Εισαγωγή στα Προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού

Εισαγωγή

Όλοι μας λύνουμε κάθε μέρα Προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού χωρίς συχνά να το καταλαβαίνουμε. Όταν ψωνίζουμε στο Σουπερμάρκετ και υπολογίζουμε πως θα αγοράσουμε περισσότερα τρόφιμα με τα χρήματα που έχουμε μαζί μας, τότε λύνουμε ένα απλό ΠΓΠ. Όταν αποφασίζουμε ποιό συνδυασμό μέσων μεταφοράς θα χρησιμοποιήσουμε για να μην αργήσουμε (ελαχιστοποίηση του χρόνου), πάλι τότε λύνουμε ένα μικρό ΠΓΠ. Αλλά και όταν ρυθμίζουμε την εργασία μας ώστε να μείνει χρόνος και για κάτι άλλο (οικογάνεια, διακοπές, κλπ.) και τότε λύνουμε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης σύμφωνα με τα δεδομένα που έχουμε, την εμπειρία μας και τον σκοπό που θέλουμε να πετύχουμε.

Για να λύσουμε τα προβλήματα αυτά πιο συστηματικά, με μαθηματικές και υπολογιστικές μεθόδους πρέπει πρώτα να τους δώσουμε μια μαθηματική διατύπωση, δηλαδή να δημιουργήσουμε το μοντέλο του προβλήματος. Τα προβλήματα που διατυπώνονται με γραμμικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών (περιορισμοί, αντικειμενικός στόχος, ...) λέγονται Προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού.

Παραδείγματα Μοντελοποίησης Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού (ΠΓΠ)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Μία σπουδάστρια θέλει να στείλει, από το μέρος που σπουδάζει, 12 τουλάχιστον κάρτες σε φίλους και συγγενείς. Οι ασπρόμαυρες κάρτες κοστίζουν 1 € και οι έγχρωμες 2 € η μία, αλλά η σπουδάστρια δεν διαθέτει πάνω από 16 €. Πόσες κάρτες από κάθε είδος μπορεί να αγοράσει;

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ:

1. Μεταβλητές

Οι μεταβλητές θα είναι οι ζητούμενες ποσότητες:

α) ο αριθμός των ασπρόμαυρων καρτών που θα αγοραστούν, Χ.

β) ο αριθμός των έγχρωμων καρτών που θα αγοραστούν, Υ.

2. Παράμετροι

Οι παράμετροι του προβλήματος είναι οι:

α) 1 € η τιμή κάθε κάρτας Χ (ασπρόμαυρης),

β) 2 € η τιμή κάθε κάρτας Υ (έγχρωμης),

γ) 16 € τα χρήματα που διαθέτει η σπουδάστρια, και,

δ) το να αγοραστούν 12 κάρτες τουλάχιστον.

3. Περιορισμοί

α) ‘Τουλάχιστον 12 κάρτες’ σημαίνει ότι το σύνολο ασπρόμαυρων (Χ) και έγχρωμων (Υ) καρτών θα είναι 12 ή μεγαλύτερο. Σε μαθηματική διατύπωση γράφεται: $X + Y \geq 12$.

β) ‘Όχι πάνω από 16 €' σημαίνει ότι το συνολικό κόστος ασπρόμαυρων (Χ·1 €) και έγχρωμων (Υ·2 €) καρτών θα είναι 16 € ή μικρότερο. Σε μαθηματική διατύπωση γράφεται: $X + 2 \cdot Y \leq 16$.

γ) Οι ποσότητες των καρτών είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, δηλαδή είναι: $X \geq 0$, και, $Y \geq 0$.

4. Αντικειμενικός στόχος (ΑΣ)

Στο πρόβλημα δεν έχει δοθεί κάποιος αντικειμενικός στόχος ώστε να βρεθεί η βέλτιστη λύση που θα τον ικανοποιεί. Το πρόβλημα ζητά τους εφικτούς συνδυασμούς καρτών που μπορούν να αγοραστούν. Έχοντας βέβαια το σύνολο των δυνατών λύσεων, μπορούμε μετά να διαλέξουμε εκείνη που μας εξυπηρετεί καλύτερα (π.χ. να είναι όσο πιο πολλές οι έγχρωμες κάρτες, ή, να είναι όσο πιο πολλές συνολικά οι κάρτες, κλπ.).

