Ασφάλεια Υπολογιστικών Συστημάτων

7ο Εξάμηνο

Ασύμμετρη Κρυπτογράφηση

(Κρυπτογραφία Δημόσιου Κλειδιού)

Διδάσκων : Δρ. Παρασκευάς Κίτσος

https://ecsalab.ece.uop.gr/

Καθηγητής

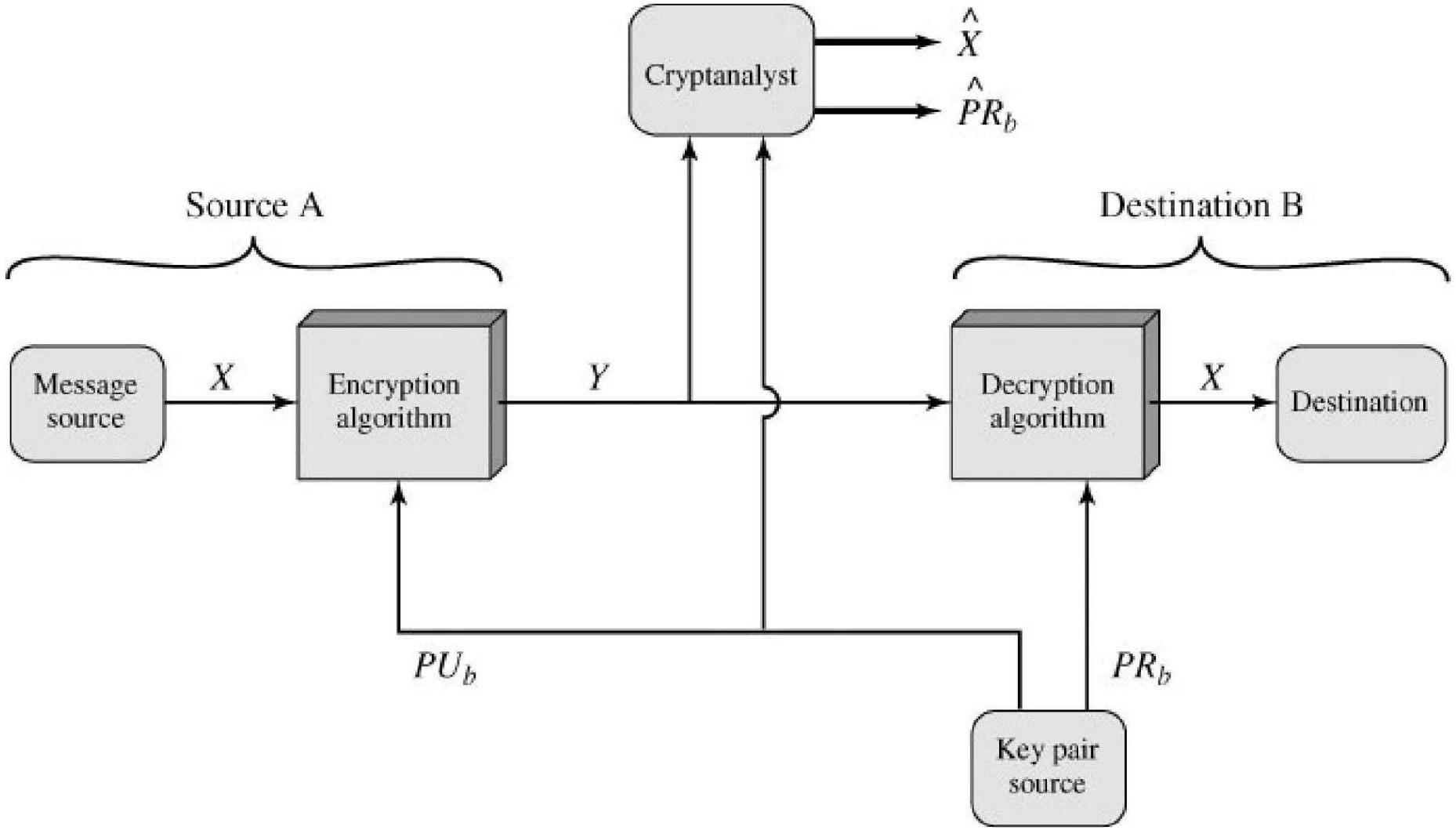
Εργαστήριο Ηλεκτρονικών Κυκλωμάτων, Συστημάτων και Εφαρμογών (ECSA Lab.)

e-mail: kitsos@uop.gr

ΔΙΑΡΘΡΩΣΗ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

- Αρχές Κρυπτογράφησης Δημοσίου Κλειδιού
- Κρυπτογραφία Δημοσίου Κλειδιού
  - Θεωρία Αριθμών (η συνάρτηση φ(n) του Euler)
- Ο Αλγόριθμος RSA
- Ο Αλγόριθμος DIFFIE-HELLMAN

