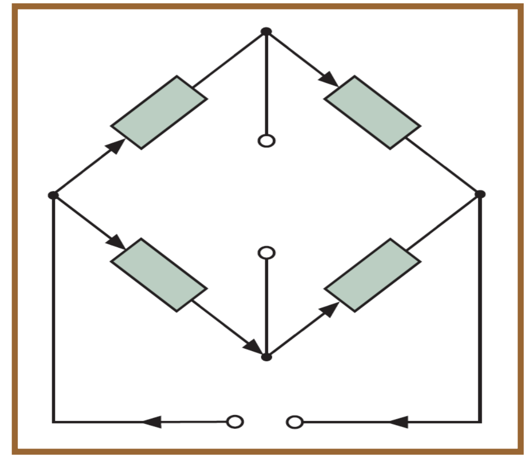
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ & ΑΙΣΘΗΤΗΡΕΣ

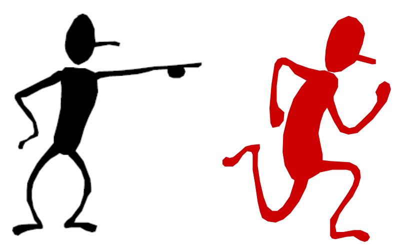


Λάμπρος Μπισδούνης

Καθηγητής

3η ενότητα

ΠΑΘΗΤΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΡΥΘΜΙΣΗΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

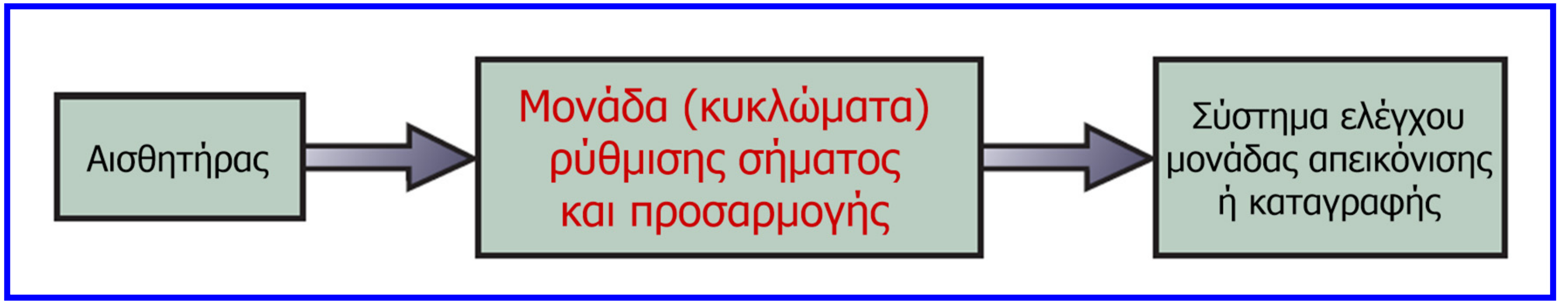
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Περιεχόμενα 3ης ενότητας

- Οι περισσότεροι αισθητήρες παράγουν ως έξοδο ηλεκτρικό σήμα και για να μπορεί το σήμα αυτό να χρησιμοποιηθεί από τις συσκευές απεικόνισης ή καταγραφής θα πρέπει να διενεργηθεί τροποποίηση ή ρύθμιση του σήματος (signal conditioning) και ηλεκτρική προσαρμογή (matching) των αισθητήρων με τις συσκευές απεικόνισης ή καταγραφής.
- Η ενότητα περιγράφει τεχνικές ρύθμισης σήματος και προσαρμογής με παθητικά κυκλώματα.
- Εισαγωγή στη ρύθμιση και προσαρμογή σήματος.
- Ρύθμιση σήματος με χρήση διαίρεσης τάσης (ποτενσιόμετρου).
- Ρύθμιση σήματος με χρήση γέφυρας Wheatstone.
- Προσαρμογή για μέγιστη μεταφορά τάσης.
- Προσαρμογή για μέγιστη μεταφορά ισχύος.
- Συμπεράσματα, ασκήσεις και ερωτήσεις.

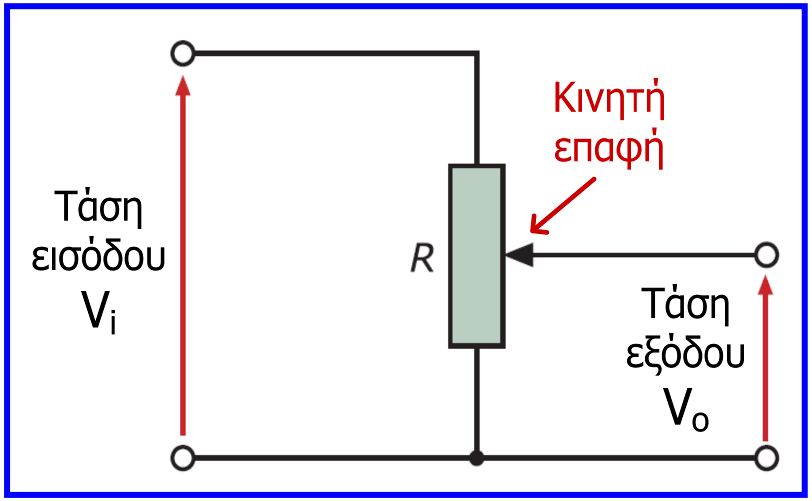
Εισαγωγή στη ρύθμιση και προσαρμογή σήματος

- Συνήθως, δεν υπάρχει συμβατότητα των ηλεκτρικών σημάτων που παράγουν οι αισθητήρες με τα συστήματα ελέγχου των συσκευών απεικόνισης και καταγραφής.
- Επομένως, απαιτούνται κατάλληλες τεχνικές για την τροποποίηση (ρύθμιση) των σημάτων αυτών καθώς και κατάλληλη προσαρμογή (διασύνδεσή), ώστε η συνλειτουργία αισθητήρων και συσκευών απεικόνισης και καταγραφής να είναι σωστή και αποδοτική.



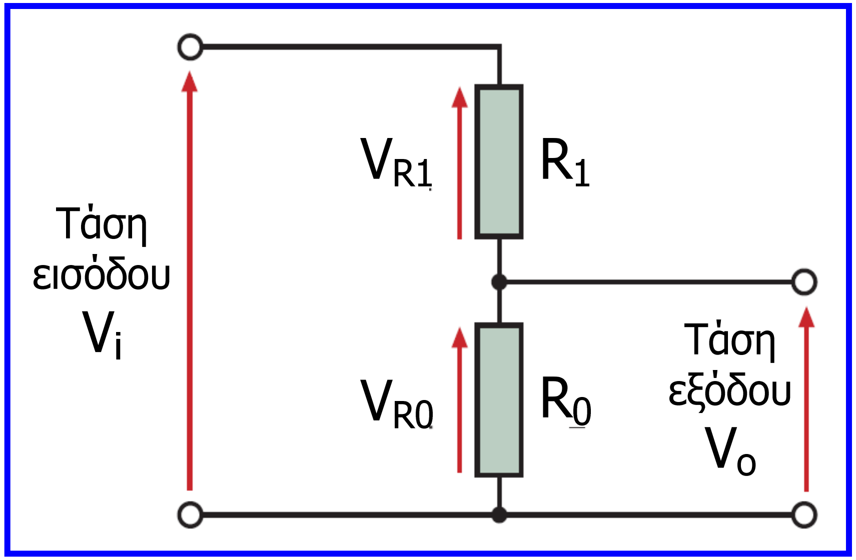
- Το σήμα εξόδου ενός αισθητήρα μπορεί να χρειάζεται υποβιβασμό ώστε να μπορεί να το χειριστεί μία συσκευή απεικόνισης ή η αλλαγή μιας αντίστασης που είναι αποτέλεσμα της λειτουργίας ενός αισθητήρα να απαιτεί βαθμονόμηση σε μονάδες τάσης.
- Επίσης, για να επιτευχθεί μέγιστη απόδοση σε μια συσκευή απεικόνισης ή καταγραφής, πρέπει συχνά να επιδιώκεται μέγιστη μεταφορά τάσης ή ισχύος.
- Μία κατηγορία τεχνικών ρύθμισης σήματος και προσαρμογής, περιλαμβάνει τις τεχνικές που χρησιμοποιούν παθητικά κυκλώματα που δεν παράγουν ισχύ, δηλ. κυκλώματα που αποτελούνται μόνο από παθητικά στοιχεία, όπως αντιστάσεις, πυκνωτές και πηνία.

Ρύθμιση σήματος με χρήση ποτενσιόμετρου



- Το ποτενσιόμετρο είναι κύκλωμα που μας επιτρέπει να λάβουμε μία χαμηλότερη τάση από μία υψηλότερη τάση.
- Η τάση εξόδου του αποτελεί ποσοστό της τάσης εισόδου.
- Εάν η έξοδος ενός αισθητήρα είναι υπερβολικά υψηλή, για να χρησιμοποιηθεί σωστά από μία συσκευή απεικόνισης ή καταγραφής, τότε την υποβιβάζουμε (τη διαιρούμε) ανάλογα με τη βοήθεια ενός ποτενσιόμετρου.
- Εάν ο παράγοντας κατά τον οποίο υποβιβάστηκε η τάση είναι γνωστός, τότε μπορούμε να βαθμονομήσουμε τις τιμές που εμφανίζονται στη συσκευή απεικόνισης ή καταγραφής με βάση αυτόν τον παράγοντα.

Ρύθμιση σήματος με χρήση ποτενσιόμετρου



R_0, R_1: τμήματα της αντίστασης R, οι τιμές των οποίων μεταβάλλονται όταν αλλάζει η θέση της κινητής επαφής.

