1-\lambda}} \qquad (12)$$

Συνήθως, αντί για $\lim \Sigma_\nu$, χρησιμοποιούμε τη γραφή:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_\nu + \cdots$$

Γι' αυτό λέμε ότι ο τύπος (12) δίνει το **άθροισμα των άπειρων όρων** της γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ, όταν $|\lambda|<1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η πρόοδος $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^{\nu+1}}, \cdots$ έχει $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = \frac{1}{2}$. Επειδή $|\lambda| = \frac{1}{2} < 1$, θά έχουμε:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{\nu-1}} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να βρεθούν τα αθροίσματα:**

(i) $\Sigma = \frac{2}{9} + \frac{4}{81} + \cdots + \left(\frac{2}{9}\right)^\nu + \cdots$

(ii) $\Sigma' = 30 - 6 + \frac{6}{5} - \frac{6}{25} + \cdots + 30\cdot\frac{(-1)^{\nu-1}}{5^{\nu-1}} + \cdots$

(i) Είναι φανερό ότι πρόκειται για γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = \frac{2}{9}$ και λόγο $\lambda = \frac{2}{9}$. Επειδή $|\lambda| = \frac{2}{9} < 1$, θα έχουμε (§4.15):

$$\Sigma = \frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{2}{9}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{9}} = \frac{2}{7}$$

(ii) Ομοίως είναι $\alpha_1=30$, $\lambda=-\frac{1}{5}$ και, επειδή $|\lambda|=\left|-\frac{1}{5}\right|<1$, θα έχουμε:

$$\Sigma' = \frac{30}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{30}{\frac{6}{5}} = 25.$$

2. Να γραφούν με κλασματική μορφή (δηλαδή ως ρητοί) οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί:
(i) 0,999..., (ii) 0,292929..., (iii) 6,7363636...

(i) Είναι $0{,}999... = \frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots+\frac{9}{10^\nu}+\cdots$.

Δηλαδή πρόκειται για το άθροισμα των άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου με

$\alpha_1=\frac{9}{10}$ και $\lambda=\frac{1}{10}$. Επειδή $|\lambda|=\frac{1}{10}<1$, θα έχουμε:

$$0{,}999... = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1.$$

(ii) Ομοίως βρίσκουμε:

$$0{,}292929... = \frac{29}{100}+\frac{29}{10000}+\frac{29}{1000000}+\cdots+\frac{29}{100^\nu}+\cdots = \frac{\frac{29}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{29}{99}.$$

(iii) Ομοίως έχουμε:

$$6{,}7363636... = 6{,}7+\frac{36}{1000}+\frac{36}{100000}+\cdots+\frac{36}{10^{2\nu+1}}+\cdots = 6{,}7+\frac{\frac{36}{1000}}{1-\frac{1}{100}}$$

$$=6{,}7+\frac{36}{990} = \frac{6{,}7\cdot 990+36}{990} = \frac{6{,}7(1000-10)+36}{990} = \frac{6736-67}{990}$$

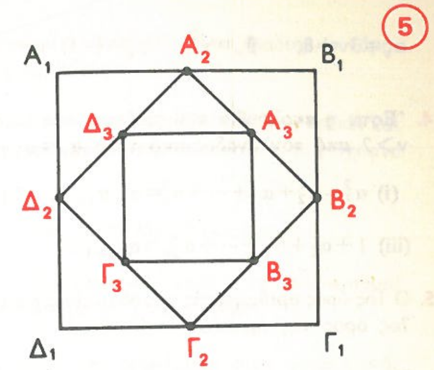
$$=\frac{741}{110}$$

3. Συνδέουμε τα μέσα A_2, B_2, Γ_2, Δ_2 των πλευρών τετραγώνου $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ πλευράς α. Μετά συνδέουμε τα μέσα A_3, B_3, Γ_3, Δ_3 των πλευρών του $A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$, έπειτα τα μέσα των πλευρών του $A_3B_3\Gamma_3\Delta_3$ κ.ο.κ. Να βρεθεί, ως συνάρτηση του α, το άθροισμα των περιμέτρων των τετραγώνων που σχηματίζονται.

Το τετράγωνο $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ έχει περίμετρο 4α.
Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $A_1A_2\Delta_2$ (σχ. 5), στο οποίο είναι

$A_1A_2=A_1\Delta_2=\frac{\alpha}{2}$, βρίσκουμε

$$A_2\Delta_2=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{\alpha}{2}\sqrt{2}$$



Έτσι το τετράγωνο $A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$ έχει

πλευρά $\frac{\alpha}{2}\sqrt{2}$ και συνεπώς περίμετρο $4\cdot\frac{\alpha}{2}\sqrt{2}=2\alpha\sqrt{2}$. Ομοίως το $A_3B_3\Gamma_3\Delta_3$ έχει

πλευρά $\frac{\alpha}{2}$ και περίμετρο 2α, το $A_4B_4\Gamma_4\Delta_4$ έχει πλευρά $\frac{\alpha\sqrt{2}}{4}$ και περίμετρο $\alpha\sqrt{2}$ κ.ο.κ.

Άρα οι περίμετροι των τετραγώνων που σχηματίζονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής

προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1=4\alpha$ και λόγο $\lambda=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Επειδή $|\lambda|<1$, θα έχουμε:

$$4\alpha+2\alpha\sqrt{2}+2\alpha+\alpha\sqrt{2}+\cdots = \frac{4\alpha}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8\alpha}{2-\sqrt{2}} = \frac{8\alpha(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = 4\alpha(2+\sqrt{2})$$

Ασκήσεις 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν οι 5 πρώτοι όροι των ακολουθιών με γενικούς όρους:

$$\alpha_\nu=3\nu-8,\quad \beta_\nu=\nu^2,\quad \gamma_\nu=(-1)^\nu\nu,\quad \delta_\nu=\frac{(-1)^\nu}{\nu},\quad \varepsilon_\nu=(-1)^\nu+1,\quad \zeta_\nu=\frac{1}{(-1)^\nu+2}$$

2. Να οριστούν επαγωγικά οι ακολουθίες με γενικούς όρους:

$$\alpha_\nu=5\nu-9,\quad \beta_\nu=\frac{3}{2}(2\nu+5),\quad \gamma_\nu=\nu^2,\quad \delta_\nu=\frac{1}{\nu}$$

3. Να εξεταστούν ως προς τη μονοτονία οι ακολουθίες με γενικούς όρους:

$$\alpha_\nu=3\nu+8, \quad \beta_\nu=\nu^2, \quad \gamma_\nu=(-1)^\nu\nu, \quad \delta_\nu=(-1)^\nu+1, \quad \varepsilon_\nu=\frac{1}{\nu}, \quad \zeta_\nu=\frac{1}{(-1)^\nu+2}.$$

4. Έστω η ακολουθία που ορίζεται από τους δυο πρώτους όρους της $\alpha_1=1$, $\alpha_2=1$ και για κάθε $\nu>2$ από τον αναδρομικό τύπο $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}$ (Fibonacci). Να δειχτεί ότι:

(i) $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\cdots+\alpha_\nu^2=\alpha_\nu\,\alpha_{\nu+1}$, (ii) $\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\cdots+\alpha_{2\nu+1}=\alpha_{2\nu+2}$,

(iii) $1+\alpha_2+\alpha_4+\cdots+\alpha_{2\nu}=\alpha_{2\nu+1}$.

5. Ο 1ος όρος αριθμητικής προόδου είναι 6 και ο 12ος όρος της είναι 94. Να βρεθεί η διαφορά και ο 7ος όρος της προόδου.

6. Σε μια περιοχή το μέγιστο ύψος των οικοδομών είναι 30m και το ελάχιστο ύψος κάθε ορόφου 2,90m. Πόσους το πολύ ορόφους μπορούμε να κάνουμε σε μια οικοδομή, αν θέλουμε ο 1ος όροφος (ισόγειο) να είναι υπερυψωμένος κατά 1m από το έδαφος;

7. Έστω λ και μ δυο ακέραιοι αριθμοί και $\lambda<\mu$. Να δειχτεί ότι το πλήθος των ακέραιων αριθμών από το λ μέχρι το μ (συμπεριλαμβανομένων) είναι $\mu-\lambda+1$.

8. Έστω η αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1=\alpha$ και $\alpha_{2\nu+1}=\beta$. Να δειχτεί ότι $\alpha_{\nu+1}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

9. Αν οι θετικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δειχτεί ότι και οι

$\dfrac{1}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\gamma}+\sqrt{\alpha}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$ είναι επίσης διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

10. Να βρεθεί πόσα πολλαπλάσια του 7 περιέχονται μεταξύ του 150 και του 300.

11. Ένα ρολόι χτυπάει τις ακέραιες ώρες. Πόσους χτύπους κάνει το δωδεκάωρο;

12. Να βρεθεί ο μέσος όρος των 12 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1=3$ και $\omega=5$.

13. Αν είναι Σ_ν, $\Sigma_{2\nu}$ και $\Sigma_{3\nu}$ τα αθροίσματα των ν, 2ν και 3ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου αντίστοιχα, να δειχτεί ότι $\Sigma_{3\nu}=3(\Sigma_{2\nu}-\Sigma_\nu)$.

14. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

(i) $1\cdot2+2\cdot3+\cdots+\nu(\nu+1)$, (ii) $2\cdot1+4\cdot3+6\cdot5+\cdots+2\nu(2\nu-1)$

15. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου, να δειχτεί ότι οι αριθμοί:

(i) βγ, γα, αβ,

(ii) $\alpha(\beta+\gamma)$, $\beta(\gamma+\alpha)$, $\gamma(\alpha+\beta)$,

(iii) $(\beta+\gamma-\alpha)^2$, $(\gamma+\alpha-\beta)^2$, $(\alpha+\beta-\gamma)^2$, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

16. Να βρεθούν 4 διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν το άθροισμά τους είναι 20 και το γινόμενό τους 384.

17. Να αποδειχτεί ότι, αν τα μήκη των πλευρών ορθογώνιου τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 3, 4 και 5.

18. Να δειχτεί ότι για να είναι οι αριθμοί β^2, α^2, γ^2 διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, πρέπει και αρκεί οι αριθμοί $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$ να είναι διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου (α, β, γ όχι ανά δυο αντίθετοι).

19. Να δειχτεί ότι σε κάθε αριθμητική πρόοδο είναι $(\mu-\nu)\alpha_\lambda+(\nu-\lambda)\alpha_\mu+(\lambda-\mu)\alpha_\nu=0$.

20. Τρεις αριθμοί είναι ανάλογοι προς τους 2, 5 και 7. Αν ο 2ος ελαττωθεί κατά 7, οι τρεις αριθμοί γίνονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρεθούν οι τρεις αριθμοί.

21. Αν οι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu$ είναι διαφορετικοί από το μηδέν και διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδειχτεί ότι

$$\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_2\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_3\alpha_4}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}=\frac{\nu-1}{\alpha_1\alpha_\nu}.$$

22. Ο 4ος όρος γεωμετρικής προόδου είναι 5 και ο 7ος όρος της είναι 135. Να βρεθεί η πρόοδος και ο 11ος όρος της.

23. Ο πρώτος όρος γεωμετρικής προόδου είναι 8 και ο λόγος της $-\dfrac{1}{2}$. Να βρεθεί ο γενικός όρος της προόδου.

24. Να προσδιοριστεί ο x, ώστε οι αριθμοί $5x-9$, $2x+3$, $3x-1$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

25. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (i) Να δειχτεί ότι το γινόμενο δυο όρων που ισαπέχουν από τους άκρους όρους α_1 και α_ν είναι σταθερό. (ii) Αν $\Gamma=\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_\nu$, να δειχτεί ότι είναι $\Gamma^2=(\alpha_1\,\alpha_\nu)^\nu$.

26. Κατέθεσε κάποιος στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο, με τη γέννηση του γιου του, 5000 δρχ. προς 15%. Πόσα χρήματα θα πάρει ο γιος του, όταν συμπληρώσει το 18ο έτος της ηλικίας του;

27. Να αποδειχτεί ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οι αριθμοί x, $x+3$, $x+6$ δε μπορεί να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

28. Αν οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να δειχτεί ότι:

(i) $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$,

(ii) οι αριθμοί $\alpha+\beta$, 2β, $\beta+\gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου ($\beta\neq0, -\alpha, -\gamma$).

29. Αν οι ρητοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και $\alpha\neq0$, να δειχτεί ότι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-2\beta x=\alpha(4\alpha-\gamma)$ είναι ρητοί αριθμοί.

30. Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικούς όρους είναι $\alpha_{\mu+k}=A$ και $\alpha_{\mu-k}=B$. Να βρεθεί ο όρος α_μ.

31. Να δειχτεί ότι σε κάθε γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_\mu^{\nu-\rho}\,\alpha_\nu^{\rho-\mu}\,\alpha_\rho^{\mu-\nu}=1$.

32. Ο πληθυσμός μιας πόλης είναι σήμερα 80000 κάτοικοι και ελαττώνεται κάθε έτος κατά 2%. Μετά πόσα έτη ο πληθυσμός της θα είναι 50000 κάτοικοι;

33. Τρεις ακέραιοι αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Αν ελαττώσουμε τον τρίτο κατά 16, τότε οι αριθμοί που προκύπτουν είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, ενώ αν ελαττώσουμε και τον δεύτερο κατά 2 οι νέοι αριθμοί γίνονται πάλι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Να βρεθούν οι τρεις αυτοί αριθμοί.

34. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος: $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, -\frac{4}{27}, \dots$

Να βρεθούν τα αθροίσματα Σ_7 και Σ_8.

35. Το άθροισμα τριών διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου είναι 21 και το γινόμενό τους 216. Να βρεθούν οι όροι αυτοί.

36. Να βρεθούν τα αθροίσματα: (i) $x^\nu+x^{\nu-1}\alpha+x^{\nu-2}\alpha^2+\cdots+x\alpha^{\nu-1}+\alpha^\nu$

(ii) $x^\nu-x^{\nu-1}\alpha+x^{\nu-2}\alpha^2-\cdots-x\alpha^{\nu-1}+\alpha^\nu$, όταν ν άρτιος.

(iii) $\alpha+\beta+\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\beta^3}{\alpha^2}+\cdots+\frac{\beta^\nu}{\alpha^{\nu-1}}$,

(iv) $1+2\alpha+3\alpha^2+4\alpha^3+\cdots+\nu\alpha^{\nu-1}$, όταν $\alpha\neq 1$.

37. Αν είναι Σ_ν, $\Sigma_{2\nu}$, $\Sigma_{3\nu}$ τα αθροίσματα των ν, 2ν, 3ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου αντιστοίχως, να δειχτεί ότι $\Sigma_\nu(\Sigma_{3\nu}-\Sigma_{2\nu})=(\Sigma_{2\nu}-\Sigma_\nu)^2$.

38. Μια Κοινότητα έχει πρόθεση να δανειστεί ένα ποσό για την εκτέλεση κοινωφελούς έργου. Ποιο ποσό μπορεί να δανειστεί με ανατοκισμό προς 6%, αν για την εξόφληση του χρέους της έχει τη δυνατότητα, για 30 έτη, να διαθέτει 500000 δρχ. το έτος;

39. Ένας εργαζόμενος καταθέτει στην αρχή κάθε έτους στο Ταμιευτήριο προς 10% τις οικονομίες του, που ανέρχονται σε 42000 δραχμές. Πόσα χρήματα θα πάρει μετά 25 έτη;

40. Ένας πατέρας, για να ανταμείψει το γιο του, τον ρώτησε τι θάθελε να του προσφέρει για να τον ευχαριστήσει. Ο γιος του απάντησε. «Σήμερα είναι 1η Ιουλίου. Δώσε μου 1 λεπτό γι' αυτή τη μέρα, 2 λεπτά για τη 2η μέρα, 4 λεπτά για την 3η μέρα κ.ο.κ. μέχρι το τέλος του μήνα». Ο πατέρας με προθυμία δέχτηκε να ικανοποιήσει την επιθυμία του γιού του, αλλ' όταν έκανε το λογαριασμό, κτυπούσε το κεφάλι του. Γιατί;

41. Να δειχτεί ότι οι ακολουθίες με τους επόμενους γενικούς όρους έχουν όριο μηδέν:

(i) $\alpha_\nu=\frac{(-1)^\nu}{2\nu+1}$, (ii) $\alpha_\nu=\frac{5}{3\nu+4}$ (iii) $\alpha_\nu=-\frac{7(-1)^\nu}{9\nu+7}$, (iv) $\alpha_\nu=\left(-\frac{2}{21}\right)^\nu$

42. Να αποδειχτεί ότι: (i) $\lim\frac{\nu}{\nu-1}=1$, (ii) $\lim\frac{2\nu}{\nu+4}=2$, (iii) $\lim\frac{2\nu+3}{5(\nu+2)}=\frac{2}{5}$.

43. Να βρεθούν τα αθροίσματα των άπειρων όρων των γεωμετρικών προόδων:

(i) $20, 4, \frac{4}{5}, \frac{4}{25}, \dots$, (ii) $32, -8, 2, -\frac{1}{2}, \dots$

(iii) $1, \frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{(\alpha+1)^2}, \dots$, όπου $\alpha>0$, (iv) $\alpha, -\beta, \frac{\beta^2}{\alpha}, -\frac{\beta^3}{\alpha^2}, \dots$, όπου $|\beta|<|\alpha|$.

44. Να γραφούν με κλασματική μορφή οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί:

(i) 23,151515..., (ii) 0,35483483483..., (iii) 5,26555...

45. Αν $\alpha>0$, να δειχτεί ότι το άθροισμα Σ των άπειρων όρων της προόδου

$\frac{1}{1+\alpha}, -\frac{1-\alpha}{(1+\alpha)^2}, \frac{(1-\alpha)^2}{(1+\alpha)^3}, -\frac{(1-\alpha)^3}{(1+\alpha)^4}, \dots$, ισούται με $\frac{1}{2}$.

46. Το άθροισμα των 4 πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, όπου $|\lambda|<1$, είναι 65 και το άθροισμα των άπειρων όρων της είναι 81. Να βρεθεί η πρόοδος και το είδος της μονοτονίας της.

47. Αν είναι $|\alpha|<1$ και θέσουμε $\Sigma_1=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\cdots$, $\Sigma_2=1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\cdots$ και $\Sigma_3=1+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6+\cdots$, να δειχτεί ότι $\Sigma_1+\Sigma_2=2\Sigma_3$ (οι όροι των αθροισμάτων είναι άπειροι σε πλήθος).

48. Συνδέουμε τα μέσα A_2, B_2, Γ_2 των πλευρών ισόπλευρου τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ που έχει πλευρά α. Μετά συνδέουμε τα μέσα A_3, B_3, Γ_3 των πλευρών του τριγώνου $A_2B_2\Gamma_2$, έπειτα τα μέσα A_4, B_4, Γ_4 των πλευρών του $A_3B_3\Gamma_3$ κ.ο.κ. Να βρεθεί, συναρτήσει του α, το άθροισμα:
(i) των περιμέτρων και (ii) των εμβαδών, των άπειρων σε πλήθος τριγώνων αυτών.

49. Σε κύκλο με ακτίνα ρ εγγράφουμε τετράγωνο, σ' αυτό εγγράφουμε κύκλο, στον κύκλο εγγράφουμε νέο τετράγωνο κ.ο.κ. Να βρεθεί, συναρτήσει του ρ, το άθροισμα των εμβαδών των άπειρων σε πλήθος (i) κύκλων και (ii) τετραγώνων.

50. Γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο α και δεύτερο όρο β, έχει λόγο κατ' απόλυτη τιμή μικρότερο από το 1. (i) Να βρεθεί το άθροισμα Σ των άπειρων όρων της. (ii) Αν $\Sigma=2\alpha$, να βρεθεί το β.

5 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η μεγάλη σημασία της εκθετικής συνάρτησης έγκειται στο ότι περιγράφει πολύ συνηθισμένα και ενδιαφέροντα φαινόμενα «αύξησης πληθυσμού». Και τούτο γιατί σ' ένα τέτοιο φαινόμενο, ο ρυθμός αύξησης είναι ανάλογος κάθε στιγμή προς το «μέγεθος» του πληθυσμού (η παράγωγος ανάλογη προς την τιμή της συνάρτησης).

Για την ομαλή εισαγωγή στην έννοια της εκθετικής συνάρτησης, παρουσιάζεται αρχικά η ανάγκη μιας φυσικολογικής επέκτασης της έννοιας της γεωμετρικής προόδου, την οποία μόλις διδάχτηκαν οι μαθητές. Πρόκειται για την περίπτωση ρητού εκθέτη που εισάγεται με παράδειγμα ως πρόβλημα παρεμβολής μεταξύ όρων γεωμετρικής προόδου, για να επακολουθήσει ο συσχετισμός των γνωστών ιδιοτήτων των δυνάμεων με τις αντίστοιχες ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης. Η περίπτωση άρρητου εκθέτη στηρίζεται στην παραδοχή ότι οι δυνάμεις που έχουν εκθέτες τις δεκαδικές προσεγγίσεις του άρρητου σχηματίζουν αντίστοιχα κιβωτισμένα διαστήματα.

Γενικά, ο ορισμός της εκθετικής συνάρτησης, καθώς και οι ιδιότητες που ακολουθούν, «δικαιολογούνται» στην τάξη αυτή όσο το επιτρέπει ένας κατάλληλος συνδυασμός διαίσθησης και γνώσεων, τις οποίες θα κληθεί να επιστρατεύσει ο μαθητής.

Η λογαριθμική συνάρτηση εισάγεται ως αντίστροφη της εκθετικής. Οι βασικές της ιδιότητες αποδεικνύονται εύκολα γιατί βασίζονται στις γνωστές ήδη αντίστοιχες ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης. Τέλος, επισημαίνεται ότι η απλή νύξη ή η λιτή παρουσίαση θεμάτων που άλλοτε απαιτούσαν πολύωρη διδασκαλία (πίνακες λογαρίθμων κτλ.) οφείλεται, όπως είναι φανερό, στην εξέλιξη σύγχρονων υπολογιστικών μεθόδων.

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Εισαγωγή

5.1 Σε μια εργαστηριακή έρευνα βρέθηκε ότι το πλήθος των βακτηριδίων που βρίσκονται σ' ένα οργανισμό, κάθε μέρα διπλασιάζεται. Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι κάποια χρονική στιγμή $x_0 = 0$ το πλήθος των βακτηριδίων που έδειξε μια «καλλιέργεια» είναι 1 εκατομμύριο ανά cm^3, καταλαβαίνουμε ότι:

- Μετά από 1, 2, 3..., x ημέρες, οι αντίστοιχες καλλιέργειες θα δείξουν 2, 2^2, 2^3,..., 2^x εκατομμύρια βακτηρίδια. Οι αριθμοί

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\dots,\ 2^x \qquad (1)$$

είναι όροι γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το 1 και λόγο 2.