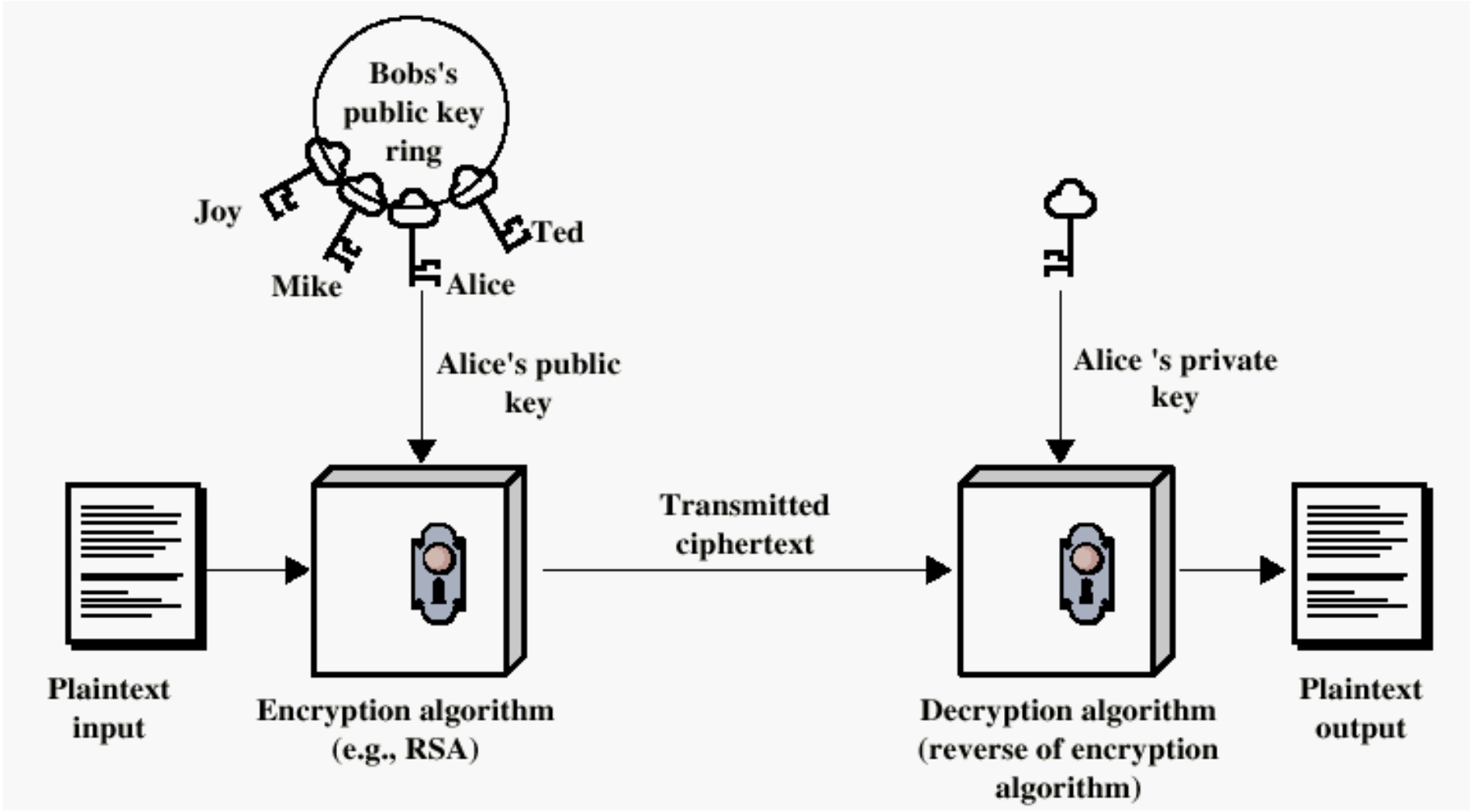
ΣΕΝΑΡΙΟ ΔΗΜΟΣΙΟΥ ΚΛΕΙΔΙΟΥ: ΜΥΣΤΙΚΟΤΗΤΑ



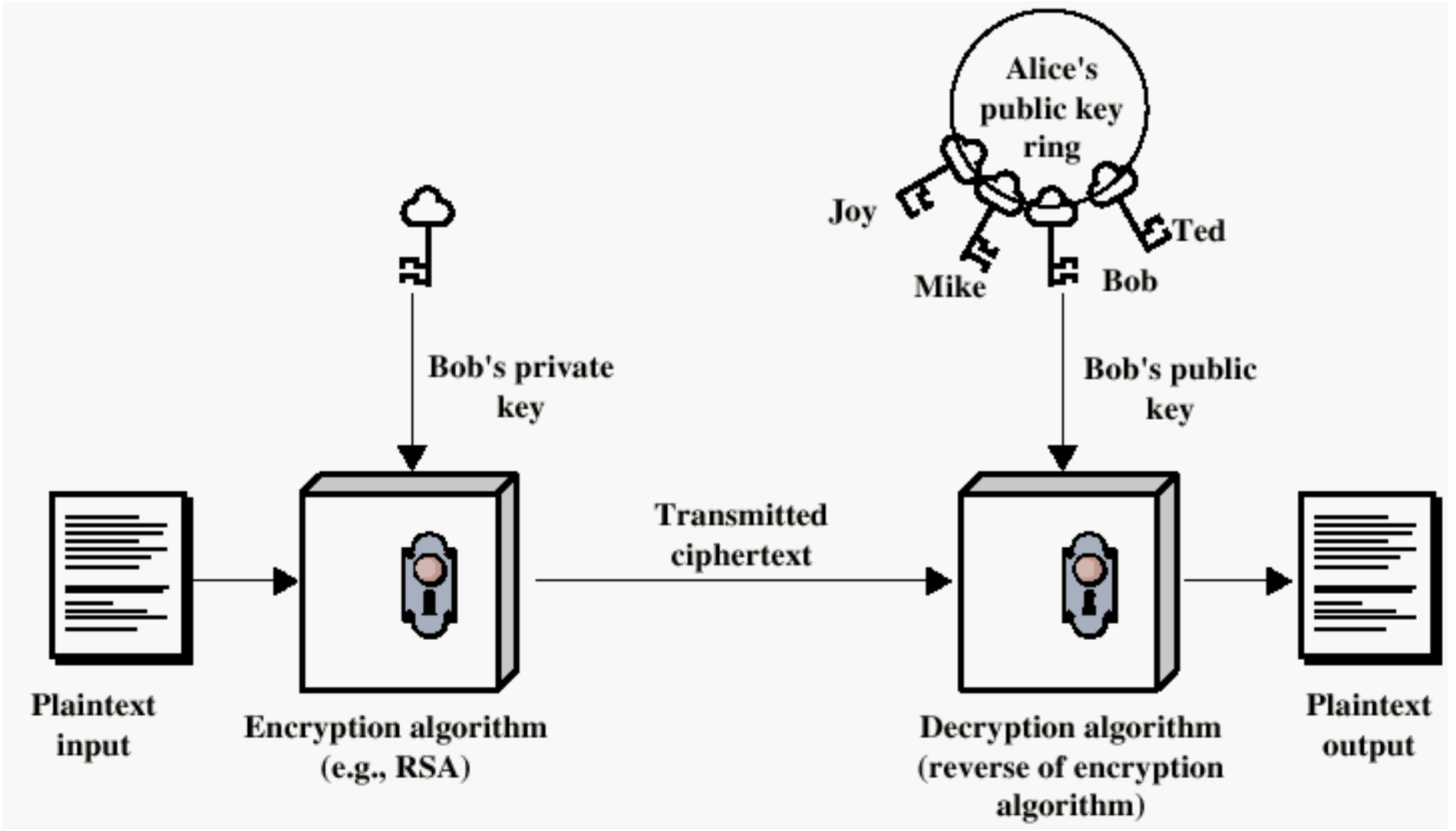
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΡΥΠΤΟΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΗΜΟΣΙΟΥ ΚΛΕΙΔΙΟΥ

- Χρήσεις / Εφαρμογές:
  - **Encryption/decryption:**
    Ο αποστολέας κρυπτογραφεί το μήνυμα με το δημόσιο κλειδί του παραλήπτη. Ο παραλήπτης αποκρυπτογραφεί το μήνυμα με το μυστικό κλειδί του
  - **Digital Signature:**
    Ο αποστολέας υπογράφει ένα μήνυμα με το προσωπικό του μυστικό κλειδί. Ο παραλήπτης πιστοποιεί το μήνυμα με το δημόσιο κλειδί του αποστολέα
  - **Key Exchange:**
    Οι δύο πλευρές συνεργάζονται για να ανταλλάξουν το κλειδί συνοδού (session key)