Εάν δεν κατευθύνεται ρεύμα στην έξοδο:

$$I = \frac{V_i}{R_1 + R_0}$$

$$V_o = V_{R_0} = I \cdot R_0$$

$$V_i = V_{R_0} + V_{R_1} = I \cdot R_0 + I \cdot R_1$$

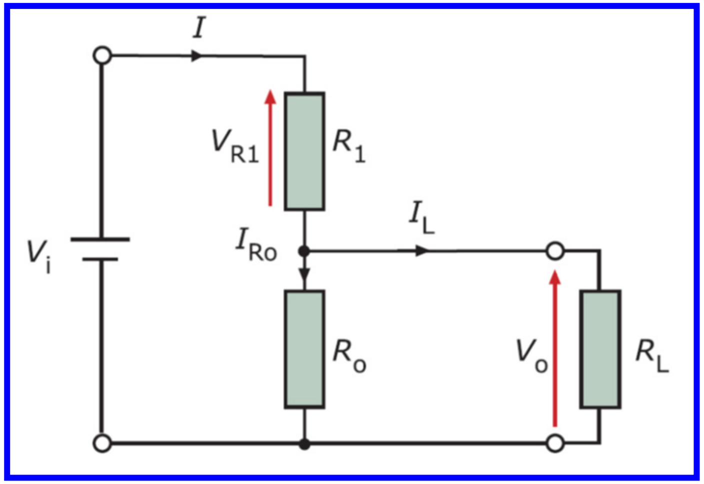
$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R_0}{R_1 + R_0} \Rightarrow V_o = V_i \left(\frac{R_0}{R_1 + R_0} \right)$$

Παράγοντας υποβιβασμού τάσης εισόδου

Εάν στην έξοδο του ποτενσιόμετρου συνδεθεί αντίσταση φορτίου (όπως γίνεται και στην πράξη με κάθε συσκευή απεικόνισης ή καταγραφής), η σχέση μεταξύ τάσης εισόδου και εξόδου παύει να ισχύει και τάση εξόδου θα μειωθεί, αφού ένα ποσοστό του ρεύματος δεν περνάει από την R_0, αλλά κατευθύνεται στην αντίσταση φορτίου.

Ρύθμιση σήματος με χρήση ποτενσιόμετρου

- Η επίδραση της αντίστασης φορτίου στον παράγοντα υποβιβασμού του ποτενσιόμετρου πρέπει να μειωθεί όσο περισσότερο είναι δυνατό.
- Εάν μειωθεί το τμήμα του ρεύματος που κατευθύνεται προς την αντίσταση φορτίου, τότε θα μειωθεί και η επίδραση της αντίστασης φορτίου στον παράγοντα υποβιβασμού.



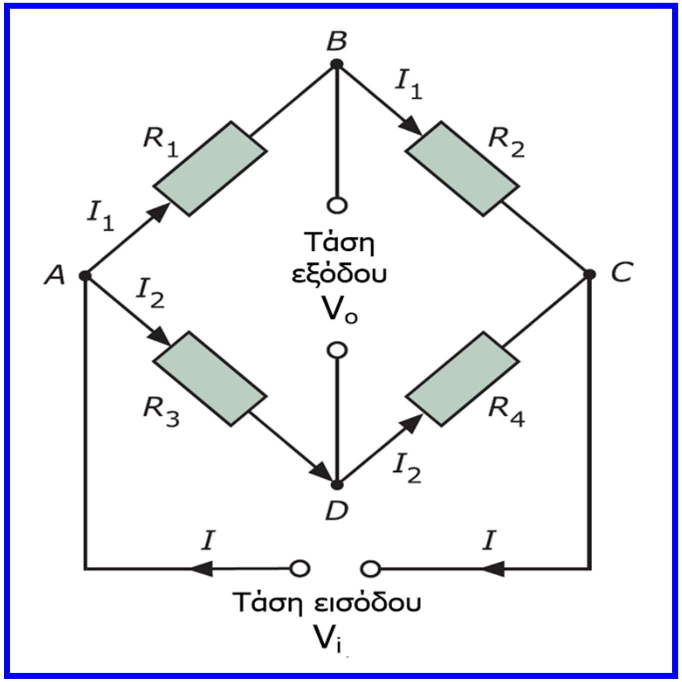
$$V_o = V_i \left(\frac{R_E}{R_1 + R_E} \right)$$

$$R_E = \frac{R_0 \cdot R_L}{R_0 + R_L}$$

- Όσο μεγαλύτερη είναι η R_L, τόσο μικρότερο ρεύμα θα την διαρρέει και επομένως τόσο μικρότερη θα είναι και η επίδραση στην τάση εξόδου και στον παράγοντα υποβιβασμού.
- Όσο λοιπόν αυξάνεται η αντίσταση του φορτίου, μειώνεται το σφάλμα που προκαλείται στη λειτουργία του ποτενσιόμετρου (δηλ. στη διαίρεση τάσης).
- Στην πράξη, η αντίσταση φορτίου θα πρέπει να είναι τουλάχιστον 100 φορές μεγαλύτερη από την R_0, για να διασφαλιστεί σφάλμα όχι μεγαλύτερο του 1%.

Ρύθμιση σήματος με χρήση γέφυρας Wheatstone

- Πολλά είδη αισθητήρων μετρούν διάφορες φυσικές παραμέτρους με τη βοήθεια της αλλαγής μιας αντίστασης.
- Για τη μέτρηση των παραμέτρων αυτών, θα πρέπει η αλλαγή της αντίστασης που συμβαίνει να βαθμονομείται ως προς την παράμετρο που μετρείται.
- Όταν αλλάζει η αντίσταση ενός κυκλώματος, αλλάζουν αναλογικά η τάση και το ρεύμα σε αυτό.



- Συνεπώς, η τάση ή το ρεύμα θα αποτελούν ένα μέτρο της φυσικής παραμέτρου που προκαλεί την αλλαγή της αντίστασης, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως είσοδος σε μία συσκευή απεικόνισης ή καταγραφής.
- Η γέφυρα Wheatstone είναι κύκλωμα που παρέχει μία περίπου γραμμική σχέση ανάμεσα στην τάση εξόδου της και την αλλαγή σε μία από τις αντιστάσεις της, οπότε είναι ιδιαίτερα χρήσιμη ως σύστημα ρύθμισης σημάτων.

Μέτρηση φυσικών παραμέτρων μέσω μεταβολής αντίστασης

- Η αντίσταση των μεταλλικών αγωγών αυξάνεται όταν αυξάνεται η θερμοκρασία τους.

$$\boxed{R_\theta = R_0 \cdot (1 + a \cdot \theta)}$$

Παράδειγμα 1

R_0: αντίσταση σε Ω του αγωγού μετάλλου σε θερμοκρασία 0 ^oC.

R_θ: αντίσταση σε Ω του αγωγού μετάλλου σε θερμοκρασία θ ^oC.

a: θερμοκρασιακός συντελεστής αντίστασης σε 1/^oC, που λαμβάνει διαφορετική τιμή για κάθε μέταλλο (π.χ. χαλκός: $4.3 \cdot 10^{-3}$, λευκόχρυσος: $3.9 \cdot 10^{-3}$).

- Η αντίσταση ενός μεταλλικού νηματιδίου, δίνεται ως εξής:

Παράδειγμα 2

$$\boxed{R = \frac{\rho \cdot l}{A}}$$

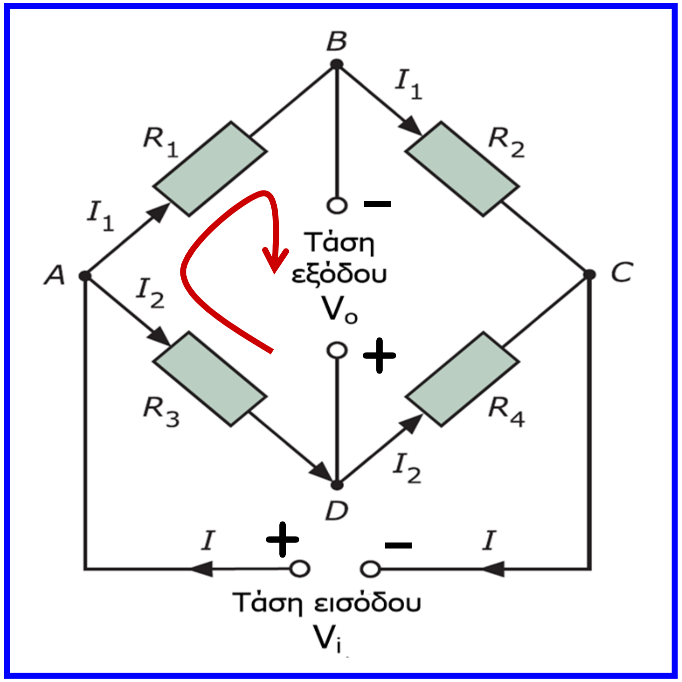
ρ: ειδική αντίσταση του υλικού του νηματιδίου (Ω·m)

l: μήκος νηματιδίου (m)

A: εμβαδόν διατομής νηματιδίου (m^2)

Η αλλαγή του A ή του l του νηματιδίου προκαλεί αλλαγή της αντίστασης R (π.χ. ο εφελκυσμός του νηματιδίου προκαλεί αύξηση του l και μείωση του A και επομένως αύξηση της αντίστασης R), επομένως ο μετρητής χρησιμοποιεί το γεγονός αυτό για τη μέτρηση μηχανικής τάσης (καταπόνησης).

