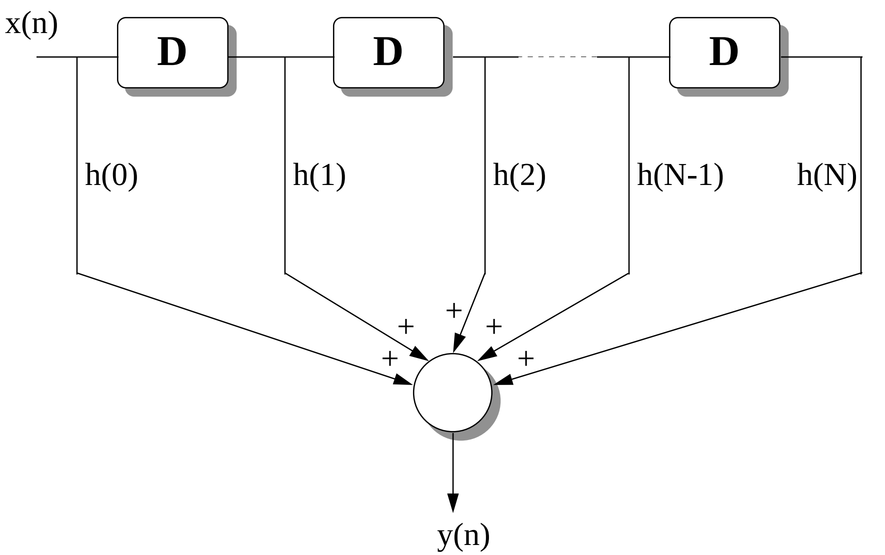
Εισαγωγή στην Ισοστάθμιση

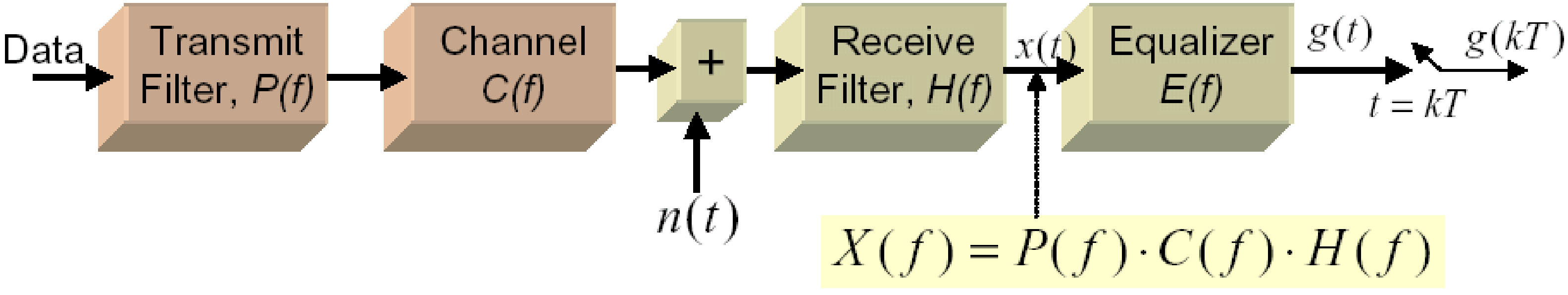
- Σε πρακτικά τηλεπικοινωνιακά συστήματα η κρουστική απόκριση του καναλιού δεν είναι γνωστή με ακρίβεια
- Παράδειγμα: Το τηλεφωνικό κανάλι
  - Κάθε φορά που καλούμε έναν αριθμό το κανάλι είναι διαφορετικό γιατί η διαδρομή του σήματος είναι διαφορετική
  - Τα χαρακτηριστικά του καναλιού είναι a-priori άγνωστα
- Παράδειγμα: Το ασύρματο κανάλι και το υποβρύχιο ακουστικό κανάλι
  - Η απόκριση συχνότητας αυτών των καναλιών μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο
- Πρόβλημα: Πώς θα σχεδιάσουμε το δέκτη παρουσία ενός τέτοιου καναλιού και θορύβου;
- ISI προκαλεί υψηλό ρυθμό σφαλμάτων.
- Λύση στο πρόβλημα της ISI: ***Ισοστάθμιση (Equalization)***