ΚΡΥΠΤΟΓΡΑΦΗΣΗ ΔΗΜΟΣΙΟΥ ΚΛΕΙΔΙΟΥ



ΠΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΔΗΜΟΣΙΟΥ ΚΛΕΙΔΙΟΥ



ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ ΚΡΥΠΤΟΓΡΑΦΙΑΣ ΔΗΜΟΣΙΟΥ ΚΛΕΙΔΙΟΥ (1/2)

- Είναι υπολογιστικά εφικτό για μια οντότητα Β να δημιουργήσει ένα ζεύγος κλειδιών:

  $Public\ key\ KUb, Private\ key\ KRb : \{KUb, KRb\}$

- Είναι εύκολο για τον αποστολέα να δημιουργήσει το κρυπτογράφημα

$$C = E_{KUb}(M)$$

- Είναι εύκολο για το δέκτη να αποκρυπτογραφήσει το μήνυμα

$$M = D_{KRb}(C) = D_{KRb}[E_{KUb}(M)]$$

ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ ΚΡΥΠΤΟΓΡΑΦΙΑΣ ΔΗΜΟΣΙΟΥ ΚΛΕΙΔΙΟΥ (2/2)

- Είναι υπολογιστικά αδύνατο να δημιουργηθεί το private key (KR_b) γνωρίζοντας το public key (KU_b)
- Είναι υπολογιστικά αδύνατο να ανακτηθεί ένα μήνυμα M, γνωρίζοντας το Public key KU_b και το κρυπτογραφημένο κείμενο C
- Ένα από τα δύο κλειδιά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κρυπτογράφηση ενώ το άλλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποκρυπτογράφηση

$$M = D_{KRb}[E_{KUb}(M)] = D_{KUb}[E_{KRb}(M)]$$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΡΥΠΤΟΓΡΑΦΙΑΣ ΔΗΜΟΣΙΟΥ ΚΛΕΙΔΙΟΥ (1/2)

- **RSA, Diffie-Hellman, DSS, Elliptic Curve**

RSA :

- Ron Rivest, Adi Shamir & Len Adleman, MIT 1977
- Ιδιαίτερα γνωστός και χρησιμοποιούμενος αλγόριθμος

Diffie-Hellman :

- Επιτρέπει την ασφαλή ανταλλαγή κλειδιού
- Οι υπολογισμοί στηρίζονται στην κατηγορία των discrete logarithms

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΡΥΠΤΟΓΡΑΦΙΑΣ ΔΗΜΟΣΙΟΥ ΚΛΕΙΔΙΟΥ (2/2)

- **Digital Signature Standard (DSS)**
  - Επιπλέον χρησιμοποιεί την Hash Function SHA-1
  - Δεν χρησιμοποιείται για σκοπούς κρυπτογράφησης ή για σκοπούς ανταλλαγής κλειδιών, αλλά μόνο για ***πιστοποίηση***
- **Elliptic-Curve Cryptography (ECC)**
  - Καλή προσέγγιση για μικρά μεγέθη δεδομένων
  - Ιδιαίτερα πολύπλοκος μηχανισμός

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΡΓΟΡΙΘΜΩΝ ΔΗΜΟΣΙΟΥ ΚΛΕΙΔΙΟΥ

	Encryption/ Decryption	Digital Signature	Key Exchange
RSA	Yes	Yes	Yes
Diffie-Hellman	No	No	Yes
DSS	No	Yes	No
Elliptic Curve	Yes	Yes	Yes

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ φ(n) ΤΟΥ EULER

- Αν ένας ακέραιος p είναι πρώτος ισχύει:
  - $\phi(p) = p - 1$
- Επίσης αν υποθέσουμε ότι έχουμε δύο πρώτους αριθμούς p και q με $p \neq q$. Το γινόμενό τους είναι $n = p * q$
- Και τότε ισχύει:
  - $\phi(n) = \phi(p*q) = \phi(p)*\phi(q) = (p - 1)*(q - 1)$
- Π.χ. $\phi(11) = 11-1=10$ και

  $\phi(33)=\phi(3*11)=(3-1)*(11-1)=20$

Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ RSA

- Ο RSA δέχεται απλό κείμενο μεγέθους από 0 έως n - 1 bits
- Ο RSA εξάγει κρυπτογράφημα από 0 έως n - 1 bits
  - Τυπικές τιμές του *n* είναι 512-, 1024- ή 2048-bit
  - Το απλό κείμενο συμβολίζεται με M
  - Το κρυπτογράφημα συμβολίζεται με C

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΛΕΙΔΙΩΝ ΣΤΟΝ RSA

1. Επιλογή με τυχαίο τρόπο δύο πρώτων μεγάλων αριθμών:

   p, q
2. Υπολογισμός του γινομένου: $n = p*q$
3. Επιλογή ενός περιττού ακέραιου αριθμού e, ο οποίος είναι πρώτος σε σχέση με τη συνάρτηση $\phi(n)$. **Θα πρέπει να ισχύει $1<e<\phi(n)$.**
4. Υπολογισμός $d=e^{-1} \bmod \{ (p-1)*(q-1) \}$
5. Δημόσιο Κλειδί: $\mathbf{P_B = (e, n)}$, Μυστικό Κλειδί: $\mathbf{S_B = (d, n)}$

Κρυπτογράφηση m (message): $\boldsymbol{Cipher = M^e \bmod (n)}$

Αποκρυπτογράφηση Cipher : $\boldsymbol{M = Cipher^d \bmod (n)}$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ RSA…

- Δεν υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος να εντοπίζει τους πρώτους παράγοντες ενός σύνθετου ακεραίου
  - Οι πρώτοι αριθμοί p, q θα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλοι ώστε ο καλύτερος γνωστός αλγόριθμος παραγοντοποίησης να απαιτεί μεγαλύτερο χρόνο από αυτόν με τον οποίο πρέπει να προστατευτούν τα δεδομένα

p, *q*	*n*	χρόνος προστασίας
256 bits	512 bits	Μερικές εβδομάδες
512 bits	1024 bits	50-100 χρόνια
1024 bits	2048 bits	> 100 χρόνια
2048 bits	4096 bits	Περίπου την ηλικία του σύμπαντος

…ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ RSA

- Ο υπολογισμός μεγάλης δύναμης ενός αριθμού σε modular αριθμητική μπορεί να γίνει σε επιτρεπτό χρόνο
  - Οι αλγόριθμοι εκθετοποίησης παρουσιάζουν πολυπλοκότητα που είναι γραμμικώς ανάλογη με το μέγεθος των ακεραίων που λαμβάνουν μέρος στην εκθετική πράξη

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ RSA: ΕΠΙΛΟΓΗ ΚΑΙ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΚΛΕΙΔΙΩΝ

- p = 11, q = 3 → τυχαία επιλογή
- n = pq=33
- ϕ(n) = (p - 1)(q - 1) = 20
- Επιλογή του e έτσι ώστε να είναι αμοιβαία πρώτος του ϕ(n) = 20, e = 3 → επιλογή
- Υπολογισμός d έτσι ώστε $de \equiv 1 \bmod 20$, $d < 20$, d = 7, αφού $3 \times 7 = 21$ και $21 \equiv 1 \bmod 20$ → υπολογισμός

ΔΗΜΟΣΙΟ
3, 33

ΙΔΙΩΤΙΚΟ
7, 33

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ RSA: ΚΡΥΠΤΟΓΡΑΦΗΣΗ/ΑΠΟΚΡΥΠΤΟΓΡΑΦΗΣΗ

- Κρυπτογράφηση του μηνύματος M = 7:
  - $C = 7^3 \bmod 33 = 13$.
- Αποκρυπτογράφηση του κρυπτογραφήματος C = 13:
  - $M = 13^7 \bmod 33 = (13^3 \times 13^3 \times 13) \bmod 33 = (19 \times 19 \times 13) \bmod 33 = 7$.

