ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Γραφική λύση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

Πρόγραμμα 1 –Γενικό γραμμικό πρόβλημα με πολύγωνη περιοχή εφικτών λύσεων

Να λυθεί το παρακάτω γραμμικό πρόγραμμα:

$$
\begin{array}{llll}
\max z = 4\chi_1 + 3\chi_2 & & & \\
\mu.\pi. & \chi_1 & \le 8 & (1) \\
 & \chi_2 & \le 6 & (2) \\
 & \chi_1 + 2\chi_2 & \le 15 & (3) \\
 & 2\chi_1 + \chi_2 & \le 18 & (4) \\
 & \mathrm{x}_1 & \ge 0 & (5\alpha) \\
 & \chi_2 & \ge 0 & (5\beta)
\end{array}
$$

Βήμα 1^o - Γεωμετρική ερμηνεία των περιορισμών του προβλήματος

Α. Εντοπισμός σημείων για τις ευθείες των περιορισμών του ΓΠ.

(1) Η $\chi_1 = 8$ είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα της χ_2 .

(2) Η $\chi_2 = 6$ είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα της χ_1.

(3) Για την εξίσωση – ευθεία $\chi_1 + 2\chi_2 = 15$ (3β) πρέπει να υπολογίσουμε δύο σημεία που την επαληθεύουν.

Για $\chi_1 = 0$, παίρνουμε $\chi_2 = 15/2$, ενώ για $\chi_2=0$, παίρνουμε $\chi_1 = 15$. Άρα τα σημεία $(\chi_1, \chi_2) = (0, 15/2)$ και $(\chi_1, \chi_2) = (15{,}0)$ αρκούν για να σχεδιάσουμε την ευθεία (3β), καθώς από δύο σημεία περνάει μια και μόνο μια ευθεία, όπως προκύπτει από την αναλυτική γεωμετρία.

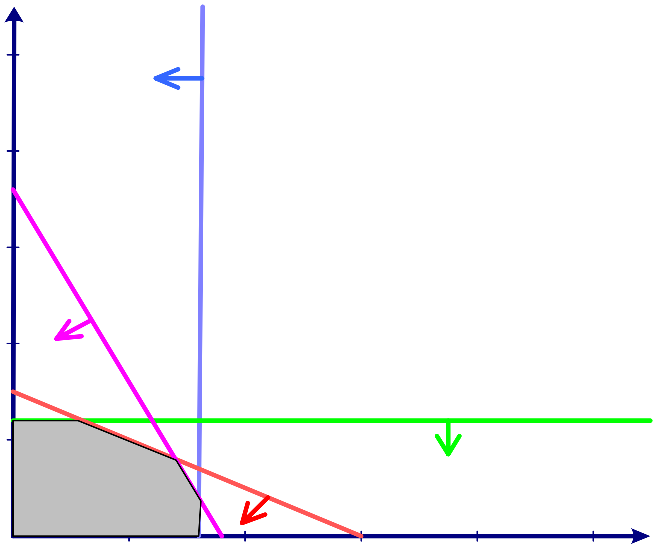
(4) Για την εξίσωση – ευθεία $2\chi_1 + \chi_2 = 18$ (4β) πρέπει να υπολογίσουμε δύο σημεία που την επαληθεύουν.

Για $\chi_1 = 0$, παίρνουμε $\chi_2 = 18$, ενώ για $\chi_2=0$, παίρνουμε $\chi_1 = 9$. Άρα τα σημεία $(\chi_1, \chi_2) = (0{,}18)$ και $(\chi_1, \chi_2) = (9{,}0)$ αρκούν για να σχεδιάσουμε την ευθεία (4β).

Β. Εισαγωγή συστήματος ορθογωνίων συντεταγμένων χ1,χ2 και σχεδιασμός των περιορισμών.

Παρατηρούμε ότι οι περιορισμοί του πρόσημου των μεταβλητών (5α και 5β), ικανοποιούνται μόνο στο πρώτο τεταρτημόριο, και συνεπώς τα ζεύγη τιμών των χ1,χ2 που αποτελούν δυνατές λύσεις για το πρόβλημα αυτό, θα βρίσκονται σε αυτό το τεταρτημόριο. Στο διάγραμμα 1, μπορούμε να δούμε τη γεωμετρική ερμηνεία των ανισοτήτων του ΓΠ. Η ανίσωση (1) ικανοποιείται σε όλα τα σημεία του τεταρτημορίου που βρίσκονται πάνω στην ευθεία χ1=8 και αριστερά από αυτή, ενώ η ανίσωση (2) σε όλα τα σημεία πάνω στην ευθεία χ2=6 και κάτω από αυτή. Για τις ανισότητες (3) και (4), παρατηρούμε ότι το ζεύγος τιμών $(\chi_1, \chi_2) = (0{,}0)$, τις ικανοποιεί $(0 + 2 \times 0 = 0 < 15 \; \kappa\alpha\iota \; 2 \times 0 + 0 = 0 < 18)$. Κάθε σημείο κάτω και μόνο κάτω από τις ευθείες

(3β) και (4β), συμπεριλαμβανομένων των ίδιων των ευθειών, ικανοποιεί και τις ανισότητες (3) και (4). Στο διάγραμμα 1, μπορούμε να δούμε τα ζεύγη τιμών (χ_1, χ_2) που ικανοποιούν ταυτόχρονα όλους τους περιορισμούς του προβλήματος (γραμμοσκιασμένη περιοχή - ΟΑΒΓΔΕ).