Εισαγωγή στην Ισοστάθμιση

- Όταν το σύστημα λειτουργεί υπό την επίδραση καναλιών που δημιουργούν ISI είναι βολικό να αναπτυχθεί ένα μοντέλο διακριτού χρόνου για το κανάλι.
- Ο πομπός στέλνει σύμβολα με ρυθμό 1/T σύμβολα ανά δευτερόλεπτο
- Η έξοδος του προσαρμοσμένου φίλτρου στο δέκτη είναι ένα σήμα διακριτού χρόνου τα δείγματα του οποίου λαμβάνονται με ρυθμό 1/T
- Η αλληλουχία του φίλτρου στον πομπό, του καναλιού και του προσαρμοσμένου φίλτρου στο δέκτη μπορούν να μοντελοποιηθούν σαν ένα φίλτρο διακριτού χρόνου.
- Η είσοδος είναι τα σύμβολα πληροφορίας τα οποία αποτελούν σημείο ενός αστερισμού σημάτων



Ισοσταθμιστής: Ισοσταθμίζει την επίδραση του καναλιού – Το σήμα στη λήψη ιδανικά πρέπει να μοιάζει σαν να πέρασε από κανάλι με κρουστική απόκριση τύπου δέλτα



$$|G_E(f)| = \frac{1}{|G_C(f)|} \Rightarrow |G_E(f)| \cdot |G_C(f)| = 1 \Rightarrow h_{total}(t) = \delta(t)$$

$$\arg(G_E(f)) = -\arg(G_C(f))$$

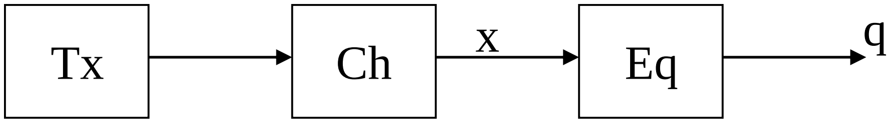
Εισαγωγή στην Ισοστάθμιση

- <u>Ανάγκη για Ισοστάθμιση:</u>
  - Το να ξεπεράσουμε τα προβλήματα που δημιουργεί η ISI
- <u>Ανάγκη για προσαρμοζόμενη ισοστάθμιση:</u>
  - Αλλαγή του καναλιού με το χρόνο

- => Πρόβλημα:

  Να βρεθεί η αντίστροφη της κρουστικής απόκρισης του καναλιού ώστε στο δέκτη το σήμα λήψης να φαίνεται ότι πέρασε από κανάλι με κρουστική απόκριση δ(t)

Ισοσταθμιστές τύπου Zero Forcing



Όχι ISI :Force

$$q(mT) = \sum_{n=-2}^{2} C_n \cdot X(mT - n \cdot \tau) = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m = \pm 1, \pm 2 \ldots \end{cases}$$

Βαθμίδες του ισοσταθμιστή

Παράδειγμα: Ισοσταθμιστής πέντε βαθμίδων, ρυθμός δειγματοληψίας 2/T :

$x(mT - nT/2)$ με μορφή πίνακα:

$$X = \begin{bmatrix} x(0) & x(-0.5T) & x(-1T) & x(-1.5T) & x(-2T) \\ x(1T) & x(0.5T) & x(0) & x(-0.5T) & x(-1T) \\ x(2T) & x(1.5T) & x(1T) & x(0.5T) & x(0) \\ x(3T) & x(2.5T) & x(2T) & x(1.5T) & x(1T) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ Οι βαθμίδες του ισοσταθμιστή σαν διάνυσμα

$$q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ Το επιθυμητό σήμα σαν διάνυσμα

$\Rightarrow \quad XC=q \quad \Rightarrow \quad C_{opt}=X^{-1}q$

Μειονέκτημα: Αγνοεί την παρουσία του προσθετικού θορύβου
Η επίδραση του θορύβου χειροτερεύει
(noise enhancement)

<u>Κριτήριο Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος (Mean Square Error, MSE)</u>

Άγνωστη παράμετρος
(παράμετρος του φίλτρου του ισοσταθμιστή)

Επιθυμητό σήμα

Σήμα στη λήψη

$$J[\theta] = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - \theta h[n])^2$$

<u>Μέσο τετραγωνικό σφάλμα</u> μεταξύ του σήματος λήψης και του επιθυμητού σήματος, το οποίο προέρχεται από την έξοδο του ισοσταθμιστή

Least Square Algorithm

Least Mean Square Algorithm

Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων (Least Squares)

- Πλεονεκτήματα:
  - Αμερόληπτη εκτιμήτρια (Unbiased estimator)
  - Η διασπορά της είναι ελάχιστη (βέλτιστη)
  - Δεν γίνονται πιθανοθεωρητικές παραδοχές (Θεωρούμε μόνο το μοντέλο του σήματος)
  - Προτάθηκε από τον Gauss (1795) για τη μελέτη των κινήσεων των πλανητών)