Ρύθμιση σήματος με χρήση γέφυρας Wheatstone



$$V_o = 0 \Rightarrow V_B = V_D \Rightarrow V_{R_1} = V_{R_3} \Rightarrow I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_3$$

$$V_o = 0 \Rightarrow V_B = V_D \Rightarrow V_{R_2} = V_{R_4} \Rightarrow I_1 \cdot R_2 = I_2 \cdot R_4$$

$$\frac{I_1 \cdot R_1}{I_1 \cdot R_2} = \frac{I_2 \cdot R_3}{I_2 \cdot R_4} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

Βασική ιδιότητα της γέφυρας σε κατάσταση ισορροπίας ($V_o = 0$)

$$I_1 = \frac{V_i}{R_1 + R_2} \qquad I_2 = \frac{V_i}{R_3 + R_4}$$

$$-I_2 \cdot R_3 + I_1 \cdot R_1 - V_o = 0 \Rightarrow V_o = I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_3$$

$$\Rightarrow V_o = \left(\frac{V_i}{R_1 + R_2}\right) \cdot R_1 - \left(\frac{V_i}{R_3 + R_4}\right) \cdot R_3$$

$$\Rightarrow V_o = V_i \cdot \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4}\right)$$

Ρύθμιση σήματος με χρήση γέφυρας Wheatstone

$$V_o = V_i \cdot \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right)$$

Επιθυμούμε να εξάγουμε μία γραμμική σχέση μεταξύ της μεταβολής μίας εκ των αντιστάσεων (έστω της R_1) και της αλλαγής της τάσης εξόδου.

$$V_o + \Delta V_o = V_i \cdot \left(\frac{R_1 + \Delta R_1}{R_1 + \Delta R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right)$$

Αφαιρούμε τις παραπάνω σχέσεις:

$$\Delta V_o = V_i \cdot \left(\frac{R_1 + \Delta R_1}{R_1 + \Delta R_1 + R_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \Rightarrow$$

$$\Delta V_o \approx V_i \cdot \left(\frac{R_1 + \Delta R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \Rightarrow$$

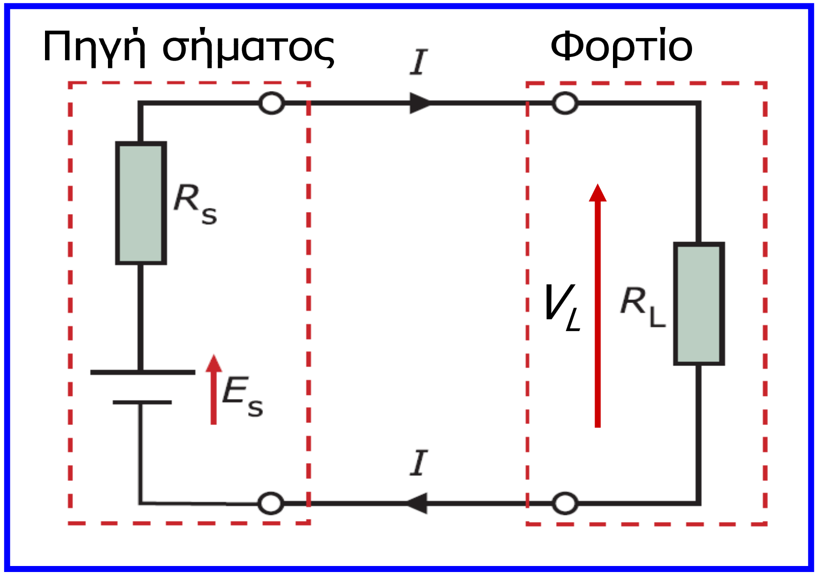
$$\Delta V_o \approx V_i \cdot \left(\frac{\Delta R_1}{R_1 + R_2} \right)$$

Γραμμική σχέση μεταξύ ΔR_1 και ΔV_o

Εφόσον δηλαδή, η ΔR_1 είναι πολύ μικρότερη από την R_1 και η συσκευή απεικόνισης ή καταγραφής (φορτίο) λαμβάνει πολύ λίγο ρεύμα σε σύγκριση με αυτό που κυκλοφορεί στη γέφυρα, μπορούμε να θεωρήσουμε τη ΔV_o ανάλογη της ΔR_1, ιδιότητα που καθιστά τη γέφυρα χρήσιμο κύκλωμα για τη δημιουργία ρυθμισμένου σήματος από εξόδους αισθητήρων που υφίστανται αλλαγή αντίστασης.

Προσαρμογή για μέγιστη μεταφορά τάσης

- Με τον όρο προσαρμογή εννοούμε τη διασφάλιση ότι το μέγιστο σήμα ή η μέγιστη ισχύς μεταφέρεται από έναν αισθητήρα σε μία συσκευή απεικόνισης ή καταγραφής.
- Τα σήματα εξόδου που παράγονται από αισθητήρες έχουν συνήθως χαμηλή τιμή, οπότε είναι σημαντικό να μεταφέρεται όσο το δυνατό περισσότερο τμήμα της τάσης του σήματος στη συσκευή απεικόνισης ή καταγραφής.
- Για να επιτευχθεί αυτό, θα πρέπει η αντίσταση του φορτίου να είναι πολύ μεγαλύτερη από την αντίσταση της πηγής σήματος (π.χ. ενός αισθητήρα).



Αυτό συμβαίνει γιατί οι αντιστάσεις πηγής και φορτίου λειτουργούν σαν διαιρέτης τάσης:

$$\boxed{V_L = \frac{R_L}{R_L + R_s} \cdot E_s}$$

Εάν $R_L >> R_s \Rightarrow V_L = E_s$
(δηλαδή μηδενική απώλεια σήματος)

Προσαρμογή για μέγιστη μεταφορά ισχύος

- Είναι συχνά επιθυμητό να μεταφέρεται η μέγιστη ισχύς στο φορτίο, όπως για παράδειγμα σε εφαρμογές όπου το παρεχόμενο ρεύμα από τον αισθητήρα πρέπει να δημιουργήσει ένα μαγνητικό αποτέλεσμα στη συσκευή απεικόνισης (π.χ. όργανο κινητού πηνίου).
- Το πηνίο είναι στοιχείο που όταν διαρρέεται από ρεύμα δημιουργεί μαγνητικό πεδίο και αποθηκεύει ενέργεια με τη μορφή μαγνητικής ενέργειας.
- Αποδεικνύεται ότι, η ισχύς που μεταφέρεται από μία πηγή σήματος (π.χ. αισθητήρα) σε ένα φορτίο (π.χ. συσκευή απεικόνισης) είναι μέγιστη όταν η αντίσταση της πηγής σήματος είναι ίση με την αντίσταση φορτίου.

$$P_L = I^2 \cdot R_L = \left(\frac{E_s}{R_L + R_s}\right)^2 \cdot R_L \overset{R_S = R_L}{\Rightarrow} P_{L-MAX} = \frac{E_s^2}{4 \cdot R_L} = \frac{E_s^2}{4 \cdot R_s}$$

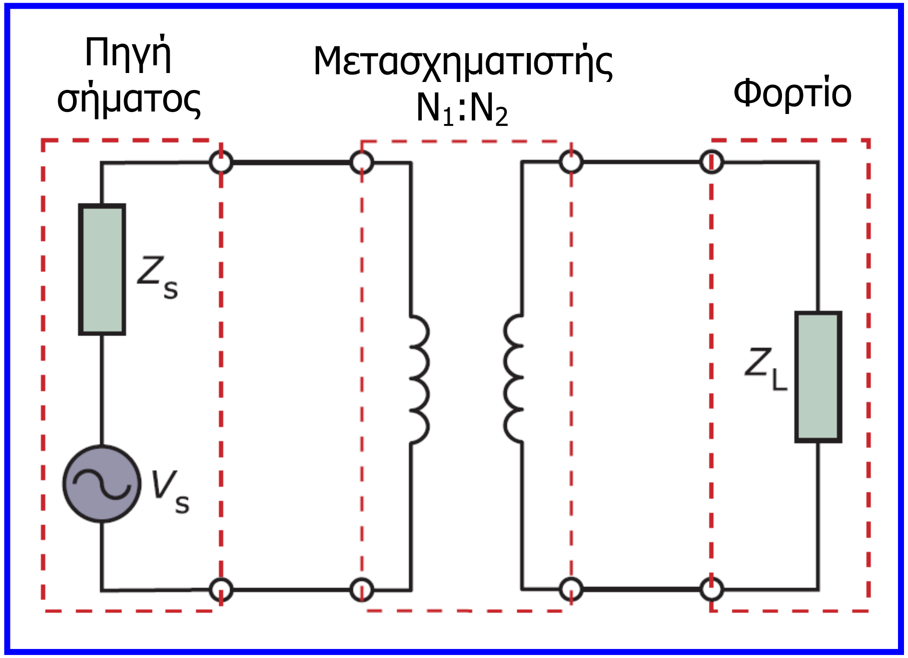
$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0, \ \frac{d^2P_L}{dR_L^2} < 0 \quad \text{για } R_L = R_s$$

- Στην πράξη όπου η πηγή και το φορτίο δεν είναι αμιγώς ωμικά, για μέγιστη μεταφορά ισχύος θα πρέπει η ωμική αντίσταση πηγής να είναι ίση με την ωμική αντίσταση φορτίου και η φανταστική αντίσταση πηγής να είναι ίση και αντιθέτου τύπου με τη φανταστική αντίσταση φορτίου (δηλαδή εάν το φορτίο έχει επαγωγικό χαρακτήρα, η πηγή θα πρέπει να έχει χωρητικό και αντίστροφα).

Προσαρμογή για μέγιστη μεταφορά ισχύος

- Ένας τρόπος να διασφαλιστεί η μέγιστη μεταφορά ισχύος από έναν αισθητήρα σε μια συσκευή απεικόνισης ή καταγραφής είναι η χρήση μετασχηματιστή, η οποία όμως μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε εναλλασσόμενο ρεύμα.
- Ένα πλεονέκτημα του μετασχηματιστή είναι ότι λειτουργεί ως απομονωτική βαθμίδα, δηλ. απομονώνει τον αισθητήρα από τη συσκευή απεικόνισης ή καταγραφής και παρέχει ασφάλεια.
- Η τάση στα άκρα του δευτερεύοντος πηνίου μπορεί να είναι σημαντικά διαφορετική από την τάση στα άκρα της πηγής και η ισχύς μεταφέρεται με τη βοήθεια της μαγνητικής σύζευξης των δύο πηνίων (πρωτεύον, δευτερεύον).
- Μέσω του μετασχηματιστή γίνεται προσαρμογή της σύνθετης αντίστασης του αισθητήρα (πηγής, Z_s) με την σύνθετη αντίσταση της συσκευής απεικόνισης ή καταγραφής (φορτίου, Z_L), ώστε να επιτευχθεί μέγιστη μεταφορά ισχύος.
- Αποδεικνύεται ότι για να επιτευχθεί μέγιστη μεταφορά ισχύος από την πηγή προς το φορτίο, θα πρέπει το πηλίκο των περιελίξεων (στροφών) του πρωτεύοντος πηνίου προς τις περιελίξεις του δευτερεύοντος πηνίου να είναι ίσο με την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου των σύνθετων αντιστάσεων πηγής και φορτίου.