- Πριν από 1, 2, 3,..., x ημέρες, οι αντίστοιχες καλλιέργειες θα έδειχναν $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3},\dots, \frac{1}{2^x}$ εκατομμύρια βακτηρίδια. Οι αριθμοί

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3}\ \dots,\ \frac{1}{2^x} \qquad (2)$$

είναι όροι γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το 1 και λόγο $\frac{1}{2}$.

Αν παραστήσουμε με αρνητικούς ακέραιους τις ημέρες πριν από τη χρονική στιγμή $x_0 = 0$, προκύπτει ο επόμενος πίνακας αντίστοιχων τιμών:

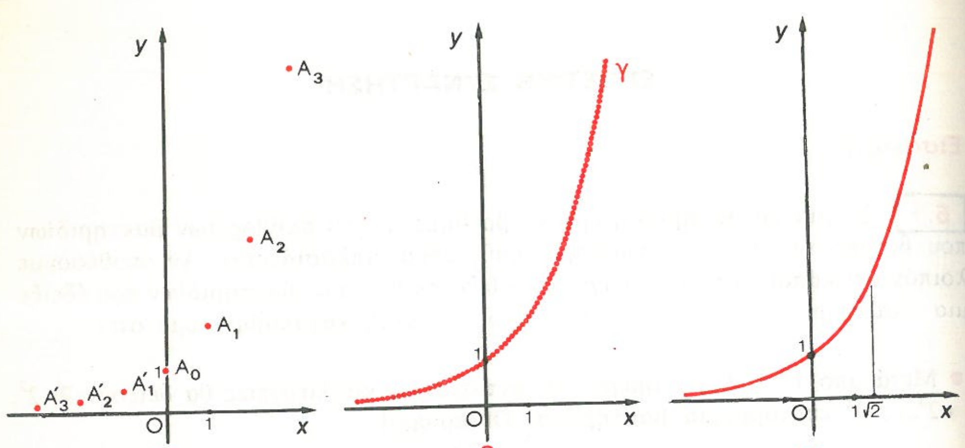
Ημέρες	....	-3	-2	-1	0	1	2	3	....
Πλήθος βακτηριδίων σε εκατομ.	....	$2^{-3} = \frac{1}{8}$	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	....

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι οι όροι των γεωμετρικών προόδων (1) και (2) είναι τιμές της συνάρτησης

$$f_1 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}^*_+ ,\ \text{με}\ f_1(x) = 2^x \qquad (3)$$

Στο σχήμα 1α έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής, που αποτελείται από τα μεμονωμένα σημεία ..., A'_3, A'_2, A'_1, A_0, A_1, A_2, A_3,...

1



α β γ

Είναι όμως φανερό ότι και σε κάθε ενδιάμεση χρονική στιγμή θα υπάρχει κάποιος αριθμός βακτηριδίων. Τον αριθμό αυτό μπορούμε να τον υπολογίσουμε. Ας υποθέσουμε π.χ. ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το πλήθος των βακτηριδίων ανά 6 ώρες, δηλαδή και στις χρονικές στιγμές

$$\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{4},\ \frac{7}{4},\dots$$

Στη γεωμετρική πρόοδο (1) παρεμβάλλουμε, μεταξύ όλων των ζευγών των διαδοχικών όρων της, από 3 γεωμετρικούς ενδιάμεσους. Τότε (βλέπε εφαρμογή 5, § 4.11) προκύπτει πάλι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda = \sqrt[3+1]{2} = 2^{\frac{1}{4}}$

Επομένως το πλήθος των βακτηριδίων στις παραπάνω χρονικές στιγμές θα είναι αντίστοιχα

$$2^{\frac{1}{4}},\ 2^{\frac{2}{4}},\ 2^{\frac{3}{4}},\ 2^{\frac{5}{4}},\ 2^{\frac{6}{4}},\ \dots..$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των βακτηριδίων στις χρονικές στιγμές $\frac{7}{24}$, $-\frac{2}{3}$ και γενικά σε κάθε χρονική στιγμή που εκφράζεται μ' ένα **ρητό** αριθμό x.

Πιο συγκεκριμένα, το πλήθος των βακτηριδίων σε κάθε χρονική στιγμή $x \in \mathbb{Q}$ δίνεται από τις τιμές της συνάρτησης

$$f_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+^* \ \text{ με } \ f_2(x) = 2^x \qquad (4)$$

Στον επόμενο πίνακα έχουμε ορισμένα ζεύγη αντίστοιχων τιμών της f_2. Η γραφική παράσταση της f_2 (σχ. 1β) είναι μια γραμμή γ που δεν είναι «συνεχής», αφού δεν περιέχει σημεία με τετμημένη άρρητο αριθμό.

x	... -2	... -1,5	... -0,9	... 0	... 0,9	... 1,5	... 2 ...
$f_2(x) = 2^x$	... $\frac{1}{4}$	... $\frac{1}{2^{1,5}}$	... $\frac{1}{2^{0,9}}$	... 1	... $2^{0,9}$	... $2^{1,5}$	... 4 ...

Η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x (x \in \mathbb{Q})$

5.2 Όπως ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο τη συνάρτηση f_2, μπορούμε να ορίσουμε για κάθε $\alpha > 0$ μια συνάρτηση f_α η οποία σε κάθε $x \in \mathbb{Q}$ αντιστοιχίζει τη δύναμη α^x. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{Q}$ είναι $\alpha^x > 0$, η f_α είναι η απεικόνιση του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}_+^*$ με

$$f_\alpha(x) = \alpha^x$$

Από τις ιδιότητες των δυνάμεων με ρητό εκθέτη, που είναι γνωστές από την Α τάξη, προκύπτουν αντίστοιχες ιδιότητες για τη συνάρτηση f_α. Έτσι π.χ. έχουμε:

1. Από τις $\quad \alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1+x_2} \quad$ και $\quad \alpha^{x_1} : \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1-x_2}$

προκύπτει ότι:

$$f_\alpha(x_1+x_2) = f_\alpha(x_1) \cdot f_\alpha(x_2) \quad \text{και} \quad f_\alpha(x_1-x_2) = f_\alpha(x_1) : f_\alpha(x_2)$$

Δηλαδή: το γινόμενο (πηλίκο) των τιμών της f_α στα x_1 και x_2 ισούται με την τιμή της στο άθροισμα x_1+x_2 (διαφορά x_1-x_2).

2. $$(\alpha^{x_1})^{x_2} = \alpha^{x_1 x_2}$$

Ώστε: η x_2- δύναμη της τιμής της f_α στο x_1 είναι ίση με την τιμή της στο x_1x_2.

3. $$(\alpha\beta)^x = \alpha^x\beta^x \quad \text{και} \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{\alpha^x}{\beta^x} \qquad (\alpha>0,\ \beta>0)$$

Δηλαδή: Το γινόμενο (πηλίκο) των συναρτήσεων f_α και f_β ισούται με τη συνάρτηση $f_{\alpha\beta}$ $\ (f_{\alpha:\beta})$

4. **Αν $\alpha>1$, τότε** $\begin{cases} \alpha^x>1, & \text{αν } x>0 \\ \alpha^x<1, & \text{αν } x<0 \end{cases}$

Πράγματι:

- Αν $x>0$, υπάρχουν $\mu,\nu \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε $x=\frac{\mu}{\nu}$. Τότε:

  $\alpha>1 \Rightarrow \alpha^\mu>1 \Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}>1 \Rightarrow \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}>1$, δηλαδή $\alpha^x>1$.

- Αν $x<0$, υπάρχουν $\mu,\nu \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε $x=\frac{-\mu}{\nu}$. Τότε:

  $\alpha>1 \Rightarrow \alpha^{-\mu}<1 \Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha^{-\mu}}<1 \Rightarrow \alpha^{\frac{-\mu}{\nu}}<1$, δηλαδή $\alpha^x<1$.

Δηλαδή, αν $\alpha>1$ οι τιμές της f_α στο $\mathbb{Q}_+^*$ είναι μεγαλύτερες από τη μονάδα, ενώ οι τιμές της στο $\mathbb{Q}_-^*$ είναι μικρότερες από τη μονάδα.

Επειδή $\alpha<1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha}>1$, έχουμε ανάλογα συμπεράσματα για την περίπτωση $\alpha<1$.

Δηλαδή, αν $\alpha<1$ οι τιμές της f στο $\mathbb{Q}_+^*$ είναι μικρότερες από τη μονάδα, ενώ οι τιμές της στο $\mathbb{Q}_-^*$ είναι μεγαλύτερες από τη μονάδα.

5. **Η f_α είναι γνησίως αύξουσα όταν $\alpha>1$ και γνησίως φθίνουσα όταν $\alpha<1$.**

Πράγματι: αν $\alpha>1$, τότε για $x_1<x_2$ έχουμε:

$\alpha^{x_1}:\alpha^{x_2}=\alpha^{x_1-x_2}<1$ (γιατί $x_1-x_2<0$). Άρα $\alpha^{x_1}<\alpha^{x_2}$, οπότε η f_α είναι γνησίως αύξουσα.

Ομοίως εργαζόμαστε και όταν $\alpha<1$.

Σημείωση

Είναι φανερό ότι για $\alpha=1$ η συνάρτηση f_α είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή 1, γιατί για κάθε $x\in\mathbb{Q}$ είναι $\alpha^x=1^x=1$. Στα επόμενα, όταν αναφερόμαστε σε δύναμη α^x, θα υποθέτουμε για τη βάση α, όχι μόνο $\alpha>0$ αλλά και $\alpha\neq1$.

Ασκήσεις 1, 2, 3, 4

Δυνάμεις με άρρητο εκθέτη

5.3 Στο παράδειγμα της §5.1 ας ζητήσουμε το πλήθος των βακτηριδίων στη χρονική στιγμή $x=\sqrt{2}$. Είναι γνωστό από την Α΄ τάξη ότι ο $\sqrt{2}$ είναι το μοναδικό κοινό στοιχείο των *κιβωτισμένων* διαστημάτων

$$[1,2],\ [1{,}4,\ 1{,}5],\ [1{,}41,\ 1{,}42],\ [1{,}414,\ 1{,}415],\ldots$$

Αφού ο $\sqrt{2}$ περιέχεται σε όλα τα παραπάνω διαστήματα, το πλήθος των βακτηριδίων στη χρονική στιγμή $\sqrt{2}$ θα περιέχεται σε όλα τα διαστήματα

$$[2^1,\ 2^2],\ [2^{1,4},\ 2^{1,5}],\ [2^{1,41},\ 2^{1,42}],\ [2^{1,414},\ 2^{1,415}],\ldots$$

Αλλά τα διαστήματα αυτά είναι επίσης κιβωτισμένα, γιατί:

- $$[2^1,\ 2^2]\supset[2^{1,4},\ 2^{1,5}]\supset[2^{1,41},\ 2^{1,42}]\supset[2^{1,414},\ 2^{1,415}]\supset\ldots$$

- Για κάθε φυσικό αριθμό ν, αποδεικνύεται(1) ότι υπάρχει διάστημα με πλάτος μικρότερο από το $\frac{1}{\nu}$.

Επομένως υπάρχει ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός, που είναι κοινό στοιχείο όλων των παραπάνω διαστημάτων. Ο αριθμός αυτός, που συμβολίζεται $2^{\sqrt{2}}$, εκφράζει το πλήθος των βακτηριδίων στη χρονική στιγμή $x=\sqrt{2}$.
Αν εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε για κάθε άρρητο αριθμό $r\in(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ τη δύναμη 2^r. Άρα μπορούμε να μιλάμε για δύναμη 2^x, όπου x οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.
Έτσι, αντιστοιχίζοντας σε κάθε $x\in\mathbb{R}$ τη δύναμη 2^x, ορίζουμε τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ με $g(x)=2^x$.
Η συνάρτηση αυτή, που είναι μια επέκταση στο $\mathbb{R}$ της f_2 (§5.1), λέγεται *εκθετική συνάρτηση με βάση 2* και η γραφική της παράσταση δίνεται στο σχήμα 1γ.

Εκθετική συνάρτηση

5.4 Όπως ορίσαμε τη δύναμη 2^x για κάθε πραγματικό εκθέτη x, με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε γενικότερα τη δύναμη α^x όταν $\alpha>0$. Επομένως για κάθε $\alpha>0$ ορίζεται η συνάρτηση

$$\mathbf{F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*,\ \text{με}\ F(x)=\alpha^x}.$$

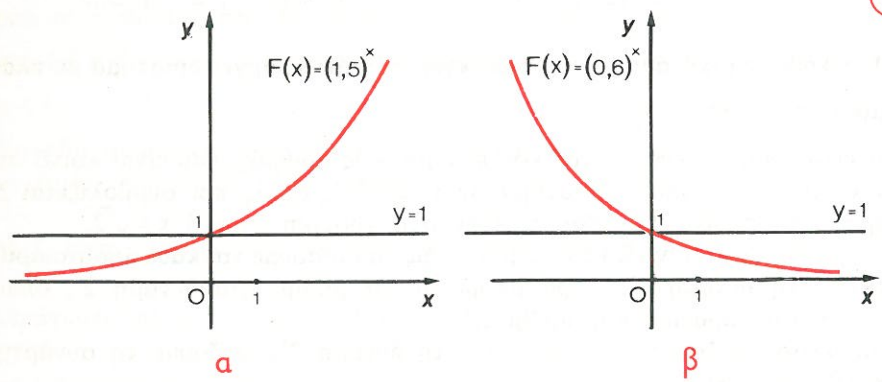
(1) Η απόδειξη παραλείπεται.

Η συνάρτηση αυτή λέγεται **εκθετική συνάρτηση με βάση α**. Πρόκειται για μια επέκταση στο $\mathbb{R}$ της συνάρτησης $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}_+^*$ που εξετάσαμε στην §5.2.
Αποδεικνύεται(1) ότι τις ιδιότητες της f_α που είδαμε στην §5.2 έχει επίσης και η F. Έτσι:

- Επειδή $F(0) = \alpha^0 = 1$, η γραφική παράσταση της F τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο A(0,1) (σχ. 2).

- Αν $\alpha > 1$, η F είναι γνησίως αύξουσα (σχ. 2α).
  Οι τιμές της F στο $\mathbb{R}_+^*$ είναι μεγαλύτερες από το 1, ενώ οι τιμές της στο $\mathbb{R}_-^*$ είναι μικρότερες από το 1.
  Δηλαδή η γραφική της παράσταση για $x > 0$ βρίσκεται «πάνω» από την ευθεία $y = 1$ και καθώς το x αυξάνει, απομακρύνεται απ' αυτή.
  Για $x < 0$ η γραφική παράσταση της F βρίσκεται «κάτω» από την ευθεία $y = 1$ και καθώς το x μικραίνει πλησιάζει όλο και περισσότερο τον άξονα x΄x.

2



- Αν $\alpha < 1$, η F είναι γνησίως φθίνουσα (σχ. 2β).
  Τώρα οι τιμές της F είναι μικρότερες από το 1 στο $\mathbb{R}_+^*$ και μεγαλύτερες από το 1 στο $\mathbb{R}_-^*$. Τα αντίστοιχα συμπεράσματα για τη γραφική της παράσταση διατυπώνονται όπως προηγουμένως.

Ασκήσεις 5, 6, 7

(1) Η απόδειξη παραλείπεται.

Άλλες ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης

5.5 Είδαμε ότι η εκθετική συνάρτηση με βάση $\alpha \neq 1$ είναι σε κάθε περίπτωση γνησίως μονότονη.
Μπορούμε να αποδείξουμε ότι **κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση f είναι «1-1».**
Πράγματι, έστω $x_1 \neq x_2$ δύο σημεία του πεδίου ορισμού της. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_1 < x_2$.
Τότε θα είναι $f(x_1) < f(x_2)$, αν η f είναι γνησίως αύξουσα, ή $f(x_1) > f(x_2)$, αν η f είναι γνησίως φθίνουσα. Δηλαδή σε κάθε περίπτωση είναι $f(x_1) \neq f(x_2)$, που σημαίνει ότι η f είναι συνάρτηση «1-1».
Επομένως

η εκθετική συνάρτηση είναι «1-1»

Αποδεικνύεται(1) ακόμη ότι για κάθε $y > 0$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\alpha^x = y$.
Δηλαδή

η εκθετική συνάρτηση είναι «επί»

Ώστε **η εκθετική συνάρτηση είναι «1-1 και επί»**

Έστω $\alpha > 1$. Αν δοθεί ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός $M > 0$ (οσοδήποτε μεγάλος), τότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\alpha^{x_0} = M$ και συνεπώς για κάθε $x > x_0$ θα είναι $\alpha^x > M$. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή της F γίνεται «όσο θέλουμε» μεγάλη, αρκεί το x να πάρει τιμές αρκετά μεγάλες. Δηλαδή

η F(x) τείνει στο $+\infty$, όταν το x τείνει στο $+\infty$

Επίσης, αν δοθεί οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός $\varepsilon > 0$ (οσοδήποτε μικρός) υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\alpha^{x_1} = \varepsilon$. Επομένως για κάθε $x < x_1$ θα είναι $\alpha^x < \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή της F πλησιάζει «όσο θέλουμε» στο 0, αρκεί το x να πάρει τιμές αρκετά μικρές. Δηλαδή

η F(x) τείνει στο 0, όταν το x τείνει στο $-\infty$

Απ' αυτό συμπεραίνουμε ότι ο άξονας x΄x είναι *ασύμπτωτος* της γραφικής παράστασης της F.

(1) Η απόδειξη παραλείπεται.

Αν είναι $\alpha < 1$, με ανάλογους συλλογισμούς συμπεραίνουμε ότι

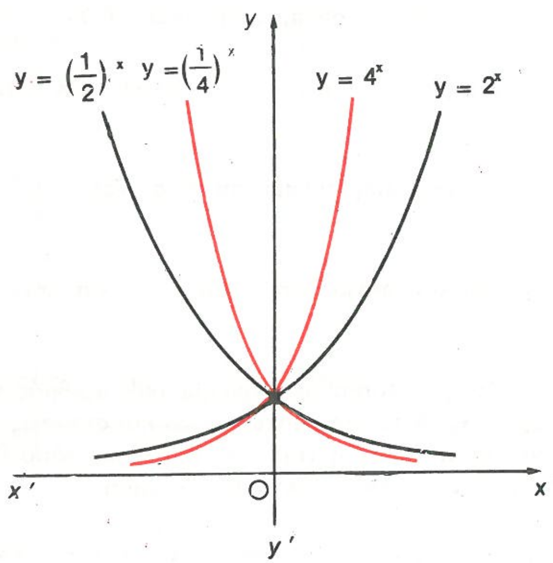
η F(x) τείνει στο 0, όταν το x τείνει στο $+\infty$

η F(x) τείνει στο $+\infty$, *όταν το x τείνει στο* $-\infty$

Οι παραπάνω ιδιότητες «ερμηνεύονται» στο σχήμα 3, στο οποίο έχουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x,\ \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ 2^x,\ 4^x$$

3



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να λυθούν στο $\mathbb{R}$ οι εκθετικές[1] εξισώσεις: i) $8^x = 0,5$ ii) $4^x - 112 = 9 \cdot 2^x$

i) Η εξίσωση γράφεται $(2^3)^x = \frac{1}{2}$ ή $2^{3x} = 2^{-1}$. Συνεπώς, επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι 1-1, είναι

$$3x = -1 \text{ ή } x = -\frac{1}{3}$$

ii) Η εξίσωση γράφεται $(2^2)^x - 112 = 9 \cdot 2^x$ ή $(2^x)^2 - 9 \cdot 2^x - 112 = 0$
Αν θέσουμε $2^x = \omega$, προκύπτει η εξίσωση $\omega^2 - 9\omega - 112 = 0$, με $\omega > 0$.

(1) Μια εξίσωση χαρακτηρίζεται ως «εκθετική», όταν εμφανίζεται σ' αυτή δύναμη με εκθέτη παράσταση που περιέχει τον άγνωστο.

Από την εξίσωση αυτή βρίσκουμε $\omega = 16$ ή $\omega = -7$
Η ρίζα $\omega = -7$ απορρίπτεται, ενώ από την $\omega = 16$ έχουμε $2^x = 16$ ή $2^x = 2^4$. Άρα $x = 4$.

2. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 3^{x+1} + 5^y = 106 \\ 3^x + 5^{y+1} = 152 \end{cases}$

Το σύστημα γράφεται $\begin{cases} 3 \cdot 3^x + 5^y = 106 \\ 3^x + 5 \cdot 5^y = 152 \end{cases}$

Αν θέσουμε $3^x = \omega$ και $5^y = \varphi$ προκύπτει το σύστημα $\begin{cases} 3\omega + \varphi = 106 \\ \omega + 5\varphi = 152 \end{cases}$

Από τη λύση του συστήματος αυτού βρίσκουμε $\omega = 27$ και $\varphi = 25$. Έχουμε λοιπόν

$$3^x = 27 = 3^3 \quad \text{και} \quad 5^y = 25 = 5^2,$$

απ' όπου βρίσκουμε $x = 3$ και $y = 2$.

Ασκήσεις 8, 9, 10, 11, 12, 13.

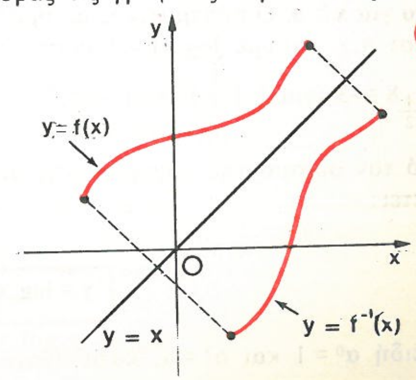
ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Αντίστροφες συναρτήσεις

5.6 Είναι γνωστό ότι, όταν μια συνάρτηση $f: A \to B$ είναι συνάρτηση «1-1 και επί», τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: B \to A$, που είναι και αυτή «1-1 και επί».

Αν θεωρήσουμε στο ίδιο σύστημα αναφοράς τις γραφικές παραστάσεις C και C' δύο αντίστροφων συναρτήσεων f και f^{-1} (σχ. 4), οι C και C' είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της γωνίας xOy. Αυτό συμβαίνει γιατί σε κάθε σημείο $M(\alpha,\beta)$ της C αντιστοιχίζεται το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ της C', και, όπως ξέρουμε, δύο «ανάστροφα» ζεύγη (α,β) και (β,α) ορίζουν σημεία συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της $\widehat{xOy}$.

