Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Πρόβλημα 20
- Σε ένα δυαδικό σύστημα PAM η είσοδος στον ανιχνευτή δίνεται από τη σχέση:
  - $y_m = a_m + n_m + i_m$
  - $a_m = \pm 1$ είναι το επιθυμητό σήμα
  - n_m είναι θόρυβος Gauss με διασπορά σ_n^2
  - i_m είναι η διασυμβολική παρεμβολή η οποία παίρνει τιμές -1/2, 0, 1/2 με πιθανότητες ¼, ½ και 1/4
- Να βρεθεί η μέση πιθανότητα σφάλματος σαν συνάρτηση του σ_n^2

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Έστω ότι εστάλη το σήμα $a_m = 1$. Τότε η πιθανότητα σφάλματος ισούται με:

$$
\begin{aligned}
P_{e|1} &= P\left(y_m < 0 | a_m = +1\right) \\
&= P\left(1 + n_m + i_m < 0\right) \\
&= \frac{1}{4}P\left(1/2 + n_m < 0\right) + \frac{1}{4}P\left(3/2 + n_m < 0\right) + \frac{1}{2}P\left(1 + n_m < 0\right) \\
&= \frac{1}{4}Q\left[\frac{1}{2\sigma_n}\right] + \frac{1}{4}Q\left[\frac{3}{2\sigma_n}\right] + \frac{1}{2}Q\left[\frac{1}{\sigma_n}\right]
\end{aligned}
$$

- Λόγω συμμετρίας η πιθανότητα σφάλματος για $a_m = -1$ είναι ίδια με την προηγούμενη περίπτωση και ίση με τη μέση πιθανότητα σφάλματος

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Πρόβλημα 21
- Σε ένα δέκτη δυαδικού συστήματος PAM το ρολόι που καθορίζει τη δειγματοληψία στην έξοδο του προσαρμοσμένου φίλτρου έχει απόκλιση 10% σε σχέση με τη βέλτιστη χρονική στιγμή δειγματοληψίας
- Αν ο παλμός βασικής ζώνης είναι τετραγωνικός ζητείται ο υπολογισμός της απώλειας του SNR λόγω της απόκλισης αυτής
- Ποιο το ποσό της διασυμβολικής παρεμβολής που εισάγεται και ποια η επίπτωσή του στην επίδοση του συστήματος;

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Σήμα μετάδοσης: $r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n h(t - nT) + n(t)$
- Σήμα στην έξοδο του προσαρμοσμένου φίλτρου

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n x(t - nT) + v(t)$$

  - $x(t) = h(t)*h(t)$, $v(t) = n(t)*h(t)$

- Υποθέτουμε ότι λόγω έλλειψης χρονισμού παίρνουμε δείγματα τη στιγμή (m±0.1)T ;
- Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε πρόσημο μείον

$$y_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n x(m - 0.1T - nT) + v(m - 0.1T)$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Από υπόθεση, h(t) είναι τετραγωνικός παλμός διάρκειας T και πλάτους A
  - x(t) τριγωνικός διάρκειας 2T και πλάτους TA^2
- Η σειρά είναι μη μηδενική για n = m και n = m-1 (γιατί;)
- Η ακολουθία εξόδου μετά τη δειγματοληψία έχει την ακόλουθη μορφή:

$$y_m = I_m x(-0.1T) + I_{m-1} x(T - 0.1T) + v(mT - 0.1T)$$
$$= 0.9 I_m A^2 T + 0.1 I_{m-1} A^2 T + v(mT - 0.1T)$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Διασπορά του θορύβου: $\sigma_v^2 = \frac{N_0}{2} A^2 T$
- Ο λόγος σήματος προς θόρυβο ισούται με:

$$\mathrm{SNR} = \left(\frac{9}{10}\right)^2 \frac{2(A^2T)^2}{N_0 A^2 T} = \left(\frac{81}{100}\right)\frac{2A^2T}{N_0}$$