Διάγραμμα 1. Γεωμετρική ερμηνεία του προγράμματος 1

Βήμα 2ο - Υπολογισμός της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης z

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα η βέλτιστη ή βέλτιστες λύσεις ενός προβλήματος ΓΠ (αν υπάρχει), βρίσκεται σε κάποιο (ή κάποια) από τα ακραία σημεία – κορυφές της κλειστής κυρτής περιοχής εφικτών λύσεων του προβλήματος. Για κάθε ακραίο σημείο – κορυφή της περιοχής εφικτών λύσεων ΟΑΒΓΔΕ, υπολογίζουμε την τιμή της z. Έχουμε:

$$\text{Σημείο O}:((x1,x2)=(0,0) \quad z=4\times 0+3\times 0=0$$
$$\text{Σημείο A}:((x1,x2)=(0,6) \quad z=4\times 0+3\times 6=18$$
$$\text{Σημείο B}:((x1,x2)=(3,6) \quad z=4\times 3+3\times 6=30*$$
$$\text{Σημείο}\,\Gamma:((x1,x2)=(7,4) \quad z=4\times 7+3\times 4=40**$$
$$\text{Σημείο}\,\Delta:((x1,x2)=(8,2) \quad z=4\times 8+3\times 2=38***$$
$$\text{Σημείο E}:((x1,x2)=(8,0) \quad z=4\times 8+3\times 0=32$$

* Για το σημείο Β έχουμε ότι είναι το σημείο τομής των ευθειών (2) και (3β) οπότε αντικαθιστώντας για χ_2=6 στην (3β), παίρνουμε χ_1=3.

** Το σημείο Γ είναι η τομή των ευθειών (3) και (4), οπότε λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (3β) και (4β) παίρνουμε χ_1=7 και χ_2=4.

*** Όμοια για το σημείο Δ έχουμε ότι είναι το σημείο τομής των ευθειών (1) και (4β) και με αντικατάσταση της τιμής χ_1=8, στην (4β) παίρνουμε χ_2=2.

Δεδομένου ότι θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την αντικειμενική συνάρτηση z, από τα παραπάνω προκύπτει ότι το σημείο Γ(7,4) είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος με z=40.

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Αλγεβρική λύση προβλημάτων με τη μέθοδο SIMPLEX

Πρόγραμμα 2 – Γενικό γραμμικό πρόβλημα με μια βέλτιστη λύση

Να λυθεί το παρακάτω γραμμικό πρόγραμμα:

$$
\begin{array}{lllr}
\max z = & 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 & & \\
\mu.\pi. & x_1 \div 2x_4 + x_5 \le 10 & & (1) \\
& x_2 + 3x_3 \div x_5 \le 15 & & (2) \\
& x_1 & \ge 0 & (5\alpha) \\
& x_2 & \ge 0 & (5\beta) \\
& x_2 & \ge 0 & (5\gamma) \\
& x_2 & \ge 0 & (5\delta) \\
& x_2 & \ge 0 & (5\varepsilon)
\end{array}
$$

Βήμα 1ο - Μετατροπή του προβλήματος σε τυπική μορφή

Το πρώτο βήμα για την επίλυση ενός γραμμικού προβλήματος με τη μέθοδο SIMPLEX είναι να μετατρέψουμε το γραμμικό μοντέλο στην τυπική του μορφή. Για να γίνει αυτό, πρέπει να μετατρέψουμε κάθε περιορισμό του ΓΠ, σε εξίσωση με την προσθήκη μεταβλητών υπολοίπου. Προσθέτοντας σε κάθε περιορισμό μια μεταβλητή υπολοίπου S_i το μοντέλο μας γίνεται ως:

$$
\begin{array}{lllr}
\max z = & 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 & & \\
\mu.\pi. & x_1 \div 2x_4 + x_5 + s_1 = 10 & & (1) \\
& x_2 + 3x_3 \div x_5 + s_2 = 15 & & (2) \\
& x_1 & \ge 0 & (5\alpha) \\
& x_2 & \ge 0 & (5\beta) \\
& x_2 & \ge 0 & (5\gamma) \\
& x_2 & \ge 0 & (5\delta) \\
& x_2 & \ge 0 & (5\varepsilon) \\
& s_1 & \ge 0 & (5\zeta) \\
& s_2 & \ge 0 & (5\eta)
\end{array}
$$

Μεταφέροντας όλους τους όρους – μεταβλητές της z στο αριστερό μέρος της σχέσεως, η z

γίνεται όπως παρακάτω:

$$z - 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \quad (1\beta)$$

Η (1β) με τις (2) και (5α-5η) αποτελούν την τυπική μορφή του μοντέλου. Στο επόμενο βήμα μπορούμε να εισάγουμε τους συντελεστές των μεταβλητών του προβλήματος στον πίνακα της Simplex.

Βήμα 2^o - Δημιουργία του αρχικού πίνακα της Μεθόδου Simplex

Κατασκευάζουμε τον αρχικό πίνακα για το πρόβλημα μας όπως παρακάτω:

	z	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**S_1**	**S_2**	**ΔΜΕ**	**Πηλίκο**	**ΒΜ**
+	1	-3	-2	-1	1	-2	0	0	**0**		
x 3	0	**1**	0	0	2	1	1	0	10	10/1=10	S_1
	0	0	1	3	0	1	0	1	15	----	S_2

Πίνακας 1. Αρχικός Πίνακας Simplex

Η στήλη ΔΜΕ αντιπροσωπεύει τις τιμές των μέσων που διατίθενται στο πρόβλημα μας (Δεξί μέρος εξισώσεων). Η στήλη ΒΜ περιέχει τις βασικές μεταβλητές σε κάθε βήμα της μεθόδου. Θέτοντας τις μη βασικές μεταβλητές ίσες με το 0, η αρχική εφικτή λύση του προβλήματος είναι η

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0, s_1 = 10, s_2 = 15 \quad \mu\varepsilon \quad \mathrm{z} = 3 \times 0 + 2 \times 0 + 1 \times 0 - 1 \times 0 + 2 \times 0 = 0$$