4



Για τις αντίστροφες συναρτήσεις θα αποδείξουμε και το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν μια συνάρτηση $f:A \to B$ είναι «επί» και γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα), τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: B \to A$, που είναι επίσης γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα).**

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Τότε (§5.5) είναι συνάρτηση «1-1 και επί», οπότε ορίζεται η αντίστροφή της f^{-1}.
Ας υποθέσουμε ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως αύξουσα. Τότε θα υπάρχουν τιμές $y_1 = f(x_1)$ και $y_2 = f(x_2)$ τέτοιες, ώστε

$$y_1 < y_2 \quad \text{και} \quad f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$$

Είναι όμως $f^{-1}(y_1) = x_1$ και $f^{-1}(y_2) = x_2$, οπότε, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, θα έχουμε διαδοχικά:

$$x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow y_1 \geq y_2, \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε το θεώρημα και όταν η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Λογαριθμική συνάρτηση

5.7 Έστω πάλι η εκθετική συνάρτηση $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ με $F(x) = \alpha^x$ $(\alpha > 0)$. Όπως είδαμε στην §5.5 η F είναι συνάρτηση «1-1 και επί» και γνησίως μονότονη, οπότε ορίζεται και η αντίστροφη συνάρτηση F^{-1}, που είναι και αυτή γνησίως μονότονη· αύξουσα, αν $\alpha > 1$ καί φθίνουσα, αν $\alpha < 1$. Η F^{-1} λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση α** και συμβολίζεται **$\log_\alpha$**.
Επειδή το πεδίο ορισμού της $\log_\alpha$ είναι το $\mathbb{R}_+^*$, το σύμβολο $\log_\alpha x$ **έχει έννοια μόνο για $x > 0$.** Ο πραγματικός αριθμός $\log_\alpha x$ λέγεται **λογάριθμος του x με βάση α.**
Έτσι π.χ. έχουμε $\log_3 81 = 4$ (γιατί $3^4 = 81$), $\log_5 125 = 3$ (γιατί $5^3 = 125$), $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$ (γιατί $(\frac{1}{2})^{-3} = 8$) κτλ.

Από τον ορισμό της λογαριθμικής συνάρτησης, αν $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ και $x > 0$, προκύπτει:

$$\boxed{y = \log_\alpha x \Leftrightarrow \alpha^y = x}$$

Επειδή $\alpha^0 = 1$ και $\alpha^1 = \alpha$, καταλαβαίνουμε ότι για κάθε βάση α θα είναι

$$\boxed{\log_\alpha 1 = 0 \quad \text{και} \quad \log_\alpha \alpha = 1}$$

Επίσης, αν στη σχέση $\alpha^y = x$ αντικαταστήσουμε το y με το ίσο του $\log_\alpha x$, έχουμε

$$\boxed{\alpha^{\log_\alpha x} = x} \qquad (2)$$

Ιδιότητες των λογαρίθμων

5.8 Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της εκθετικής συνάρτησης (§5.2) και της ισότητας 2 της προηγούμενης παραγράφου, θα αποδείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης.

1. $\log_\alpha(x_1 x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$ $\qquad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*)$
2. $\log_\alpha(x_1 : x_2) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$
3. $\log_\alpha x^k = k\log_\alpha x$ $\qquad (x \in \mathbb{R}_+^*, \ k \in \mathbb{R})$
4. **Αν είναι $\alpha > 1$, τότε** $\begin{cases} \log_\alpha x > 0, \text{ αν } x > 1 \\ \log_\alpha x < 0, \text{ αν } x < 1 \end{cases}$

   Αν είναι $\alpha < 1$, τότε $\begin{cases} \log_\alpha x < 0, \text{ αν } x > 1 \\ \log_\alpha x > 0, \text{ αν } x < 1 \end{cases}$

Απόδειξη. Έχουμε:

1. $\alpha^{\log_\alpha(x_1x_2)} = x_1x_2 = \alpha^{\log_\alpha x_1} \cdot \alpha^{\log_\alpha x_2} = \alpha^{\log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2}$
   και επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι 1-1 θα είναι

$$\log_\alpha(x_1x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$$

2. $\alpha^{\log_\alpha(x_1:x_2)} = x_1 : x_2 = \alpha^{\log_\alpha x_1} : \alpha^{\log_\alpha x_2} = \alpha^{\log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2}$, οπότε

$$\log_\alpha(x_1 : x_2) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$$

3. $\alpha^{\log_\alpha x^k} = x^k = (\alpha^{\log_\alpha x})^k = \alpha^{k\log_\alpha x}$. Άρα

$$\log_\alpha x^k = k\log_\alpha x$$

4. Έστω π.χ. ότι είναι $\alpha > 1$ και $x < 1$. Τότε, σύμφωνα με την ιδιότητα 5 της §5.2 και το θεώρημα της §5.6, η συνάρτηση $\log_\alpha$ είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως, αφού είναι $x<1$ θα είναι $\log_\alpha x < \log_\alpha 1$ ή $\log_\alpha x < 0$.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται η ιδιότητα και στις άλλες περιπτώσεις.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η (3) για $k = \frac{1}{\nu}$ $(\nu \in \mathbb{N}^*)$ γράφεται

$$\boxed{\log_\alpha \sqrt[\nu]{x} = \frac{1}{\nu} \log_\alpha x}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Θα υπολογίσουμε το άθροισμα $A = 3\log_3 2 + 2\log_3 6 - \log_3 32$.

Είναι: $A = \log_3 2^3 + \log_3 6^2 - \log_3 32 = \log_3 8 + \log_3 36 - \log_3 32$

$$= \log_3 \frac{8\cdot 36}{32} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

2. Θα βρούμε την τιμή της παράστασης $B = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}$.

Έχουμε: $B = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}} - \log_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$

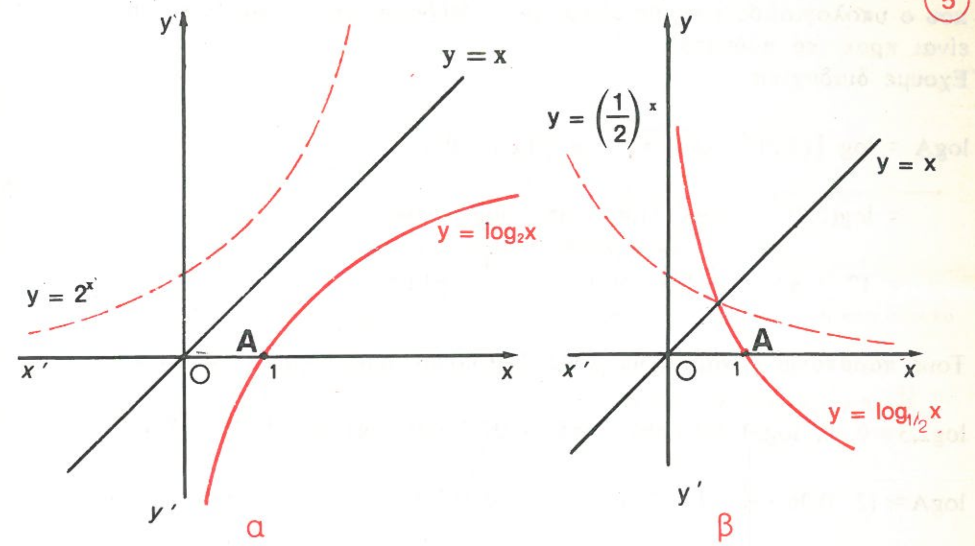
$$= \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} - \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3} = 1 - 1 = 0$$

Ασκήσεις 14, 15, 16, 17, 18, 19

Γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης

5.9 Αφού η συνάρτηση $\log_\alpha$ είναι η αντίστροφη της εκθετικής F, με $F(x) = \alpha^x$, η γραφική της παράσταση $\mathcal{C}'$ θα είναι (§5.6) συμμετρική της γραφικής παράστασης $\mathcal{C}$ της F ως προς άξονα συμμετρίας τη διχοτόμο ε της xOy. Επομένως η γραφική παράσταση της $\log_\alpha$ προκύπτει αμέσως, αν βρούμε τα συμμετρικά των σημείων της $\mathcal{C}$ ως προς την ε. Η εργασία αυτή φαίνεται στο σχήμα 5.

5



Αφού οι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της $\widehat{xOy}$, τότε:

- Η γραφική παράσταση της $\log_\alpha$ τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο A(1,0).

- Για $\alpha > 1$: *ο $\log_\alpha x$ τείνει στο $+\infty$, όταν το x τείνει στο $+\infty$*
  ο $\log_\alpha x$ τείνει στο $-\infty$, όταν το x τείνει στο 0

- Για $\alpha < 1$: *ο $\log_\alpha x$ τείνει στο $-\infty$, όταν το x τείνει στο $+\infty$*
  ο $\log_\alpha x$ τείνει στο $+\infty$, όταν το x τείνει στο 0

Σε κάθε περίπτωση ο άξονας y΄y είναι ασύμπτωτος της $\mathcal{C}'$.

Δεκαδικοί λογάριθμοι

5.10 Αν θεωρήσουμε τη λογαριθμική συνάρτηση με βάση το 10, ο αριθμός $\log_{10}x$ $(x>0)$ λέγεται **δεκαδικός λογάριθμος** του x και συμβολίζεται απλά **logx**. Έτσι π.χ. είναι $\log 100 = 2$ (γιατί $10^2 = 100$), $\log 0{,}001 = -3$ (γιατί $10^{-3} = 0{,}001$) κτλ.

Με τη βοήθεια πινάκων(1) που δίνουν τους λογάριθμους των θετικών αριθμών μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή αριθμητικών παραστάσεων, όπως π.χ. της

$$A = \frac{(2{,}3)^{12} \cdot \sqrt[7]{31{,}4}}{5{,}3\sqrt[5]{1{,}04}} \qquad (1)$$

που ο υπολογισμός τους με άλλο τρόπο (εύρεση των δυνάμεων και των ριζών) είναι πρακτικά αδύνατος.

Έχουμε διαδοχικά

$$\log A = \log\left[(2{,}3)^{12} \cdot \sqrt[7]{31{,}4}\right] - \log\left[5{,}3\sqrt[5]{1{,}04}\right]$$

$$= \log(2{,}3)^{12} + \log\sqrt[7]{31{,}4} - \log 5{,}3 - \log\sqrt[5]{1{,}04}$$

$$= 12 \cdot \log 2{,}3 + \frac{1}{7}\log 31{,}4 - \log 5{,}3 - \frac{1}{5}\log 1{,}04$$

Τους παραπάνω λογαρίθμους τους βρίσκουμε από πίνακες και είναι:

$\log 2{,}3 \simeq 0{,}36$, $\log 31{,}4 \simeq 1{,}497$, $\log 5{,}3 \simeq 0{,}72$ και $\log 1{,}04 \simeq 0{,}017$. Άρα

$$\log A \simeq 12 \cdot 0{,}36 + \frac{1}{7} \cdot 1{,}497 - 0{,}72 - \frac{1}{5} \cdot 0{,}017 \simeq 3{,}81$$

Από τους ίδιους πίνακες βρίσκουμε ότι $3{,}81 \simeq \log 6456{,}54$. Συνεπώς $A \simeq 6456{,}54$.

Φυσικοί λογάριθμοι

5.11 Έστω η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = (1 + \frac{1}{\nu})^\nu$. Αποδεικνύεται(2) ότι η (α_ν) έχει όριο έναν άρρητο αριθμό, ο οποίος συμβολίζεται διεθνώς με **e**. Δηλαδή

$$\lim(1+\frac{1}{\nu})^\nu = e$$

Μια δεκαδική προσέγγιση του e είναι

$$e \simeq 2{,}718281$$

Η συνάρτηση f με $f(x) = e^x$ λέγεται απλά **εκθετική συνάρτηση** (χωρίς να αναφέρεται η βάση e) και η αντίστροφή της λογαριθμική συμβολίζεται **ln** (αντί $\log_e$)

(1) Υπάρχουν πίνακες που δίνουν τους δεκαδικούς λογάριθμους των θετικών αριθμών, με προσέγγιση 5 ή 7 δεκαδικών ψηφίων. Όμως, με την εξάπλωση των μικροϋπολογιστών, η χρήση των πινάκων αυτών περιορίζεται μέρα με τη μέρα.

(2) Η απόδειξη θα γίνει στη Γ΄ τάξη.

Ο αριθμός lnx λέγεται **φυσικός (ή νεπέριος) λογάριθμος** του x. Έτσι έχουμε

$$\boxed{e^x = y \Leftrightarrow \ln y = x}$$

Από τον ορισμό του φυσικού λογάριθμου προκύπτει ότι $\alpha = e^{\ln\alpha}$

οπότε έχουμε $\alpha^x = (e^{\ln\alpha})^x$ ή

$$\boxed{\alpha^x = e^{x\ln\alpha}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να λυθεί η λογαριθμική(1) εξίσωση $\log_3(x+5) - \log_3(x-1) = 4$

Πρέπει να είναι $x+5>0$ και $x-1>0$. Επομένως η εξίσωση είναι ορισμένη στο σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R}: x>1\}$

Στο σύνολο A έχουμε, επειδή η λογαριθμική συνάρτηση είναι «1-1».

$$\log_3(x+5) - \log_3(x-1) = 4 \Leftrightarrow \log_3\frac{x+5}{x-1} = \log_3 81 \Leftrightarrow \frac{x+5}{x-1} = 81 \Leftrightarrow x+5 = 81x-81 \Leftrightarrow x = \frac{43}{40}$$

2. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} y^{\log x} = 100 \\ \log(xy) = 3 \end{cases}$

Το σύστημα είναι ορισμένο όταν $x>0$ και $y>0$. Τότε έχουμε:

$$\begin{cases} y^{\log x} = 100 \\ \log(xy) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log(y^{\log x}) = \log 100 \\ \log(xy) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x \cdot \log y = 2 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases} \qquad (I)$$

Επομένως οι αριθμοί logx και logy είναι ρίζες της εξίσωσης $\omega^2 - 3\omega + 2 = 0$, με $\omega \in \mathbb{R}$. Ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι οι $\omega_1 = 1$ και $\omega_2 = 2$. Άρα θα είναι:

$$(I) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \log x = 1 \\ \log y = 2 \end{cases} \text{ή } \begin{cases} \log x = 2 \\ \log y = 1 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \log x = \log 10 \\ \log y = \log 100 \end{cases} \text{ή } \begin{cases} \log x = \log 100 \\ \log y = \log 10 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = 10 \\ y = 100 \end{cases} \text{ή } \begin{cases} x = 100 \\ y = 10 \end{cases}\right)$$

3. Αν δίνεται ο λογάριθμος ενός αριθμού $x \in \mathbb{R}_+^*$ με βάση α, να αποδείξετε ότι ο λογάριθμος του x με μια άλλη βάση β βρίσκεται με την ισότητα

$$\log_\beta x = \frac{\log_\alpha x}{\log_\alpha \beta} \qquad (3)$$

Είναι (§5.7) $x = \beta^{\log_\beta x}$. Άρα $\log_\alpha x = \log_\beta x \cdot \log_\alpha \beta$ και συνεπώς $\log_\beta x = \dfrac{\log_\alpha x}{\log_\alpha \beta}$

Ασκήσεις 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28

(1) Μια εξίσωση χαρακτηρίζεται ως «λογαριθμική», όταν εμφανίζεται σ' αυτή λογάριθμος παράστασης η οποία περιέχει τον άγνωστο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f_2, f_3, f_5 με
$f_2(x) = 2^x$, $f_3(x) = 3^x$, $f_5(x) = 5^x$ και $x \in \mathbb{Q}$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $f_3(\frac{1}{2})f_3(\frac{3}{2}) = 9$ (ii) $\left[f_5(\frac{1}{3})\right]^9 = 125$ (iii) $f_2(4)f_3(4) = 1296$

2. Έστω η συνάρτηση f_α με $f_\alpha(x) = \alpha^x$, $x \in \mathbb{Q}$. Να υπολογίσετε το α ώστε να είναι:

(i) $f_\alpha(1)f_\alpha(3) = 81$ (ii) $\left[f_\alpha(\frac{1}{5})\right]^{20} = 16$ (iii) $f_\alpha(3,5):f_\alpha(1,5) = 169$

3. Αν για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ $\alpha \neq 1$, ορίσουμε τη συνάρτηση f_α με $f_\alpha = \alpha^x (x \in \mathbb{Q})$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

(i) $f_{\frac{1}{2}}(7)$ και $f_{\frac{1}{2}}(-7)$ (ii) $f_5(-\frac{3}{5})$ και $f_5(0,7)$ (iii) $f_3(2)$ και $f_4(2)$

(iv) $f_{\frac{1}{2}}(5)$ και $f_{\frac{1}{3}}(5)$ (v) $f_4(-3)$ και $f_6(-3)$ (vi) $f_{\frac{1}{4}}(-\frac{1}{3})$ και $f_{\frac{1}{5}}(-\frac{1}{3})$

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = (\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1})^x$, $x \in \mathbb{Q}$. Για ποιές τιμές του α η f είναι γνησίως αύξουσα.

5. Να βρείτε το «ευρύτερο» υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = (x + \frac{1}{x})^x$$

6. Έστω η συνάρτηση F με $F(x) = \alpha^x$, $x \in \mathbb{R}$. Αν οι $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι οι αντίστοιχες τιμές της F είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

7. (i) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση F με

$$F(x) = (\frac{\alpha - 2}{\alpha + 1})^x$$

(ii) Για ποιές τιμές του α η F είναι γνησίως φθίνουσα;

8. Να κάνετε στο ίδιο σύστημα αναφοράς τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων F_1 και F_2 με

$$F_1(x) = 5^x \quad \text{και} \quad F_2(x) = (\frac{1}{5})^x.$$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $(\frac{3}{5})^{2x-1} = (\frac{5}{3})^{x+6}$ (ii) $(\sqrt{3}+1)^{x^4 - 5x^2 + 4} = 1$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις:

(i) $2^{x+3} - 2^{x+2} + 2^{x+1} = 48$ (ii) $2 \cdot 9^x - 3^{x+1} - 135 = 0$

11. Να λυθούν οι εξισώσεις:

(i) $5^{x^2+1} + 25^{x^2} = 6$ (ii) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

12. Να λυθούν τα συστήματα:

(i) $\begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x+9} \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 5^x - 4^{y+1} = 9 \\ 5^{x-1} + 4^{y+2} = 69 \end{cases}$

13. Να λύσετε τα συστήματα:

(i) $\begin{cases} 3^{2x-y} = 27 \\ 5^{5x-4y} = 1 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 2^x \cdot 4^{x+2y} = 1024 \\ 5^{x-3y-1} = \frac{1}{25} \end{cases}$

14. Αν $x > 0$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

(i) $\log_5 3$ και $\log_5 \frac{1}{3}$ (ii) $\log_{\frac{1}{2}} 7$ και $\log_{\frac{1}{2}} 11$

(iii) $\log_{1,5}(x+1)$ και $\log_{1,5}(x+1)^2$ (iv) $\log_{0,3}(x+2)$ και $\log_{0,3}(2x+3)$

15. Να υπολογίσετε το x ώστε να αληθεύουν οι ισότητες:

(i) $\log_x 81 = -4$ (ii) $\log_x 27 = \frac{3}{2}$ (iii) $\log_x \frac{1}{27} = -\frac{3}{5}$

16. Να αποδείξετε ότι αληθεύουν οι ισότητες:

(i) $3\log_3 2 + \frac{1}{2}\log_3 16 = 5\log_3 2$ (ii) $2 + 3\log_5 2 - 2\log_5 10 = \log_5 2$

17. Αν $x,y > 0$ και $x^2 + y^2 = 7xy$, να αποδείξετε ότι

$$\log_\alpha \frac{x+y}{3} = \frac{1}{2}(\log_\alpha x + \log_\alpha y)$$

18. (i) Να βρείτε το «ευρύτερο» υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \log_\alpha (\frac{1 - x}{1 + x})$$

(ii) Να αποδείξετε ότι

$$f(x_1) + f(x_2) = f(\frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2})$$

19. Να κάνετε, στο ίδιο σύτημα αναφοράς, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεών f_1 και f_2 με

$$f_1(x) = \log_5 x \quad \text{και} \quad f_2(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$$

20. Να αποδείξετε ότι αληθεύουν οι ισότητες:

(i) $\dfrac{\log\sqrt{125} + \log\sqrt{27} - \log\sqrt{8}}{\log 15 - \log 2} = \dfrac{3}{2}$ (ii) $2\log\dfrac{5}{2} + \log\dfrac{3}{11} - \log\dfrac{40}{77} - \log\dfrac{105}{32} = 0$

21. Αν $\log 2 \simeq 0{,}3$ και $\log 3 \simeq 0{,}48$, να βρείτε το λογάριθμο των αριθμών 5, 6, 8, 50, $\sqrt[3]{24}$

22. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \dfrac{5^{13}\cdot\sqrt[3]{3}}{2^{25}\cdot\sqrt[4]{15}}$

αν $\log 5 \simeq 0{,}7$, $\log 3 \simeq 0{,}48$ και $\log 23{,}64 \simeq 1{,}374$

23. Να λύσετε την εξίσωση $5^{3x-1} = 2^{x+3}$ (Είναι $\log 5 \simeq 0{,}7$ και $\log 2 \simeq 0{,}3$)

24. Να λυθούν οι εξισώσεις:

(i) $\log(x-6) + \log(x-7) = 1 - \log 5$ (ii) $\log_2(3^{2x-2} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

25. Να λυθούν οι εξισώσεις:

(i) $\log(x-9) + 2\log\sqrt{2x-1} = 2$ (ii) $x + \log(1 + 2^x) = x\log 5 + \log 6$

26. Να λύσετε τα συστήματα

(i) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x^3 - \log y^4 = 2 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 2 \\ 2x + 7y = 57 \end{cases}$

27. Αν $\alpha,\beta > 0$ και $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\log_\alpha x}{\log_\alpha y} = \dfrac{\log_\beta x}{\log_\beta y}$

28. (i) Αν $\alpha,\beta > 0$ καί $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$, να αποδείξετε ότι: $\log_\beta \alpha = \dfrac{1}{\log_\alpha \beta}$

(ii) Αν $\log_3 2 = \alpha$, να υπολογίσετε τον $\log_8 12$

(iii) Να υπολογίσετε τον $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[3]{3}$

6 ΤΟΠΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Με τον όρο «τοπική μελέτη» μιας συνάρτησης εννοούμε τη μελέτη της συμπεριφοράς της «γύρω» από ένα σημείο, στο οποίο η συνάρτηση μπορεί να μην ορίζεται. Στο κεφάλαιο αυτό, που αποτελεί μια συνοπτική εισαγωγή στις βασικές έννοιες της Ανάλυσης, περιοριζόμαστε φυσικά σε απλές περιπτώσεις (οι παραπάνω έννοιες θα μελετηθούν συστηματικά και εκτενέστερα στην επόμενη τάξη).