ΜΟΝΤΕΛΟ:
Υπό τους περιορισμούς (ΥΤΠ):

$X + Y \geq 12$

$X + 2 \cdot Y \leq 16$

$X \geq 0$, και, $Y \geq 0$.

ΑΣ: -

Να Βρεθούν Όλες οι Εφικτές Λύσεις

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Ένας μηχανικός πρόκειται να φέρει από το εξωτερικό τόρνους και τρυπάνια. Οι συσκευές έρχονται λυμένες και ο μηχανικός θα τις συναρμολογήσει και θα τις μεταπωλήσει. Συνολικά μπορεί να αποθηκεύσει μέχρι 50 συσκευές. Κάθε τόρνος κοστίζει 40 € και κάθε τρυπάνι 20 €. Ο μηχανικός μπορεί να διαθέσει μέχρι 1400 € για την αγορά τους. Υπολογίζει να κερδίσει 60 € από κάθε τόρνο και 40 € από κάθε τρυπάνι. Με αυτές τις συνθήκες πόσους τόρνους και τρυπάνια πρέπει να αγοράσει για να κερδίσει περισσότερα;

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ:

1. Μεταβλητές

Οι μεταβλητές θα είναι πάλι οι ζητούμενες ποσότητες:

α) ο αριθμός των τόρνων που θα αγοραστούν, έστω X.

β) ο αριθμός των τρυπανιών που θα αγοραστούν, έστω Y.

2. Παράμετροι

Οι παράμετροι του προβλήματος είναι οι:

α) 40 € η τιμή και 60 € το κέρδος κάθε συσκευής X (τόρνος),

β) 20 € η τιμή και 40 € το κέρδος κάθε συσκευής Y (τρυπάνι),

γ) 1400 € τα χρήματα που διαθέτει ο μηχανικός, και,

δ) ότι η αποθήκη χωρά 50 συσκευές.

3. Περιορισμοί

α) ‘μέχρι 50 συσκευές’ σημαίνει ότι το σύνολο τόρνων (X) και τρυπανιών (Y) θα είναι 50 ή μικρότερο. Σε μαθηματική διατύπωση γράφεται: $X + Y \leq 50$.

β) ‘Όχι πάνω από 1400 €’ σημαίνει ότι το συνολικό κόστος τόρνων ($X \cdot 40$ €) και τρυπανιών ($Y \cdot 20$ €) θα είναι 1400 € ή μικρότερο. Σε μαθηματική διατύπωση γράφεται: $40 \cdot X + 20 \cdot Y \leq 1400$, ή, $2 \cdot X + Y \leq 70$.

γ) Οι ποσότητες των συσκευών είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, δηλαδή είναι: $X \geq 0$, και, $Y \geq 0$.

4. Αντικειμενικός στόχος

‘Για να κερδίσει περισσότερα’ σημαίνει ότι το συνολικό κέρδος από τη πώληση των τόρνων ($X \cdot 60$ €) και των τρυπανιών ($Y \cdot 40$ €) θα πρέπει να γίνει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο. Σε μαθηματική διατύπωση γράφεται σαν: $\max(60 \cdot X + 40 \cdot Y)$. Η βέλτιστη λύση θα είναι η εφικτή λύση θα που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση.

ΜΟΝΤΕΛΟ:

Υπό τους περιορισμούς (ΥΤΠ):

$X + Y \leq 50$

$2 \cdot X + Y \leq 70$

$X \geq 0$, και, $Y \geq 0$.