- Από το προηγούμενο ερώτημα η ακολουθία μετά τη δειγματοληψία ισούται με:

$$y_m = 0.9 I_m A^2 T + 0.1 I_{m-1} A^2 T + v(mT - 0.1T)$$

- Ο όρος $0.1 I_{m-1} A^2 T$ είναι διασυμβολική παρεμβολή

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Από υπόθεση, h(t) είναι τετραγωνικός παλμός διάρκειας T και πλάτους A
  – x(t) τριγωνικός διάρκειας 2T και πλάτους TA^2
- Η σειρά είναι μη μηδενική για n = m και n = m-1 (γιατί;)
- Η ακολουθία εξόδου μετά τη δειγματοληψία έχει την ακόλουθη μορφή:

$$y_m = I_m x(-0.1T) + I_{m-1} x(T - 0.1T) + v(mT - 0.1T)$$
$$= 0.9 I_m A^2 T + 0.1 I_{m-1} A^2 T + v(mT - 0.1T)$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Έστω ότι $I_m = 1$. Η πιθανότητα σφάλματος υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} P(e|I_m = 1) &= \frac{1}{2}P(e|I_m = 1, I_{m-1} = 1) + \frac{1}{2}P(e|I_m = 1, I_{m-1} = -1) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi N_0 A^2 T}}\int_{-\infty}^{-A^2T} e^{-\frac{\nu^2}{N_0 A^2 T}}\,d\nu + \frac{1}{2\sqrt{\pi N_0 A^2 T}}\int_{-\infty}^{-\frac{8}{10}A^2T} e^{-\frac{\nu^2}{N_0 A^2 T}}\,d\nu \\ &= \frac{1}{2}Q\left[\sqrt{\frac{2A^2T}{N_0}}\right] + \frac{1}{2}Q\left[\sqrt{\left(\frac{8}{10}\right)^2 \frac{2A^2T}{N_0}}\right] \end{aligned}$$

- Η διαφορά με την πιθανότητα σφάλματος ενός συστήματος PAM χωρίς ISI είναι

$$P_{\text{diff}}(e) = \frac{1}{2}Q\left[\sqrt{\left(\frac{8}{10}\right)^2 \frac{2A^2T}{N_0}}\right] - \frac{1}{2}Q\left[\sqrt{\frac{2A^2T}{N_0}}\right]$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Πρόβλημα 22
- Η απόκριση συχνότητας ενός βαθυπερατού καναλιού δίνεται από τη σχέση

$$H(f) = \begin{cases} 1 + a\cos(2\pi f t_0), \ |a| < 1, |f| < W \\ 0, \text{αλλού} \end{cases}$$

- Εφαρμόζεται ως είσοδος βαθυπερατό σήμα s(t). Να αποδειχθεί ότι

$$y(t) = s(t) + \frac{a}{2}s(t - t_0) + \frac{a}{2}s(t + t_0)$$

- Υποθέστε ότι το σήμα στη λήψη y(t) περνάει από φίλτρο προσαρμοσμένο στο σήμα s(t). Ποια η έξοδος του προσαρμοσμένου φίλτρου στα σημεία t = kT ;
- Ποια η ISI που προκύπτει από το κανάλι όταν t_0 = T;

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμός Fourier προκύπτει:

$$h(t) = F^{-1}(H(f)) = \delta(t) + \frac{a}{2}\delta(t - t_0) + \frac{a}{2}\delta(t + t_0)$$

$$y(t) = s(t) * h(t) = s(t) + \frac{a}{2}s(t - t_0) + \frac{a}{2}s(t + t_0)$$

- Έστω ότι ο παλμός s(t) χρησιμοποιείται για να διαμορφώσει την ακολουθία I_n. Το σήμα που μεταδιδεται είναι

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n s(t - nT)$$

- Το σήμα στη λήψη είναι η συνέλιξη του u(t) με το h(t).

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t) \star h(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n s(t - nT) \right) \star \left(\delta(t) + \frac{\alpha}{2}\delta(t - t_0) + \frac{\alpha}{2}\delta(t + t_0) \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n s(t - nT) + \frac{\alpha}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n s(t - t_0 - nT) + \frac{\alpha}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n s(t + t_0 - nT) \end{aligned}$$

- Η έξοδος του προσαρμοσμένου φίλτρου τη στιγμή t_1:

$$\begin{aligned} w(t_1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau - nT) s(\tau - t_1) d\tau \\ &+ \frac{\alpha}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau - t_0 - nT) s(\tau - t_1) d\tau \\ &+ \frac{\alpha}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau + t_0 - nT) s(\tau - t_1) d\tau \end{aligned}$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Ορίζουμε ως *x(t)=s(t)*s(t)*. Έξοδος του προσαρμοσμένου φίλτρου τη στιγμή $t_1 = kT$

$$\begin{aligned} w(kT) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n x(kT - nT) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n x(kT - t_0 - nT) + \frac{\alpha}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n x(kT + t_0 - nT) \end{aligned}$$