ΛΥΣΗ ΤΗΣ $de \equiv 1 \bmod \phi(n)$ (1/2)

- Επίλυση με χρήση της ανεπτυγμένης μορφής του αλγορίθμου του Ευκλείδη

ΛΥΣΗ ΤΗΣ $de \equiv 1 \bmod \phi(n)$ (2/2)

- **Απλοϊκή λύση:**

  Υπολογισμός του d έτσι ώστε να ισχύει $ed \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$ ή $d=3^{-1} \pmod{20}$ ή υπολογισμός του d έτσι ώστε η $\phi(n)=20$ να διαιρεί τη παράσταση $ed=3d$ και να έχει υπόλοιπο 1 [$ed \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$ ή

  $ed \pmod{\phi(n)}=1 \pmod{\phi(n)} \Rightarrow ed \pmod{\phi(n)}=1$]
- Δοκιμές για d=2,3,4,…
- Υπολογίζεται ότι d=7

ΕΠΙΘΕΣΕΙΣ ΣΤΟΝ RSA

- Υπάρχουν 3 συνολικά τρόποι επίθεσης στον RSA
  - Επίθεση βίαιης δύναμης.
    - Εξαντλητική δοκιμή όλων των πιθανών κλειδιών
  - Μαθηματικές επιθέσεις
    - Παραγοντοποίηση του γινομένου δύο πρώτων αριθμών
  - Χρονικές επιθέσεις
    - Καταμέτρηση του χρόνου αποκρυπτογράφησης

Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ DIFFIE-HELLMAN: ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

- Ο πρώτος αλγόριθμος δημόσιου κλειδιού που εφευρέθηκε το 1976 είναι ο Diffie-Hellman
- Το πρωτόκολλο Diffie-Hellman αναφέρεται στην κρυπτογραφία δημόσιου κλειδιού αλλά χρησιμοποιείται κατά βάση σαν πρωτόκολλο ανταλλαγής (κρυφού ιδιωτικού) κλειδιού
- Στόχος είναι η ανταλλαγή (εγκατάσταση) ενός μυστικού ιδιωτικού κλειδιού μεταξύ δύο (άγνωστων) χρηστών μέσω ενός μη ασφαλούς καναλιού επικοινωνίας

Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ DIFFIE-HELLMAN (1/3)

- Θεωρούμε την Αλίκη (Alice) και τον Βύρωνα (Bob) που θέλουν να επικοινωνήσουν μέσω του πρωτοκόλλου Diffie-Hellman
- Αρχικά τα δύο πρόσωπα συμφωνούν σε δύο (δημόσιους) μεγάλους πρώτους αριθμούς τον g και τον p
- Η επιλογή των αριθμών γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε ο g να είναι πρωτογενής ρίζα του p

Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ DIFFIE-HELLMAN (2/3)

- Πρωτογενής ρίζα (primitive root) ονομάζουμε τον ακέραιο αριθμό g, του οποίου οι δυνάμεις παράγουν όλους τους αριθμούς από το 1 έως το p-1.
- Αυτό σημαίνει ότι, αν g είναι πρωτογενής ρίζα του πρώτου αριθμού p, τότε οι αριθμοί g mod p, g^2 mod p, …, g^{p-1} mod p είναι διαφορετικοί και αποτελούν τους ακεραίους από το 1 μέχρι το p-1.
  - Π.χ. n = 14.
  - Ο αριθμός 14 είναι αμοιβαία πρώτος με τους 1, 3, 4, 9, 11 και 13.
  - Ο αριθμός 3 είναι πρωτογενής ρίζα του αριθμού 14 αφού:
    - 3 mod 14 = 3, 3^2 mod 14 = 9, 3^3 mod 14 = 13, 3^4 mod 14 = 11, 3^5 mod 14 = 5 …

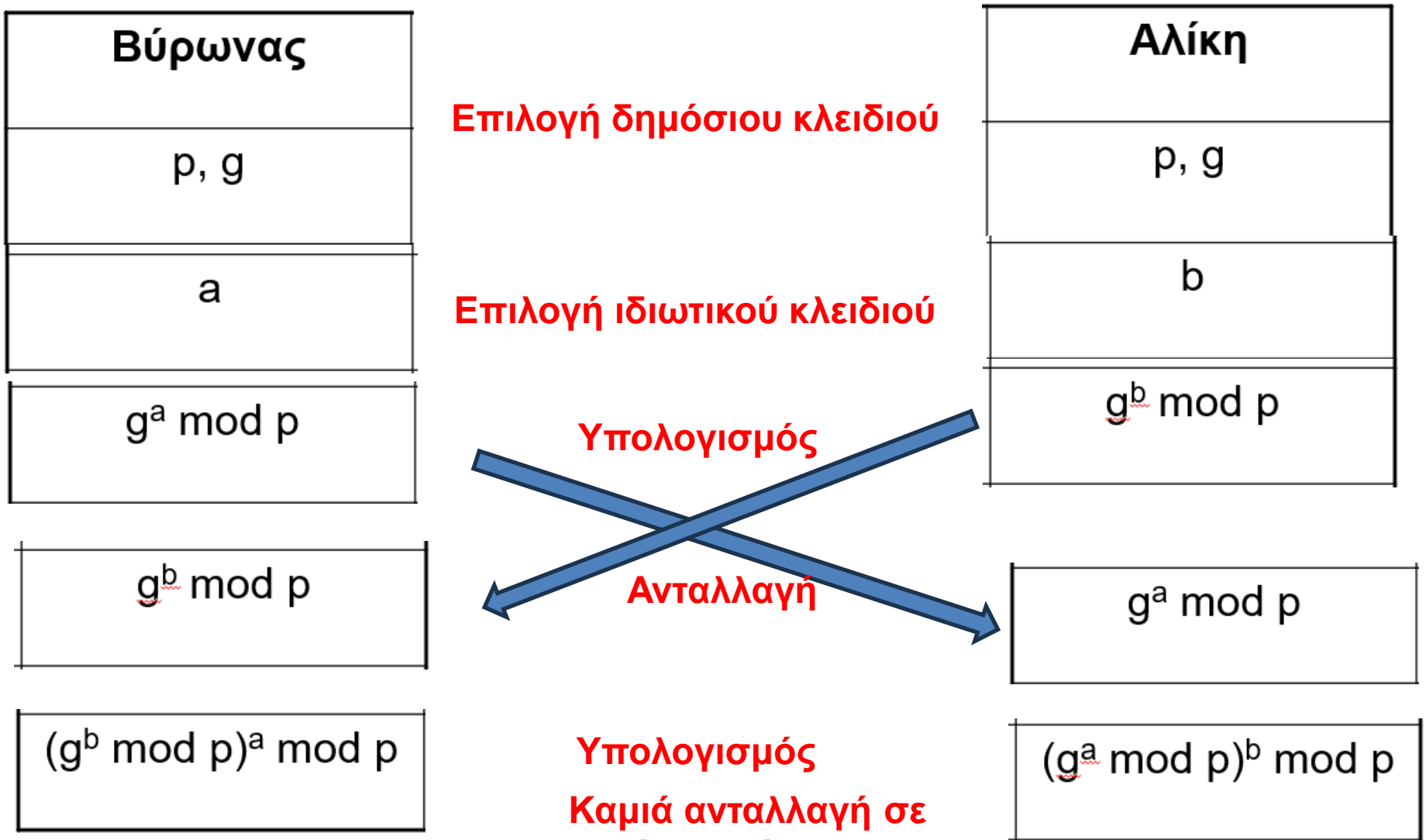
Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ DIFFIE-HELLMAN (3/3)