ΑΣ:

Να Μεγιστοποιηθεί το Συνολικό Κέρδος: $60 \cdot X + 40 \cdot Y$

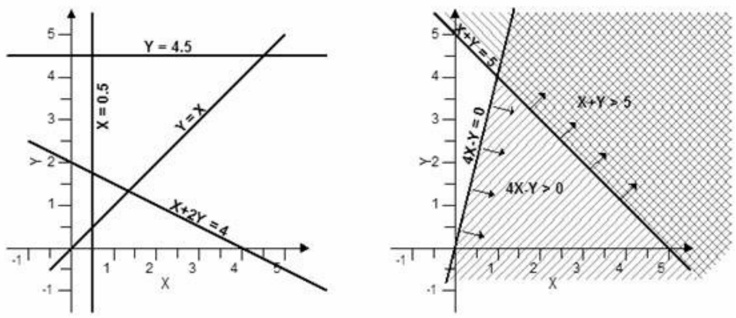
Γραφική Μέθοδος Επίλυσης ΠΓΠ

Γραμμικές Ανισότητες

Όπως είδαμε, τα παραπάνω προβλήματα μοντελοποιούνται σαν ένα σύνολο ανισοτήτων ή εξισώσεων. Ο πιο εύκολος τρόπος επίλυσής τους είναι μέσω της γραφικής μεθόδου. Η εφαρμογή της γραφικής μεθόδου είναι δυνατή όταν ένα πρόβλημα έχει δυο μεταβλητές, οπότε το μοντέλο του απεικονίζεται εύκολα σε ένα δισδιάστατο σύστημα αξόνων X και Y. Σε ένα τέτοιο σύστημα αξόνων, μια γραμμική εξίσωση των X και Y, απεικονίζεται σαν μια ευθεία και μια γραμμική ανισότητα αναπαρίσταται σαν ένα ημιεπίπεδο που αρχίζει από την ευθεία της αντίστοιχης ισότητας.

Παραδείγματα γραφικής απεικόνισης γραμμικών εξισώσεων & ανισοτήτων:

α) $Y = 4.5$, β) $X = 0.5$, γ) $Y = X$, δ) $X+2 \cdot Y = 4$, ε) $4 \cdot X - Y \geq 0$, ζ) $X+Y \geq 5$.



Με τη γραφική απεικόνιση μπορούμε εύκολα να εντοπίσουμε το σύνολο των εφικτών λύσεων και στη συνέχεια να βρούμε τη βέλτιστη λύση. Η μέθοδος αυτή λέγεται γραφική επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

Γραφική Επίλυση των Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού (ΠΓΠ)

Η γραφική επίλυση των ΠΓΠ ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

1. Σχεδιάζουμε ένα σύστημα αξόνων για τις μεταβλητές X και Y.
2. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε μια-μια κάθε ανισότητα του μοντέλου (δηλ. σχεδιάζουμε την αντίστοιχη ισότητα και αποκλείουμε το ημιεπίπεδο που δεν ικανοποιεί την ανισότητα).
3. Η περιοχή που απομένει περιέχει το σύνολο των εφικτών λύσεων, δηλαδή όσων δεν παραβιάζουν τους περιορισμούς ή τις συνθήκες.
4. Σχεδιάζουμε την αντικειμενική συνάρτηση και βρίσκουμε ποια από τις εφικτές λύσεις την μεγιστοποιεί ή την ελαχιστοποιεί (ανάλογα).

5. Οι συντεταγμένες του σημείου αυτού είναι οι βέλτιστες τιμές των X και Y που ζητάμε.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ 1

Το μοντέλο του προβλήματος είναι:

Υπό τους περιορισμούς (ΥΤΠ):

$X + Y \geq 12$

$X + 2 \cdot Y \leq 16$

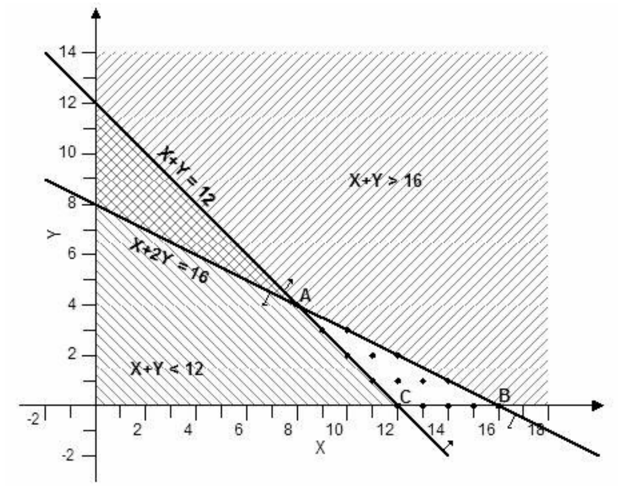
$X \geq 0$, και, $Y \geq 0$.