Προσαρμογή για μέγιστη μεταφορά ισχύος

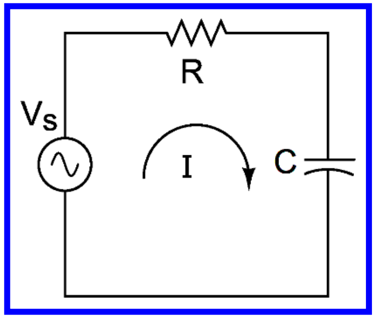


$$\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{Z_s}{Z_L}}$$

$$P_{L-MAX} = \frac{V_1^2}{Z_s}, \quad Z_s = Z_L \cdot \frac{N_1^2}{N_2^2}$$

Σύνθετη αντίσταση είναι το μέτρο της αντίστασης ενός ηλεκτρικού στοιχείου που περιλαμβάνει ωμικό (πραγματικό) και φανταστικό μέρος (χωρητικό ή επαγωγικό).

π.χ.



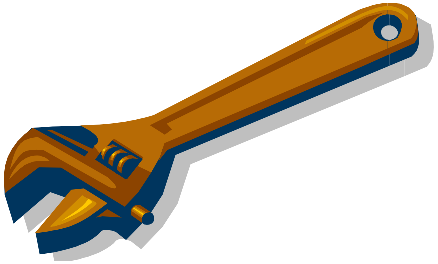
$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C} \Rightarrow |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Συμπεράσματα

- Στην ενότητα αυτή αναλύθηκε ένα σύνολο τεχνικών που χρησιμοποιούν παθητικά κυκλώματα για την τροποποίηση ή ρύθμιση της εξόδου των αισθητήρων, ώστε να εξασφαλιστεί συμβατότητα με τις συσκευές απεικόνισης και καταγραφής,

- Επίσης, παρουσιάστηκαν τεχνικές προσαρμογής ώστε να επιτευχθεί μέγιστη μεταφοράς τάσης ή ισχύος.

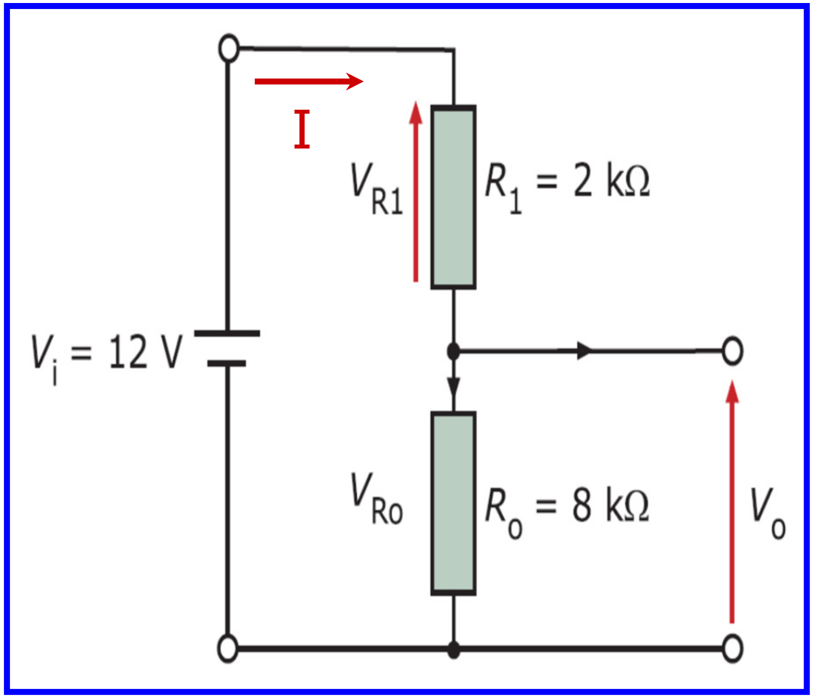
- Ωστόσο, οι περισσότερες εφαρμογές, χρησιμοποιούν ένα συνδυασμό των τεχνικών που βασίζονται σε παθητικά κυκλώματα με τεχνικές που βασίζονται σε κυκλώματα με ενεργητικά στοιχεία (όπως δίοδοι, τρανζίστορ κ.α.) που θα μελετηθούν στην επόμενη ενότητα.



Ασκήσεις και ερωτήσεις 3ης ενότητας

Άσκηση 1η

Στο ποτενσιόμετρο του σχήματος, η τάση εισόδου είναι 12 V και η κινητή επαφή βρίσκεται σε τέτοια θέση ώστε η αντίσταση στα άκρα της τάσης εξόδου να είναι 8 kΩ και η υπόλοιπη αντίσταση 2 kΩ. Να προσδιορίσετε την τάση εξόδου και τον παράγοντα υποβιβασμού του ποτενσιόμετρου για αυτή τη θέση της κινητής επαφής.



Αφού δεν υπάρχει φορτίο στην έξοδο, δεν κατευθύνεται ρεύμα προς αυτήν. → $\boxed{I = \dfrac{V_i}{R_1 + R_0}}$

$$\boxed{V_o = V_{R_0} = I \cdot R_0}$$

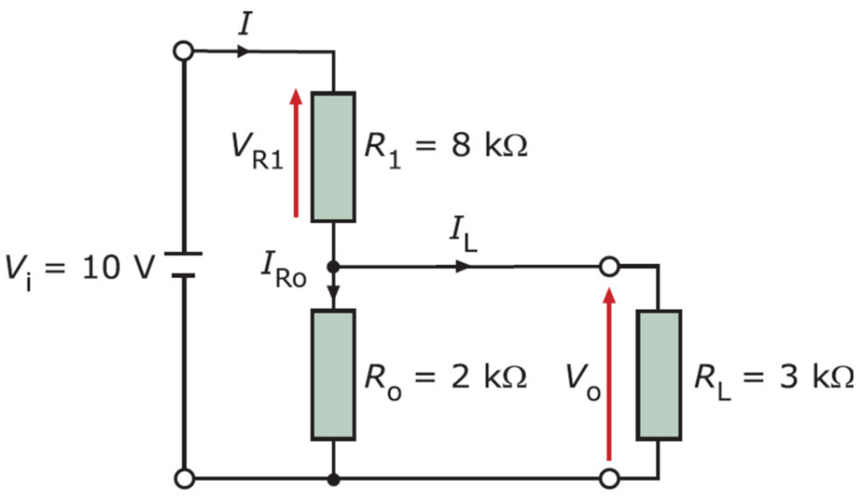
$$\boxed{V_i = V_{R_0} + V_{R_1} = I \cdot R_0 + I \cdot R_1}$$

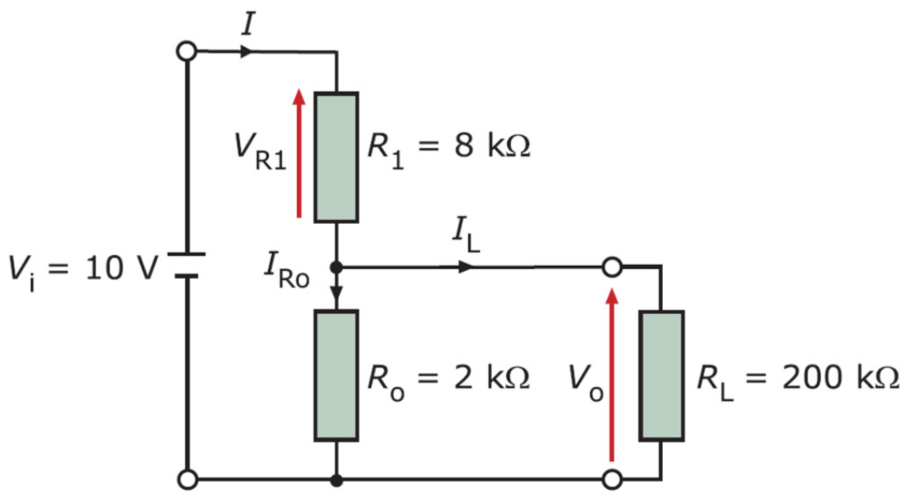
$$\boxed{\frac{V_o}{V_i} = \frac{R_0}{R_1 + R_0} \Rightarrow V_o = V_i\left(\frac{R_0}{R_1 + R_0}\right) = 9.6\,\text{V}}$$

Παράγοντας υποβιβασμού: $\boxed{V_o / V_i = R_0/(R_1 + R_0) = 0.8 \text{ ή } 80\%}$

Άσκηση 2η

Η μόνη διαφορά που έχουν τα κυκλώματα του σχήματος είναι ότι στο πρώτο η αντίσταση φορτίου είναι 3 kΩ, ενώ στο δεύτερο είναι 200 kΩ. Και στα δύο κυκλώματα η τάση εισόδου είναι 10 V και η κινητή επαφή του ποτενσιόμετρου βρίσκεται σε τέτοια θέση ώστε χωρίς αντίσταση φορτίου η αντίσταση στους ακροδέκτες της τάσης εξόδου να είναι 2 kΩ και η υπόλοιπη αντίσταση 8 kΩ. Να προσδιορίσετε την τάση εξόδου όταν δεν υπάρχει αντίσταση φορτίου, αλλά και στις περιπτώσεις των δύο κυκλωμάτων του σχήματος. Να διερευνήσετε το εκατοστιαίο σφάλμα που προκύπτει στα κυκλώματα που ακολουθούν σε σχέση με την περίπτωση όπου δεν υφίσταται αντίσταση φορτίου.