- Για $t_0 = T$ και $k = n$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} w_k &= I_k x_0 + \sum_{n \neq k} I_n x_{k-n} \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} I_k x_{-1} + \frac{\alpha}{2} \sum_{n \neq k} I_n x_{k-n-1} + \frac{\alpha}{2} I_k x_1 + \frac{\alpha}{2} \sum_{n \neq k} I_n x_{k-n+1} \\ &= I_k \left(x_0 + \frac{\alpha}{2} x_{-1} + \frac{\alpha}{2} x_1 \right) + \sum_{n \neq k} I_n \left[x_{k-n} + \frac{\alpha}{2} x_{k-n-1} + \frac{\alpha}{2} x_{k-n+1} \right] \end{aligned}$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Οι όροι στην άθροιση αντιστοιχούν σε διασυμβολική παρεμβολή. Αν το σήμα s(t) σχεδιαστεί ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο του Nyquist τότε: $x_k = 0,\ k \neq 0$.
- Η σχέση απλοποιείται ως εξής:

$$w_k = I_k + \frac{a}{2}(I_{k-1} + I_{k+1})$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Πρόβλημα 23
- Ένα ενσύρματο κανάλι έχει μήκος 1000 χιλιόμετρα και χρησιμοποιείται για τη μετάδοση δυαδικών δεδομένων με χρήση PAM
- Χρησιμοποιούνται κάθε 50 χιλιόμετρα αναγεννητικοί επαναλήπτες (regenerative repeaters)
- Κάθε τμήμα του καναλιού έχει ιδανική απόκριση συχνότητας για την μπάντα από 0 εως 1200Hz και εξασθένιση 1dB/km.
- Ο θόρυβος είναι AWGN
- Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης bit χωρίς ISI?
- Ποιος ο SNR για επίτευξη πιθανότητας σφάλματος 10^{-7} για κάθε επαναλήπτη;
- Ποια η ισχύς μετάδοσης σε κάθε επαναλήπτη για να επιτευχθεί ο συγκεκριμένος SNR (N_0 = 4.1e-21 W/Hz)

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Κάθε κομμάτι του καναλιού μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα ζωνοπερατό φίλτρο με εύρος ζώνης W = 1200Hz. O μέγιστος ρυθμός μετάδοσης χωρίς ISI για δυαδικό PAM είναι R = 2W = 2400 bps.
- Πιθανότητα σφάλματος δυαδικού PAM:

$$P_2 = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

- Χρησιμοποιώντας πίνακες ή τη συνάρτηση erfcinv() του Matlab προκύπτει:

$$\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = 5.2 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 13.52 = 11.30\text{dB}$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Η ισχύς λήψης PR σχετίζεται με το λόγο ενέργειας bit προς θόρυβο ως εξής:
  - $P_R/N_0 = 1/T\, E_b/N_0 = RE_b/N_0$
- Συνεπώς:
  - $PR = 4.1\times10^{-21}\times1200\times13.52=6.6518\times10^{-17}=-161.77mW$
- Η εξασθένιση για κάθε κομμάτι είναι ίση με:
  - $L_s = 50km\times1dB/km=50dB$
- Η ισχύς μετάδοσης σε κάθε επαναλήπτη για να επιτευχθεί ο συγκεκριμένος SNR ισούται με:
  - $P_T=P_R+L_s=-161.77+50 = -111.77dBW$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Πρόβλημα 24
- Ένα σύστημα μεταδίδει δυαδικά δεδομένα αντιστοιχίζοντας το $E_b^{1/2}$ στο 0 και $-E_b^{1/2}$ στο 1 (antipodal).
- Στο δέκτη η έξοδος του αποδιαμορφωτή είναι $E_b^{1/2}$ για t = T, $E_b^{1/2}/4$ για t = 2T και μηδέν για t = kT, k>2, όπου E_b είναι η ενέργεια ενός bit.
- Ποια είναι η μέση πιθανότητα σφάλματος για το σύστημα αυτό;

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Η έξοδος του προσαρμοσμένου φίλτρου τη χρονική στιγμή mT είναι:
- Η διασπορά του θορύβου είναι $N_0/2$
- Υποθέτουμε ότι μεταδόθηκαν τα σύμβολα $I_m = I_{m-1} = \sqrt{E_b}$

$$y_m = \sum_k I_m x_{k-m} + v_m = I_m + \frac{1}{4} I_{m-1} + v_m$$

$$P(e \mid I_m = I_{m-1} = \sqrt{E_b}) = P(y_m < 0 \mid I_m = I_{m-1} = \sqrt{E_b})$$