Βήμα 3^o - Έλεγχος βέλτιστης λύσης ΓΠ και εντοπισμός αξονικής στήλης - γραμμής

Εξετάζουμε αν η παραπάνω είναι η βέλτιστη λύση του ΓΠ, ελέγχοντας τους συντελεστές των μη βασικών μεταβλητών στη z. Βλέπουμε ότι υπάρχουν 4 μη βασικές μεταβλητές με αρνητικούς συντελεστές. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να βελτιώσουμε τη λύση του ΓΠ, αυξάνοντας την τιμή μιας εξ αυτών των μη βασικών μεταβλητών από 0 σε κάποια θετική τιμή. Από τους συντελεστές αυτών των 4 μεταβλητών την πιο αρνητική τιμή (-3), έχει η μεταβλητή X_1. Αυτό σημαίνει ότι αν αυξήσουμε την τιμή της χ_1 θα επιτύχουμε τη μεγαλύτερη αύξηση στην z από κάθε άλλη μεταβλητή με αρνητικό συντελεστή. Η στήλη των συντελεστών της χ_1 λέγεται *αξονική στήλη* ή *στήλη οδηγός*. Για να βρούμε πόσο μπορούμε να αυξήσουμε την τιμή της χ_1, πρέπει να υπολογίσουμε το πηλίκο της ΔΜΕ προς τον συντελεστή της αξονικής στήλης για τον αντίστοιχο περιορισμό και για κάθε περιορισμό. Το μικρότερο από αυτά τα πηλίκα, δίνει το ποσό κατά το οποίο θα αυξήσούμε την μεταβλητή. Στο πρόβλημα μας, έχουμε μόνο ένα πηλίκο, αφού δεν υπάρχει πηλίκο για το δεύτερο περιορισμό, συνεπώς η χ_1 θα αυξηθεί από 0 σε 10, σύμφωνα με το μοναδικό πηλίκο στον πρώτο περιορισμό. Επιλέγουμε το μικρότερο από τα πηλίκα, διότι η τιμή αυτή ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς του ΓΠ. Κάθε άλλο μεγαλύτερο πηλίκο παραβιάζει κάποιον ή κάποιους από τους περιορισμούς του προβλήματος. Η γραμμή με το μικρότερο (ή το μόνο εφικτό πηλίκο) καλείται ως *αξονική γραμμή* ή *γραμμή οδηγός*. Ο συντελεστής στον οποίο τέμνονται η αξονική στήλη και η αξονική γραμμή, λέγεται *αξονικό στοιχείο* ή *στοιχείο οδηγός*. Για να γίνει βασική η μεταβλητή χ_1 πρέπει να μηδενίσουμε όλους τους συντελεστές στην αξονική στήλη, χρησιμοποιώντας το αξονικό στοιχείο. Εδώ, θέλουμε να μηδενίσουμε μόνο την πρώτη γραμμή, καθώς στην τελευταία έχουμε ήδη 0. Πολλαπλασιάζοντας την αξονική γραμμή με το 3 και προσθέτοντάς την στην πρώτη γραμμή παίρνουμε τον πίνακα 2.

	z	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**S_1**	**S_2**	**ΔΜΕ**	**Πηλίκο**	**ΒΜ**
+	1	0	-2	-1	7	1	3	0	**30**		
	0	1	0	0	2	1	1	0	10	----	χ_1
x 2	0	0	**1**	3	0	1	0	1	15	15/1=15	S_2

Πίνακας 2. Πρώτο βήμα βελτίωσης της z (x1 βασική μεταβλητή)

Βήμα 4ο - Έλεγχος βέλτιστης λύσης ΓΠ και εντοπισμός νέας αξονικής στήλης - γραμμής

Η νέα λύση για το πρόβλημα με βασικές μεταβλητές τις $χ_1$ και s_2 είναι η ακόλουθη:

$$s_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0, x_1 = 10, s_2 = 15 \quad \mu\varepsilon \quad \mathrm{z} = 3 \times 10 + 2 \times 0 + 1 \times 0 - 1 \times 0 + 2 \times 0 = 30$$

Από τον προηγούμενο πίνακα μπορούμε να δούμε ότι δεν έχουμε ακόμη, βέλτιστη λύση αφού υπάρχουν 2 μεταβλητές με αρνητικούς συντελεστές στην z. Ακολουθώντας την διαδικασία υπολογισμού αξονικής στήλης, γραμμής και στοιχείου, όπως περιγράφτηκε στο βήμα 3, βλέπουμε ότι η $χ_2$ θα μπεί στη βάση, με αξονική γραμμή αυτή του δεύτερου περιορισμού. Η $χ_2$ θα πάρει τιμή 15 (από το μοναδικό πηλίκο που έχουμε). Ο νέος πίνακας με τη $χ_2$ βασική μεταβλητή, δίνεται παρακάτω.

z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	S_1	S_2	ΔΜΕ	Πηλίκο	ΒΜ
1	0	0	5	7	3	3	2	**60**		
0	1	0	0	2	1	1	0	10		$χ_1$
0	0	1	3	0	1	0	1	15		$χ_2$

Πίνακας 3. Βέλτιστη λύση του ΓΠ

Η νέα λύση για το πρόβλημα με βασικές μεταβλητές τις $χ_1$ και s_2 είναι η:

$$s_1 = s_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0, x_1 = 10, x_2 = 15 \quad \mu\varepsilon \quad \mathrm{z} = 3 \times 10 + 2 \times 15 + 1 \times 0 - 1 \times 0 + 2 \times 0 = 60$$

Στον πίνακα 3, παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει άλλη μεταβλητή, με αρνητικό συντελεστή στη z. Άρα η τρέχουσα λύση δεν μπορεί να βελτιωθεί περισσότερο, συνεπώς είναι η βέλτιστη λύση.