Άσκηση 2η

Από την προηγούμενη άσκηση προκύπτει ότι χωρίς αντίσταση φορτίου:

$$\boxed{V_o = V_i\left(\frac{R_0}{R_1 + R_0}\right) = 2\,V}$$

Στην περίπτωση του πρώτου κυκλώματος (αντίσταση φορτίου 3 kΩ):

$$\boxed{R_E = \frac{R_0 \cdot R_L}{R_0 + R_L} = 1.2\,k\Omega} \quad \boxed{V_o = V_i\left(\frac{R_E}{R_1 + R_E}\right) = 1.3\,V} \quad \boxed{e(\%) = \frac{2 - 1.3}{2}100 = 35\%}$$

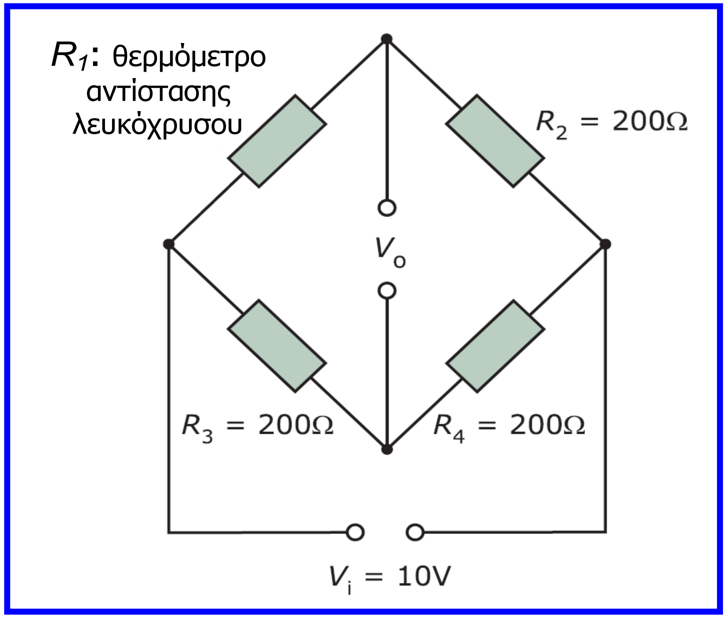
Στην περίπτωση του δεύτερου κυκλώματος (αντίσταση φορτίου 200 kΩ):

$$\boxed{R_E = \frac{R_0 \cdot R_L}{R_0 + R_L} = 1.9802\,k\Omega} \quad \boxed{V_o = V_i\left(\frac{R_E}{R_1 + R_E}\right) = 1.984\,V} \quad \boxed{e(\%) = \frac{2 - 1.984}{2}100 = 0.8\%}$$

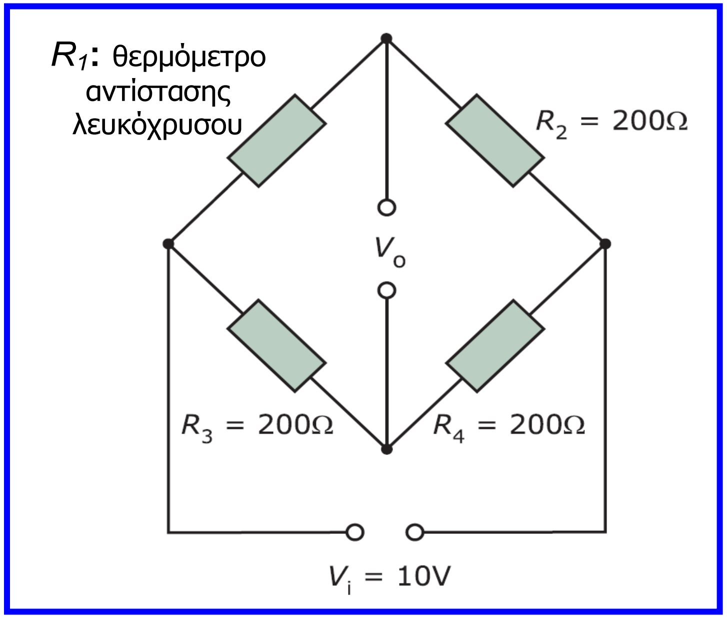
Παρατηρούμε λοιπόν ότι όταν χρησιμοποιηθεί αντίσταση φορτίου (R_L = 200 kΩ) 100 φορές μεγαλύτερη από την R_0, τότε το σφάλμα λόγω της προσθήκης της αντίστασης φορτίου είναι μικρότερο από 1%, ενώ στην πρώτη περίπτωση (R_L= 3 kΩ) το σφάλμα φτάνει στο 35 %.

Άσκηση 3η

Ένα θερμόμετρο αντίστασης λευκόχρυσου συνδέεται στον ένα βραχίονα μιας γέφυρας Wheatstone, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι σταθερές αντιστάσεις του κυκλώματος είναι 200 Ω η καθεμία και η τάση εισόδου είναι 10 V. Στους 0 ^{o}C το κύκλωμα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας και στη θερμοκρασία αυτή το θερμόμετρο έχει αντίσταση 200 Ω. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της τάσης εξόδου εάν η θερμοκρασία αλλάξει κατά 1 ^{o}C. Δίνεται ότι για την αντίσταση του θερμόμετρου ισχύει η σχέση: $R_\theta = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \theta)$, όπου R_θ είναι η αντίσταση στους θ ^{o}C, R_0 η αντίσταση στους 0 ^{o}C και α είναι ο θερμοκρασιακός συντελεστής του υλικού της αντίστασης θερμομέτρου, ο οποίος για τον λευκόχρυσο είναι 0.0039 $^{o}C^{-1}$.



Άσκηση 3η



$$R_{1-0^\circ C} = 200\,\Omega$$

$$R_{1\theta} = R_{10} \cdot (1 + a \cdot \theta) \Rightarrow$$
$$R_{1-1^\circ C} = 200 \cdot (1 + 0.0039 \cdot 1) \approx 200.8\,\Omega$$

$$\Delta R_1 = R_{1-1^\circ C} - R_{1-0^\circ C} = 200.8\,\Omega - 200\,\Omega = 0.8\,\Omega$$

Γραμμική σχέση ανάμεσα στη μεταβολή μίας αντίστασης της γέφυρας και στη μεταβολή της τάσης εξόδου:

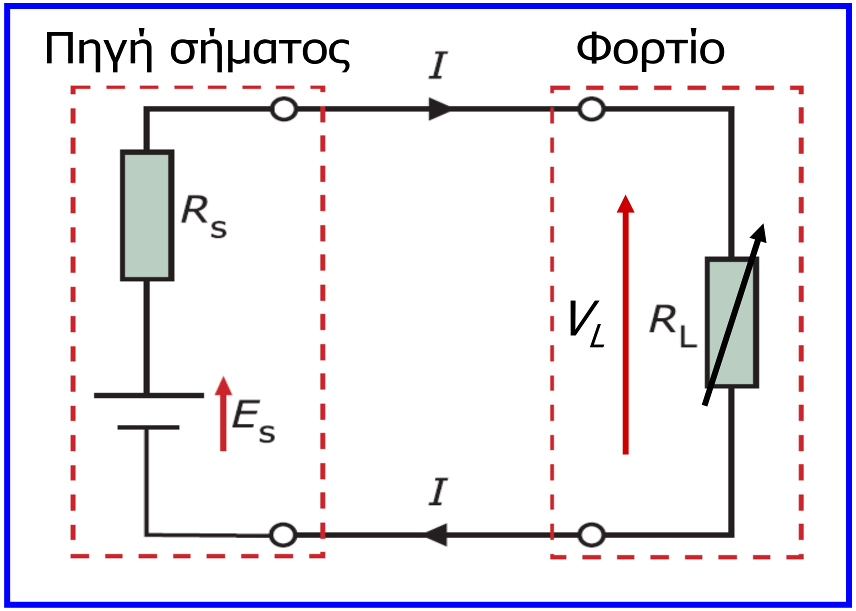
$$\Delta V_o \approx V_i \left(\frac{\Delta R_1}{R_1 + R_2} \right) \Rightarrow \Delta V_o \approx 0.02\ V$$

Επομένως, για κάθε βαθμό αύξησης της θερμοκρασίας προκαλείται μεταβολή 20 mV στην τάση εξόδου της γέφυρας.

Εάν χρησιμοποιούσαμε μεγαλύτερη τάση εισόδου τότε θα αυξανόταν η ΔV_o που προκαλείται από την ίδια μεταβολή αντίστασης, με αποτέλεσμα υψηλότερη ευαισθησία, αλλά θα αυξανόταν και το ρεύμα στο κύκλωμα με αρνητικά αποτελέσματα που προκαλούνται από το φαινόμενο αυτοθέρμανσης του αισθητήρα που θα μελετήσουμε σε επόμενη ενότητα.

Άσκηση 4η

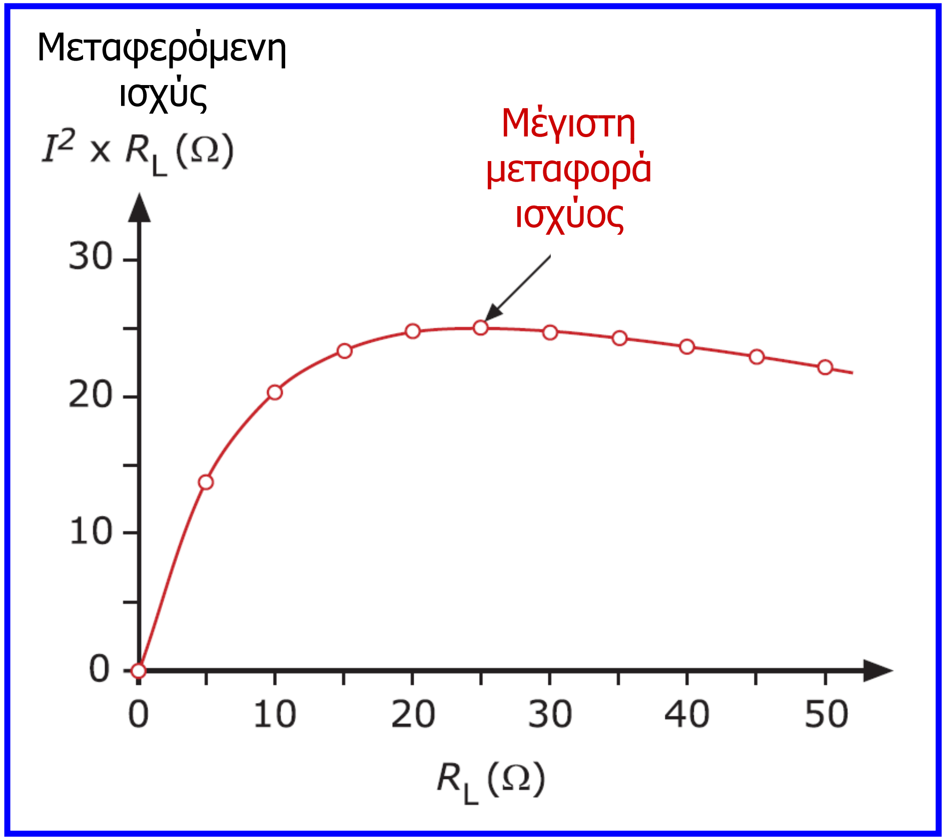
Στο κύκλωμα του σχήματος συνδέεται μία μεταβλητή αντίσταση φορτίου σε σειρά με μία πηγή ισχύος, η οποία έχει ηλεκτρεγερτική δύναμη 50 V και εσωτερική αντίσταση 25 Ω. Να υπολογίσετε την ισχύ που καταναλώνεται (μεταφέρεται) στην αντίσταση φορτίου για διάφορες τιμές της από 0 έως 50 Ω, να σχεδιάσετε τη σχετική γραφική παράσταση και να προσδιορίσετε την μέγιστη μεταφερόμενη ισχύ καθώς και την τιμή της αντίστασης φορτίου για την οποία συμβαίνει.



$$P_L = I^2 \cdot R_L = \left(\frac{E_s}{R_L + R_s} \right)^2 \cdot R_L$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω εξίσωση υπολογίζουμε την μεταφερόμενη ισχύ στο φορτίο για τις διάφορες τιμές της αντίστασης φορτίου και σχεδιάζουμε την ακόλουθη γραφική παράσταση.