Θεωρία

1. $$s[n] = \sum h[n-m]\theta[m]$$

2. $$s[n] = \theta H$$

3. $$J[\theta] = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - \theta h[n])^2$$:MSE

Παράγωγος ως προς θ :

4. $$\hat{\theta} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x[n]h[n]}{\sum_{n=0}^{N-1} h^2[n]}$$

Back-Up

Το ελάχιστο τετραγωνικό σφάλμα προκύπτει αντικαθιστώντας την 4 στην 3:

$$J_{\min} = J[\theta] = \sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-\hat{\theta}h[n])^2 = \sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-\hat{\theta}h[n])(x[n]-\hat{\theta}h[n])$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}x[n](x[n]-\hat{\theta}h[n]) - \hat{\theta}\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1}h[n](x[n]-\hat{\theta}h[n])}_{0}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}x^2[n] - \hat{\theta}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]h[n]$$

$$\Rightarrow J_{\min} = \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]}_{\text{Ενέργεια του αρχικού σήματος}} - \underbrace{\frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1}x[n]h[n]\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1}h^2[n]}}_{\text{«Θόρυβος»}}$$

Ενέργεια του αρχικού σήματος

«Θόρυβος»

$$x[n] = Signal + w[n] \Longrightarrow$$

Για μεγάλες τιμές του SNR: Jmin~0

Εύρεση της γενικής λύσης

$s[n] = H\theta$ (H: πίνακας παρατήρησης (Nxp) και $s[n] = (s[0], s[1], \ldots s[N-1])^T$

$$J[\theta] = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - \hat{\theta} h[n])^2 = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - \hat{\theta} h[n])(x[n] - \hat{\theta} h[n])$$

$$= (x[n] - H\theta])^T (x[n] - H\theta])$$

$$J[\theta] = x^T x - x^T H\theta - \theta^T H^T x + \theta^T H^T H\theta$$

$$= x^T z - \underbrace{2x^T H\theta}_{scalar} + \theta^T H^T H\theta$$

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -\underbrace{2H^T x}_{scalar} + 2H^T H\theta$$

$$\boxed{\hat{\theta} = (H^T H)^{-1} H^T x}$$

Ελάχιστα Τετράγωνα: Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα

- **Πλεονεκτήματα**:
  - Βέλτιστη προσέγγιση για το κανάλι.

- **Μειονεκτήματα**:
  - Υπολογιστική πολυπλοκότητα (λόγω της αντιστροφής πίνακα)
  - Δεν είναι προσαρμοζόμενη (υπολογίζεται μία φορά στο τόσο, ακατάλληλη για ταχέως χρονικά μεταβαλλόμενα κανάλια

- **<u>Προσαρμοζόμενη</u>** ισοστάθμιση απαιτείται για χρονικά μεταβαλλόμενα κανάλια. Τα βάρη κάθε βαθμίδας του φίλτρου προσαρμόζονται σύμφωνα με τις στιγμιαίες τιμές του καναλιού.

Αλγόριθμος Least-Mean-Square

Περιεχόμενα:

- Εισαγωγή – προσεγγιστικός αλγόριθμος steepest-descent
- Μέθοδος Steepest descend
- Αλγόριθμος Least-mean-square
- Σύγκλιση και ευστάθεια του αλγορίθμου LMS
- Αριθμητικό παράδειγμα ισοστάθμισης καναλιού με χρήση LMS
- Περίληψη