Ένα πρώτο βήμα για την τοπική μελέτη μιας συνάρτησης είναι η εξέταση αν οι τιμές της συσσωρεύονται ή όχι γύρω από έναν αριθμό, όταν η μεταβλητή διατρέχει μια «γειτονιά του x_0». Έτσι οδηγούμαστε στην απλή περίπτωση του πεπερασμένου ορίου σ' ένα σημείο x_0. Στην τάξη αυτή ο ορισμός δίνεται για σημείο «εσωτερικό» του πεδίου ορισμού της συνάρτησης, ενώ παρουσιάζονται συνοπτικά τα θεωρήματα που αφορούν τις πράξεις με όρια.

Εξάλλου η σύγκριση του ορίου μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο του πεδίου ορισμού της με την τιμή της στο σημείο αυτό, οδηγεί στην έννοια της συνέχειας και στη διαπίστωση, με βάση τα θεωρήματα των ορίων που προηγήθηκαν, ότι οι γνωστές μας βασικές συναρτήσεις είναι όλες συνεχείς.

Τέλος η έννοια της παραγώγου μιας συνάρτησης επιτρέπει να μελετηθεί ακριβέστερα η συμπεριφορά της συνάρτησης. Εδώ δίνονται ο ορισμός και οι βασικότεροι κανόνες παραγώγισης, που οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι συνήθεις συναρτήσεις είναι όχι μόνο συνεχείς, αλλά ειδικότερα παραγωγίσιμες. Στο τέλος του κεφαλαίου διατυπώνονται ορισμένα θεωρήματα, τα περισσότερα χωρίς απόδειξη, χρήσιμα για την πληρέστερη μελέτη μιας συνάρτησης, με την οποία κλείνει το κεφάλαιο.

Με τα παραπάνω ολοκληρώνεται ο κύκλος της μαθηματικής ύλης για τη γενική μόρφωση του μαθητή και συγχρόνως διασφαλίζεται η κατάλληλη υποδομή για την ανετότερη παρουσίαση και επέκταση των γνώσεων αυτών στην επόμενη τάξη.

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ x_0

Εισαγωγή

6.1 Η παραγωγή ενός εργοστασίου σε κανονική ημερήσια λειτουργία μπορεί να φθάσει τους 15 τόννους. Το κέρδος από τη διάθεση x τόννων του προϊόντος είναι (σε χιλιάδες δραχμές)

$$K(x) = 2x - 5 \qquad (0 < x \leqslant 15)$$

Αν η ζήτηση υπερβεί τους 15 τόννους, το εργοστάσιο λειτουργεί και τη νύχτα και η παραγωγή μπορεί να φθάσει τους 30 τόννους. Επειδή κατά τη νυχτερινή λειτουργία τα γενικά έξοδα αυξάνουν, το κέρδος από τη διάθεση $x > 15$ τόννων είναι τώρα:

$$K(x) = 2x - 9 \qquad (15 < x \leqslant 30)$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση-κέρδος K ορίζεται για κάθε $x \in (0,30]$. Η γραφική της παράσταση αποτελείται από δύο τμήματα των παράλληλων ευθειών

$$y = 2x - 5, \; y = 2x - 9$$

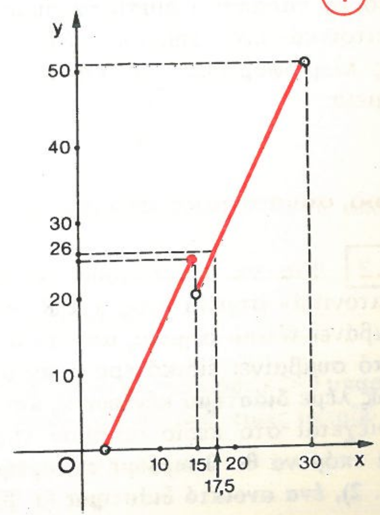
και διακόπτεται στο $x = 15$.

Είναι:

$$K(15) = 25$$

Το κέρδος από την παραγωγή και διάθεση μιας ποσότητας *γύρω στους 15* τόννους δεν είναι πάντοτε «κοντά» στον αριθμό K(15), όπως φαίνεται από τον πίνακα.

1



x	14	14,5	14,8	14,9	15	15,1	15,5	16	17	18	...
K(x)	23	24	24,6	24,8	25	21,2	22	23	25	27	...

Έτσι για παραγγελία μεταξύ 15 και 17 τον. δε συμφέρει η υπερωριακή λειτουργία του εργοστασίου.

Ας δούμε τώρα πως διαμορφώνονται οι τιμές της K σε σημεία «γειτονικά» ε ώς $x \neq 15$, π.χ. του $x_o = 17{,}5$. Ως τέτοια σημεία θεωρούμε εκείνα που ανήκουν σ' ένα διάστημα της μορφής $(17{,}5-\delta,\ 17{,}5+\delta)$. Εκλέγουμε το δ έτσι ώστε $17{,}5-\delta > 15$, δηλαδή $\delta < 2{,}5$ και έχουμε:

$$17{,}5-\delta < x < 17{,}5+\delta \Leftrightarrow 35-2\delta < 2x < 35+2\delta$$
$$\Leftrightarrow 26-2\delta < 2x-9 < 26+2\delta$$
$$\Leftrightarrow -2\delta < K(x)-26 < 2\delta$$
$$\Leftrightarrow -2\delta < |K(x)-26| < 2\delta$$

Δηλαδή όσο πιο μικρό δ εκλέξουμε, που σημαίνει όσο πιο «κοντά» στο 17,5 πάρουμε τα x, τόσο πιο «κοντά» στο 26 συσσωρεύονται οι αντίστοιχες τιμές της K. Αυτή η συσσώρευση των τιμών της K γύρω από ένα αριθμό, είναι φαινόμενο ανάλογο με τη συσσώρευση των τιμών μιας ακολουθίας (α_ν) με όριο l γύρω από τον αριθμό l.

Γι' αυτό λέμε ότι το 26 είναι *όριο* της συνάρτησης K στο $x_o = 17{,}5$.

Αντίθετα, δε μπορούμε να μιλήσουμε για όριο της K στο 15, αφού, όπως φαίνεται από τον προηγούμενο πίνακα, δεν έχουμε το ίδιο φαινόμενο με τις τιμές της K στη «γειτονιά» του 15.

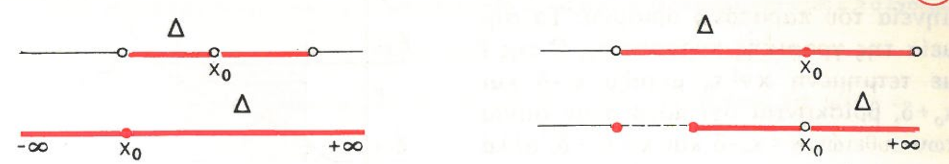
Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι αν μία συνάρτηση f ορίζεται σε σημεία «γειτονικά» ενός σημείου $x_o \in \mathbb{R}$, η τιμή της $f(x_o)$, **αν** υπάρχει, δεν επαρκεί για να μας πληροφορήσει σχετικά με τη συμπεριφορά της συνάρτησης σ' αυτά τα σημεία.

Όριο συνάρτησης στο x_o

6.2 Για να μελετήσουμε γενικά τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης f σε «γειτονικά» σημεία ενός $x_o \in \mathbb{R}$, πρέπει φυσικά το πεδίο ορισμού της να περιλαμβάνει τέτοια σημεία, άσχετα αν στο ίδιο το x_o ορίζεται ή όχι η συνάρτηση. Αυτό συμβαίνει ειδικότερα όταν υπάρχει διάστημα της μορφής $(x_o-\rho,\ x_o+\rho)$, ή όπως λέμε **διάστημα κέντρου x_o και ακτίνας ρ**, το οποίο, με εξαίρεση ίσως του x_o, περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f.

Στα επόμενα θα **θεωρούμε συναρτήσεις των οποίων το πεδίο ορισμού Α περιέχει (σχ. 2), ένα ανοικτό διάστημα (α, β), εκτός ίσως του $x_o \in (\alpha, \beta)$**, δηλαδή συναρτήσεις ορισμένες τουλάχιστο σ' ένα σύνολο $(\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta)$.

2



Έτσι για κάθε θετικό αριθμό[1] $\rho < \min\{x_o-\alpha,\ \beta-x_o\}$, το διάστημα $(x_o-\rho,\ x_o+\rho)$, με εξαίρεση του x_o, (μ' άλλα λόγια μια «γειτονιά» του x_o), περιέχεται οπωσδήποτε στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Ύστερα από τα παραπάνω δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ **Έστω $x_o \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση f ορισμένη τουλάχιστο σ' ένα σύνολο $(\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta)$. Θα λέμε ότι** *η f έχει στο x_o όριο τον πραγματικό αριθμό l*, **όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει η συνεπαγωγή**

$$0 < |x-x_o| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι τα σημεία x που επαληθεύουν τη σχέση

$$0 < |x-x_o| < \delta$$

είναι εκείνα για τα οποία:

- $x \neq x_o$, που ισοδυναμεί με $0 < |x-x_o|$, και
- $|x-x_o| < \delta$, δηλαδή $x_o-\delta < x < x_o+\delta$ ή $x \in (x_o-\delta,\ x_o+\delta)$

Δηλαδή όλα τα σημεία του διαστήματος κέντρου x_o και ακτίνας δ, εκτός από το x_o.

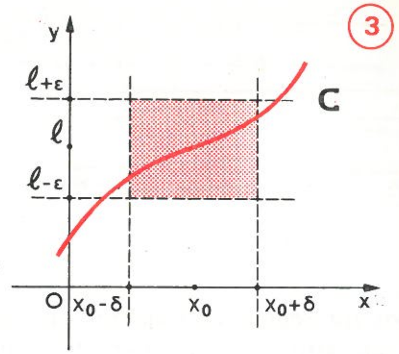
Επίσης είναι:

$$|f(x)-l| < \varepsilon \Leftrightarrow l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$$

Συνεπώς η συνάρτηση f έχει στο x_o όριο l, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διάστημα κέντρου x_o, σε όλα τα σημεία του οποίου η f παίρνει τιμές μεταξύ $l-\varepsilon$ και $l+\varepsilon$.

(1) min: αρχικά της λέξης minimum = ελάχιστο.

Στο σχήμα 3 δίνεται η γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω ορισμού. Τα σημεία της γραφικής παράστασης C της f με τετμημένη $x \neq x_o$ μεταξύ $x_o - \delta$ και $x_o + \delta$, βρίσκονται όχι μόνο στην ταινία των ευθειών $x = x_o - \delta$ και $x = x_o + \delta$, αλλά και στην ταινία των ευθειών $y = l - \varepsilon$ και $y = l + \varepsilon$. Δηλαδή βρίσκονται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι δύο αυτές ταινίες. Και αυτό συμβαίνει για κάθε $\varepsilon > 0$, οσοδήποτε μικρό.



Αποδεικνύεται[1] ότι: **Αν μια συνάρτηση f έχει το x_o όριο τον πραγματικό αριθμό l, τότε αυτός είναι μοναδικός.**

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_o όριο l, γράφουμε συμβολικά:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = l \qquad \text{ή} \qquad f(x) \underset{x \to x_o}{\longrightarrow} l$$

Ισοδύναμες με την έκφραση: *«η f έχει στο x_o όριο l»* είναι και οι:

«η f(x) τείνει στο l, όταν το x τείνει στο x_o»
«η f(x) έχει όριο l, όταν το x τείνει στο x_o»
«η f(x) συγκλίνει προς τον l, όταν το x τείνει στο x_o»

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Είναι φανερό ότι, αν η συνεπαγωγή (1) του ορισμού ισχύει για ένα συγκεκριμένο $\delta > 0$, θα ισχύει και για κάθε θετικό $\delta' < \delta$.

2. Ειδικά, αν η f έχει στο x_o όριο $l = 0$, τότε η (1) γράφεται:

$$0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

3. Από την προηγούμενη παρατήρηση προκύπτει ότι, αν η f έχει στο x_o όριο l, τότε η συνάρτηση $f(x) - l$, λόγω της (1), θα έχει στο x_o όριο 0 και αντιστρόφως. Δηλαδή είναι:

$$\boxed{\lim_{x \to x_o} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_o}[f(x) - l] = 0}$$

(1) Η απόδειξη θα γίνει στη Γ΄ τάξη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η σταθερή συνάρτηση u με τιμή c έχει στο $x_o \in R$ όριο c. Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε:

$$|u(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

Δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή του παραπάνω ορισμού και συνεπώς $\lim_{x \to x_o} u(x) = c$

2. Η ταυτοτική συνάρτηση ι έχει σε κάθε $x_o \in R$ όριο x_o.
Πράγματι, έστω ένας οποιοσδήποτε $\varepsilon > 0$. Τότε έχουμε:

$$|\iota(x) - x_o| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - x_o| < \varepsilon$$

Έτσι, αν εκλέξουμε ως δ το ε, ή οποιονδήποτε θετικό αριθμό μικρότερό του, θα ισχύει η συνεπαγωγή:

$$0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |\iota(x) - x_o| < \varepsilon$$

Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{x \to x_o} \iota(x) = x_o$

3. Η συνάρτηση f με $f(x) = 3x - 5$ έχει στο $x_o = 2$ όριο 1.
Η f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Έστω ένας οποιοσδήποτε $\varepsilon > 0$. Τότε θα έχουμε:

$$|f(x) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 5 - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 6| < \varepsilon \Leftrightarrow 3|x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Συνεπώς, αν εκλέξουμε ως δ το $\frac{\varepsilon}{3}$ (ή οποιονδήποτε θετικό μικρότερό του) θα ισχύει η συνεπαγωγή:

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{x \to 2}(3x - 5) = 1$

4. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = 3$

Πράγματι, η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R} - \{1\}$

Έστω ένας οποιοσδήποτε $\varepsilon > 0$. Τότε για $x \neq 1$ έχουμε:

$$|f(x) - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} - 3\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2x^2 - x - 1 - 3x + 3}{x - 1}\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{2x^2 - 4x + 2}{x - 1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow 2\left|\frac{(x-1)^2}{x - 1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Έτσι, αν εκλέξουμε ως δ το $\frac{\varepsilon}{2}$ (ή οποιονδήποτε θετικό μικρότερό του), θα ισχύει:

$$0<|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-3|<\varepsilon$$

που σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-x-1}{x-1} = 3.$

Ασκήσεις 1, 2, 3

Όρια και πράξεις

6.3 Η εύρεση του ορίου στο x_o μιας συνάρτησης με βάση μόνο τον ορισμό δεν είναι πάντοτε ευχερής. Διευκολύνεται όμως, όπως θα δούμε παρακάτω, αν η συνάρτηση είναι π.χ. άθροισμα ή γινόμενο δυο συναρτήσεων που έχουν στο ίδιο σημείο x_o γνωστά όρια.

Στα επόμενα, εφόσον μιλάμε για όρια στο x_o, θα θεωρούμε συναρτήσεις ορισμένες τουλάχιστο σ' ένα σύνολο $(\alpha, x_o)\cup(x_o, \beta)$. Μπορούμε να υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι έχουν κοινό πεδίο ορισμού, αφού, όπως προκύπτει από τον ορισμό του ορίου, αν τις περιορίσουμε στο $(\alpha, x_o)\cup(x_o, \beta)$ τα όρια παραμένουν αμετάβλητα.

Έστω ότι μια συνάρτηση είναι π.χ. άθροισμα των συναρτήσεων f και g οι οποίες στο x_o έχουν όρια l και l' αντιστοίχως.

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το όριό της στο x_o είναι $l+l'$.

Πράγματι, για οποιοδήποτε $\varepsilon>0$ θα είναι και $\frac{\varepsilon}{2}>0$.

Επειδή η συνάρτηση f έχει στο x_o όριο l, θα υπάρχει $\delta_1>0$, τέτοιο ώστε να ισχύει η συνεπαγωγή:

$$0<|x-x_o|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι θα υπάρχει $\delta_2>0$, ώστε:

$$0<|x-x_o|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-l'|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

Αν εκλέξουμε ως δ το $\min\{\delta_1, \delta_2\}$ (ή οποιονδήποτε θετικό μικρότερό του), τα δεύτερα μέλη των συνεπαγωγών (3) και (4) θα ισχύουν συγχρόνως για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ με $0<|x-x_o|<\delta$. Τότε όμως θα έχουμε και:

$$|[f(x)+g(x)]-(l+l')|=|[f(x)-l]+[g(x)-l']|\leq|f(x)-l|+|g(x)-l'|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Αυτό σημαίνει ότι:

$$\lim_{x\to x_o}[f(x)+g(x)] = l+l'$$

Δηλαδή:

$$\boxed{\lim_{x\to x_o}(f+g)(x)=\lim_{x\to x_o}f(x)+\lim_{x\to x_o}g(x)} \tag{5}$$

Αποδεικνύεται[1] ακόμη ότι:

$$\lim_{x\to x_o}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to x_o}f(x)\cdot\lim_{x\to x_o}g(x) \tag{6}$$

$$\text{Αν } \lim_{x\to x_o}g(x)\neq 0, \text{ τότε } \lim_{x\to x_o}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to x_o}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_o}g(x)} \tag{7}$$

$$\text{Αν } \lim_{x\to x_o}f(x)\geqslant 0, \text{ τότε } \lim_{x\to x_o}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to x_o}f(x)} \tag{8}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αποδεικνύεται επαγωγικά ότι οι ισότητες (5) και (6) ισχύουν και για οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος συναρτήσεων.

2. Αν η g είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε:

- Από την (5) προκύπτει: $\lim\limits_{x\to x_o}[f(x)+\lambda]=\lim\limits_{x\to x_o}f(x)+\lambda$
- Από την (6) προκύπτει: $\lim\limits_{x\to x_o}[\lambda f(x)]=\lambda\cdot\lim\limits_{x\to x_o}f(x)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2)=3\cdot\lim\limits_{x\to 1}(x^2)=3\cdot\lim\limits_{x\to 1}(x\cdot x)=3\cdot(\lim\limits_{x\to 1}x)(\lim\limits_{x\to 1}x)=3\cdot 1\cdot 1=3$

(1) Η απόδειξη θα γίνει στη Γ' τάξη

και $\lim\limits_{x\to 1}(5x)=5\lim\limits_{x\to 1}x=5$, θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}(3x^2-5x+1)=\lim_{x\to 1}(3x^2)-\lim_{x\to 1}(5x)+1=3-5+1=-1$$

2. Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x-2}=0$

Πράγματι, επειδή $\lim\limits_{x\to -2}(x-2)=(-2)-2=-4\neq 0$, έχουμε:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to -2}(x^2+2x)}{\lim\limits_{x\to -2}(x-2)}=\frac{(-2)^2+2(-2)}{-4}=\frac{0}{-4}=0$$

3. Ομοίως είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{3-x^2}=\sqrt{3}$

Πράγματι, επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(3-x^2)=3-\lim\limits_{x\to 0}x^2=3>0$, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{3-x^2}=\sqrt{\lim_{x\to 0}(3-x^2)}=\sqrt{3}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να δειχτεί ότι για κάθε $k\in\mathbb{N}^*$ είναι $\lim\limits_{x\to x_o}(\alpha x^k)=\alpha x_o^k$

Πράγματι, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_o}\alpha x^k=\alpha\cdot\lim_{x\to x_o}x^k=\alpha\cdot\lim_{x\to x_o}(\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{k\text{ παράγοντες}})=\alpha\cdot\left(\lim_{x\to x_o}x\right)\cdot\left(\lim_{x\to x_o}x\right)\ldots\left(\lim_{x\to x_o}x\right)$$

$$=\alpha\cdot(x_o\cdot x_o\cdot\ldots\cdot x_o)=\alpha x_o^k$$

2. Να δειχτεί ότι, αν $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_o$ θα είναι $\lim\limits_{x\to x_o}P(x)=P(x_o)$.

Πράγματι, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_o}P(x)=\lim_{x\to x_o}(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_o)$$

$$=\lim_{x\to x_o}(\alpha_\nu x^\nu)+\lim_{x\to x_o}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1})+\ldots+\lim_{x\to x_o}(\alpha_1x)+\alpha_o$$

$$=\alpha_\nu x_o^\nu+\alpha_{\nu-1}x_o^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x_o+\alpha_o=P(x_o)$$

3. Να βρεθούν τα: (i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ και (ii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$

Εξετάζουμε, αν μπορούμε να εφαρμόσουμε την πρόταση (7) της §6.3.

(i) Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2)-1=1^2-1=0$

Παρατηρούμε όμως ότι είναι:

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ και $x^2-1=(x-1)(x+1)$

και συνεπώς για $x\neq 1$, θα έχουμε:

$$\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+x+1}{x+1}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2\neq 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}=\frac{1^2+1+1}{2}=\frac{3}{2}$$

(ii) Επίσης έχουμε $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)=2^2-3\cdot 2+2=0$

Αλλά είναι: $x^2+x-6=(x^2-2x)+(3x-6)=x(x-2)+3(x-2)=(x-2)(x+3)$

$x^2-3x+2=(x^2-2x)-(x-2)=x(x-2)-(x-2)=(x-2)(x-1)$

και συνεπώς, για $x\neq 2$, θα έχουμε:

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}=\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-1)}=\frac{x+3}{x-1}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1\neq 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+3)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-1)}=\frac{2+3}{1}=5$$

4. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x-1-\sqrt{x+1}}$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 3}(x-1-\sqrt{x+1})=3-1-\sqrt{3+1}=2-2=0$

Επειδή

$$\frac{x-3}{x-1-\sqrt{x+1}}=\frac{(x-3)(x-1+\sqrt{x+1})}{(x-1-\sqrt{x+1})(x-1+\sqrt{x+1})}=\frac{(x-3)(x-1+\sqrt{x+1})}{(x-1)^2-(\sqrt{x+1})^2}$$

$$= \frac{(x-3)(x-1+\sqrt{x+1})}{x^2-2x+1-x-1} = \frac{(x-3)(x-1+\sqrt{x+1})}{x(x-3)} = \frac{x-1+\sqrt{x+1}}{x}$$

θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x-1-\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 3}\frac{x-1+\sqrt{x+1}}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x-1+\sqrt{x+1})}{\lim\limits_{x\to 3} x} = \frac{3-1+\sqrt{3+1}}{3} = \frac{4}{3}$$

5. **Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση φ με** $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x\geq 0 \\ -1, & \text{αν } x<0 \end{cases}$ **δεν έχει όριο στο 0 (σχ. 4).**

Έστω ότι η φ έχει στο 0 όριο l, δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = l$. Τότε για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x\in(-\delta,\delta)$, να έχουμε:

$$|\varphi(x)-l|<\varepsilon$$

Έτσι όμως, για $x\geq 0$ θα είναι:

$$|1-l|<\varepsilon$$

ενώ για $x<0$

$$|-1-l|<\varepsilon \Leftrightarrow |1+l|<\varepsilon$$

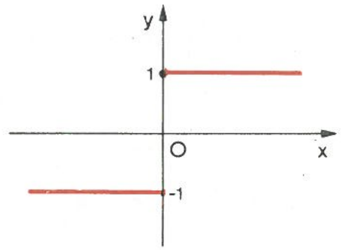
Τότε θα έχουμε και

$$2\varepsilon > |1-l| + |1+l| \geq |1-l+1+l| = 2$$

Αλλά η σχέση $2\varepsilon>2$ **δεν αληθεύει για κάθε** $\varepsilon>0$. Π.χ. για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ γίνεται $1>2$ (ψευδής).