Άσκηση 4η



Παρατηρούμε ότι η μέγιστη μεταφερόμενη ισχύς συμβαίνει όταν η αντίσταση φορτίου είναι ίση με την εσωτερική αντίσταση της πηγής (δηλ. 25 Ω) και έχει ως εξής:

$$\boxed{P_{L-MAX} = \frac{E_s^2}{4 \cdot R_L} = \frac{E_s^2}{4 \cdot R_s} = 25\,W}$$

Το γεγονός ότι μέγιστη μεταφερόμενη ισχύς συμβαίνει όταν η αντίσταση φορτίου είναι ίση με την εσωτερική αντίσταση της πηγής μπορεί να αποδειχθεί και με μαθηματικό τρόπο.

Άσκηση 4η

$$\boxed{P_L = \frac{E_s^2}{(R_L + R_s)^2} \cdot R_L}$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή της μεταβλητής μιας συνάρτησης για την οποία η συνάρτηση λαμβάνει ακρότατη τιμή (μέγιστο ή ελάχιστο) εξισώνουμε την παράγωγό της ως προς τη μεταβλητή αυτή με το 0.

$$\frac{dP_L}{dR_L} = E^2 \cdot \frac{(R_S + R_L)^2 - 2 \cdot R_L \cdot (R_S + R_L)}{(R_s + R_L)^4} = 0 \Rightarrow$$

$$(R_s + R_L) \cdot [(R_s + R_L) - 2 \cdot R_L] = 0 \Rightarrow \overset{\text{αδύνατο}}{(R_s + R_L) = 0}$$

$$\text{ή} \;\; (R_s + R_L) - 2 \cdot R_L = 0 \;\; \Rightarrow \;\; R_s = R_L$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \left(\frac{du}{dx}\right) - u \cdot \left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$$

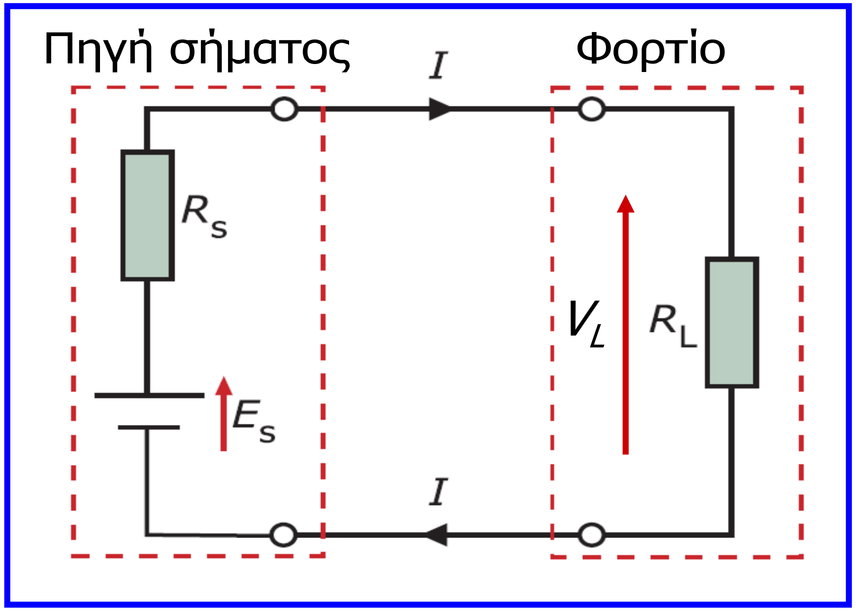
$$\frac{d(u^n)}{dx} = n \cdot u^{n-1} \frac{du}{dx}$$

Η παραπάνω τιμή της R_L (δηλ. $R_L = R_s$) οδηγεί σε μέγιστη ακρότατη τιμή της P_L όταν η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης ισχύος (δηλαδή η παράγωγος της παραγώγου που υπολογίσαμε παραπάνω) είναι < 0 για τη συγκεκριμένη τιμή της R_L:

$$\frac{d^2P_L}{dR_L^2} = E^2 \cdot \frac{-(R_S + R_L)^3 - 3 \cdot (R_S - R_L) \cdot (R_S + R_L)^2}{(R_s + R_L)^6} \overset{R_L = R_s}{\Rightarrow} \frac{d^2P_L}{dR_L^2} = -\frac{E^2}{(2 \cdot R_s)^3} < 0$$

Άσκηση 5η

Για το κύκλωμα του σχήματος δίνονται: E_s = 1 V, R_s = 2 kΩ και R_L = 200 ΚΩ. Να υπολογίσετε τη διαφορά ανάμεσα στην τάση που παρέχει η πηγή (E_s) και στην τάση στα άκρα του φορτίου. Να επαναλάβετε τον παραπάνω υπολογισμό εάν η αντίσταση φορτίου μειωθεί στην τιμή των 20 ΚΩ. Ποιο συμπέρασμα εξάγετε από τα αποτελέσματα των υπολογισμών;



Οι αντιστάσεις πηγής και φορτίου λειτουργούν σαν διαιρέτης τάσης:

$$V_L = \frac{R_L}{R_L + R_s} \cdot E_s \Rightarrow V_L = 0.99\,V$$

$$R_L = 200\ \text{KΩ} \Rightarrow E_s - V_L = 0.01\,V$$

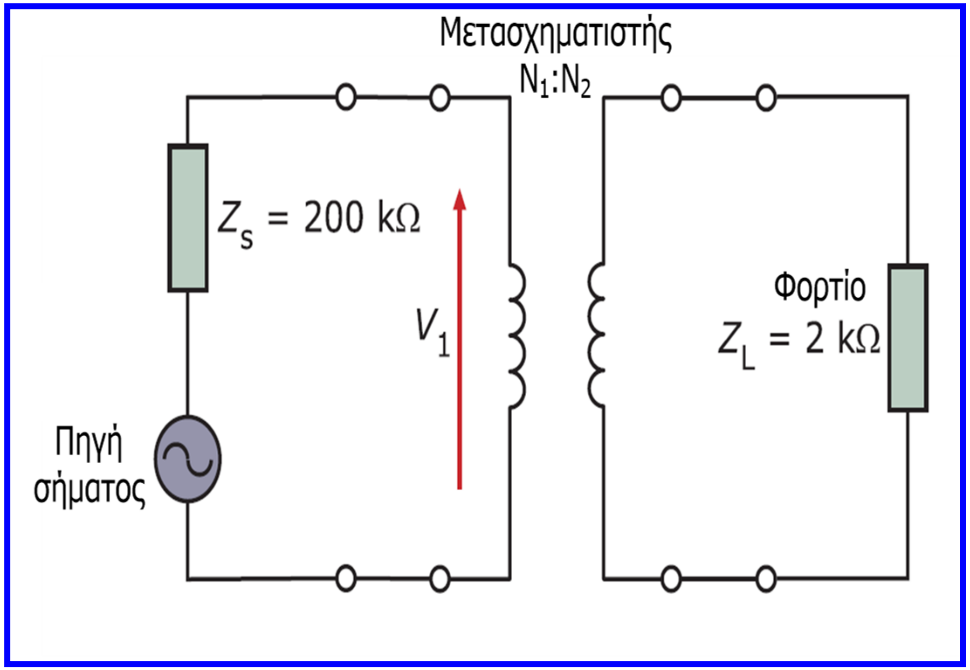
$$V_L = \frac{R_L}{R_L + R_s} \cdot E_s \Rightarrow V_L = 0.90\,V$$

$$R_L = 20\ \text{KΩ} \Rightarrow E_s - V_L = 0.10\,V$$

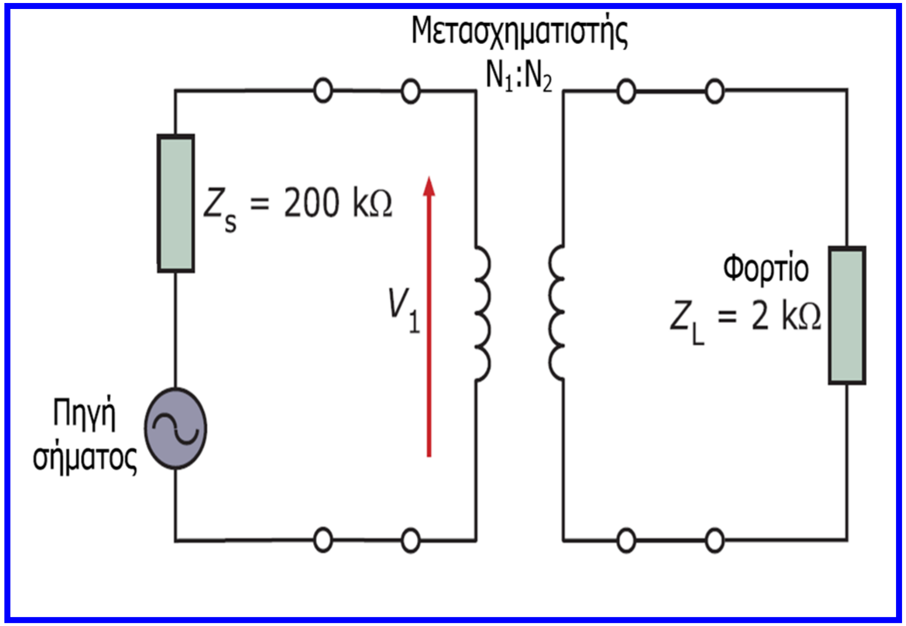
Συμπέρασμα: Με υποδεκαπλασιασμό της αντίστασης φορτίου, η απώλεια σήματος δεκαπλασιάζεται. Εάν $R_L >> R_s \Rightarrow V_L = E_s$ (δηλ. μηδενική απώλεια σήματος)