- Στη συνέχεια η Αλίκη επιλέγει έναν (μυστικό) τυχαίο αριθμό a και στέλνει το αποτέλεσμα της παράστασης $g^a \bmod p$ στον Βύρωνα
- Ταυτόχρονα ο Βύρωνας επιλέγει έναν (μυστικό) τυχαίο αριθμό b και στέλνει το αποτέλεσμα της παράστασης $g^b \bmod p$ στην Αλίκη
- Από την πλευρά της η Αλίκη υπολογίζει την παράσταση $(g^b \bmod p)^a \bmod p = g^{ba} \bmod p$
- Από την πλευρά του ο Βύρωνας υπολογίζει την παράσταση $(g^a \bmod p)^b \bmod p = g^{ab} \bmod p$
- Με αυτό τον τρόπο οι δύο πλευρές ανταλλάσσουν ένα κοινό ιδιωτικό κλειδί, το $g^{ab} \bmod p$

ΤΑ ΚΛΕΙΔΙΑ ΤΟΥ DIFFIE-HELLMAN

Βύρωνας		**Αλίκη**
p, g	Δημόσια	p, g
a	Ιδιωτικό	b
$g^a \bmod p$	Αποστολή	$g^b \bmod p$
$(g^b \bmod p)^a \bmod p$	Υπολογισμός	$(g^a \bmod p)^b \bmod p$

ΣΧΗΜΑΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ DIFFIE-HELLMAN



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ DIFFIE-HELLMAN: ΕΠΙΛΟΓΗ ΚΑΙ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΚΛΕΙΔΙΩΝ

- Η Αλίκη και ο Βύρωνας συμφωνούν σε δύο πρώτους αριθμούς p = 23 και g = 5. Ο αριθμός 5 είναι πρωτογενής ρίζα του 23
  - Η Αλίκη επιλέγει έναν (μυστικό) τυχαίο αριθμό a = 6 και στέλνει στο Βύρωνα το αποτέλεσμα της παράστασης $g^a \bmod p$ → $5^6 \bmod 23 = 8$
  - Ο Βύρωνας επιλέγει έναν (μυστικό) τυχαίο αριθμό b = 15 και στέλνει στην Αλίκη το αποτέλεσμα της παράστασης $g^b \bmod p$ → $5^{15} \bmod 23 = 19$
  - Η Αλίκη υπολογίζει το κοινό μυστικό κλειδί $(g^b \text{ m`od } p)^a \bmod p = 19^6 \bmod 23 = 2$
  - Ο Βύρωνας υπολογίζει το κοινό μυστικό κλειδί $(g^a \bmod p)^b \bmod p = 8^{15} \bmod 23 = 2$

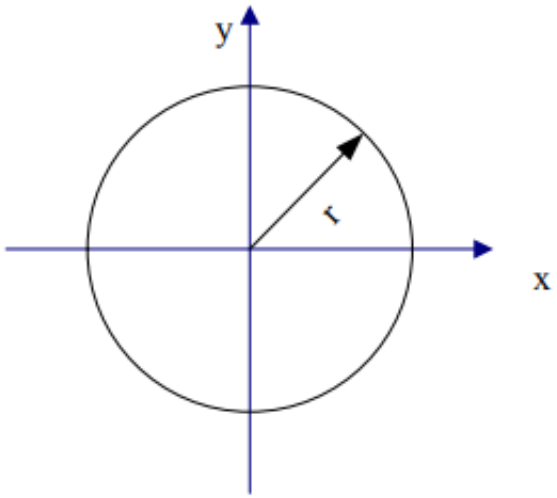
ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

Τα κρυπτοσυστήματα των Ελλειπτικών Καμπυλών εξασφαλίζουν ίδια επίπεδα ασφάλειας σε σχέση με τον RSA (ή τον Diffie-Hellmann) αλλά με πολύ μικρότερο αριθμό bits κλειδί

Symmetric Encryption Key Size in bits	*RSA and Diffie-Hellman Key size in bits*	*Elliptic Curve Key Size in bits*
80	1024	160
112	2048	224
128	3072	256
192	7680	384
256	15360	512

ΚΡΥΠΤΟΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ (Ι)

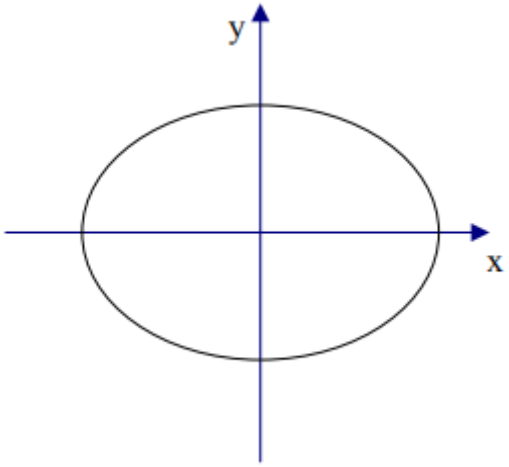
- Κύκλος



- Έχει εξίσωση $x^2+y^2=r^2$
- Ο κύκλος είναι ειδική περίπτωση έλλειψης που έχει εξίσωση $ax^2+by^2=c$ με $a=b$

ΚΡΥΠΤΟΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ (ΙΙ)

- Εξίσωση $ax^2+by^2=c$



- Στην εξίσωση κύκλου, και στην εξίσωση έλλειψης, οι μεταβλητές x, y συνδέονται με δευτεροβάθμιες εξισώσεις
- Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα σε μια δοσμένη τιμή του x να αντιστοιχούν δύο τιμές για το y, και αντίστροφα

ΚΡΥΠΤΟΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ (III)

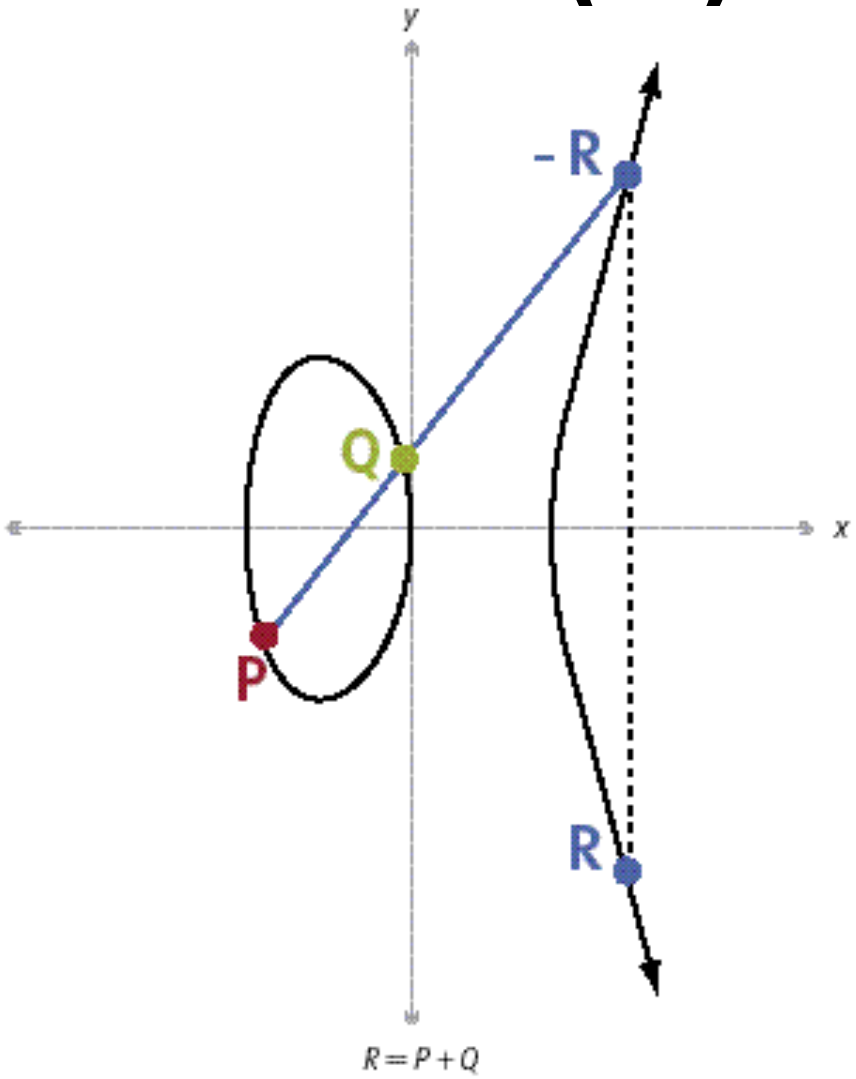
- Η Ελλειπτική καμπύλη έχει εξίσωση της μορφής $y^2 = x^3 + ax + b$
- Έστω δύο διαφορετικά σημεία $P(x_1, y_1)$ και $Q(x_2, y_2)$ και έστω η ευθεία $y=\lambda x+c$ η οποία τέμνει την ελλειπτική καμπύλη στα σημεία αυτά. Αντικαθιστώντας την ευθεία στην εξίσωση της καμπύλης έχουμε

$$(\lambda x + c)^2 = x^3 + ax + b$$

που έχει ρίζες τις x_1 και x_2

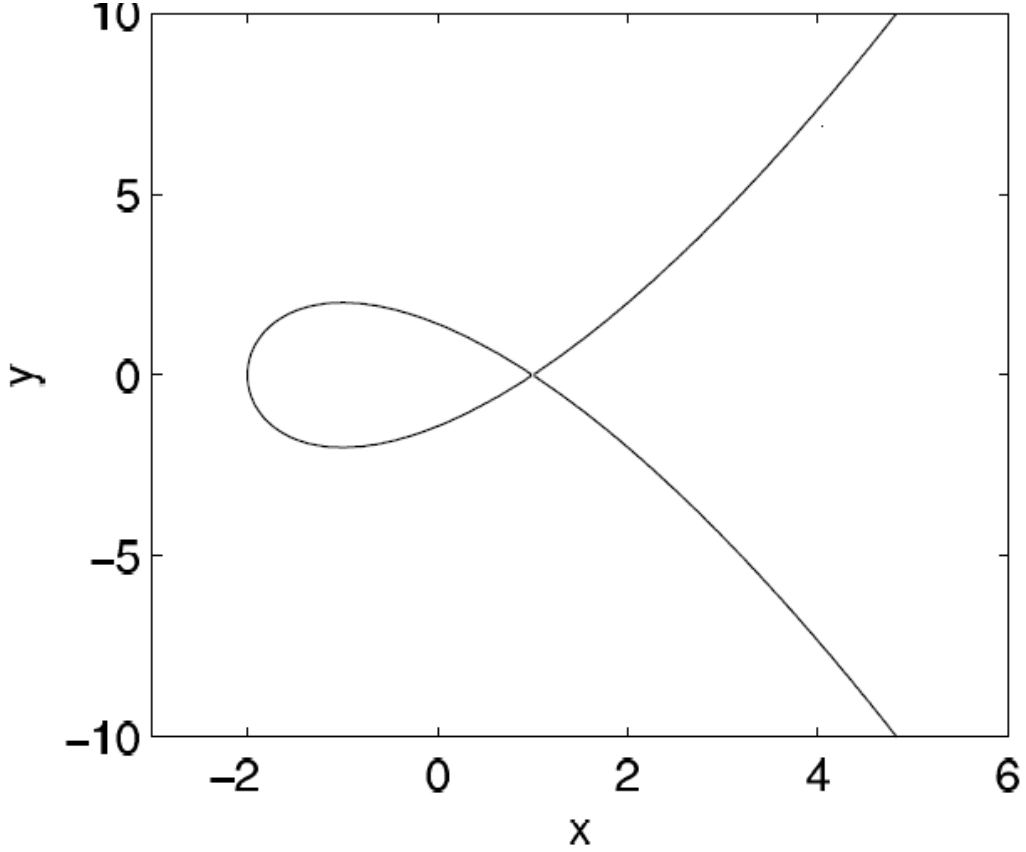
- Υπάρχει και μια τρίτη ρίζα που αντιστοιχεί στο σημείο της ευθείας $(x_3, \lambda x_3+c)$. Δηλαδή η ευθεία τέμνει την καμπύλη σε τρία σημεία

ΚΡΥΠΤΟΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ (IV)



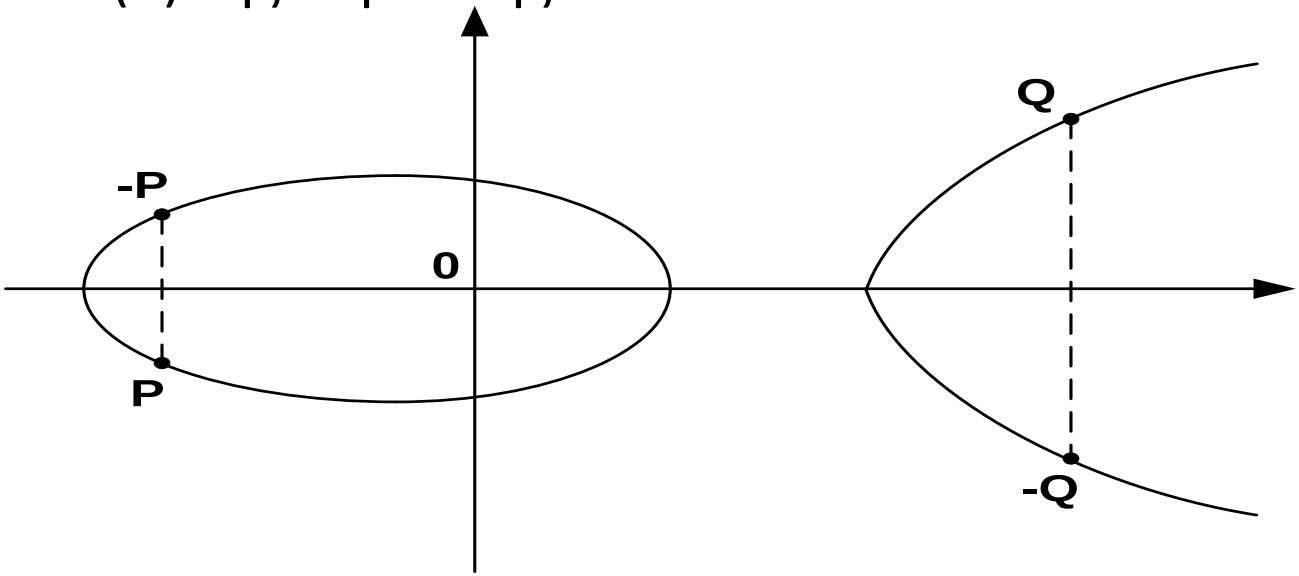
ΚΡΥΠΤΟΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ (V)

Για κάποιο συνδυασμό των a και b η ελλειπτική καμπύλη δεν έχει τρεις ρίζες. Αυτό συμβαίνει όταν $4a^3+27b^2=0$. Τότε η καμπύλη ονομάζεται ***ιδιάζουσα (singular)***



ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ…

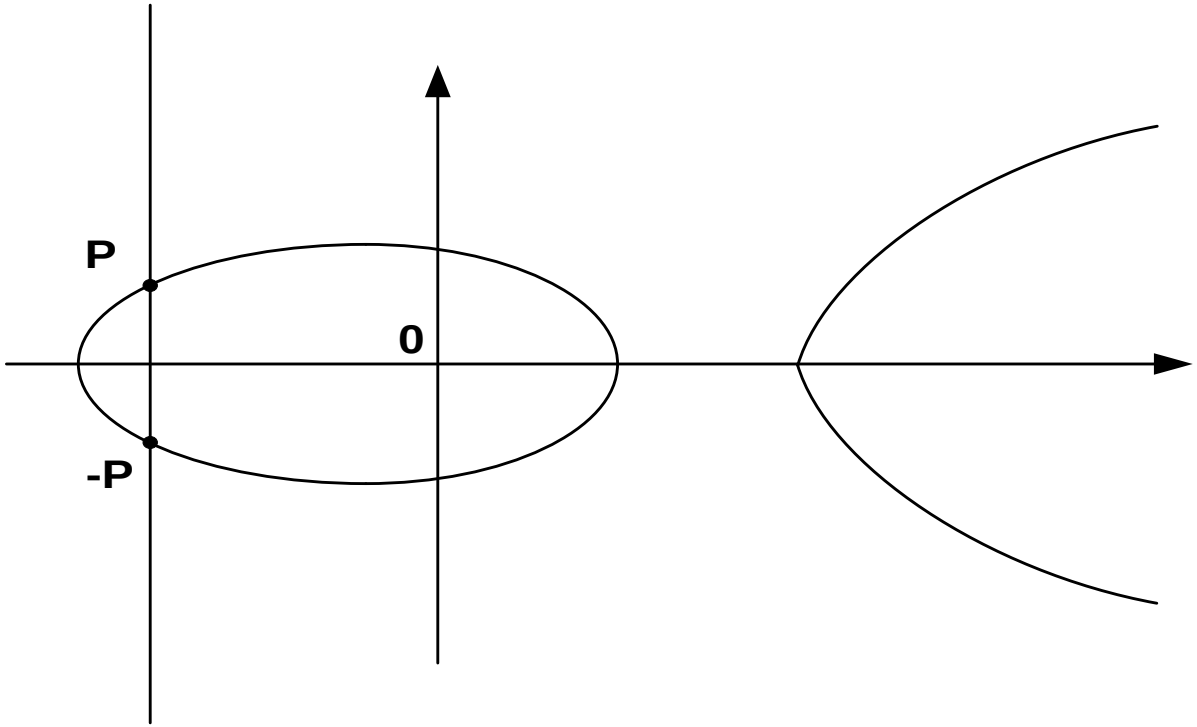
- Η Ελλειπτική Καμπύλη είναι συμμετρική ως προς τον άξονα x
- Έτσι μπορούμε να ορίσουμε το αντίθετο σημείο (–P) ενός σημείου (P) της καμπύλης