Άρα η συνάρτηση f δεν έχει όριο στο 0.

4



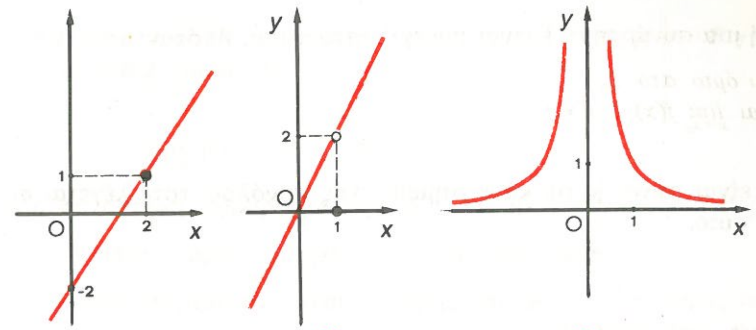
Ασκήσεις 4, 5, 6, 7, 8, 9.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Συνεχής συνάρτηση στο x_0

6.4 Το όριο μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο x_0 είναι δυνατό να ταυτίζεται με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Π.χ. για τη συνάρτηση f (σχ. 5α) με $f(x) = 3x-5$ είναι $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3(\lim\limits_{x\to 2} x)-5 = 1 = f(2)$

5



α β γ

Δε συμβαίνει όμως το ίδιο για το όριο στο $x_0 = 1$ της συνάρτησης g με $g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x\neq 1, \\ 0, & \text{αν } x=1, \end{cases}$ μολονότι και η συνάρτηση αυτή (σχ. 5β) ορίζεται στο $x_0 = 1$.

Πράγματι, είναι $g(1) = 0$, ενώ $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1}(2x) = 2\neq g(1)$.

Εξάλλου η συνάρτηση t με $t(x) = \frac{1}{x}$ δεν ορίζεται στο $x_0 = 0$, γι' αυτό δε μπορεί να γίνει λόγος για σύγκριση του ορίου και της τιμής της στο σημείο αυτό (σχ. 5γ).

Τέλος, στην εφαρμογή 5 της προηγούμενης παραγράφου είδαμε ότι δεν υπάρχει το όριο στο $x_0 = 0$ της συνάρτησης φ με $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x\geq 0 \\ -1, & \text{αν } x<0 \end{cases}$

Επομένως και πάλι δε μπορεί να γίνει λόγος για σύγκριση του ορίου και της τιμής της $\varphi(0) = 1$ στο σημείο $x_0 = 0$.

Παρατηρούμε ότι: η γραφική παράσταση C καθεμιάς από τις συναρτήσεις g, t (σχ. 5β, γ) και φ (σχ. 4) «διακόπτεται» στο σημείο x_0, στο οποίο είτε η συνάρτηση δεν ορίζεται, είτε ορίζεται αλλά η τιμή της δεν ταυτίζεται με το όριό της (αν υπάρχει) στο σημείο αυτό.

Αντίθετα, αφού $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$, σύμφωνα με τη γεωμετρική ερμηνεία που δώσαμε στο όριο, η γραφική παράσταση της f, δε «διακόπτεται» στο σημείο M(2, f(2)). Γι' αυτό η συνάρτηση f χαρακτηρίζεται ως *«συνεχής στο $x_0 = 2$»*.

Γενικά δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ **Μια συνάρτηση f ορισμένη[1] σ' ένα διάστημα (α,β) λέγεται** *συνεχής στο $x_0 \in (\alpha,\beta)$*, **όταν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι:**

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Δηλαδή μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ όταν:

- *Έχει όριο στο* x_o
- *Είναι* $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$

Αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός συνόλου, τότε λέγεται **συνεχής στο σύνολο αυτό.**

Συνέχεια και πράξεις

6.5 Σχετικά με τις πράξεις συνεχών συναρτήσεων ισχύουν τα ακόλουθα.

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $x_o \in (\alpha,\beta)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε:

1. **οι συναρτήσεις $f+g$, $f \cdot g$, λf είναι συνεχείς στο x_o.**
2. **αν επιπλέον είναι $g(x_o) \neq 0$, τότε και οι συναρτήσεις $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ είναι συνεχείς στο x_o**
3. **αν είναι $f(x_o) > 0$, τότε και η συνάρτηση $\sqrt{f}$ είναι συνεχής στο x_o.**

Πράγματι, επειδή οι f και g είναι συνεχείς στο x_o, θα είναι:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o), \qquad \lim_{x \to x_o} g(x) = g(x_o)$$

Έτσι θα έχουμε π.χ.

$$\lim_{x \to x_o} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_o} [f(x)+g(x)] = \lim_{x \to x_o} f(x) + \lim_{x \to x_o} g(x) = f(x_o)+g(x_o) = (f+g)(x_o)$$

$$\lim_{x \to x_o} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to x_o} [f(x)\,g(x)] = [\lim_{x \to x_o} f(x)][\lim_{x \to x_o} g(x)] = f(x_o) \cdot g(x_o) = (f \cdot g)(x_o)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η πρόταση (1) ισχύει και για οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος συναρτήσεων (ή απόδειξη με επαγωγή).

Συνέχεια βασικών συναρτήσεων

6.6 **Σταθερή συνάρτηση:** *Η συνάρτηση $u(x) = c$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$*, γιατί για κάθε $x_o \in \mathbb{R}$ είναι (§6.2, παρδ. 1)

$$\lim_{x \to x_o} u(x) = c = u(x_o)$$

Ταυτοτική συνάρτηση: Ομοίως, *η συνάρτηση $\iota(x) = x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$* γιατί για κάθε $x_o \in \mathbb{R}$ είναι (§6.2, παρδ. 2)

$$\lim_{x \to x_o} \iota(x) = x_o = \iota(x_o)$$

Πολυωνυμική συνάρτηση: Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση P με

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + \alpha \quad \text{και} \quad \alpha_\nu \neq 0$$

Επειδή η ταυτοτική συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε συνεχής θα είναι (§6.5.1) και η συνάρτηση $\alpha_k x^k = \alpha_k \cdot (x \cdot x \cdot \dots \cdot x)$. Έτσι όμως και *η P θα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$*, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Ρητή συνάρτηση: Άμεση συνέπεια της προηγούμενης και της περίπτωσης 2 της §6.5 είναι ότι η ρητή συνάρτηση $Q = \frac{P_1}{P_2}$ είναι συνεχής σε κάθε $x_o \in \mathbb{R}$ με $P_2(x_o) \neq 0$. Δηλαδή *είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.*

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Αποδεικνύεται(1) ότι:

- *Η συνάρτηση ημx είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.*
- *Η συνάρτηση συνx είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.*

Άρα (§6.5,2)

- *Η συνάρτηση εφx είναι συνεχής σε κάθε $x_o \in \mathbb{R}$ με $x_o \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.*

Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση. Επίσης αποδεικνύεται(1) ότι:

- *Η εκθετική συνάρτηση $a^x (a>0)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.*
- *Η λογαριθμική συνάρτηση $\log_a x$ $(a>0$ και $a \neq 1)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}_+^*$.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η συνάρτηση $3x^2-5+$ημx είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
2. Η συνάρτηση $1+$ημx$+$εφx είναι συνεχής σε κάθε $x_o \in \mathbb{R}$ με $x_o \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$
3. Η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \geq 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 0, αφού (§6.3, εφ.5) δεν έχει όριο στο σημείο αυτό.

Ασκήσεις 10, 11, 12, 13

(1) Η απόδειξη θα γίνει στη Γ΄ τάξη

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Στιγμιαία ταχύτητα

6.7 Όπως είναι γνωστό από τη φυσική, στην *«ομαλή»* κίνηση η ταχύτητα του κινητού είναι σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι τα διανυόμενα διαστήματα σε ίσους χρόνους είναι ίσα. Έτσι, η **μέση ταχύτητα** του κινητού μεταξύ δύο οποιωνδήποτε χρονικών στιγμών είναι σταθερή.
Αυτό δε συμβαίνει όταν η κίνηση δεν είναι ομαλή. Π.χ. στην ελεύθερη πτώση των σωμάτων που το διανυόμενο διάστημα σε χρόνο t είναι:

$$s(t) = \frac{1}{2} gt^2, \qquad g \simeq 9{,}8 \text{ m/sec}^2$$

η μέση ταχύτητα του σώματος θα είναι:

στη διάρκεια του 1ου sec $\quad \dfrac{s(1) - s(0)}{1 - 0} \simeq 4{,}9$ m/sec

στη διάρκεια του 10ου sec $\quad \dfrac{s(10) - s(9)}{10 - 9} \simeq 93{,}1$ m/sec, ενώ

στη διάρκεια των 10 sec $\quad \dfrac{s(10) - s(0)}{10 - 0} \simeq 49$ m/sec

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η μέση ταχύτητα του κινητού στη διάρκεια των 10sec παρουσιάζει σημαντικές διαφορές από τις μέσες ταχύτητες που βρήκαμε στη διάρκεια του 1ου και στη διάρκεια του 10ου sec. Από το παράδειγμα αυτό γίνεται φανερό ότι είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε την «ταχύτητα» ενός κινητού σε κάθε χρονική στιγμή t_o. Η ταχύτητα αυτή προσεγγίζεται από τη μέση ταχύτητα μεταξύ t_o και t (δηλαδή από το λόγο μεταβολής της συνάρτησης s μεταξύ t_o και t), όταν το t τείνει στο t_o. Γι' αυτό ορίζεται ως **στιγμιαία ταχύτητα** υ του κινητού στο t_o το όριο της μέσης ταχύτητας. Δηλαδή:

$$\upsilon = \lim_{t \to t_o} \frac{s(t) - s(t_o)}{t - t_o}$$

Έτσι, π.χ. στην ελεύθερη πτώση ενός σώματος η στιγμιαία ταχύτητα κατά τη χρονική στιγμή t_o θα είναι:

$$\upsilon = \lim_{t \to t_o} \frac{\frac{1}{2} gt^2 - \frac{1}{2} gt_o^2}{t - t_o} = \lim_{t \to t_o} \left[\frac{1}{2} g(t + t_o)\right] = gt_o$$

Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος

6.8 Το ηλεκτρικό φορτίο που διέρχεται από μια κάθετη τομή ενός αγωγού εκφράζεται ως συνάρτηση του χρόνου t. Έτσι το φορτίο που διέρχεται από την

τομή αυτή μεταξύ των χρονικών στιγμών t_o και t θα είναι $q(t) - q(t_o)$ και ο αριθμός

$$\iota_\mu = \frac{q(t) - q(t_o)}{t - t_o}$$

είναι η **μέση ένταση** του ηλεκτρικού ρεύματος στο χρονικό διάστημα $t - t_o$. Η μέση αυτή ένταση στην περίπτωση συνεχούς ρεύματος είναι σταθερή. Αν όμως το ρεύμα είναι εναλλασσόμενο, τότε η ένταση αυτή μεταβάλλεται. Επομένως, είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος κάθε χρονική στιγμή t_o. Η ένταση αυτή λέγεται **στιγμιαία ένταση** του ρεύματος και ορίζεται ως το όριο (αν υπάρχει) του λόγου μεταβολής της συνάρτησης q, όταν το t τείνει στο t_o, δηλαδή:

$$\iota = \lim_{t \to t_o} \frac{q(t) - q(t_o)}{t - t_o}$$

Ένα πλήθος άλλων εννοιών της φυσικής, όπως π.χ. η επιτάχυνση, ορίζεται με βάση το λόγο μεταβολής μιας συνάρτησης.

Η έννοια της παραγώγου

6.9 Τα παραδείγματα που αναφέραμε στις προηγούμενες παραγράφους, οδηγούν στο ίδιο μαθηματικό «φαινόμενο»:

Ξεκινώντας από μια συνάρτηση f και ένα ορισμένο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της

- Σχηματίζουμε μια **νέα** συνάρτηση λ που σε κάθε σημείο $x \neq x_o$ αντιστοιχίζει το λόγο μεταβολής $\lambda(x) = \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ της f μεταξύ x_o και x.
- Αναζητούμε το $\lim\limits_{x \to x_o} \lambda(x)$.

Για την περίπτωση που το παραπάνω όριο υπάρχει δίνεται ο ακόλουθος

ΟΡΙΣΜΟΣ **Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_o \in (\alpha, \beta)$. Η συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_o, όταν ο λόγος μεταβολής**

$$\lambda(x) = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

έχει όριο στο x_o.
Το όριο αυτό λέγεται *παράγωγος αριθμός της f στο x_o*.

Έστω τώρα A το σύνολο των $x \in (\alpha, \beta)$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε $A \neq \phi$. Αν σε κάθε $x_o \in A$ αντιστοιχίσουμε τον παράγωγο αριθμό της f στο x_o, τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση στο A, που συμβολίζεται f΄ και λέγεται **παράγωγος (συνάρτηση) της f.**

Έτσι, *ο παράγωγος αριθμός της f στο x_o είναι η τιμή της παραγώγου f΄ στο x_o.* Δηλαδή:

$$\boxed{f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}} \qquad (1)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η στιγμιαία ταχύτητα υ ενός κινητού στη χρονική στιγμή t_o είναι η τιμή $s'(t_o)$ της παραγώγου του διαστήματος s στο t_o.

2. Ομοίως, η στιγμιαία ένταση i του εναλλασσόμενου ρεύματος στη χρονική στιγμή t_o είναι η τιμή $q'(t_o)$ της παραγώγου του ηλεκτρικού φορτίου q στο t_o.

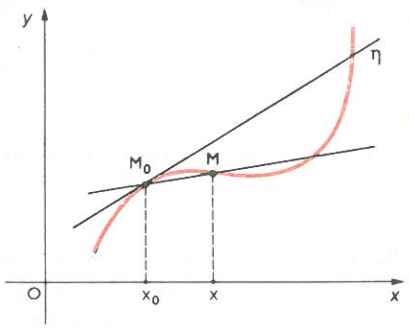
Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

6.10 Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σ' ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της και M_o το σημείο της **γραφικής παράστασης** C με τετμημένη x_o (σχ.6). Αν M είναι ένα άλλο σημείο της C με τετμημένη x, τότε η ευθεία M_oM έχει συντελεστή διευθύνσεως (§2.10)

$$\lambda(x) = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

δηλαδή το **λόγο μεταβολής** της f μεταξύ x και x_o.

6



Το όριο στο x_o της συνάρτησης λ, είναι ο παράγωγος αριθμός $f'(x_o)$. Αυτό σημαίνει ότι για $\varepsilon > 0$ οι τιμές του λ(x) συσσωρεύονται στο διάστημα $(f'(x_o) - \varepsilon, f'(x_o) + \varepsilon)$ και μάλιστα «όσο θέλουμε κοντά» στο $f'(x_o)$, αρκεί να πάρουμε το x «αρκετά κοντά» στο x_o.

Δηλαδή, για σημεία M «γειτονικά» του M_o, ο συντελεστής διευθύνσεως της ευθείας M_oM είναι κατά προσέγγιση $f'(x_o)$, που σημαίνει ότι τα σημεία αυτά πρακτικά βρίσκονται στην ευθεία που διέρχεται από το M_o και έχει συντελεστή διευθύνσεως τον αριθμό $f'(x_o)$. Την ευθεία αυτή τη λέμε **εφαπτομένη της C στο σημείο M_o.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Η ταυτοτική συνάρτηση ι έχει σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ παράγωγο 1.
Έστω $x_o \in \mathbb{R}$. Ο λόγος μεταβολής της ι μεταξύ x_o και $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\lambda(x) = \frac{\iota(x) - \iota(x_o)}{x - x_o} = \frac{x - x_o}{x - x_o} = 1$$

Άρα $\lim_{x \to x_o} \lambda(x) = 1$ και συνεπώς $\iota'(x_o) = 1$

Επειδή όμως το x_o είναι οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}$, η συνάρτηση ι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχει παράγωγο (συνάρτηση) ι΄ με

$$\boldsymbol{\iota'(x) = 1}$$

2. Η σταθερή συνάρτηση u με τιμή c έχει σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ παράγωγο 0.
Έστω $x_o \in \mathbb{R}$. Ο λόγος μεταβολής της u μεταξύ x_o και $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\lambda(x) = \frac{u(x) - u(x_o)}{x - x_o} = \frac{c - c}{x - x_o} = 0$$

Άρα $\lim_{x \to x_o} u(x) = 0$ και συνεπώς $u'(x) = 0$

Συνεπώς η σταθερή συνάρτηση u είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχει παράγωγο (συνάρτηση) u΄ με

$$\boldsymbol{u'(x) = 0}$$

3. Αν $f(x) = x^2$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $f'(x) = 2x$.
Πράγματι, η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και ο λόγος μεταβολής της μεταξύ των x_o και $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\lambda(x) = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \frac{x^2 - x_o^2}{x - x_o} = x + x_o$$

Άρα $\lim_{x \to x_o} \lambda(x) = \lim_{x \to x_o} (x + x_o) = x_o + x_o = 2x_o$ και συνεπώς $f'(x_o) = 2x_o$. Επομένως θα είναι:

$$f'(x) = 2x$$

4. Έστω η συνάρτηση g με $g(x) = x^2 + 5$. Η g ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και ο λόγος μεταβολής της μεταξύ των x_o, $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\lambda(x) = \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} = \frac{(x^2 + 5) - (x_o^2 + 5)}{x - x_o} = \frac{x^2 - x_o^2}{x - x_o} = x + x_o$$

Άρα $g'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \lambda(x) = 2x_o$. Έτσι θα είναι:

$$g'(x) = 2x$$

5. Η συνάρτηση φ με $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ ορίζεται στο $\mathbb{R}^*$ και ο λόγος μεταβολής της μεταξύ x_o και $x \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$\lambda(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_o)}{x - x_o} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_o}}{x - x_o} = \frac{x_o - x}{x_o x(x - x_o)} = -\frac{1}{x x_o}$$

Επειδή $\lim\limits_{x \to x_o} (x x_o) = x_o x_o = x_o^2 \neq 0$, θα έχουμε (§6.3)

$$\varphi'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \lambda(x) = \lim_{x \to x_o} \frac{-1}{x x_o} = \frac{-1}{x_o^2}$$

και συνεπώς:

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Για απλούστευση του συμβολισμού, θα χρησιμοποιούμε (καταχρηστικά) στα επόμενα για την τιμή της παραγώγου μιας συνάρτησης f στο $x \in \mathbb{R}$ κυρίως το σύμβολο **(f(x))′** αντί του $f'(x)$. Έτσι π.χ. για τις συναρτήσεις των προηγούμενων παραδειγμάτων γράφουμε αντιστοίχως:

$$(x)' = 1, \qquad (c)' = 0, \qquad (x^2)' = 2x, \qquad (x^2 + 5)' = 2x, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Ασκήσεις 14, 15

Παράγωγος και συνέχεια

6.11 Αν προσέξουμε τις συναρτήσεις που αναφέραμε στα παραδείγματα της §6.10, θα δούμε ότι όλες είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους. Γενικά ισχύει το ακόλουθο:

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.**

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o, θα είναι $\lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o)$. Έτσι θα έχουμε:

$$\lim_{x \to x_o} [f(x) - f(x_o)] = \lim_{x \to x_o} \left[\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} (x - x_o)\right]$$

$$= \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \cdot \lim_{x \to x_o} (x - x_o) = f'(x_o) \cdot 0 = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$ και η f είναι συνεχής στο x_o.

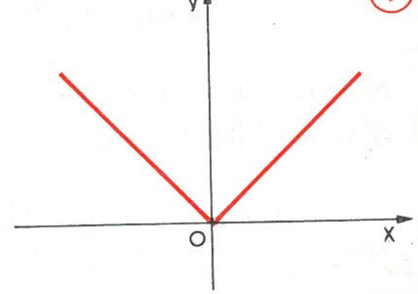
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος δεν ισχύει. Π.χ. η συνάρτηση f με

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x_o = 0$, γιατί $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, ενώ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό (σχ. 7). Πράγματι, ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ 0 και $x \in \mathbb{R}$ είναι:

7



$$\lambda(x) = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

και, όπως είδαμε στην εφαρμογή 5 της §6.3, η συνάρτηση λ δεν έχει όριο στο 0.

Παράγωγος και πράξεις

6.12 Σχετικά με τις πράξεις των παραγωγίσιμων συναρτήσεων ισχύουν τα επόμενα:

Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g ορίζονται σ' ένα διάστημα (α,β) και είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Τότε:

1. **η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι:**

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \qquad (2)$$

2. **Για κάθε $\alpha \in R$ η συνάρτηση αf είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι:**

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0) \qquad (3)$$

3. **Η συνάρτηση f · g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι:**

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \qquad (4)$$

4. **Αν επιπλέον είναι $g(x_0) \neq 0$, τότε οι συναρτήσεις $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και είναι:**

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} \qquad (5)$$

Από τις παραπάνω ιδιότητες θα αποδείξουμε[1] μόνο τις δύο πρώτες.

1. Ο λόγος μεταβολής της συνάρτησης f+g μεταξύ x_0 και $x \in (\alpha,\beta)$ είναι:

$$\lambda(x) = \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{[f(x)+g(x)] - [f(x_0)+g(x_0)]}{x - x_0}$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \qquad (6)$$

Επειδή οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 θα είναι:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$$

Τότε από την (6) θα έχουμε (§6,3)

$$\lim_{x \to x_0} \lambda(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0) \qquad \text{ή}$$

(1) Οι άλλες ιδιότητες θα αποδειχτούν στη Γ' τάξη.