Άσκηση $6^{η}$

Στο κύκλωμα του σχήματος μεταφέρεται ένα σήμα από έναν αισθητήρα με σύνθετη αντίσταση 200 kΩ σε μία συσκευή απεικόνισης με πολύ μικρότερη σύνθετη αντίσταση των 2 ΚΩ. Να προσδιορίσετε το πηλίκο των στροφών των πηνίων του μετασχηματιστή που χρησιμοποιείται για την προσαρμογή του αισθητήρα και της συσκευής απεικόνισης, ώστε να διασφαλίζεται μέγιστη μεταφορά ισχύος. Εάν η τάση στα άκρα του πρωτεύοντος πηνίου είναι 50 V όταν συμβαίνει μέγιστη μεταφορά ισχύος να υπολογίσετε την ισχύ που μεταφέρεται στο μετασχηματιστή. Θεωρείστε ότι δε υπάρχουν απώλειες στο μετασχηματιστή.



Άσκηση 6η



Για τη διασφάλιση μέγιστης μεταφοράς ισχύος θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{Z_S}{Z_L}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10$$

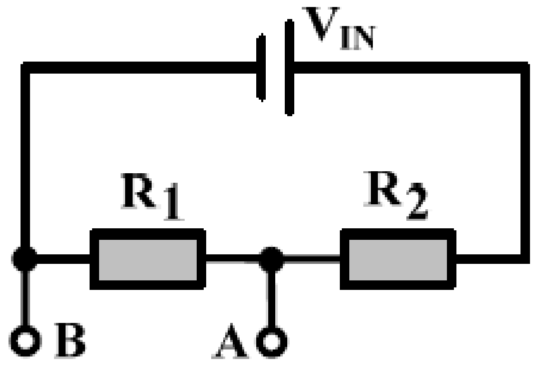
Επομένως, ο λόγος στροφών πρωτεύοντος πηνίο προς δευτερεύον για μέγιστη μεταφορά ισχύος στο φορτίο θα πρέπει να είναι 10:1.

Η ισχύς που μεταφέρεται από την πηγή σήματος (αισθητήρα) στον μετασχηματιστή όταν συμβαίνει μέγιστη μεταφορά ισχύος, είναι:

$$P_1 = \frac{V_1^2}{Z_S} = 12.5\,\text{mW}$$

Άσκηση 7η

Οι τιμές των αντιστάσεων R_1 και R_2 του κυκλώματος του διπλανού σχήματος είναι τέτοιες ώστε στην έξοδο AB να λαμβάνουμε το 20% της τάσης εισόδου V_{IN}. Η σύνδεση αντίστασης φορτίου R_L στην έξοδο AB του κυκλώματος εισάγει σφάλμα στη λαμβανόμενη τάση εξόδου. Να προσδιορίσετε τη σχέση μεταξύ των αντιστάσεων R_1 και R_L, έτσι ώστε το εκατοστιαίο σφάλμα, που εισάγεται στη λαμβανόμενη τάση εξόδου λόγω της σύνδεσης της αντίστασης φορτίου, να είναι 5%.



Άσκηση 7η

Η τιμή της τάσης εξόδου V_{AB} πριν τη σύνδεση της αντίστασης φορτίου R_L, έχει ως εξής:

$$V_{AB} = 0.2 \cdot V_{IN}, \quad (1)$$

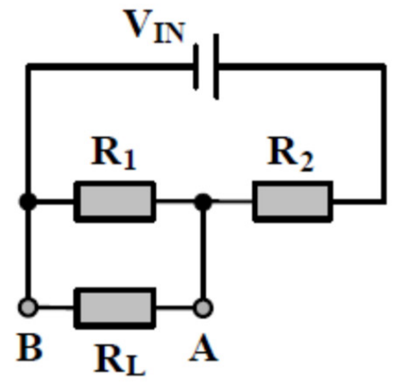
$$V_{AB} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot V_{IN} \quad (2)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις (1) και (2), προκύπτει:

$$V_{AB} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot V_{IN} \Rightarrow 0.2 \cdot V_{IN} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot V_{IN} \Rightarrow \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0.2 \Rightarrow R_1 = 0.2 \cdot R_1 + 0.2 \cdot R_2 \Rightarrow$$

$$R_1 - 0.2 \cdot R_1 = 0.2 \cdot R_2 \Rightarrow R_2 = \frac{0.8}{0.2} \cdot R_1 \Rightarrow R_2 = 4 \cdot R_1 . \quad (3)$$

Μετά τη σύνδεση της αντίστασης φορτίου R_L (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα) η τάση εξόδου γίνεται:



Άσκηση 7η

$$V'_{AB}=\frac{\dfrac{R_1\cdot R_L}{R_1+R_L}}{\left(\dfrac{R_1\cdot R_L}{R_1+R_L}\right)+R_2}\cdot V_{IN}\overset{(3)}{\Rightarrow}V'_{AB}=\frac{\dfrac{R_1\cdot R_L}{R_1+R_L}}{\left(\dfrac{R_1\cdot R_L}{R_1+R_L}\right)+4\cdot R_1}\cdot V_{IN}\Rightarrow V'_{AB}=\frac{\dfrac{R_1\cdot R_L}{R_1+R_L}}{\dfrac{R_1\cdot R_L+4\cdot R_1\cdot(R_1+R_L)}{R_1+R_L}}\cdot V_{IN}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V'_{AB}=\frac{R_1\cdot R_L}{R_1\cdot R_L+4\cdot R_1\cdot(R_1+R_L)}\cdot V_{IN}\,. \qquad (4)$$

Το εκατοστιαίο σφάλμα που οφείλεται στη σύνδεση της αντίστασης φορτίου R_L έχει ως εξής:

$$e(\%)=\frac{\left|V_{AB}-V'_{AB}\right|}{V_{AB}}\cdot 100\underset{(4)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}}e(\%)=\frac{0.2\cdot V_{IN}-\dfrac{R_1\cdot R_L}{R_1\cdot R_L+4\cdot R_1\cdot(R_1+R_L)}\cdot V_{IN}}{0.2\cdot V_{IN}}\cdot 100\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e(\%)=\left(1-\frac{R_1\cdot R_L}{0.2\cdot R_1\cdot R_L+0.8\cdot R_1\cdot(R_1+R_L)}\right)\cdot 100\Rightarrow e(\%)=\left(1-\frac{R_1\cdot R_L}{R_1\cdot R_L+0.8\cdot R_1^2}\right)\cdot 100\,.$$

Άσκηση 7η

Με βάση την παραπάνω σχέση υπολογίζουμε τη σχέση μεταξύ των αντιστάσεων R_1 και R_L, έτσι ώστε το εκατοστιαίο σφάλμα e(%) να ισούται με 5%:

$$5=\left(1-\frac{R_1\cdot R_L}{R_1\cdot R_L+0.8\cdot R_1^2}\right)\cdot 100 \Rightarrow 5=100-\frac{R_1\cdot R_L}{R_1\cdot R_L+0.8\cdot R_1^2}\cdot 100 \Rightarrow \frac{100\cdot R_1\cdot R_L}{R_1\cdot R_L+0.8\cdot R_1^2}=95\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100\cdot R_1\cdot R_L=95\cdot R_1\cdot R_L+76\cdot R_1^2\Rightarrow 5\cdot R_1\cdot R_L=76\cdot R_1^2\Rightarrow R_L=15.2\cdot R_1.$$

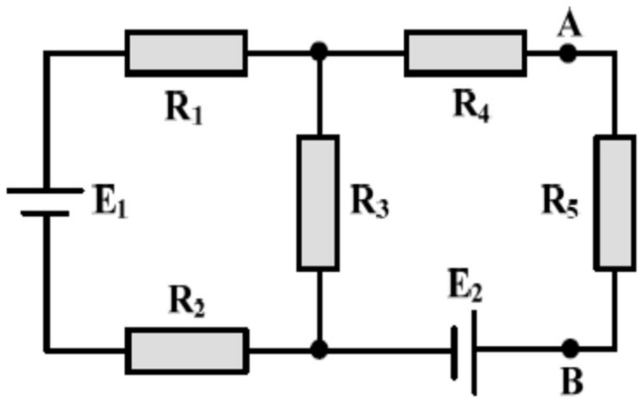
Καταλήξαμε λοιπόν στο ότι για να ισούται με 5% το εκατοστιαίο σφάλμα που εισάγεται στη λαμβανόμενη τάση εξόδου λόγω της σύνδεσης της αντίστασης φορτίου, θα πρέπει η τιμή της αντίστασης φορτίου να είναι περίπου δεκαπενταπλάσια της τιμής της αντίστασης εξόδου (R_1) του κυκλώματος.

Άσκηση 8η

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος, η τάση μεταξύ των ακροδεκτών A και B πρόκειται να μετρηθεί με βολτόμετρο, του οποίου η τιμή της εσωτερικής αντίστασης (R_V) είναι 4.75 kΩ. Οι τιμές των αντιστάσεων του κυκλώματος είναι: $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 300\ \Omega$, $R_3 = 500\ \Omega$, $R_4 = 250\ \Omega$ και $R_5 = 500\ \Omega$.