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Γραμμικός Προγραμματισμός (Γραφική Μέθοδος)

1. Ένας κτηματίας πρέπει να καθορίσει πόσα στρέμματα καλαμποκιού και σιταριού να φυτέψει αυτή τη χρονιά. Ένα στρέμμα σιταριού αποφέρει 25 τόνους σιταριού και απαιτεί 10 ώρες εργασία την εβδομάδα. Ένα στρέμμα καλαμποκιού αποφέρει 10 τόνους καλαμποκιού και απαιτεί 4 ώρες εργασίας την εβδομάδα. Όλο το σιτάρι μπορεί να πουληθεί στα 4 € ο τόνος και όλο το καλαμπόκι μπορεί να πουληθεί στα 3 € ο τόνος. Η μέγιστη έκταση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι 7 στρέμματα, ενώ μπορούν να διατεθούν 40 ώρες εργασίας την εβδομάδα. Οι κανονισμοί της κυβέρνησης απαιτούν την παραγωγή τουλάχιστον 30 τόνων καλαμποκιού για αυτή τη χρονιά. Να βρεθεί η καλύτερη λύση, ώστε ο κτηματίας να μεγιστοποιήσει τα έσοδα του. Τα σημεία (2,3), (4,3), (2,-1), (3,2) είναι στην περιοχή εφικτών λύσεων του προβλήματος;

2. Δίνονται τα παρακάτω προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού

α.

$$\max z = X_1 + X_2$$

μ.π

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &<= 4 \\ X_1 - X_2 &>= 5 \\ X_1, X_2 &>= 0 \end{aligned}$$

β.

$$\min z = X_1 - X_2$$

μ.π.

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &<= 6 \\ X_1 - X_2 &>= 0 \\ X_1, X_2 &>= 0 \end{aligned}$$

α) Να εξεταστεί αν υπάρχουν εφικτές λύσεις και να εντοπιστεί αν υπάρχει η περιοχή εφικτών λύσεων για κάθε ένα από αυτά τα προβλήματα.

β) Αν στο πρόβλημα β. αλλάξουμε την αντικειμενική συνάρτηση σε $z = X_1 - 2X_2$ και τον δεύτερο περιορισμό σε $X_1 - 2X_2 >= 0$, πως επηρεάζεται η λύση του προβλήματος;

3. Μια εταιρία ανεύρεσης πολύτιμων μετάλλων, χρειάζεται να βρει τουλάχιστον 12 κιλά χρυσό και τουλάχιστον 18 κιλά ασήμι για να πληρώσει το μηνιαίο της ενοίκιο. Υπάρχουν δύο ορυχεία στα οποία η εταιρία μπορεί να βρει χρυσό και ασήμι. Κάθε μέρα που σκάβει η εταιρία στο ορυχείο 1, βρίσκει 2 κιλά χρυσού και δύο κιλά ασήμι. Κάθε μέρα που σκάβει η εταιρία στο ορυχείο 2, βρίσκει 1 κιλό χρυσού και τρία κιλά ασήμι.

α. Δημιουργήστε ένα γραμμικό μοντέλο για να καλύψει η εταιρία τις ανάγκες τις, ξοδεύοντας όσο το δυνατόν λιγότερο χρόνο στα ορυχεία.
β, Λύστε γραφικά το πρόβλημα.
γ. Αν οι μέρες εργασίας στο ορυχείο 2 πρέπει να είναι τουλάχιστον όσες στο ορυχείο 1, πως επηρεάζεται η λύση του προβλήματος;
δ. Αν η εταιρία μπορεί να εργαστεί το πολύ 3 ημέρες στο ορυχείο 2 (στο αρχικό πρόβλημα (α)), πως επηρεάζονται οι επιλογές της εταιρίας, και πως στο πρόβλημα γ;

4. Να λυθεί γραφικά το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = -3x_1 + 6x_2 \\ &\text{μ.π.} \quad 5x_1 + 7x_2 \le 35 \\ &\qquad\;\; -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ &\qquad\;\; x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(να βρεθούν τρεις βέλτιστες λύσεις για το πρόβλημα)

5. Να λυθεί γραφικά το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = 3x_1 + x_2 \\ &\text{μ.π.} \quad 6x_1 + 3x_2 \ge 12 \\ &\qquad\;\; 4x_1 + 8x_2 \ge 16 \\ &\qquad\;\; 6x_1 + 5x_2 \le 30 \\ &\qquad\;\; 6x_1 + 7x_2 \le 36 \\ &\qquad\;\; x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

6. Εταιρεία παραγωγής αλουμινίου διαθέτει στην αγορά τρεις διαφορετικές ποιότητες του προϊόντος Α, Β και Γ. Η παραγωγή τους γίνεται σε δύο εργοστάσια, καθένα εκ των οποίων έχει διαφορετική δυναμικότητα (τόνοι / ημέρα):

	Εργοστάσιο	
Αλουμίνιο	1	2
Α	6	2
Β	2	2
Γ	4	10

Αλλά και ημερήσιο λειτουργικό κόστος 6000 και 7000 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα.

α. Προσδιορίστε το πλήθος των ημερών που πρέπει να λειτουργήσουν τα δύο εργοστάσια σε τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται η παράδοση τουλάχιστον 12 τόνων αλουμινίου τύπου Α, 8 τόνων τύπου Β και 5 τόνων τύπου Γ, με το μικρότερο συνολικό λειτουργικό κόστος.

β. Η λύση που βρέθηκε υπερκαλύπτει ή απλά καλύπτει την υπάρχουσα ζήτηση;

7. Ένας πρωτοετής φοιτητής, πιστεύει ότι διασκέδαση και διάβασμα πρέπει να πηγαίνουν μαζί. Για το λόγο αυτό, προσπαθεί να κατανείμει ένα χρόνο 10 ωρών την ημέρα ανάμεσα τους. Αρχικά εκτίμησε ότι η διασκέδαση του προσφέρει δύο φορές περισσότερη χαρά από ότι το διάβασμα. Παρόλα αυτά επιθυμεί να διαβάζει τουλάχιστον όση ώρα διασκεδάζει. Στη συνέχεια βρήκε ότι για να κάνει όλη τη δουλειά που του αναθέτουν δεν μπορεί να διασκεδάζει περισσότερο από 4 ώρες την ημέρα. Πόσες ώρες την ημέρα πρέπει να διαβάζει και πόσες να διασκεδάζει ώστε να έχει τη μέγιστη δυνατή χαρά;