ΑΣ:

Να Βρεθούν Όλες οι Εφικτές Λύσεις

Σχεδιάζουμε τις παρακάτω ανισότητες (ημιεπίπεδα) και βρίσκουμε τη κοινή τους περιοχή:

α) $X + Y \geq 12$, β) $X + 2 \cdot Y \leq 16$, γ) $X \geq 0$, και, $Y \geq 0$



Η περιοχή ABC περιέχει όλες τις αποδεκτές λύσεις και συγκεκριμένα είναι όσα σημεία έχουν ακέραιες συντεταγμένες. Οι λύσεις αυτές αποτελούν το σύνολο των εφικτών λύσεων του προβλήματος.

Αν το πρόβλημα είχε και έναν αντικειμενικό στόχο τότε θα επιλέγαμε σαν βέλτιστη λύση το σημείο που θα τον ικανοποιούσε. Αν π.χ. μας ζητούσε να μεγιστοποιηθεί ο αριθμός των έγχρωμων καρτών, max(Y), η βέλτιστη λύση θα ήταν το σημείο A (X=8, Y=4), ενώ αν ζητούσε το μέγιστο αριθμό αποδεκτών, max(X+Y), θα ήταν το σημείο B (X=16, Y=0).

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ 2

Το μοντέλο του προβλήματος είναι:

Υπό τους περιορισμούς (ΥΤΠ):

$X + Y \leq 50$

$2 \cdot X + Y \leq 70$

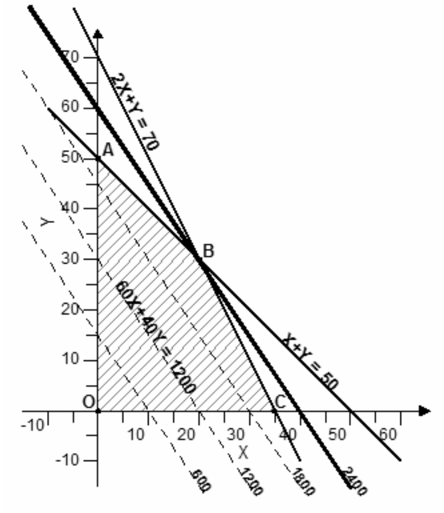
$X \geq 0$, και, $Y \geq 0$.

ΑΣ:

Να Μεγιστοποιηθεί το Συνολικό Κέρδος $60 \cdot X + 40 \cdot Y$,

Σχεδιάζουμε τις παρακάτω ανισότητες (ημιεπίπεδα) και βρίσκουμε τη κοινή τους περιοχή:

α) $X + Y \leq 50$, β) $2 \cdot X + Y \leq 70$, γ) $X \geq 0$, και, $Y \geq 0$



Η περιοχή ABCO μας δίνει τις εφικτές λύσεις του προβλήματος. Κάποια από αυτές θα είναι η καλύτερη λύση δηλαδή η βέλτιστη.

Για να τη βρούμε σχεδιάζουμε την αντικειμενική συνάρτηση (ΑΣ) για κάποιες τιμές κέρδους π.χ.:

$60 \cdot X + 40 \cdot Y = 600$, $60 \cdot X + 40 \cdot Y = 1200$, $60 \cdot X + 40 \cdot Y = 1800$, κλπ.

Παρατηρούμε ότι όσο το συνολικό κέρδος αυξάνει, η ευθεία της ΑΣ απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων. Όταν η ΑΣ φτάσει στο σημείο Β παίρνει τη μέγιστη δυνατή τιμή.

Οι συντεταγμένες του σημείου Β είναι επομένως οι βέλτιστες τιμές που ζητάμε, δηλαδή είναι: $X = 20$ και $Y = 30$. Δίνοντας τις τιμές αυτές στην ΑΣ βρίσκουμε ότι το μέγιστο συνολικό κέρδος θα είναι 2400 €.

πηγή: *http://users.teiath.gr/vmouss/ebooks/optimee/sections/section11_GrafikiMethodos.html*, .
Δρ. Β.Χ. Μούσας, Επίκ. Καθηγητής