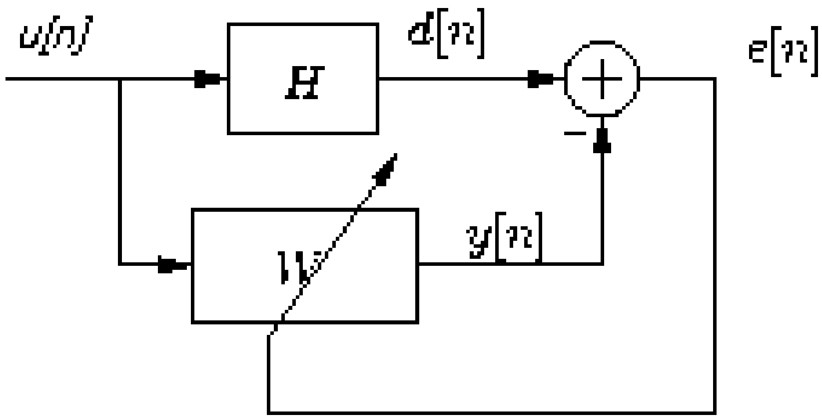
Εισαγωγή

- **Widrow & Hoff in 1959**
- Απλότητα, δεν απαιτείται υπολογισμός πινάκων κατά την προσαρμογή
- Ανήκει στην οικογένεια των αλγορίθμων στοχαστικής κλίσης (stochastic gradient algorithms)
- Προσέγγιση της μεθόδου steepset – descent
- Βασισμένη στο κριτήριο της ελάχιστης μέσης τιμής του τετραγωνικού σφάλματος (Minimum Mean square Error)
- Η διαδικασία της προσαρμογής απαιτεί δύο σήματα:
- 1.) Διαδικασία φιλτραρίσματος, παραγωγή του σήματος εξόδου.
- 2.) Επιθυμητό σήμα (Ακολουθία προσαρμογής)
- **Διαδικασία προσαρμογής: Προσαρμογή των βαρών των βαθμίδων του φίλτρου με αναδρομικό αλγόριθμο**

Συμβολισμοί

- Σήμα εισόδου (διάνυσμα): $\mathbf{u(n)}$
- Πίνακας αυτοσυσχέτισης του σήματος εισόδου: $\mathbf{R_{uu} = E[u(n)u^H(n)]}$
- Επιθυμητή απόκριση: $\mathbf{d(n)}$
- Διάνυσμα ετεροσυσχέτισης μεταξύ $\mathbf{u(n)}$ και $\mathbf{d(n)}$: $\mathbf{P_{ud} = E[u(n)d^*(n)]}$
- Βάρη των βαθμίδων του φίλτρου: $\mathbf{w(n)}$
- Έξοδος του φίλτρου: $y(n) = \mathbf{w^H(n)u(n)}$
- Σφάλμα εκτίμησης: $\mathbf{e(n) = d(n) - y(n)}$
- Μέσο τετραγωνικό σφάλμα: $\mathbf{J = E[|e(n)|^2] = E[e(n)e^*(n)]}$

Διάφραμμα βαθμίδων



u[n] = Σήμα εισόδου από το κανάλι ; d[n] = επιθυμητή απόκριση

H[n] = Γεννήτρια ακολουθιών προσαρμογής

e[n] = σφάλμα ανατροφοδότησης μεταξύ:

A.) επιθυμητής απόκρισης.

B.) Εξόδου του ισοσταθμιστή

W = Φίλτρο FIR με κατάλληλους συντελεστές προσαρμογής

ΜΕΘΟΔΟΣ STEEPEST DESCENT

- Ο αλγόριθμος ανήκει στην κατηγορία των αλγορίθμων κλήσης (gradient based) ο οποίος δίνει αναδρομική λύση σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης μίας συνάρτησης κόστους (cost function)
- Τη χρονική στιγμή n τα βάρη του ισοσταθμιστή είναι **W**(n) ενώ την επόμενη στιγμή είναι **W**(n+1), Το διάνυσμα **W**(n+1) μπορεί να εκτιμηθεί βάσει της εξής προσέγγισης:

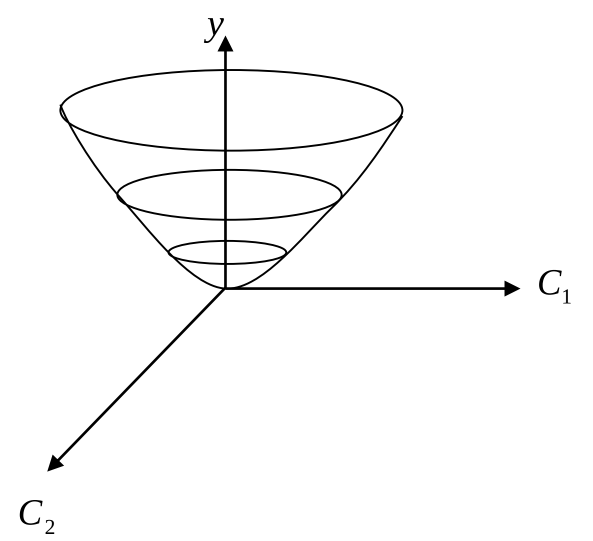
$$\mathbf{W}[n] = \mathbf{W}[n+1] + 0.5\mu(-\nabla J[n])$$

- Το διάνυσμα κλίσης δείχνει προς την κατεύθυνση εκείνη η οποία προκαλεί τη μεγαλύτερη αύξηση στο σφάλμα του σήματος. Επειδή ο σκοπός μας είναι η ελαχιστοποίηση αυτού του σφάλματος, οι συντελεστές του φίλτρου ανανεώνονται προς την αντίθετη κατεύθυνση. Για αυτό το λόγο μπαίνει πρόσημο μείον.
- Η σταθερά μ καθορίζει το μέγεθος του βήματος. Μετά από αριθμό ανανεώσεων ο αλγόριθμος συγκλίνει.