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2. Ο λόγος μεταβολής της συνάρτησης αf μεταξύ x_0 και $x \in (\alpha,\beta)$ είναι:

$$\lambda(x) = \frac{(\alpha f)(x) - (\alpha f)(x_0)}{x - x_0} = \frac{\alpha f(x) - \alpha f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και συνεπώς θα έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} \lambda(x) = \alpha \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha f'(x_0), \text{ δηλαδή}$$

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αποδεικνύεται επαγωγικά ότι οι ισότητες (2) και (4) ισχύουν και για οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος συναρτήσεων, οι οποίες ορίζονται σ' ένα διάστημα (α,β) και είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Π.χ. για τις συναρτήσεις f_1, f_2, f_3 είναι:

- $(f_1 + f_2 + f_3)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0) + f_3'(x_0)$ (7)
- $(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3)'(x_0) = f_1'(x_0)f_2(x_0)f_3(x_0) + f_1(x_0)f_2'(x_0)f_3(x_0) + f_1(x_0)f_2(x_0)f_3'(x_0)$ (8)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
Επειδή οι συναρτήσεις x^2, x καθώς και κάθε σταθερή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμες σε κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα είναι παραγωγίσιμες και οι συναρτήσεις αx^2 και βx. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$f'(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)' = (\alpha x^2)' + (\beta x)' + (\gamma)' = \alpha(x^2)' + \beta(x)' = \alpha \cdot 2x + \beta \cdot 1 = 2\alpha x + \beta$$

Ασκήσεις 16

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

6.13 Στα παραδείγματα της §6.10 βρήκαμε την παράγωγο μερικών βασικών συναρτήσεων, όπως π.χ. της ταυτοτικής, της σταθερής, της x^2 κτλ. Στην παράγραφο αυτή θα αναφέρουμε τις παραγώγους μερικών ακόμη χρήσιμων συναρτήσεων.

I. *Παράγωγος δύναμης.* Ξέρουμε (§6.10, παρδ.3) ότι $(x^2)' = 2x$. Ομοίως βρίσκουμε ότι:

$$(x^3)' = (x^2x)' = (x^2)'x + x^2(x)' = 2x^2 + x^2 = 3x^2$$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ η συνάρτηση x^ν είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$\boxed{(x^\nu)' = \nu \cdot x^{\nu-1}} \qquad (7)$$

II. *Παράγωγος πολυωνυμικής συνάρτησης.* Έστω η συνάρτηση P με

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad \text{με } \alpha_\nu \neq 0$$

Τότε, σύμφωνα με την §6.12, η συνάρτηση P είναι παραγωγίστμη στο $\mathbb{R}$ και

$$P'(x) = (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0)'$$
$$= (\alpha_\nu x^\nu)' + (\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1})' + \dots + (\alpha_1 x)' + (\alpha_0)'$$
$$= \alpha_\nu (x^\nu)' + \alpha_{\nu-1}(x^{\nu-1})' + \dots + \alpha_1 (x)'$$

Δηλαδή:

$$\mathbf{P'(x) = \nu\alpha_\nu x^{\nu-1} + (\nu-1)\alpha_{\nu-1}x^{\nu-2} + \dots + \alpha_1}$$

III. *Παράγωγος τετραγωνικής ρίζας.* Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$. Η f ορίζεται στο $\mathbb{R}_+$, και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*_+$. Πράγματι, ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ x_0, $x \in \mathbb{R}^*_+$ είναι:

$$\lambda(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x_0})^2} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

Επειδή $\lim\limits_{x \to x_0} (\sqrt{x} + \sqrt{x_0}) = (\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x}) + \sqrt{x_0} = \sqrt{x_0} + \sqrt{x_0} = 2\sqrt{x_0}$ και για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^*_+$ είναι $\sqrt{x_0} \neq 0$, θα έχουμε [§6.3, πρότ.(7)]

$$\lim_{x \to x_0} \lambda(x) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Συνεπώς η συνάρτηση $\sqrt{x}$ είναι **παραγωγίσιμη στο** $\mathbb{R}^*_+$ και

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}} \qquad (8)$$

IV. *Παράγωγος τριγωνομετρικών συναρτήσεων.* Αποδεικνύεται[1] ότι οι συναρτήσεις ημx και συνx είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και

(1) Η απόδειξη θα γίνει στη Γ΄ τάξη

$$\boxed{(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x \qquad (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x} \qquad (9)$$

V. *Παράγωγος των συναρτήσεων e^x και lnx.* Αποδεικνύεται[1] επίσης ότι οι συναρτήσεις e^x και lnx είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^*_+$ αντιστοίχως και

$$\boxed{(e^x)' = e^x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}} \qquad (10)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Είναι $(x^4 - 3x^3 + 2x - 1)' = (x^4)' - (3x^3)' + (2x)' = 4x^3 - 3(x^3)' + 2(x)' = 4x^3 - 3(3x^2) + 2$
$= 4x^3 - 9x^2 + 2$

2. Ομοίως για $x \neq \pm 1$ έχουμε:

$$\left(\frac{x^2+1}{1-x^2}\right)' = \frac{(x^2+1)'(1-x^2) - (x^2+1)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} = \frac{2x(1-x^2) - (x^2+1)(-2x)}{(1-x^2)^2}$$
$$= \frac{2x(1-x^2+x^2+1)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

3. Επίσης είναι $(x\ln x + e^x)' = (x \cdot \ln x)' + (e^x)' = (x)'\ln x + x(\ln x)' + e^x = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + e^x$
$= 1 + \ln x + e^x$

4. Ακόμη είναι $(e^{-x})' = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = -\frac{(e^x)'}{(e^x)^2} = -\frac{e^x}{e^{2x}} = -\frac{1}{e^x} = -e^{-x}$

Στον επόμενο πίνακα έχουμε τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων

f	f΄	f	f΄
c	0	ημx	συνx
x	1	συνx	-ημx
$\frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	εφx, $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
x^k, $x \in \mathbb{R}^*$, $k \in \mathbb{Z}^*$	kx^{k-1}	e^x	e^x
$\sqrt{x}$, $x > 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	lnx, $x > 0$	$\frac{1}{x}$

(1) Η απόδειξη θα γίνει στη Γ΄ τάξη

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδειχτεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$

Πράγματι, έχουμε (§6.12)

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = -\frac{(x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{\nu-1-2\nu} = -\nu x^{-\nu-1}$$

Δηλαδή η ισότητα (7) της §6.13 ισχύει γενικότερα για κάθε $k \in \mathbb{Z}^*$

$$(x^k)' = kx^{k-1}$$

2. Να αποδειχτεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ είναι $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(-\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

3. Να αποδειχτεί ότι: (i) $(\sigma\upsilon\nu 2x)' = -2\eta\mu 2x$, (ii) $(\eta\mu 2x)' = 2\sigma\upsilon\nu 2x$

(i) Έχουμε:

$$(\sigma\upsilon\nu 2x)' = (\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x)' = (\sigma\upsilon\nu^2 x)' - (\eta\mu^2 x)'$$

$$= \sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x)' + (\sigma\upsilon\nu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\eta\mu x)' - (\eta\mu x)'\eta\mu x$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu x(-\eta\mu x) - 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu 2x - \eta\mu 2x = -2\eta\mu 2x$$

(ii) Ομοίως έχουμε:

$$(\eta\mu 2x)' = (2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x)' = 2(\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)' = 2[(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)']$$
$$= 2[\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x(-\eta\mu x)] = 2(\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x.$$

4. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g με:

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Να δειχτεί ότι: (i) $f'(x) = g(x)$, (ii) $g'(x) = f(x)$

(i) Έχουμε $f'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}[(e^x)' + (e^{-x})'] = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = g(x)$

(ii) Ομοίως έχουμε: $g'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}[(e^x)' - (e^{-x})']$

$$= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = f(x)$$

Ασκήσεις 17, 18, 19, 20, 21, 22

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Μονοτονία συνάρτησης

6.14 Αν ο λόγος μεταβολής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ (ανοικτό ή όχι) διατηρεί σταθερό πρόσημο, τότε, σύμφωνα με την §2.9, η συνάρτηση είναι μονότονη στο διάστημα αυτό. Αν όμως η f είναι παραγωγίσιμη(1) στο Δ, μπορούμε να συμπεράνουμε τη μονοτονία της από το πρόσημο της παραγώγου της. Π.χ. αν για $x_0 \in \Delta$ είναι $f'(x_0) = 0{,}5$, τότε θα έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0{,}5 > 0$$

Αυτό σημαίνει ότι, π.χ. για $\varepsilon = 0{,}1$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε ο λόγος μεταβολής $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ κυμαίνεται μεταξύ 0,4 και 0,6, δηλαδή παραμένει **θετικός** για όλα τα $x \neq x_0$ που ανήκουν στο διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Αν λοιπόν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f'(x) > 0$, συμπεραίνουμε ότι ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ δυο οποιονδήποτε σημείων του Δ είναι θετικός και η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. Γενικά αποδεικνύεται(2) το ακόλουθο:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 **Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ είναι:**

- **$f'(x) > 0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ**
- **$f'(x) < 0$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ**

(1) Υποτίθεται ότι η f είναι ορισμένη σε ανοικτό διάστημα $(\alpha,\beta) \supseteq \Delta$.

(2) Η απόδειξη θα γίνει στην Γ' τάξη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω η ομοπαραλληλική συνάρτηση $f(x) = \alpha x+\beta$. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = \alpha$, η f θα είναι στο R γνησίως αύξουσα, όταν $\alpha>0$ και γνησίως φθίνουσα, όταν $\alpha<0$.

2. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{\alpha}{x}$ με $\alpha\neq 0$, έχει για κάθε $x\neq 0$, παράγωγο:

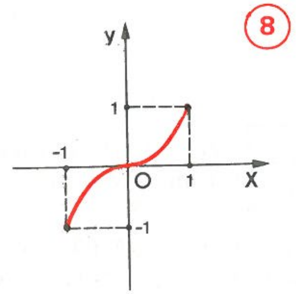
$$g'(x) = \left(\frac{\alpha}{x}\right)' = \alpha\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{\alpha}{x^2}$$

Άρα η g είναι **σε καθένα** από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$:
- γνησίως αύξουσα, όταν $\alpha<0$
- γνησίως φθίνουσα, όταν $\alpha>0$

3. Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ έχει παράγωγο $f'(x) = 2x$ και συνεπώς είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

8



Το αντίστροφο του θεωρήματος 1 δεν αληθεύει. Π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$, ενώ η παράγωγός της μηδενίζεται στο διάστημα αυτό (σχ. 8). Πράγματι έχουμε $f'(x) = 3x^2$ και είναι $f'(0) = 0$.

Έστω τώρα ότι μια συνάρτηση f είναι π.χ. φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ. Τότε ο λόγος μεταβολής μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων του Δ δεν είναι θετικός. Συνεπώς, όπως εξηγήσαμε παραπάνω, αποκλείεται να υπάρχει $x_0 \in \Delta$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)>0$. Άρα για κάθε $x \in \Delta$ θα έχουμε $f'(x)\leq 0$. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται(1) και το επόμενο:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 **Μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ είναι:**
- **αύξουσα στο Δ, αν και μονο αν για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε $f'(x)\geq 0$**
- **φθίνουσα στο Δ, αν και μονο αν για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε $f'(x)\leq 0$**
- **σταθερή στο Δ, αν και μονο αν για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε $f'(x)=0$**

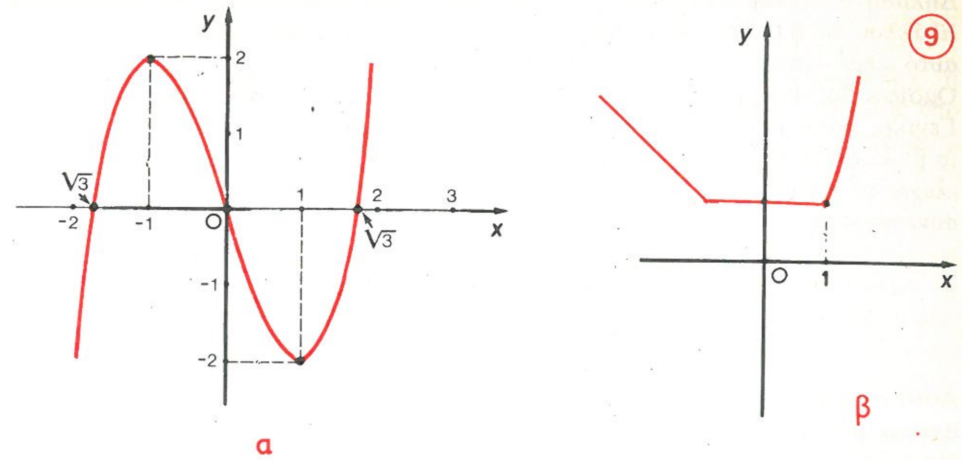
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^3-3x$.
Έχουμε $f'(x) = 3x^2-3 = 3(x-1)(x+1)$. Επειδή $f'(x)\leq 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1]\cup[1,+\infty)$, η f θα είναι:
- φθίνουσα στο $[-1, 1]$
- αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$.

Στο σχήμα 9α έχουμε τη γραφική παράσταση της f.

(1) Η απόδειξη θα γίνει στην Γ' τάξη.

9



2. Έστω ακόμη η συνάρτηση g με $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x\geq 1 \\ 1, & \text{αν } -1<x<1 \\ -x, & \text{αν } x\leq -1 \end{cases}$

Έχουμε $g'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x>1 \\ 0, & \text{αν } -1<x<1 \\ -1, & \text{αν } x<-1 \end{cases}$

Συνεπώς η g είναι:
- γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$
- σταθερή στο $[-1, 1]$, αφού είναι και $g(-1) = g(1) = 1$
- γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1)$

Ασκήσεις 23, 24, 25

Τοπικά ακρότατα

6.15 Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^3-3x$. Όπως είδαμε στο παράδειγμα 1 της προηγούμενης παραγράφου, η f είναι φθίνουσα στο $[-1, 1]$ και αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Άρα για κάθε $x\in[-1, 1]$ θα έχουμε ότι $f(x) \geq f(1) = -2$ και για κάθε $x\in[1, +\infty)$ ότι $f(1) \leq f(x)$.
Επομένως, υπάρχει διάστημα κέντρου 1, π.χ. το $(0, 2)$, τέτοιο ώστε για κάθε $x\in(0, 2)$ να έχουμε:

$$f(x) \geq f(1)$$

Δηλαδή ο περιορισμός της f στο διάστημα (0,2) παρουσιάζει ελάχιστο στο 1. Εξάλλου το f(1) δεν είναι ελάχιστο της f, γιατί π.χ. $f(-3) = -18 < -2 = f(1)$. Γι' αυτό λέμε ότι η f παρουσιάζει *τοπικό ελάχιστο* στο σημείο 1.

Ομοίως βρίσκουμε ότι η f παρουσιάζει *τοπικό μέγιστο* στο σημείο -1.

Γενικά, έστω μια συνάρτηση ορισμένη τουλάχιστο σ' ένα ανοικτό διάστημα (α,β) και $x_o \in (\alpha,\beta)$. Θα λέμε ότι **η f παρουσιάζει ή έχει** ***τοπικό μέγιστο (τοπικό ελάχιστο)*** **στο x_o, αν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύουν αντιστοίχως οι συνεπαγωγές:**

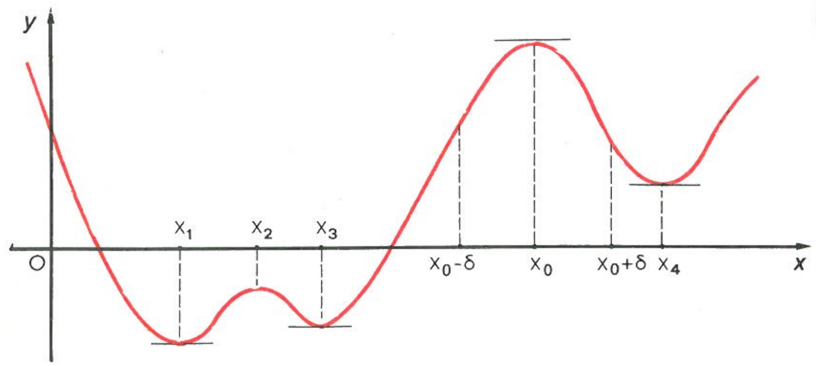
$$|x - x_o| < \delta \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_o)$$
$$|x - x_o| < \delta \Rightarrow f(x) \geqslant f(x_o)$$

Αυτό σημαίνει ότι ο περιορισμός της f στο διάστημα $(x_o - \delta,\ x_o + \delta)$ παρουσιάζει στο x_o μέγιστο ή ελάχιστο αντιστοίχως.

Θα λέμε ακόμη ότι η f έχει σ' ένα σημείο **τοπικό ακρότατο**, όταν έχει στο σημείο αυτό τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο.

Έστω τώρα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o \in (\alpha,\beta)$, οπότε η γραφική παράστασή της έχει εφαπτομένη στο σημείο M_o με τετμημένη x_o (σχ. 10).

(10)



Αν επιπλέον η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, π.χ. μέγιστο, στο σημείο x_o, τότε **όλα** τα γειτονικά σημεία, εκατέρωθεν του M_o, είναι «κάτω» από την εφαπτομένη που διέρχεται από το M_o, το οποίο έχει τη μέγιστη τεταγμένη. Έτσι η εφαπτομένη πρέπει να είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x, που σημαίνει ότι ο συντελεστής διευθύνσεώς της είναι 0, δηλαδή $f'(x_o) = 0$. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται(1) το ακόλουθο:

ΘΕΩΡΗΜΑ **Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_o \in (\alpha,\beta)$, τότε $f'(x_o) = 0$**

(1) Η απόδειξη θα γίνει στην Γ΄ τάξη.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος δεν αληθεύει. Π.χ. η συνάρτηση f με $f(x) = x^3$ έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$, που η τιμή της στο $x_o = 0$ είναι $f'(0) = 0$. Όμως η f δεν έχει ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο στο σημείο αυτό (σχ. 8), γιατί για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) = x^3 < 0$, ενώ για $x > 0$ είναι $f(x) = x^3 > 0$.

2. Μια συνάρτηση f μπορεί σ' ένα διάστημα Δ να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο σε περισσότερα από ένα σημεία του Δ. Π.χ. η συνάρτηση που η γραφική της παράσταση δίνεται στο σχήμα 10 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στα σημεία x_o και x_2, και τοπικό ελάχιστο στα x_1, x_3, και x_4.

3. Επίσης μπορεί ένα τοπικό μέγιστο να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο. Π.χ. το τοπικό μέγιστο της f (σχ. 10) στο x_2 είναι μικρότερο από το τοπικό ελάχιστό της στο x_4.

Εύρεση ακροτάτων συνάρτησης

6.16 Με βάση το θεώρημα 2 της §6.14 μπορούμε να εντοπίσουμε τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης f. Πράγματι, έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) και ότι στο $x_o \in (\alpha,\beta)$ είναι $f'(x_o) = 0$.

Αν είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_o)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_o, \beta)$, τότε, αφού $f'(x_o) = 0$, η f θα είναι φθίνουσα στο $(\alpha, x_o]$ και αύξουσα στο $[x_o, \beta)$. Συνεπώς για κάθε $x \in (\alpha, x_o]$ θα έχουμε

$$f(x) \geqslant f(x_o)$$

και για κάθε $x \in [x_o, \beta)$ θα έχουμε

$$f(x_o) \leqslant f(x)$$

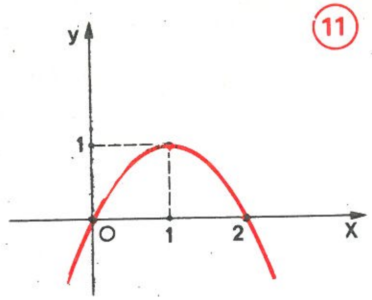
Δηλαδή για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ έχουμε $f(x) \geqslant f(x_o)$, που σημαίνει ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_o. Ομοίως βρίσκουμε ότι, αν είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_o)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_o,\beta)$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_o.

Συνοψίζουμε τα παραπάνω ως εξής:

Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β). Αν η f΄ μηδενίζεται σ' ένα σημείο $x_o \in (\alpha,\beta)$ αλλάζοντας πρόσημο, τότε η f παρουσιάζει στο x_o τοπικό ακρότατο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση f με $f(x) = -x^2 + 2x$ έχει παράγωγο $f'(x) = -2x + 2 = -2(x-1)$.
Η f′ μηδενίζεται στο 1, αλλάζοντας πρόσημο από + σε -, αφού για $x < 1$ είναι $f'(x) > 0$ και για $x > 1$ είναι $f'(x) < 0$.
Άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 1$ (σχ. 11).



11

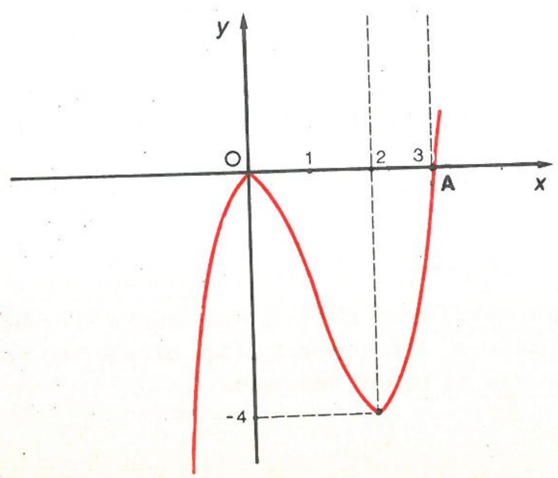
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να μελετηθεί η συνάρτηση g με $g(x) = x^3 - 3x^2$.
Η g είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και έχει παράγωγο

$$g'(x) = (x^3)' - (3x^2)' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

Η g′ μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2 και είναι θετική στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ και αρνητική στο $(0,2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$, γνησίως φθίνουσα στο $(0,2)$, γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$ και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 0, το $f(0) = 0$, και τοπικό ελάχιστο στο 2, το $f(2) = -4$.
Τα παραπάνω φαίνονται στον επόμενο πίνακα, ο οποίος αποτελεί τη βάση για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης (σχ. 12).
Εξάλλου, επειδή $f(x) = 0$ όταν $x = 0$ ή $x = 3$, η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία O (0,0) και A (3,0) του άξονα x′x.