$$= P(v_m < -5/4\sqrt{E_b}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^{-5/4\sqrt{Eb}} \exp\left(-\frac{v_m^2}{N_0}\right) dv_m$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-5/4\sqrt{2E_b/N_0}} \exp\left(-\frac{v_m^2}{2}\right) dv_m = Q\left(\frac{5}{4}\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Μέση πιθανότητα σφάλματος

$$P(e) = P(e \mid I_m = \sqrt{E_b}) = P(e, I_m = -\sqrt{E_b})$$

$$= \frac{1}{2} Q\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{5}{4}\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$P(e \mid I_m = \sqrt{E_b}, I_{m-1} = -\sqrt{E_b}) =$$

$$= P(v_m < -3/4\sqrt{E_b}) =$$

$$= Q\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Πρόβλημα 25
- Ένα δυαδικό σήμα PAM μεταδίδεται μέσω καναλιού πεπερασμένου εύρους ζώνης
- Όταν μεταδίδεται το σύμβολο 1, η έξοδος του αποδιαμορφωτή, x_m ισούται με 0.3, όταν $m = \pm 1$, 0.9, όταν $m = 0$, και μηδέν αλλού
- Ζητείται ο σχεδιασμός ενός ισοσταθμιστή ZF τριών βαθμίδων ετσι ώστε η έξοδος του, q_m να είναι 1 όταν $m = 0$ και μηδέν όταν $m = \pm 1$
- Να υπολογιστεί η έξοδος q_m όταν $m = \pm 2$, $m = \pm 3$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

Το μοντέλο διακριτού χρόνου του καναλιού ειναι:

$$h(t) = \sum_{n=-1}^{1} h_n \delta(t - nT) = 0.3\delta(t+T) + 0.9\delta(t) + 0.3\delta(t-T)$$

Αν c_n είναι οι συντελεστές του φίλτρου FIR του ισοσταθμιστή, η έξοδός του είναι:

$$q_m = \sum_{n=-1}^{1} c_n h_{m-n}$$

Σε μητρική μορφή η σχέση γράφεται:

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.3 & 0. \\ 0.3 & 0.9 & 0.3 \\ 0. & 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

Λύση του συστήματος:

$$\begin{pmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4762 \\ 1.4286 \\ -0.4762 \end{pmatrix}$$

Οι έξοδοι του ισοσταθμιστή τις ζητούμενες χρονικές στιγμές είναι:

$$\begin{aligned} q_2 &= \sum_{n=-1}^{1} c_n h_{2-n} = c_1 h_1 = -0.1429 \\ q_{-2} &= \sum_{n=-1}^{1} c_n h_{-2-n} = c_{-1} h_{-1} = -0.1429 \\ q_3 &= \sum_{n=-1}^{1} c_n h_{3-n} = 0 \\ q_{-3} &= \sum^{1} c_n h_{-3-n} = 0 \end{aligned}$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Πρόβλημα 26
- Παλμός ανυψωμένου συνημιτόνου μεταδίδεται μέσα από ένα κανάλι
- Η έξοδος του αποδιαμορφωτή, x_m ισούται με -0.5, όταν m = -2, 0.1, όταν m = -1, 1, όταν m = 0, -0.2 όταν m = 1, 0.05 όταν m = 2 και μηδέν αλλού
- Ζητείται ο σχεδιασμός ενός ισοσταθμιστή ZF τριών βαθμίδων
- Για την τιμή των συντελεστών του φίλτρου υπολογίστε την απόκρισή του στο χρόνο. Ποια η υπολειπόμενη ISI?

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

Σχέση εισόδου εξόδου του FIR φίλτρου

$$q_m = \sum_{n=-1}^{1} c_n x_{m_n}$$

Προκύπτει το εξής σύστημα

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.1 & -0.5 \\ -0.2 & 1.0 & 0.1 \\ 0.05 & -0.2 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Η λύση του είναι η εξής:

$$\begin{pmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.980 \\ 0.196 \end{pmatrix}$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

Έξοδος του ισοσταθμιστή:

$$q_m = \begin{cases} 0 & m \leq -4 \\ c_{-1}x_{-2} = 0 & m = -3 \\ c_{-1}x_{-1} + c_0 x_{-2} = -0.49 & m = -2 \\ 0 & m = -1 \\ 1 & m = 0 \\ 0 & m = 1 \\ c_0 x_2 + x_1 c_1 = 0.0098 & m = 2 \\ c_1 x_2 = 0.0098 & m = 3 \\ 0 & m \geq 4 \end{cases}$$

Η υπολειπόμενη ISI έχει διάρκεια έξι συμβόλων

$$\{\ldots, 0, -0.49, 0, 0, 0, 0.0098, 0.0098, 0, \ldots\}$$