STEEPEST DESCENT: Παράδειγμα

- Δίνεται η ακόλουθη συνάρτηση και θέλουμε να βρούμε το διάνυσμα που την ελαχιστοποιεί.

$$Y(c_1, c_2) = C_1^2 + C_2^2$$



- Είναι φανερό ότι $C_1 = C_2 = 0,$

Δίνει το επιθυμητό ελάχιστο

Λύση με τη μέθοδο steepest descend

STEEPEST DESCENT: Παράδειγμα

- Ξεκινάμε από τη λύση ($C_1 = 5, C_2 = 7$)
- Επιλέγουμε τη σταθερά μ . Αν είναι πολύ μεγάλη χάνουμε το ελάχιστο. Αν είναι πολύ μικρή, χρειάζεται αρκετός χρόνος για σύγκλιση. Εστω $\mu = 0.1$.
- Το διάνυσμα κλίσης είναι:

$$\nabla y = \begin{bmatrix} \frac{dy}{dc_1} \\ \frac{dy}{dc_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C_1 \\ 2C_2 \end{bmatrix}$$

- Η επαναληπτική μέθοδος γράφεται:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}_{[n+1]} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}_{[n]} - 0.2 * \nabla y = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}_{[n]} - 0.1 \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}_{[n]} = 0.9 \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}_{[n]}$$

STEEPEST DESCENT: Παράδειγμα

$$\text{Επανάληψη}\,1:\begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}$$

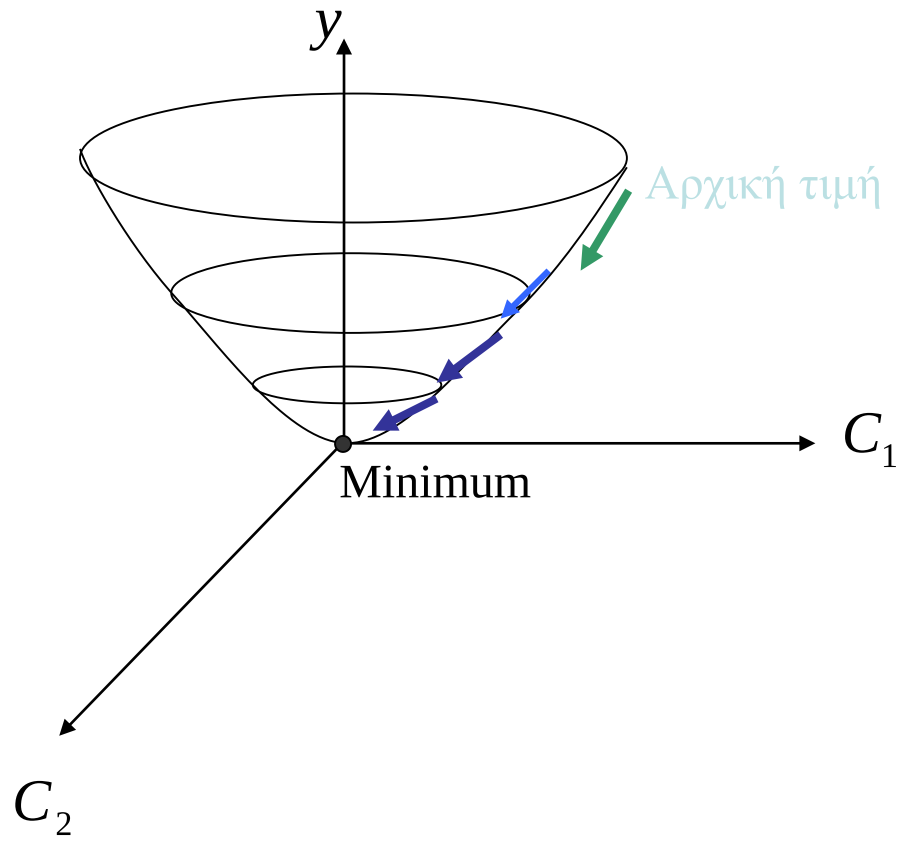
$$\text{Επανάληψη}\,2:\begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4.5\\6.3\end{bmatrix}$$

$$\text{Επανάληψη}\,3:\begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.405\\0.567\end{bmatrix}$$

......

$$\text{Επανάληψη}\,60:\begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.01\\0.013\end{bmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix}_{[n]}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$



Όπως είναι φανερό, το διάνυσμα [C1,C2] συγκλίνει στην ελάχιστη τιμή και η ταχύτητα της σύγκλισης εξαρτάται από το μ.