8. Να βρεθεί γραφικά η εφικτή περιοχή των παρακάτω προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού:

α)
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + 4x_2 &\ge 8 \\ x_1 - 3x_2 &\ge -6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

β)
$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &\ge 6 \\ 3x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

γ)
$$\begin{aligned} 10x_1 + 15x_2 &\le 150 \\ 20x_1 + 10x_2 &\le 160 \\ 30x_1 + 10x_2 &\ge 135 \\ x_1 - 3x_2 &\le 0 \\ x_1 + x_2 &\ge 5 \end{aligned}$$

9. Μια εταιρεία τροφίμων ετοιμάζεται να ρίξει στην αγορά ένα καινούργιο σνακ με χαμηλά λιπαρά: σε 1 κιλό αυτού του σνακ θα περιέχονται τουλάχιστον 5,1 γραμμάρια φυτικών ινών, το πολύ 8,4 γραμμάρια λιπαρών και το πολύ 10,8 γραμμάρια πρωτεΐνης. Το σνακ αυτό προκύπτει από τη μίξη δύο δημητριακών A και B, καθένα από τα οποία έχει διαφορετικά θρεπτικά χαρακτηριστικά τα οποία δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	Ποσότητα (γραμμάρια ανά κιλό)		
	Φυτικές ίνες	**Λιπαρά**	**Πρωτεΐνη**
A	6	6	12
B	4,5	9	9

A. Αν το κόστος ενός κιλού των δημητριακών A και B ανέρχεται αντίστοιχα στις 6 και 7,5 χρηματικές μονάδες, προσδιορίστε τις ποσότητες που πρέπει να χρησιμοποιηθούν από το καθένα από αυτά, με τέτοιο τρόπο ώστε να δημιουργηθεί 1 κιλό του ζητούμενου μείγματος με τον οικονομικότερο δυνατόν τρόπο.

B. Η λύση που βρέθηκε υπερκαλύπτει ή απλά καλύπτει τις τεθείσες προδιαγραφές;

10. Εταιρεία προμηθεύεται από δύο διαφορετικές πηγές ορυκτά, τα οποία στη συνέχεια επεξεργάζεται με σκοπό τη δημιουργία διαφόρων μεταλλευμάτων. Οι τρέχουσες ανάγκες της ανέρχονται σε 800 κιλά χαλκού, 600 κιλά ψευδάργυρου και 500 κιλά σιδήρου. Η ποσότητα που το καθένα μετάλλευμα υπάρχει ανά 100 κιλά ορυκτού μαζί με το κόστος αγοράς του δίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

Ορυκτό (100 κιλά)	**Χαλκός (κιλά)**	**Ψευδάργυρος (κιλά)**	**Σίδηρος (κιλά)**	**Απώλειες (κιλά)**	**Κόστος (χ.μ.)**
A	20	20	20	40	100
B	40	25	10	25	140

A, Προσδιορίστε τις ποσότητες που πρέπει να αγοραστούν από το κάθε ορυκτό με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι ανάγκες τις εταιρείας με το μικρότερο δυνατό κόστος.

B. Υποθέστε επιπλέον ότι η συνολική απώλεια δεν πρέπει να ξεπερνά το 1000 κιλά. Ποιο είναι το νέο βέλτιστο σχέδιο αγοράς;

Γραμμικός Προγραμματισμός (Μέθοδος Simplex)

1. Δίνονται τα παρακάτω προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού

   α.

   $$\min z = 4X_1 - X_2$$

   μ.π

   $$\begin{aligned} 2X_1 + X_2 &<= 8 \\ X_2 &<= 5 \\ X_1 - X_2 &<= 4 \\ X_1, X_2 &>= 0 \end{aligned}$$

   β.

   $$\max z = -3X_1 + 6X_2$$

   μ.π.

   $$\begin{aligned} 5X_1 + 7X_2 &<= 35 \\ -X_1 + 2X_2 &<= 2 \\ X_1, X_2 &>= 0 \end{aligned}$$

   Να βρεθεί η βέλτιστη λύση στο πρόβλημα α. και τρεις βέλτιστες για το πρόβλημα β.

2. Να βρεθεί η βέλτιστη λύση στο παρακάτω γραμμικό πρόβλημα:

   $$\min z = -X_1 - X_2$$

   μ.π

   $$\begin{aligned} X_1 + X_2 &<= 1 \\ -X_1 + X_2 &<= 0 \\ X_1, X_2 &>= 0 \end{aligned}$$

3. Μια εταιρία παρασκευάζει ένα αναψυκτικό με γεύση πορτοκαλί συνδυάζοντας σόδα πορτοκαλιού και χυμό πορτοκαλιού. Κάθε γραμμάριο σόδας πορτοκαλιού περιέχει 0,5 mg ζάχαρη και 1 mg βιταμίνης C. Κάθε γραμμάριο χυμού πορτοκαλιού περιέχει 0,25 mg ζάχαρη και 3 mg βιταμίνης C. Το κόστος παραγωγής ενός γραμμαρίου σόδας πορτοκαλιού είναι 2 € ενώ ενός γραμμαρίου χυμού πορτοκαλιού είναι 3 €. Το τμήμα μάρκετινγκ της εταιρίας αποφάσισε ότι κάθε μπουκάλι του αναψυκτικού πρέπει να περιέχει το πολύ 36 mg βιταμίνης C και το πολύ 4 mg ζάχαρης. Λύστε το πρόβλημα με γραμμικό προγραμματισμό ώστε να ικανοποιηθούν οι ανάγκες της εταιρίας με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Αν κάθε μπουκάλι αναψυκτικού περιέχει το πολύ 20 mg βιταμίνης C, πως μεταβάλλονται οι επιλογές της εταιρίας;

4. Δίνεται το παρακάτω γραμμικό πρόβλημα:

   $$\max z = -2X_1 - X_2 + X_3$$

   μ.π

   $$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 &<= 3 \\ X_2 + X_3 &<= 2 \\ X_1 \qquad + X_3 &<= 1 \\ X_1, X_2, X_3 &>= 0 \end{aligned}$$

   Να βρεθεί η βέλτιστη λύση του προβλήματος.