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
g′		+	0	−	0			+	
g		↗	0 μ	↘	-4 ε	↗	0	↗	



12

2. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

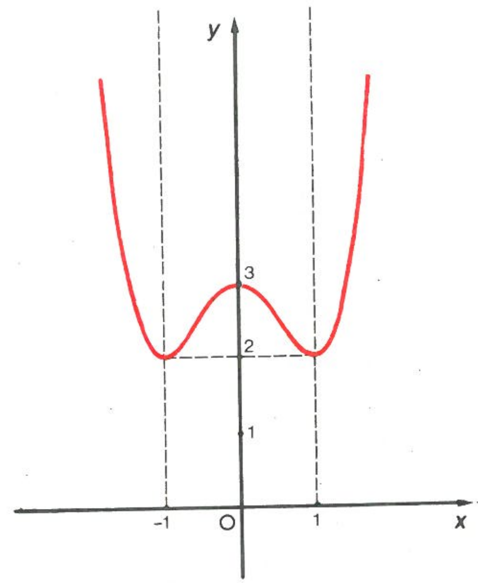
Η f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και έχει παράγωγο

$$f'(x) = (x^4)' - (2x^2)' = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$$

που μηδενίζεται στα σημεία -1, 0, 1.
Η f′ έχει θετικές τιμές στα διαστήματα $(-1, 0)$, $(1, +\infty)$ και αρνητικές στα $(-\infty, -1)$, $(0,1)$.
Έτσι, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1)$, γνησίως αύξουσα στο $(-1,0)$, γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ και γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Παρουσιάζει λοιπόν τοπικό ελάχιστο στο -1 και στο 1, το $f(-1) = f(1) = 2$, και τοπικό μέγιστο στο 0, το $f(0) = 3$.
Έτσι έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών της f (σχ. 13).

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f′		−	0	+	0	−	0	+	
f		↘	2 ε	↗	3 μ	↘	2 ε	↗	

13



3. Να μελετηθεί η συνάρτηση f με $f(x) = ημx$.

Επειδή η συνάρτηση ημ είναι περιοδική με περίοδο 2π, αρκεί η μελέτη της να περιοριστεί σ' ένα διάστημα πλάτους 2π, π.χ. το $[0,2π)$.
Έχουμε $f'(x) = συνx$ και, όπως ξέρουμε, είναι:

$$\text{συνx}= 0, \text{ όταν } x = \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{συνx}>0, \text{ όταν } x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

$$\text{συνx}<0, \text{ όταν } x\in\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Αρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Παρουσιάζει λοιπόν τοπικό μέγιστο στό $\frac{\pi}{2}$, το ημ $\frac{\pi}{2}$ = 1 (που είναι και το μέγιστο της συνάρτησης) και τοπικό ελάχιστο στο $\frac{3\pi}{2}$, το ημ $\frac{3\pi}{2}$ = -1 (που είναι και το ελάχιστο της f).

Ασκήσεις 26, 27, 28, 29, 30, 31

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\lim\limits_{x\to 2} 5x = 10$ (ii) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = -6$

2. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2-4x-5) = -9$ (ii) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{3x^2+17x+22}{x+2} = 5$

3. Να αποδειχτεί ότι:

(i) $\lim\limits_{x\to -5} \frac{x^2+10x+25}{x+5} = 0$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-8x}{x} = -8$

4. Να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to -2}(4x^3-5x+2)$ (ii) $\lim\limits_{x\to 2}\left[x(x-2)(x+3)\right]$

5. Να υπολογίσετε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x+1}{2x-5}$ (ii) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+5}}{x}$

6. Να βρείτε τα:

(i) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1}$ (ii) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-\chi-2}{x^2-2x-3}$ (iii) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{2x^2+9x+4}{3x^2+11x-4}$

7. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 8} \frac{x^2-4}{x^3-8}$ (iii) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^3-5x^2-8x-1}{x^4+x^3-x-1}$

8. Να βρείτε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{x-2}$

9. Να υπολογίσετε τα:

(i) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x^2-7}-\sqrt{2x+1}}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

10. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση f με:

(i) $f(x) = 3x^2-5x+2$ (ii) $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$

11. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση f με:

(i) $f(x) = \frac{2x}{x^2-4x+3}$ (ii) $f(x) = \sqrt{x^2-2x+2}$

12. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς σε κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(i) f με $f(x) = 2\text{ημ}^2x+3\text{συν}x$ (ii) g με $g(x) = \frac{2\text{συν}^2x-5}{3-\text{ημ}x}$

13. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους.

(i) f με $f(x) = \text{εφ}(\pi-x)$ (ii) g με $g(x) = \frac{1}{1-\text{ημ}x}$ (iii) h με $h(x) = x^2-3\log_\alpha x$ ($\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$)

14. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι αριθμοί των συναρτήσεων f με:

(i) $f(x) = 3x$ στο σημείο -2

(ii) $f(x) = 2x^2+1$ στο σημείο 1

(iii) $f(x) = x^3$ στο σημείο -3

15. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων f με:

(i) $f(x) = 5x+2$ (ii) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ (iii) $f(x) = x^4$ (iv) $f(x) = 5x^3 \cdot 3$

16. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

(i) f με $f(x) = 5x - \frac{1}{x^2} + 2$ (ii) g με $g(x) = \frac{x^4}{5x^3+3}$

17. Να υπολογίσετε τις παραγώγους των συναρτήσεων f με:

(i) $f(x) = 3x^3 - x + 5$ (ii) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{2}{5}x^5$ (iii) $f(x) = (2x^2 - 1)(x^3 - 4)$

18. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

(i) f με $f(x) = \frac{3-2x}{x}$ (ii) g με $g(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1}$ (iii) h με $h(x) = \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1}$

19. Να υπολογίσετε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

(i) f με $f(x) = \frac{x(2x^2+3)}{(x-1)^2}$ (ii) g με $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}(x-1)$

20. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων f με:

(i) $f(x) = x - ημx συνx$ (ii) $f(x) = \frac{ημx}{x} + \frac{x}{ημx}$

(iii) $f(x) = \frac{x}{ημx + συνx}$ (iv) $f(x) = x - εφx$

(v) $f(x) = \frac{ημx + συνx}{ημx - συνx}$ (vi) $f(x) = \frac{1 + εφx}{1 - εφx}$

21. Να υπολογίσετε τις παραγώγους των συναρτήσεων f με:

(i) $f(x) = \ln x^2$ $(x \in \mathbb{R}_+^*)$ (ii) $f(x) = x\ln x - x$ (iii) $f(x) = xe^{-x}$ (iv) $f(x) = e^x(ημx + συνx)$

22. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = αx(x+2) + β$. Αν $f''(x) = (f'(x))'$, να αποδείξετε ότι:

$$(1+x)f''(x) = f'(x)$$

23. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = x^2 - 2x$ (ii) $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$

24. Να εξεταστούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

(i) f με $f(x) = 3x^3 - 16x$ (ii) g με $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

25. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

(i) f με $f(x) = ημ2x$ (ii) g με $g(x) = e^x$ (iii) h με $h(x) = \ln x$

26. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων f με:

(i) $f(x) = x^3 - 12x$ (ii) $f(x) = -2x^2 - 8x + 3$ (iii) $f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 11$ (iv) $f(x) = \frac{x}{x^2-8}$

27. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις:

(i) f με $f(x) = -x^2 + 4x$ (ii) g με $g(x) = 2x^3 - x$

28. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις f με:

(i) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{16}{3}$ (ii) $f(x) = x^5 - 8x^3 + 16x$

29. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις:

(i) f με $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ (ii) g με $g(x) = ημ2x - x$

30. Να αποδείξετε ότι απ' όλα τα ορθογώνια που έχουν περίμετρο 24cm μεγαλύτερο εμβαδό έχει το τετράγωνο.

31. Έστω $\mathcal{C}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

$$f(x) = \frac{x^2}{4}$$

Ποιό από τα σημεία της $\mathcal{C}$ έχει την ελάχιστη απόσταση από το A(3,0);

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. i) $A_1=\mathbb{R}-\{0,1\}$, ii) $A_2=\mathbb{R}-\{2,3\}$, iii) $A_3=\{x\in\mathbb{R}: -1\leq x\leq 1\}$.

2. Η f_1+f_2 ορίζεται στο σύνολο $A=\mathbb{R}-\{-1,1\}$ και η $\dfrac{f_1}{f_2}$ στο $A'=\mathbb{R}-\{-1,1,0\}$.

3. $(f-g)(x)=x^3+3x$, $(fg)(x)=5x^5+22x^4-9x^3+60x^2-18x+36$

4. Για $x<0$ είναι $(f_1+f_2)(x)=1-x$ και $(f_1f_2)(x)=0$, κτλ.

5. Τα σύνολα λύσεων των εξισώσεων είναι: i) $\{-2,-1,0,1\}$, ii) $\left\{-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, 3\right\}$,

iii) $\left\{1, \dfrac{5}{4}\right\}$, iv) $\left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, \dfrac{8}{3}\right\}$, v) $\{3\}$, vi) $\{-2, 2\}$,

vii) $\left\{-\sqrt{3}, \dfrac{1-2\sqrt{7}}{3}, \dfrac{1+2\sqrt{7}}{3}, \sqrt{3}\right\}$, viii) $\left\{-2, -\dfrac{3}{2}, 3\right\}$.

6. i) $\lambda=3$, ii) $\lambda=-3$

7. i) $\lambda=2$, ii) $P(x)=x^4-2x^3-2x-4=(x^4-2^2)-x(x^2+2)=\cdots$

8. Από το σύστημα $\begin{cases} P(1)=0 \\ P(-3)=0 \end{cases}$ βρίσκουμε $\begin{cases} \alpha=-8 \\ \beta=12 \end{cases}$

9. Να εφαρμόσετε τις ισότητες (4) και (6) της §1.8.

10. i) Να παρατηρήσετε ότι $16=17-1$. ii) Είναι $10=9+1$

11. Είναι $P(\rho)\neq 0$, για κάθε πιθανή ρητή ρίζα ρ.

12. Αν $|\rho|<1$, η ανισότητα είναι προφανής. Για $|\rho|\geq 1$, από την $P(\rho)=0$ παίρνουμε
$|\rho|^4=|3\rho^3-2\rho^2+7\rho+1|\leq 3|\rho|^3+2|\rho|^2+7|\rho|+1$, κτλ.

13. Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή της §1.10. Τα σύνολα λύσεων των εξισώσεων είναι:
i) $\{-2,-1,3\}$, ii) $\left\{-3, \dfrac{1}{2}, 1, 3\right\}$, iii) $\left\{-1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$, iv) $\left\{-2, \dfrac{1}{3}\right\}$, v) $\{-2\}$.

14. i) Πρέπει να είναι $\alpha^3-\alpha^2-\alpha-2=0$, απ' όπου βρίσκουμε $\alpha=2$.

ii) Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης που προκύπτει είναι το $\left\{-2, -1, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

15. Είναι $\gamma=-\alpha\rho^2$ και $\delta=-\beta\rho^2$, οπότε η εξίσωση γράφεται $\alpha x^3+\beta x^2-\alpha\rho^2 x-\beta\rho^2=0$, κτλ.

16. Να εργαστείτε όπως στο παράδειγμα 1 της §1.11.

i) $\{-3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 3\}$, ii) $\{-2, 2\}$, iii) $\varnothing$, iv) $\varnothing$.

17. i) Πρέπει να είναι $\Delta=0$ και $-\frac{\beta}{2\alpha}>0$, οπότε προκύπτει $\lambda=-\frac{1}{2}$.

ii) Πρέπει να είναι $\Delta>0$, $\frac{\gamma}{\alpha}>0$, $-\frac{\beta}{\alpha}>0$, οπότε $\lambda>-\frac{1}{2}$.

18. i) Να εργαστείτε όπως στο παράδειγμα 2 της §1.11. Σύνολο λύσεων: $\left\{-4, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 3\right\}$.

ii) Να αναλύσετε το α΄ μέλος σε γινόμενο παραγόντων και κατόπιν να εργαστείτε όπως στην προηγούμενη εξίσωση. Σύνολο λύσεων: $\left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 5-2\sqrt{6}, 5+2\sqrt{6}\right\}$.

19. Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 1 της §1.12. Σύνολο λύσεων: $\{-2, 1, 2, 5\}$.

20. i) Να θέσετε $\sigma\upsilon\nu^2 x=y$, κτλ. Θα βρείτε $x=2k_1\pi\pm\frac{\pi}{4}$, $k_1\in\mathbb{Z}$, ή $x=2k_2\pi\pm\frac{3\pi}{4}$, $k_2\in\mathbb{Z}$.

ii) Να θέσετε $\eta\mu x=y$, κτλ.

Θα βρείτε $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ ή $\left(x=2k_1\pi+\frac{\pi}{6} \text{ ή } x=2k_1\pi+\frac{5\pi}{6},\ k_1\in\mathbb{Z}\right)$.

21. Η εξίσωση είναι ορισμένη στο $A=\mathbb{R}-\{-1, 2\}$ και είναι αδύνατη.

22. Να εργαστείτε όπως στο παράδειγμα 1 της §1.12.

i) $\{2\}$, ii) $\{-3\}$.

23. i) Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 2 της §1.12. Θα βρείτε σύνολο λύσεων το $\{4\}$.

ii) $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3\}$ iii) $\{5\}$.

iv) Να θέσετε $t^2-6t+2=y$, κτλ. Θα βρείτε ρίζες τις -1 και 7.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

1. Οι ζητούμενες συντεταγμένες είναι: i) $(3, -2)$ και $(-3, 2)$, ii) $(2, 3)$, iii) $(-3, -2)$.

2. Αν Π είναι η προβολή του Μ στον άξονα των συνημιτόνων έχουμε:

$\eta\mu\alpha=\overline{\Pi M}=\frac{1}{2}$ κτλ., οπότε $\eta\mu\alpha=\frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon\varphi\alpha=\sqrt{3}$ απ' όπου $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

3. Ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ των -1 και 2 είναι $\lambda=8$ και μεταξύ των 3 και 5 είναι $\lambda=89$.

Ο λόγος μεταβολής της g μεταξύ των -1 και 2 είναι $\lambda=\frac{7}{4}$ και μεταξύ των 3 και 5 είναι $\lambda=\frac{442}{225}$.

4. Για τη συνάρτηση f έχουμε $\lambda=-\frac{x_2^2+x_1x_2+x_1^2}{x_1^3x_2^3}<0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}_+^*$.

5. Για τη συνάρτηση f έχουμε $f(x)=\begin{cases}-3x+1, & \alpha\nu\ x<0\\ 1-x, & \alpha\nu\ 0\leqslant x<1\\ x-1, & \alpha\nu\ x\geqslant 1\end{cases}$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα για $x<1$ και γνησίως αύξουσα για $x\geqslant 1$.
Η g είναι σταθερή ίση με -1 για $x<1$ και ίση με 1 για $x>1$.

6. Για τη συνάρτηση f είναι:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+2, & \alpha\nu\ x<2\\ -2, & \alpha\nu\ x\geqslant 2,\end{cases} \quad \text{κτλ.}$$

Η συνάρτηση g είναι ομοπαραλληλική, γνησίως φθίνουσα στο $[-5, +5]$.

7. **α)** Βρίσκουμε τη μονοτονία της συνάρτησης f σε κάθε διάστημα και μετά κάνουμε τη γραφική της παράσταση. Εργαζόμαστε δηλαδή όπως στην εφαρμογή 1 της §2.9.

β) Ομοίως.

8. Η f είναι αύξουσα στο [1,2), σταθερή στο [2,5) και φθίνουσα στο [5,6]. Η τιμή της f στο x είναι:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & \alpha\nu\ 1\leqslant x<2\\ 3, & \alpha\nu\ 2\leqslant x<5\\ -3x+8, & \alpha\nu\ 5\leqslant x\leqslant 6\end{cases}$$

9. Οι ευθείες είναι παράλληλες, όταν $\lambda=\frac{2}{3}$ και κάθετες, όταν $\lambda=0$ ή $\lambda=-\frac{3}{10}$.

10. Εργαζόμαστε όπως στη §2.12.

11. **α)** Για την f ισχύει:

$$\forall x\in\mathbb{R}_1^*,\ f(-x)=\frac{1}{-x}+\varepsilon\varphi(-x) \text{ κτλ.}$$

β) Ομοίως.

12. **α)** Είναι υπερβολή με ασύμπτωτες τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

β) Είναι υπερβολή με ασύμπτωτες τις ευθείες $x=2$ και $y=1$.

γ) Είναι $\varphi(x)=2-\frac{6}{x+1}$ κτλ.

13. α) Εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή της §2.20.

β) Η συνάρτηση είναι της μορφής f με $f(x)=\alpha(x-k)^2$, με $\alpha=1$ και $k=3$.

γ) Η συνάρτηση είναι της μορφής f με $f(x)=\alpha x^2+k$, με $\alpha=-\frac{1}{3}$ και $k=1$.

14. α) Για την f ισχύει: $\forall x,\ f(-x)=\alpha(-x)^4+\beta(-x)^2+\gamma$ κτλ.

β) Ομοίως.

15. Εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή της §2.24.

16. α) Η περίοδος της f είναι $\frac{2\pi}{3}$

β) Η περίοδος της g είναι $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$

γ) Η περίοδος της φ είναι $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$.

17. Η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο 2.

18. Εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή 2 της §2.25.

19. α) Η f είναι περιοδική με περίοδο π (§2.25, Εφ. 2).

β) Θέτουμε $y=\Psi-1$ και $x=X$ και έχουμε $\Psi=3\text{συν}\frac{X}{2}$

γ) Θέτουμε $y=\Psi+1$ και $x=X+\frac{\pi}{4}$ κτλ.

20. α) Παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις του $\text{συν}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ και $-\text{ημ}x$ συμπίπτουν.

β) Παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ και $\text{συν}x$ συμπίπτουν.

21. α) Βρίσκουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=\frac{4}{x}$ και $y=x$.

Οι τετμημένες των σημείων τομής τους είναι οι λύσεις της εξίσωσης.

β) Βρίσκουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=x^2$ και $y=|x|$ κτλ.

γ) Βρίσκουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=x^2-4$ και $y=-\frac{3}{x}$ κτλ.

22. α) Βρίσκουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=|x|$ και $y=5$ κτλ.

β) Βρίσκουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=\frac{1}{x}$ και $y=x^2$ κτλ.

γ),δ),ε) Εργαζόμαστε όπως στην εφαρ. 4 της §2.29.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

1. Από την ισότητα (1) για $y=2x$ και $AB=5$ έχουμε: $(x=3,\ y=6)$ ή $(x=-1,\ y=-2)$.

2. Επειδή $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ οι τύποι (4) και (2) δίνουν: $\text{ημ}\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\text{συν}\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3. Αναλύουμε το α΄ μέλος και αντικαθιστούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γνωστών τόξων.

4. i) Κάνουμε τις πράξεις στο α΄ μέλος.

ii) Αρχίζουμε από το β΄ μέλος έχοντας υπόψη ότι: $\text{ημ}130^0=\text{συν}40^0$, $\text{συν}130^0=-\text{ημ}40^0$.

5. Μετασχηματίζουμε το α΄ μέλος με τους τύπους (4), (3) και κατόπιν παραγοντοποιούμε.

6. Μετασχηματίζουμε το α΄ μέλος με τους τύπους της §3.4 και βρίσκουμε $x=30^0$ ή $x=120^0$.

7. Είναι $\text{σφ}(\alpha+\beta)=\frac{\text{συν}(\alpha+\beta)}{\text{ημ}(\alpha+\beta)}$ κτλ.

8. Είναι $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma$ ή $\text{εφ}(\alpha+\beta)=\text{εφ}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$ κτλ.

9. Αρκεί να υπολογίσουμε τη γωνία $x=B\hat{A}\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Βρίσκουμε $x\simeq 26^0$ ή $x\simeq 64^0$.

10. Εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή 2, §3.4, οπότε για $x\in[0^0,360^0]$ βρίσκουμε: $x=0^0$ ή $x=112^0$ ή $x=360^0$.

11. i) Είναι $\text{συν}^4\theta-\text{ημ}^4\theta=(\text{συν}^2\theta+\text{ημ}^2\theta)\,(\text{συν}^2-\text{ημ}^2\theta)$ κτλ.

ii) Χρησιμοποιούμε τις ισότητες (8), (9), (9΄) και ύστερα παραγοντοποιούμε κάθε όρο του κλάσματος.

iii) Όπως στην άσκηση 7.

12. Υπολογίζουμε τα συνα, ημβ, ημ2α, συν2α και αναπτύσσουμε τα $\text{ημ}(2\alpha+\beta)$ και $\text{συν}(2\alpha-\beta)$,οπότε βρίσκουμε: $ημ(2α+β) = \frac{837}{845}$, $συν(2α-β) = \frac{836}{845}$.

13. Αναπτύσσουμε το $ημ(α+2β)$ και στον ένα όρο του αναπτύγματος σχηματίζουμε παράγοντα το $συν(α+β)$.

14. Βρίσκουμε με την ισότητα (14) πρώτα το $συν\frac{ω}{2}$ και κατόπιν με τις ισότητες (13) και (14) έχουμε:

$$ημ\frac{ω}{4} = \frac{\sqrt{14}}{4},\quad συν\frac{ω}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4},\quad εφ\frac{ω}{4} = \sqrt{7}.$$

15. i) Αναπτύσσουμε το α΄ μέλος με την ισότητα (9΄).

ii) Είναι $8συν^4θ = 2(2συν^2θ)^2 = \cdots$

16. Παρατηρούμε ότι ανά δυο τα τόξα είναι παραπληρωματικά και κατόπιν χρησιμοποιούμε την ισότητα (14).

17. Μετασχηματίζουμε το α΄ μέλος με την ισότητα (15).

18. Με πράξεις στο α΄ μέλος των δυο ισοτήτων καταλήγουμε στο β΄ μέλος των ισοτήτων της εφαρμογής 1, §3.6.

19. i) Η εξίσωση με την ισότητα (9΄) μετασχηματίζεται σε γνωστή μορφή που έχει λύσεις:

$$x = 2kπ \pm \frac{π}{3},\quad k \in \mathbb{Z}.$$

ii) Με τη βοήθεια της (9΄΄) βρίσκουμε $x = 2k_1π$ ή $x = 4k_2π + π$ $(k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$.

20. Εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή 4, §3.6 και βρίσκουμε $x = kπ + \frac{π}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$.

21. i) Μετασχηματίζουμε τα γινόμενα σε αθροίσματα, ii) Μετά τις πράξεις εργαζόμαστε όπως στην (i).

22. (i,ii) Μετασχηματίζουμε τα γινόμενα σε αθροίσματα.