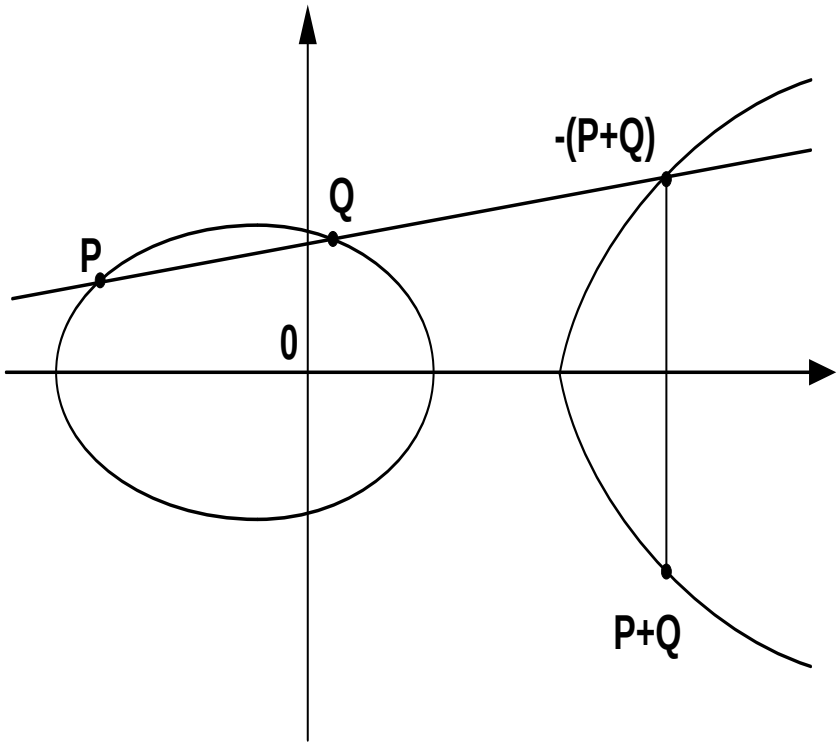
- Το σημείο –P είναι συμμετρικό του P
- Άρα, αν P=(x, y) τότε –P=(x,-y)

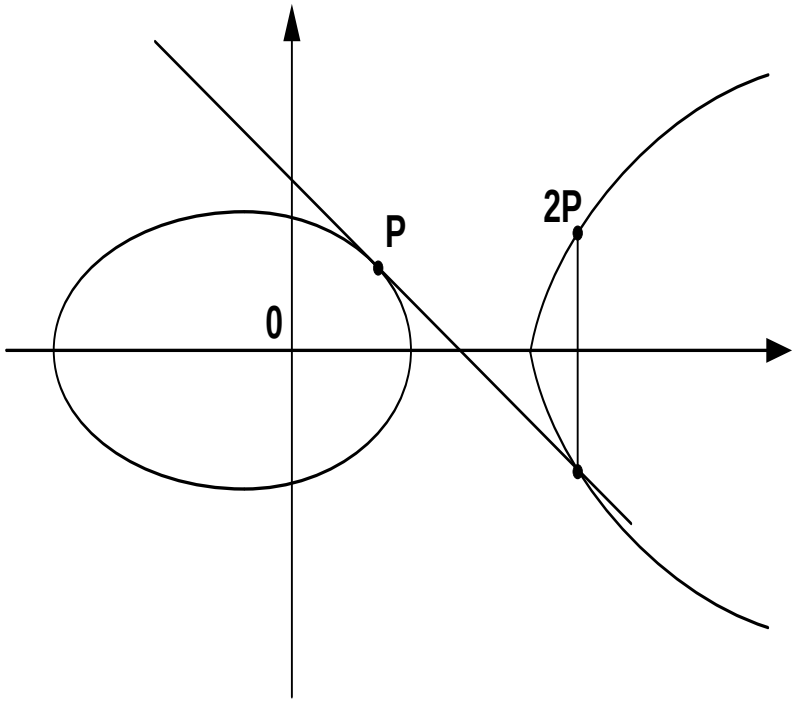
…ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ…

- Αν P=(x, y) τότε –P=(x,-y): Αντίστροφο σημείο
- Ισχύει P + (-P) = O με O(x,∞) είναι το ουδέτερο σημείο
- Επίσης P+O=O+P=P



...ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ...





...ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ

- Τα δύο σημεία καθώς και το αντίστροφο του αθροίσματός τους βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία

- Έστω τα σημεία P(x1, y1) και Q(x2, y2). Η ευθεία που διέρχεται από αυτά έχει εξίσωση y=λx+c και κλίση $\lambda = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$
- Αντικαθιστούμε την ευθεία στην εξίσωση της καμπύλης και βρίσκουμε ότι οι συντεταγμένες του αθροίσματος των σημείων P+Q=(x3, y3) έχουν εξισώσεις

$$x3 = \lambda^2 - x1 - x2$$

$$y3 = \lambda(x1 - x3) - y1$$

- Αν Q=-P=(x1, -y1) η κλίση γίνεται άπειρη και έχουμε το σημείο O.
- Αν P=Q έχουμε τον διπλασιασμό του σημείου και η κλίση τότε είναι ίση με

$$\lambda = \frac{3x1^2 + a}{2y1}$$

ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΣΤΟ modulo p

- Η ελλειπτική καμπύλη ορισμένη στο σώμα $\mathbf{Z_p}$ για κάποιον πρώτο ακέραιο p>3 είναι το σύνολο των στοιχείων (x, y) $\in \mathbf{Z_p x Z_p}$ τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση:

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod{p}$$

όπου a, b $\in \mathbf{Z_p}$ $\quad 4a^3 + 27b^2 \neq 0 \pmod{p}$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΣΤΟ ΣΩΜΑ Z_p

- Η πρόσθεση ορίζεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως και στους πραγματικούς αριθμούς
  - Έστω δύο διαφορετικά σημεία P=(x_1, y_1) και Q=(x_2, y_2) της ελλειπτικής καμπύλης $y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod{p}$
  - Το P+Q=(x_3, y_3) έχει συντεταγμένες

$$x3 \equiv \lambda^2 - x1 - x2 \pmod{p}$$
$$y3 \equiv \lambda(x1 - x3) - y1 \pmod{p}$$

Όπου $$\lambda = \begin{cases} \dfrac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \pmod{p} \quad \gamma\iota\alpha \ P \neq Q \\ \dfrac{3x_1^2 + a}{2y_1} \pmod{p} \quad \gamma\iota\alpha \ P = Q \end{cases}$$

ΤΟ ΠΡΩΤΟΚΟΛΛΟ ΤΩΝ DIFFIE – HELLMAN ΣΤΙΣ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

- Η Αλίκη και ο Βύρωνας επιλέγουν δημόσια μια καμπύλη

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod{p}$$

και ένα στοιχείο της καμπύλης $A=(x_1, y_1)$.

- Μετά η Αλίκη επιλέγει έναν μυστικό αριθμό x_a, τέτοιον ώστε $1< x_a<p$ και όμοια ο Βύρωνας έναν μυστικό αριθμό x_b, τέτοιον ώστε $1< x_b<p$.
- Τέλος εκτελείται η ακολουθία
  - Αλίκη→Βύρωνα: $x_aA \bmod p$
  - Βύρωνας→Αλίκη: $x_bA \bmod p$
  - Βύρωνας: $(x_aA)\, x_b \bmod p$
  - Αλίκη: $(x_bA)\, x_a \bmod p$

ECSALab

Απορίες???