5. Μια αεροπορική εταιρία έχει δύο τύπους αεροσκαφών, τύπου Α και τύπου Β. Τα αεροσκάφη τύπου Α έχουν μεταφορική ικανότητα 40 επιβατών και 30 τόνων φορτίου. Τα αεροσκάφη τύπου Β έχουν μεταφορική ικανότητα 60 επιβατών και 15 τόνων φορτίου. Η εταιρία μπορεί να αναλάβει την μεταφορά το πολύ 480 επιβατών και 180 τόνων φορτίου κάθε ημέρα. Αν το συνολικό κέρδος μεταφοράς με αεροσκάφος τύπου Α είναι 500 χρηματικές μονάδες και με αεροσκάφος τύπου Β είναι 600 χρηματικές μονάδες, ποιος συνδυασμός αεροσκαφών των δύο τύπων μεγιστοποιεί το κέρδος της εταιρίας;

6. Να βρεθεί η βέλτιστη λύση του παρακάτω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } z = x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \\
&\text{μ.π.} \quad 2x_1 + 5x_3 + x_4 + 3x_5 <= 10 \\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 <= 12 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 >= 0
\end{aligned}
$$

7. Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\
&\text{μ.π.} \quad x_1 + x_2 <= 35 \\
&\qquad x_1 + 2x_3 <= 2 \\
&\qquad 2x_1 + x_2 + x_3 <= 12 \\
&\qquad x_1, x_2 >= 0
\end{aligned}
$$

8. Να λυθεί με τη μέθοδο Simplex, το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } z = 3x_1 + 5x_2 \\
&\text{μ.π.} \quad x_1 <= 4 \\
&\qquad x_2 <= 6 \\
&\qquad x_1 + 2x_2 <= 18 \\
&\qquad x_1, x_2 >= 0
\end{aligned}
$$

Προβλήματα Μεταφοράς

9. Το εργοστάσιο της ΔΕΗ στην περιοχή της Πτολεμαΐδας στην Κοζάνη αποτελείται από τρεις μονάδες επεξεργασίας λιγνίτη Α, Β και Γ, στις οποίες απασχολούνται 500, 200 και 400 εργάτες αντίστοιχα. Οι εργάτες αυτοί προέρχονται αποκλειστικά από τα χωριά 1, 2, 3 και 4 και πιο συγκεκριμένα οι 200 από το χωριό 1, οι 350 από το 2, οι 120 από το 3 και οι υπόλοιποι 430 από το χωριό 4. Το κόστος μεταφοράς, σε ευρώ ανά άτομο (μεταξύ των διαφόρων τόπων κατοικίας και εργασίας) δίνεται παρακάτω.

	Μονάδα επεξεργασίας λιγνίτη		
Χωριό	Α	Β	Γ
1	6	6	5
2	2	8	7
3	4	5	8
4	3	7	2

Ποια είναι η πολιτική πρόσληψης που ακολούθησε η ΔΕΗ; Δίνει αυτή η πολιτική πρόσληψης το μικρότερο δυνατό κόστος μεταφοράς προς τα εργοστάσια – μονάδες; (χρησιμοποιήστε όποια μέθοδο θέλετε)

10. Μια αλυσίδα Σούπερ Μάρκετ θέλει να μεταφέρει ένα προϊόν από κάποιες αποθήκες της σε κάποια από τα καταστήματά της. Το προϊόν αυτό βρίσκεται σε τρεις από τις αποθήκες, ενώ πρέπει να μεταφερθεί σε τέσσερα καταστήματα. Κάθε κατάστημα μπορεί να εφοδιαστεί από μία ή περισσότερες αποθήκες. Τα κόστη μεταφοράς μιας μονάδας προϊόντος από κάθε αποθήκη σε κάθε κατάστημα, καθώς και οι διαθέσιμες / απαιτούμενες μονάδες προϊόντος για κάθε αποθήκη / κατάστημα αντίστοιχα, δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	Καταστήματα				Διαθέσιμες μονάδες προϊόντος
Αποθήκες	1	2	3	4	
1	**4**	**2**	**3**	**1**	7
2	**3**	**3**	**5**	**7**	11
3	**5**	**4**	**7**	**4**	15
Απαιτούμενες μονάδες προϊόντος	4	8	9	12	

Να προσδιοριστεί η διαδικασία μεταφοράς που πρέπει να ακολουθήσει η αλυσίδα Σούπερ Μάρκετ, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό μεταφορικό κόστος. (Hint: Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο VOGEL για τον υπολογισμό μιας αρχικής εφικτής λύσης.)