23. Παρατηρούμε ότι: $Β+Γ = 90^0 \Rightarrow ημ(Β+Γ) = 1$, ...

24. Μετασχηματίζουμε τα γινόμενα σε αθροίσματα και έχουμε $\left(x = \frac{kπ}{5} \text{ ή } x = \frac{(2k+1)π}{8}\right)$

25. (i,ii) Μετασχηματίζουμε τα α΄ μέλη σε γινόμενα.

26. Βρίσκουμε: i) $1 + συνα = 2συν^2\frac{α}{2}$ ii) $1 - ημ2α = 2συν^2\left(\frac{π}{4} + α\right)$.

27. i) Μετασχηματίζουμε κάθε όρο του κλάσματος σε γινόμενο. ii) Όπως στην i). iii) Μετασχηματίζουμε σε άθροισμα καθένα από τα γινόμενα στους όρους του κλάσματος.

28. i) Μετασχηματίζουμε (διαδοχικά) το άθροισμα σε γινόμενο.

ii) Να χρησιμοποιήσετε την ισότητα (ΙΙ) της εφαρμογής 1, §3.9.

29. i) Μετασχηματίζουμε το $συνΑ + συνΒ$ σε γινόμενο ενώ έχουμε ακόμη: $συνΓ = 1 - 2ημ^2\frac{Γ}{2}$.

ii) Όπως στην εφαρμογή 2, §3.9.

30. i) Μετασχηματίζουμε το $ημα + ημβ$ σε γινόμενο και γράφουμε το $ημ(α+β)$ σύμφωνα με τον τύπο 8 της §3.5. ii) Τρέπουμε σε γινόμενο το $συνα + συνβ$ και γράφουμε το $συν(α+β)$ σύμφωνα με το τύπο 9΄ της §3.5.

31. i) Παραγοντοποιούμε και τα δυο μέλη οπότε βρίσκουμε $x = kπ + \frac{π}{2}$, $x = \frac{λπ}{2} + \frac{π}{8}$ $(k, λ \in \mathbb{Z})$

ii) Μετασχηματίζουμε το α΄ μέλος σε γινόμενο και βρίσκουμε:

$$x = \frac{kπ}{4},\quad x = \frac{2λπ}{7} + \frac{π}{14},\quad x = -2λπ + \frac{π}{2}\quad (k, λ \in \mathbb{Z}).$$

32. Με μετασχηματισμό του συνxσυνy σε άθροισμα αναγόμαστε στο σύστημα

$$\begin{cases} x + y = \frac{π}{2} \\ x - y = 2kπ + \frac{π}{6} \end{cases}$$

από το οποίο βρίσκουμε:

$$\left(x = kπ + \frac{π}{3},\ y = -kπ + \frac{π}{6}\right) \text{ ή } \left(x = kπ + \frac{π}{6},\ y = -kπ + \frac{π}{3}\right)\quad (k \in \mathbb{Z}).$$

33. Εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ.

34. Από τη $Β = 2Α$ έπεται η $\frac{ημΒ}{ημΑ} = 2συνΑ$, η οποία με τη βοήθεια του νόμου των ημιτόνων δίνει τη ζητούμενη.

35. Είναι: $\frac{α^2}{ημ^2Α} = 4R^2$ κτλ.

36. Με το νόμο των ημιτόνων βρίσκουμε: $\hat{Β} = \hat{Γ}$.

37. Αντικαθιστούμε τα συνΒ, συνΓ με τα ίσα τους από το νόμο των συνημιτόνων.

38. Παρατηρούμε ότι $Α < 90^0 \Rightarrow συνΑ > 0$ και $Α > 90^0 \Rightarrow συνΑ < 0$.

39. Εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων.

40. i) Υπολογίζουμε το ύψος ΓΔ στο τρίγωνο ΑΔΓ.

ii) Αντικαθιστούμε το ημΑ από το νόμο των ημιτόνων.

41. Εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή 2 §3.12.

42. Εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή 3 §3.12, οπότε $F \simeq 16{,}33$ kp.

43. Υπολογίζουμε το ύψος του παραλληλογράμμου. $E \simeq 26{,}764\ cm^2$.

44. Με το νόμο των συνημιτόνων από το τρίγωνο $A\Pi_1\Pi_2$ έχουμε: $\Pi_1\Pi_2 \simeq 326{,}5$ km.

45. Με το νόμο ημιτόνων από το τρίγωνο $A\Pi_1\Pi_2$ βρίσκουμε $A\Pi_2 \simeq 75$ μίλ. Άρα $\upsilon \simeq 15$ μίλ. την ώρα.

46. Βρίσκουμε τη μια γωνία του οικοπέδου και κατόπιν το εμβαδό του (ασκ. 40.) Οι διαστάσεις είναι περίπου 15m, 9m.

47. Υπολογίζουμε πρώτα την απόσταση θάμνος-βάση πύργου και κατόπιν βρίσκουμε: Πλάτος ποταμού 155m, ύψος λόφου 47m.

48. Βρίσκουμε πρώτα ότι $B = 80^0$ και κατόπιν από το τρίγωνο ΑΒΣ βρίσκουμε $AB \simeq 12{,}9$m.

49. Αφού υπολογίσουμε πρώτα το ΑΒ, βρίσκουμε $\upsilon \simeq 187$m ή $\upsilon \simeq 59$m.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

1. Από τους γενικούς όρους για $\nu = 1,2,3,4,5$ βρίσκουμε, για την

(α_ν): $-5, -2, 1, 4, 7$ $\quad$ (β_ν): $1, 4, 9, 16, 25$ $\quad$ (γ_ν): $-1, 2, -3, 4, -5$

(δ_ν): $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}$ $\quad$ (ε_ν): $0, 2, 0, 2, 0$ $\quad$ (ζ_ν): $1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}, 1$

2. Εργαστείτε όπως στην §4.3. (i) $\alpha_1 = 4, \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 5$ $\quad$ (ii) $\beta_1 = \frac{21}{2}, \beta_{\nu+1} = \beta_\nu + 3$

(iii) $\gamma_1 = 1, \gamma_{\nu+1} = \gamma_\nu + 2\sqrt{\gamma_\nu} + 1$ $\quad$ (iv) $\delta_1 = 1, \delta_{\nu+1} = \frac{\delta_\nu}{1+\delta_\nu}$.

3. Με τα κριτήρια και τις παρατηρήσεις της § 4.4 βρίσκουμε: (α_ν) και (β_ν) γνησίως αύξουσες, (ε_ν) γνησίως φθίνουσα, (γ_ν), (δ_ν) και (ζ_ν) δεν είναι μονότονες.

4. Απόδειξη με επαγωγή.

5. Εφαρμόστε τον τύπο (2). Είναι $\alpha_7 = 54$.

6. Το υψόμετρο κάθε ορόφου είναι μεγαλύτερο κατά 2,90m από το υψόμετρο του προηγούμενού του ορόφου. Πρέπει $\alpha_\nu \leqslant 30$. (10 όροφοι).

7. Οι ακέραιοι από το λ μέχρι και το μ είναι όροι αριθμητικής προόδου.

8. Εφαρμόστε τον τύπο (2).

9. Χρησιμοποιείστε την εφαρμ. 2, §4.7.

10. Βρείτε το μικρότερο και το μεγαλύτερο πολλαπλάσιο του 7 μεταξύ 150 και 300 και εφαρμόστε τον τύπο (2), §4.6. $(\nu = 21)$.

11. Εφαρμόστε τον τύπο (6). (78 κτύποι).

12. Εφαρμόστε τον τύπο (7). (30,5).

13. Εφαρμόστε τον τύπο (7).

14. Εργαστείτε όπως στην εφαρμ. (2). (i) $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}$, (ii) $\frac{\nu(\nu+1)(4\nu-1)}{3}$.

15. Χρησιμοποιείστε τον τύπο (10).

16. Να παραστήσετε $\alpha - 3x$, $\alpha - x$, $\alpha + x$, $\alpha + 3x$ τους 4 όρους της προόδου (δηλαδή $\omega = 2x$) και να εργαστείτε όπως στην εφαρμ. 3.

17. Να παραστήσετε $x - \omega$, x, $x + \omega$ τις πλευρές του τριγώνου.

18. Εφαρμόστε τους τύπους (3), §4.7 και (10), §4.8.

19. Εφαρμόστε τον τύπο (2) §4.6.

20. Να παραστήσετε με λ τους ίσους λόγους και να χρησιμοποιήσετε τον τύπο (3) § 4.7.

21. Αν ω είναι η διαφορά της προόδου, αποδείξτε πρώτα ότι $\frac{1}{\alpha_1\alpha_2} = \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}\right)\frac{1}{\omega}$.

22. Εφαρμόστε τον τύπο (2) §4.10.

23. Χρησιμοποιείστε τον τύπο (2) §4.10. $\alpha_\nu = (-1)^{\nu-1}\frac{1}{2^{\nu-4}}$.

24. Εργαστείτε όπως στην εφαρμ. 3 §4.11. $(x = 0$ και $x = 4)$.

25. (i) Αν x, y είναι δυο όροι που ισαπέχουν από τους α_1 και α_ν, τότε $xy = \alpha_1\alpha_\nu$.

(ii) Λάβετε υπόψη τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού και την (i).

26. Εφαρμόστε τον τύπο (4). (61875).

27. Εφαρμόστε τον τύπο (5).

28. Εργαστείτε όπως στις εφαρμογές (3) §4.11 και (4) §4.8.

29. Παρατηρείστε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι τετράγωνο ρητού αριθμού.

30. Βρείτε πρώτα το λόγο $\lambda = \sqrt[2k]{\frac{A}{B}}$. Χρησιμοποιείστε τη σημείωση της §4.9. $\alpha_\mu = \sqrt{AB}$.

31. Εφαρμόστε τον τύπο (2) §4.10.

32. Παρατηρείστε ότι ο πληθυσμός της πόλης στο τέλος κάθε έτους δίνεται από τους διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

33. Αν x, y, ω οι ακέραιοι, τότε με εφαρμογή των τύπων (3) §4.7 και (5) §4.11 καταλήγουμε σε σύστημα 3 εξισώσεων.

34. Βρείτε πρώτα το λόγο της προόδου. $\Sigma_7 = \dfrac{463}{1458}$, $\Sigma_8 = \dfrac{1261}{4374}$.

35. Εργαστείτε όπως στην εφαρμ. 1. Θα βρείτε 3, 6, 12 ή 12, 6, 3.

36. (i), (ii), (iii) Εφαρμόστε τον τύπο (7) §4.12. (i) $\dfrac{x^{\nu+1}-\alpha^{\nu+1}}{x-\alpha}$, (ii) $\dfrac{x^{\nu+1}+\alpha^{\nu+1}}{x+\alpha}$,

(iii) $\dfrac{\alpha^{\nu+1}-\beta^{\nu+1}}{\alpha^{\nu-1}(\alpha-\beta)}$ (iv) Αν $\Sigma = 1+2\alpha+\cdots+\nu\alpha^{\nu-1}$, βρείτε πρώτα τη διαφορά $\Sigma-\alpha\Sigma$.

$$\Sigma = \frac{1-\alpha^{\nu}}{(1-\alpha)^2} - \frac{\nu\alpha^{\nu}}{1-\alpha}.$$

37. Εφαρμόστε τον τύπο (7) §4.12.

38. Ομοίως τον τύπο (9) §4.12. (6 882 603 δρχ.).

39. Εφαρμόστε τον τύπο (8) §4.12. (4 543 770 δρχ.).

40. Αρκεί να βρείτε το άθροισμα των 31 πρώτων όρων γεωμ. προόδου. (21474836,47 δρχ.).

41. Αρκεί να λύσετε στο $\mathbb{N}^*$, για κάθε $\varepsilon>0$, τις ανισώσεις:

(i) $\left|\dfrac{(-1)^{\nu}}{2\nu+1}\right| < \varepsilon$, (ii) $\left|\dfrac{5}{3\nu+4}\right| < \varepsilon$, (iii) $\left|\dfrac{-7(-1)^{\nu}}{9\nu+7}\right| < \varepsilon$, (iv) $\left|\left(-\dfrac{-2}{21}\right)^{\nu}\right| < \varepsilon$.

42. Αρκεί να δείξετε ότι: (i) $\lim\left(\dfrac{\nu}{\nu-1}-1\right)=0$, (ii) $\lim\left(\dfrac{2\nu}{\nu+4}-2\right)=0$,

(iii) $\lim\left(\dfrac{2\nu+3}{5(\nu+2)}-\dfrac{2}{5}\right)=0$

43. Εφαρμόστε τους τύπους (12) §4.15. (i) 25, (ii) $25\dfrac{3}{5}$, (iii) $\dfrac{\alpha+1}{\alpha}$, (iv) $\dfrac{\alpha^2}{\alpha+\beta}$.

44. Εργαστείτε όπως στην εφαρμ. 2 §4.15. (i) $\dfrac{764}{33}$, (ii) $\dfrac{2954}{8325}$, (iii) $\dfrac{4739}{900}$.

45. Δείξτε ότι οι όροι του αθροίσματος είναι όροι γεωμ. προόδου με $\alpha_1 = \dfrac{1}{1+\alpha}$, $|\lambda|<1$.

46. Έχουμε το σύστημα: $\alpha+\alpha\lambda+\alpha\lambda^2+\alpha\lambda^3=65$ και $\dfrac{\alpha}{1-\lambda}=81$.

Βρίσκουμε τις προόδους: 27, 18, 12, 8, ... (φθίνουσα) και −27, 18, −12, 8, ... (όχι μονότονη).

47. Παρατηρείστε ότι τα Σ_1, Σ_2, Σ_3 είναι αθροίσματα άπειρων όρων γεωμ. προόδων.

48. Οι περίμετροι και τα εμβαδά των τριγώνων είναι όροι γεωμ. προόδου με $|\lambda|<1$.

(i) 6α, (ii) $\dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{3}$.

49. Εργαστείτε όπως στην άσκ. 48. (i) $2\pi\rho^2$, (ii) $4\rho^2$.

50. (i) $\Sigma = \dfrac{\alpha^2}{\alpha-\beta}$ (ii) $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

1. Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες της §5.2

2. (i) $\alpha = 3$ (ii) $\alpha = 2$ (iii) $\alpha = 13$

3. (i) $f_{\frac{1}{2}}(7)<f_{\frac{1}{2}}(-7)$ (ii) $f_5(-\frac{3}{5})<f_5(0,7)$ (iii) $f_3(2)<f_4(2)$

(iv) $f_{\frac{1}{2}}(5)>f_{\frac{1}{3}}(5)$ (v) $f_4(-3)>f_6(-3)$ (vi) $f_{\frac{1}{4}}(-\frac{1}{3})<f_{\frac{1}{5}}(-\frac{1}{3})$

4. $\alpha<-1$

5. $x+\dfrac{1}{x}>0$ κτλ. Το υποσύνολο που ζητάμε είναι το $\mathbb{R}^*_+$

6. Υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ είναι $x_{\nu+1} = x_{\nu}+\lambda$, κτλ.

7. (i) $\alpha<-1$ ή $\alpha>2$ (ii) $\alpha>2$

9. (i) $x = -\dfrac{5}{3}$ (ii) Είναι $1 = (\sqrt{3}+1)^0$ κτλ. ($x = \pm 2$, $x = \pm 1$)

10. (i) Είναι $2^{x+3} = 2^3\cdot 2^x$ κτλ. Ρίζα ο 3 (ii) $x = 2$

11. (i) Να θέσετε $5^{x^2} = y$ ($x = 0$) (ii) Θα καταλήξετε στην $(\frac{3}{5})^x = \frac{5}{3}$ ($x = -1$)

12. (i) $x = 21$, $y = 6$ (ii) $x = 2$, $y = 1$

13. (i) Να λάβετε υπόψη σας ότι $1 = 5^0$ ($x = 4$, $y = 5$) (ii) $x = 2$, $y = 1$

14. Είναι (§5.7) (i) $\log_5 3 > \log_5 \frac{1}{3}$ (ii) $\log_{\frac{1}{2}} 7 > \log_{\frac{1}{2}} 11$

(iii) $\log_{1,5}(x+1) < \log_{1,5}(x+1)^2$ (iv) $\log_{0,3}(x+3) > \log_{0,3}(2x+3)$

15. (i) $\log_x 81 = -4 \Leftrightarrow x^4 = 81$ κτλ. $\left(x = \frac{1}{3}\right)$ (ii) $x = 9$ (iii) $x = 243$

16. Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες της §5.8

17. Είναι: $x^2 + y^2 = 7xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 9xy$ κτλ.

18. (i) $-1 < x < 1$ (ii) Να εφαρμόσετε την ιδιότητα 1 της §5.8

20. Να εφαρμόσετε τις ιδιότητες της §5.8

21. $\log 5 \simeq 0{,}7$, $\log 6 \simeq 0{,}78$, $\log 8 \simeq 0{,}9$, $\log 50 \simeq 1{,}7$, $\log \sqrt[3]{24} \simeq 0{,}46$

22. Να βρείτε πρώτα το logA. Είναι $A \simeq 23{,}64$

23. Να πάρετε τους λογάριθμους και των δυο μελών της εξίσωσης. $\left(x \simeq \frac{8}{9}\right)$

24. (i) $x = 8$ (ii) Ρίζες οι $x_1 = 2$ και $x_2 = 1$

25. (i) $x = 13$ (ii) Να λάβετε υπόψη σας ότι $x = \log 10^x$ $(x = 1)$

26. (i) $x = 100$, $y = 10$ (ii) $x_1 = 25$, $y_1 = 1$ και $x_2 = \frac{7}{2}$, $y_2 = \frac{50}{7}$

27. Να χρησιμοποιήσετε την ισότητα (3) της εφαρμ. 3 (§5.10)

28. (i) Προκύπτει από την ισότητα (3) της εφαρμ. 3 (§5.10)

(ii) Να χρησιμοποιήσετε το προηγούμενο. Θα βρείτε $\log_8 12 = \frac{2\alpha + 1}{3\alpha}$

(iii) $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[3]{3} = -\frac{1}{6}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

1. Να εργαστείτε όπως στο παραδ. 3 της §6.2.

2. (i) Είναι $|x^2 - 4x - 5 - (-9)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 - 4x + 4| < \varepsilon$ κτλ.

(ii) Να εργαστείτε όπως στο παραδ. 4 της §6.2.

3. (i) Είναι $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$ κτλ.
(ii) Είναι $x^3 - 8x = x(x^2 - 8)$ κτλ.

4. (i) -20 (ii) 0

5. (i) 4 (ii) -2

6. Να εργαστείτε όπως στην εφαρμ. 3 της §6.3.
Θα βρείτε: (i) 2 (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{7}{13}$

7. Να εργαστείτε όπως στην προηγούμενη άσκηση.
Θα βρείτε: (i) 3 (ii) $\frac{1}{3}$ (iii) -4

8. Να εργαστείτε όπως στην εφαρμογή 4 της §6.3.
Θα βρείτε: (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $-\frac{1}{2}$

9. Να εργαστείτε όπως στην προηγούμενη άσκηση:
(i) 1 (ii) $\frac{1}{2}$

10. Να λάβετε υπόψη σας τα συμπεράσματα των παραγράφων 6.5 και 6.6.

11. Όπως στην προηγούμενη άσκηση.

12. Ομοίως, όπως στην άσκηση 10.

13. Να βρείτε πρώτα το πεδίο ορισμού κάθε συνάρτησης.

14. Να εργαστείτε όπως στα παραδείγματα της §6.10.
(i) 3 (ii) 4 (iii) 27

15. Όπως στην προηγούμενη άσκηση. Θα βρείτε:
(i) $f'(x) = 5$ (ii) $f'(x) = \frac{2}{x^3}$ (iii) $f'(x) = 4x^3$ (iv) $f'(x) = 15x^2$

16. Να λάβετε υπόψη σας τις ιδιότητες της §6.12 και τις δυο προηγούμενες ασκήσεις:

(i) $f'(x) = 5 + \frac{2}{x^3}$ (ii) $g'(x) = \frac{x^3(5x^3 + 12)}{(5x^3 + 3)2}$

17. (i) $f'(x) = 9x^2 - 1$ (ii) $f'(x) = x^2 - 6x^3 + 2x_4$ (iii) $f'(x) = 10x^4 - 3x^2 - 16x$

18. (i) $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$ (ii) $g'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}$ (iii) $h'(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$

19. (i) $f'(x) = \dfrac{2x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 3}{(x-1)^4}$ (ii) $g'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x}}$

20. (i) $f'(x) = 2\eta\mu^2 x$ (ii) $f'(x) = \dfrac{(\eta\mu^2 x - x^2)(x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)}{x^2 \eta\mu^2 x}$ (iii) $f'(x) = \dfrac{\eta\mu x(1+x) + \sigma\upsilon\nu x(1-x)}{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2}$

(iv) $f'(x) = -\varepsilon\varphi^2 x$ (v) $f'(x) = -\dfrac{2}{(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2}$ (vi) $f'(x) = \dfrac{2}{(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)^2}$

21. (i) $f'(x) = \dfrac{2}{x}$ (ii) $f'(x) = \ln x$ (iii) $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ (iv) $f'(x) = 2e^x \sigma\upsilon\nu x$

22. Να βρείτε πρώτα την f΄

23. Να λάβετε υπόψη τα θεωρήματα της §6.14.

24. Όπως στην προηγούμενη άσκηση.

25. Όπως στην άσκηση 23.

26. Να εργαστείτε όπως στα παραδείγματα της §6.16.

27. Να εργαστείτε όπως στις εφαρμογές της §6.16.

28. Όπως στην προηγούμενη άσκηση.

29. Όπως στην άσκηση 27.

30. Να θεωρήσετε τη συνάρτηση f με $f(x) = x(12-x)$ κτλ.

31. Η απόσταση του σημείου $(x, f(x))$ της C από το A(3,0) είναι $\sqrt{(x-3)^2 + \dfrac{x^4}{16}}$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΓΩΝΙΑ	ημ	συν	εφ	ΓΩΝΙΑ	ημ	συν	εφ
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.036
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.072
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.111
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.150
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.192
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0,7771	0,6293	1,235
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	7.7880	0.6157	1.280
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.327
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.376
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.428
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.483
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.540
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.600
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.664
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.732
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.804
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.881
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.963
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.050
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.145
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.246
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.356
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.475
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.605
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.747
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.904
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.078
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.271
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.487
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2586	3.732
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.011
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.332
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.705
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.145
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.671
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.314
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.115
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.144
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.514
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.43
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.30
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.08
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.64
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.29
45°	0.7071	0.7071	1.000				

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

3. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

4. ΠΡΟΟΔΟΙ

5 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

6 ΤΟΠΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