(α) Να υπολογίσετε το εκατοστιαίο σφάλμα της μέτρησης που οφείλεται στην εσωτερική αντίσταση του βολτομέτρου.

(β) Ποια θα πρέπει να είναι η τιμή της εσωτερικής αντίστασης του βολτομέτρου, για να μειωθεί το εκατοστιαίο σφάλμα της μέτρησης στο 1%.

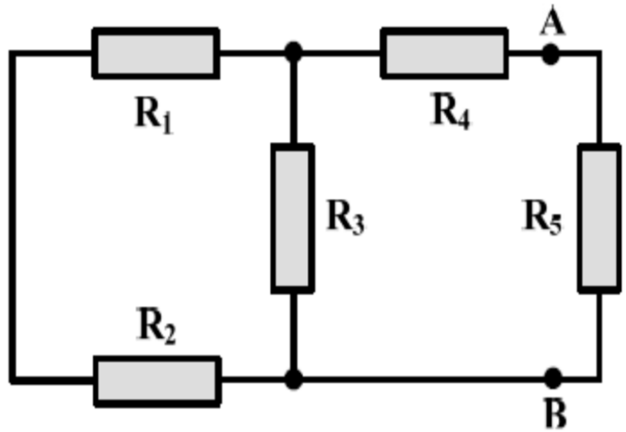


Υπόδειξη: Αρχικά, εφαρμόστε το θεώρημα Thevenin για τον υπολογισμό της αντίστασης του ισοδύναμου κυκλώματος που καταλήγει στους ακροδέκτες A και B.

Άσκηση 8η

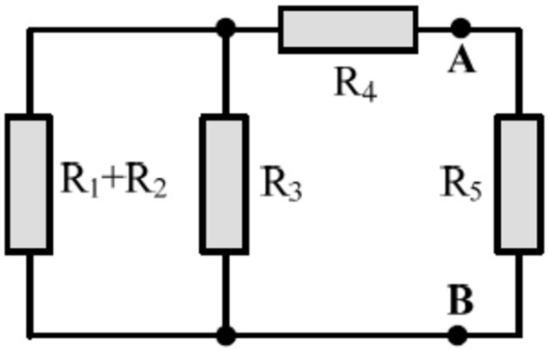
Σύμφωνα με το θεώρημα Thevenin, κάθε γραμμικό κύκλωμα δύο ακροδεκτών μπορεί να αντικατασταθεί με μία πηγή τάσης ίση με την τάση ανοιχτού κυκλώματος μεταξύ των ακροδεκτών αυτών, σε σειρά με την αντίσταση που «φαίνεται» από τους ακροδέκτες αυτούς. Η αντίσταση του ισοδύναμου κυκλώματος υπολογίζεται εάν θεωρήσουμε βραχυκυκλωμένες όλες τις πηγές τάσης και ανοιχτοκυκλωμένες όλες τις πηγές ρεύματος.

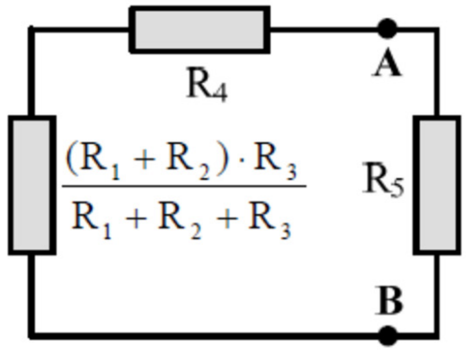
Εάν λοιπόν βραχυκυκλώσουμε τις πηγές τάσης στο κύκλωμα που δίνεται στην εκφώνηση του θέματος προκύπτει το ακόλουθο κύκλωμα:



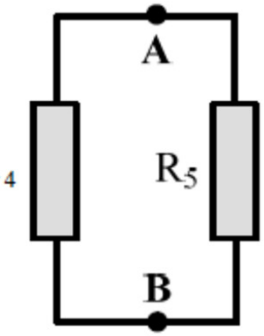
Άσκηση 8η

Απλοποιώντας σταδιακά το κύκλωμα του παραπάνω σχήματος καταλήγουμε στον υπολογισμό της αντίστασης (R_T) του ισοδύναμου κυκλώματος Thevenin:



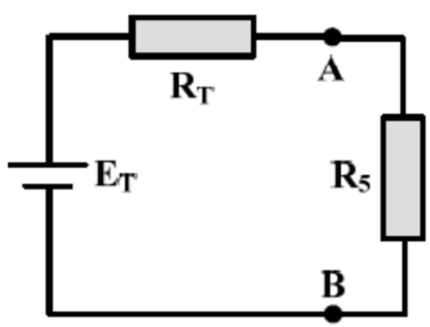


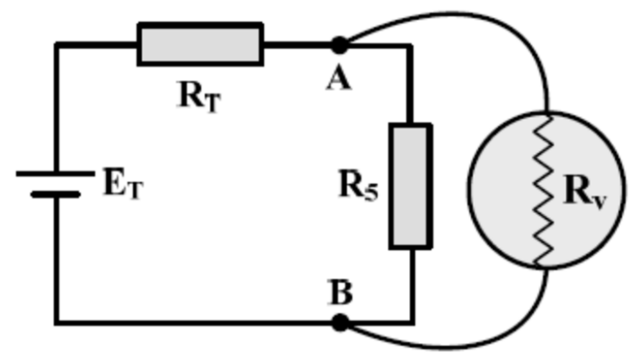
$$R_T = \frac{(R_1+R_2)\cdot R_3}{R_1+R_2+R_3} + R_4$$



$$R_T = \frac{(R_1+R_2)\cdot R_3}{R_1+R_2+R_3} + R_4 \Rightarrow R_T = \left[\frac{(200+300)\cdot 500}{200+300+500} + 250\right]\Omega \Rightarrow R_T = 500\,\Omega\,.$$

Θεωρώντας ότι η τάση ανοιχτού κυκλώματος μεταξύ των κόμβων A και B είναι E_T, το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin είναι αυτό που παρουσιάζεται στο αριστερό μέρος του παρακάτω σχήματος:





Άσκηση 8η

Η ακριβής τάση μεταξύ των ακροδεκτών A και B (V_{AB}) έχει ως εξής:

$$V_{AB} = \frac{R_5}{R_5 + R_T} \cdot E_T \Rightarrow V_{AB} = \frac{500}{500+500} \cdot E_T \Rightarrow V_{AB} = 0.5 \cdot E_T \, .$$

Μετά τη σύνδεση του βολτομέτρου (όπως φαίνεται στο δεξί μέρος του παραπάνω σχήματος) η τιμή της τάσης που θα μετρηθεί (V'_{AB}), έχει ως εξής:

$$V'_{AB} = \frac{R_5 // R_v}{(R_5 // R_v) + R_T} \cdot E_T = \frac{\dfrac{R_5 \cdot R_v}{R_5 + R_v}}{\left(\dfrac{R_5 \cdot R_v}{R_5 + R_v}\right) + R_T} \cdot E_T \Rightarrow V'_{AB} = \frac{\dfrac{500 \cdot 4750}{500 + 4750}}{\left(\dfrac{500 \cdot 4750}{500 + 4750}\right) + 500} \cdot E_T \Rightarrow V'_{AB} = 0.475 \cdot E_T \, .$$

Με βάση τα παραπάνω, το εκατοστιαίο σφάλμα της μέτρησης που οφείλεται στην εσωτερική αντίσταση του βολτομέτρου, υπολογίζεται ως εξής:

$$e(\%) = \frac{|V_{AB} - V'_{AB}|}{V_{AB}} \cdot 100 \Rightarrow e(\%) = \frac{|0.5 \cdot E_T - 0.475 \cdot E_T|}{0.5 \cdot E_T} \cdot 100 \Rightarrow e(\%) = \frac{0.025 \cdot E_T}{0.5 \cdot E_T} \cdot 100 = 5\% \, .$$

Άσκηση 8η

Για να υπολογίσουμε την τιμή της εσωτερικής αντίστασης του βολτομέτρου που οδηγεί σε εκατοστιαίο σφάλμα μέτρησης ίσο με 1%, αρχικά υπολογίζουμε από την παραπάνω σχέση την τιμή της τάσης μεταξύ των κόμβων A και B με συνδεδεμένο το βολτόμετρο (V'_{AB}) για την οποία το σφάλμα μέτρησης είναι 1%:

$$1=\left(\frac{\left|0.5\cdot E_T-V'_{AB}\right|}{0.5\cdot E_T}\right)\cdot 100 \Rightarrow 0.01=\frac{0.5\cdot E_T-V'_{AB}}{0.5\cdot E_T}\Rightarrow V'_{AB}=0.5\cdot E_T-0.005\cdot E_T\Rightarrow V'_{AB}=0.495\cdot E_T\,.$$

Στη συνέχεια, με βάση τη σχέση υπολογισμού της τάσης V'_{AB} που αναφέρθηκε στο ερώτημα (α), υπολογίζουμε την τιμή της εσωτερικής αντίστασης του βολτομέτρου, ώστε το σφάλμα μέτρησης να είναι 1%:

$$V'_{AB}=\frac{R_5 // R_v}{(R_5 // R_v)+R_T}\cdot E_T\Rightarrow$$

$$0.495\cdot E_T=\frac{R_5 // R_v}{(R_5 // R_v)+R_T}\cdot E_T\Rightarrow R_5 // R_v=0.495\cdot(R_5 // R_v)+0.495\cdot R_T\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_5 // R_v=\frac{0.495\cdot R_T}{0.505}\Rightarrow\frac{R_5\cdot R_v}{R_5+R_v}=0.9802\cdot R_T\Rightarrow R_5\cdot R_v=0.9802\cdot R_T\cdot(R_5+R_v)\Rightarrow$$

$$R_5\cdot R_v-0.9802\cdot R_T\cdot R_v=0.9802\cdot R_T\cdot R_5\Rightarrow R_v=\frac{0.9802\cdot R_T\cdot R_5}{R_5-0.9802\cdot R_T}\Rightarrow$$

$$R_v=\frac{0.9802\cdot 500\cdot 500}{500-0.9802\cdot 500}\Omega\Rightarrow R_v=24752.5\Omega\approx 24.75\,k\Omega\,.$$

Τέλος 3ης ενότητας