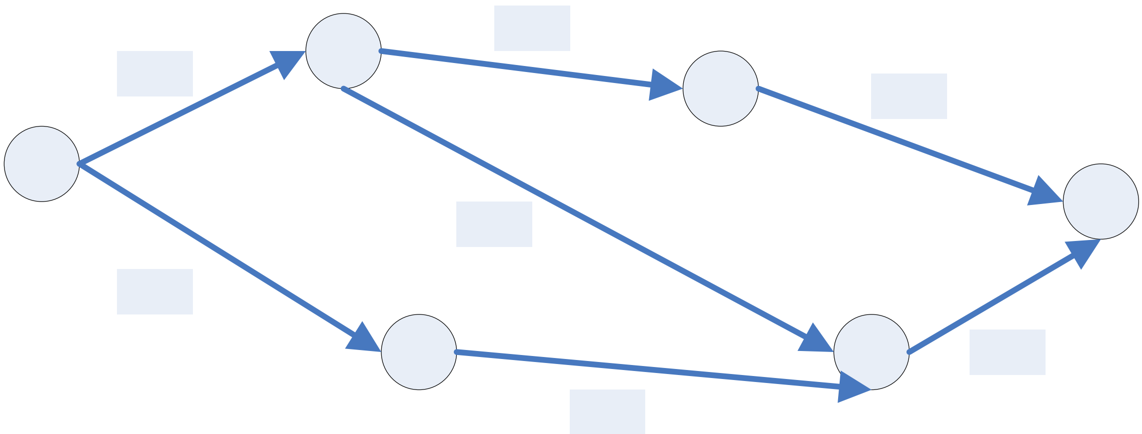
11. Μια εταιρία μεταφορών τροφίμων, μεταφέρει μια πρώτη ύλη για την παρασκευή τροφίμων, από τρεις πόλεις, την Αθήνα, την Θεσσαλονίκη και την Πάτρα. Οι τρεις αυτές πόλεις έχουν τη δυνατότητα να παράγουν 75, 125 και 100 τόνους πρώτης ύλης κάθε μήνα. Η πρώτη ύλη αυτή μεταφέρεται σε τέσσερις άλλες πόλεις, την Αλεξανδρούπολη, τα Γιάννενα, τη Ρόδο και το Ηράκλειο. Η ζήτηση πρώτης ύλης σε αυτές τις πόλεις είναι 80, 65, 70 και 85 τόνοι αντίστοιχα, κάθε μήνα. Το κόστος μεταφοράς πρώτης ύλης από τις πηγές παραγωγής στα σημεία ζήτησης δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

	Σημεία Ζήτησης			
Κέντρα Παραγωγής	Αλεξανδρούπολη	Γιάννενα	Ρόδος	Ηράκλειο
Αθήνα	50	20	25	30
Θεσσαλονίκη	15	10	20	70
Πάτρα	60	15	30	55

Δώστε ένα σχέδιο διανομής της πρώτης ύλης από τα κέντρα παραγωγής στα σημεία ζήτησης και υπολογίστε το συνολικό κόστος μεταφοράς της πρώτης ύλης με το σχέδιο αυτό. (Χρησιμοποιήστε όποια μέθοδο θέλετε). Δίνει αυτό το σχέδιο το ελάχιστο συνολικό κόστος μεταφοράς της πρώτης ύλης;

CPM - PERT

1. Για το παρακάτω δίκτυο



Να βρεθούν τα ακόλουθα:

α) Ο ελάχιστος χρόνος ολοκλήρωσης του έργου και η κρίσιμη διαδρομή του έργου..
β) Η ανοχή χρόνου των μη κρίσιμων δραστηριοτήτων του έργου.

(Η διάρκεια ολοκλήρωσης των δραστηριοτήτων δίνεται στο δίκτυο σε μήνες π.χ. η δραστηριότητα Α έχει διάρκεια ολοκλήρωσης 6 μήνες.)

2. Να κατασκευαστεί το διάγραμμα δικτύου για τον παρακάτω πίνακα - έργο:

Δραστηριότητα	Προαπαιτούμενες δραστηριότητες
Α	———
Β	Α
Γ	Α
Δ	Β
Ε	Β,Γ

3. Να κατασκευαστούν τα διαγράμματα δικτύου και να υπολογιστούν ο ελάχιστος χρόνος ολοκλήρωσης του έργου, η κρίσιμη διαδρομή και η ανοχή χρόνου για κάθε ένα από τα παρακάτω έργα

α.

Δραστηριότητα	Προαπαιτούμενες δραστηριότητες	Διάρκεια (ημέρες)
Α	———	3
Β	———	3
Γ	———	1
Δ	Α,Β	3
Ε	Α,Β	3
Ζ	Β,Γ	2
Η	Δ,Ε	4
Θ	Ε	3

β.

Περιγραφή	Δραστηριότητα	Προαπαιτούμενες δραστηριότητες	Διάρκεια (ημέρες)
Θεμέλια	**Α**	———	**5**
Τοίχοι και ταβάνια	**Β**	**Α**	**8**
Σκεπή	**Γ**	**Β**	**10**
Ηλεκτρολογικά	**Δ**	**Β**	**5**
Κουφώματα	**Ε**	**Β**	**4**
Σοβάδες	**Ζ**	**Ε**	**6**
Βάψιμο	**Η**	**Γ,Ζ**	**3**

4. Για το έργο που περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα, ζητούνται τα ακόλουθα:

   α. Να κατασκευαστεί το διάγραμμα δικτύου.
   β. Να υπολογιστεί ο ελάχιστος χρόνος ολοκλήρωσης του έργου, να βρεθεί η κρίσιμη διαδρομή και η ανοχή χρόνου των μη κρίσιμων δραστηριοτήτων.

Περιγραφή	ACT	PRED	DUR(ημέρες)
Εύρεση χώρου	**Α**	———	**3**
Εύρεση μηχανικών	**Β**	**Α**	**2**
Πρόσληψη κομπάρσων	**Γ**	**Α**	**6**
Διαφήμιση ράδιο – TV	**Δ**	**Γ**	**2**
Πράκτορες εισιτηρίων	**Ε**	**Α**	**3**
Προετοιμασία ηλεκτρονικών	**Ζ**	**Β**	**3**
Εκτύπωση διαφημίσεων	**Η**	**Γ**	**5**
Εύρεση μεταφορικού μέσου	**Θ**	**Γ**	**1**
Πρόβες	**Ι**	**Ζ,Θ**	**2**
Λεπτομέρειες τελευταίας στιγμής	**Κ**	**Ι**	**2**

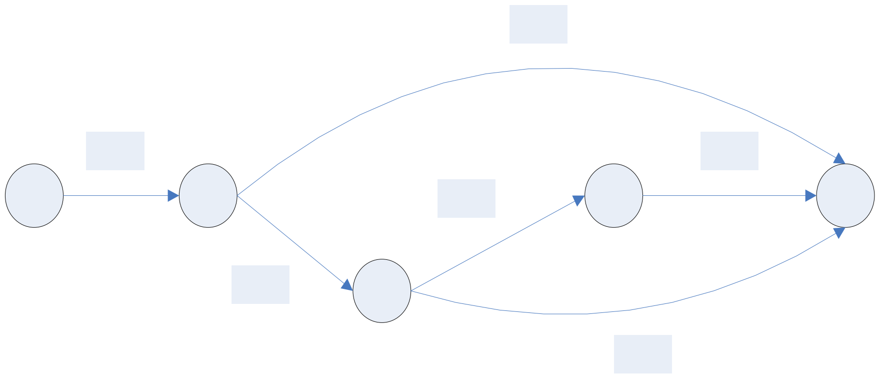
5. Μια εταιρία παροχής ενός συνδρομητικού πακέτου τηλεόρασης θέλει να επεκτείνει τον αριθμό των τηλεοπτικών σταθμών που περιλαμβάνονται στο πακέτο της. Η διαδικασία επέκτασης του πακέτου δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Δραστηριότητα	Περιγραφή δραστηριότητας	Προηγηθείσες δραστηριότητες	Διάρκεια (Εβδομάδες)		
			Αισιόδοξη πρόβλεψη	Πιό πιθανή πρόβλεψη	Απαισιόδοξη πρόβλεψη
Α	Επιλογή σταθμών	--	2	3	4
Β	Έγκριση επέκτασης	Α	3	4	5
Γ	Παραγγελία μετατροπέων	Α	3	5	6
Δ	Έγκατάσταση πιάτων	Β	2	3	4
Ε	Εγκατάσταση μετατροπέων	Β,Γ	2	3	6

   α. Να υπολογιστεί ο ελάχιστος χρόνος ολοκλήρωσης του έργου. Ποια είναι η κρίσιμη διαδρομή του έργου και ποια η ανοχή χρόνου των μη κρίσιμων δραστηριοτήτων του έργου;

   β. Ποια η τυπική απόκλιση της διάρκειας ολοκλήρωσης του έργου;

6. Δίνεται το παρακάτω διάγραμμα δικτύου για ένα έργο.



Οι διάρκειες ολοκλήρωσης των δραστηριοτήτων του έργου είναι σε μήνες και δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

Δραστηριότητα	Αισιόδοξος χρόνος	Πιο πιθανός χρόνος	Απαισιόδοξος χρόνος
Α	2	3	4
Β	8	10	12
Γ	2	3	4
Δ	2	4	6
Ε	1	2	3
Ζ	5	7	9

α. Να υπολογιστεί ο ελάχιστος χρόνος ολοκλήρωσης του έργου. Ποια είναι η κρίσιμη διαδρομή και ποια η ανοχή χρόνου των μη κρίσιμων δραστηριοτήτων του έργου;

β. Ποια η τυπική απόκλιση της διάρκειας του έργου; (Hint: Μόνο οι κρίσιμες δραστηριότητες απαιτούνται εδώ)

7. Μια εταιρία θέλει να σχεδιάσει και να συντονίσει το εκπαιδευτικό πρόγραμμα διαχείρισης των πωλήσεων της, για την επόμενη καλοκαιρινή περίοδο. Τα στοιχεία του προγράμματος δίνονται στον παρακάτω πίνακα

Δραστηριότητα	Περιγραφή δραστηριότητας	Προηγηθείσες δραστηριότητες	Διάρκεια (Εβδομάδες)		
			Αισιόδοξη πρόβλεψη	Πιό πιθανή πρόβλεψη	Απαισιόδοξη πρόβλεψη
Α	Επιλογή τοποθεσίας	--	3	4	5
Β	Εύρεση ομιλητών	--	2	2	2
Γ	Οργάνωση μεταφοράς ομιλητών	Α,Β	3	5	6
Δ	Προετοιμασία και ταχυδρόμηση ενημερωτικού φυλλαδίου	Γ	1	3	5
Ε	Κράτηση θέσεων	Δ	2	3	5

α. Να υπολογιστεί ο ελάχιστος χρόνος ολοκλήρωσης του έργου. Ποια είναι η κρίσιμη διαδρομή του έργου και ποια η ανοχή χρόνου των μη κρίσιμων δραστηριοτήτων του έργου;

β, Ποια η τυπική απόκλιση της διάρκειας ολοκλήρωσης του έργου;

Επιχειρησιακή Έρευνα - Βοηθητική Βιβλιογραφία

1. Καρασαββίδου – Χατζηγρηγορίου, Ε. (1986). *Λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων – Προσέγγιση με την Επιχειρησιακή Έρευνα*, University Studio Press, Θεσσαλονίκη

(Βιβλιοθήκη: 658.403 4 ΚΑΡ) Αριθμός αντιγράφων: 3

2. Μπότσαρης, Ε. Χαράλαμπος, (1996). *Επιχειρησιακή Έρευνα: Μέθοδοι και Προβλήματα,* Εκδόσεις «ΕΛΛΗΝ», 960-286-212-2.

(Βιβλιοθήκη: 658.403 4 ΜΠΟ) Αριθμός αντιγράφων: 9

3. Πραστάκος, Π. Γρηγόρης, (1994). *Επιχειρησιακή Έρευνα για τη λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων – Α: Μαθηματικός Προγραμματισμός*, Εκδόσεις Α. Σταμούλης, Αθήνα

(Βιβλιοθήκη: 658.403 4 ΠΡΑ) Αριθμός αντιγράφων: 14

4. Υψηλάντη, Γ. Παντελή, (1998). *Επιχειρησιακή Έρευνα: Λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων*, 2η έκδοση, Εκδόσεις «ΕΛΛΗΝ», 960-286-310-2

(Βιβλιοθήκη: 658.403 4 ΥΨΗ) Αριθμός αντιγράφων: 2

5. Σαπουντζή, Ι. Κωνσταντίνου, (1992). *Τεχνικές Επιχειρησιακής Έρευνας*, Εκδόσεις Α. Σταμούλης, Πειραιάς

(Βιβλιοθήκη: 658.403 4 ΣΑΠ) Αριθμός αντιγράφων: 7