Εφαρμογή στην προσαρμοζόμενη ισοστάθμιση

- MMSE – Minimum mean square error
- MSE = $E\{[(d(k)-y(k)]^2\}=E\{[(d(k)-\sum_{n=-N}^{N}w(n)u(k-n)]^2\}$

$$E\{[(d(k)-\sum_{n=-N}^{N}w(n)u(k-n)]^2\}=E\{d(k)^2\}-2\sum_{n=-N}^{N}w(n)P_{du}(n)+\sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N}w(n)w(m)R(n-m)$$

$$P_{du}(n)=E\{d(k)u(n-k)\}$$

$$R_{uu}(n-m)=E\{u(m-k)u(n-k)\}$$

- Παραγωγίσουμε το MSE και θέτουμε την παράγωγο στο 0:
- $$\frac{d(MSE)}{dW(k)}=\frac{d(E\{d(k)^2\}-2\sum_{n=-N}^{N}w(n)P_{du}(n)+\sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N}w(n)w(m)R(n-m))}{dW(k)}$$

Εφαρμογή στην προσαρμοζόμενη ισοστάθμιση

Τελικά προκύπτει:

$$\nabla J(n) = \frac{d(MSE)}{dW(k)} = -2P_{du}(k) + 2\sum_{n--N}^{N} w[n]R_{uu}(n-k), k = 0,\pm 1,\pm 2,...$$

Η βέλτιστη τιμή του **w** είναι:

$$w_{opt} = R^{-1} \bullet P$$

Ο υπολογισμός είναι πολύπλοκος για έναν DSP (υπολογισμός του αντιστρόφου πίνακα) και να οδηγήσει σε αστάθεια. Επίσης, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε πάντα τον πίνακα αυτοσυσχέτισης της εισόδου και το διάνυσμα ετεροσυσχέτισης. Ανάγκη για προσεγγίσεις.

Εφαρμογή στην προσαρμοζόμενη ισοστάθμιση

W(n+1) = W(n) + 2*[P – Rw(n)] <= Σύμφωνα με το κριτήριο MMSE

<u>Υποθέσεις:</u>

- Διανύσματα εισόδου :*u(n), u(n-1),…,u(1)* Στατιστικά ανεξάρτητα.
- Διάνυσμα εισόδου *u(n)* και επιθυμητή απόκριση *d(n),* στατιστικά ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές
- Διάνυσμα εισόδου *u(n)* και επιθυμητή απόκριση *d(n)* είναι *Gaussian-distributed*
- Το περιβάλλον στάσιμη ανέλιξη με την ευρεία έννοια;

<u>Στην μέθοδο LMS, χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις:</u>

$\mathbf{R}_{\mathbf{uu}} = \mathbf{u}(n)\mathbf{u}^{H}(n)$ – Πίνακας αυτοσυσχέτισης του σήματος εισόδου

$\mathbf{P}_{\mathbf{ud}} = \mathbf{u}(n)\mathbf{d}^{*}(n)$ – Διάνυσμα ετεροσυσχέτισης μεταξύ **u**[n] και **d**[n].

Αλγόριθμος

$$W[n+1] \cong W[n] + \mu\{P^{\wedge} - R^{\wedge} w[n]\}$$

$$= w(n) + \mu\{u[n]d^{*}[n] - u[n]u^{H}[n]w[n]\}$$

$$= w(n) + \mu\{u[n]\{d^{*}[n] - y^{*}[n]\}$$

Τελικό αποτέλεσμα:

$$W[n+1] \cong W[n] + \mu\{u[n]e^{*}[n]\}$$

Ευστάθεια του αλγορίθμου

Το μέγεθος του βήματος καθορίζει το ρυθμό σύγκλισης. Πολύ μικρό βήμα αυξάνει το χρόνο εκτέλεσης. Πολύ μεγάλο βήμα έχει σαν αποτέλεσμα ο αλγόριθμος να μην συγκλίνει

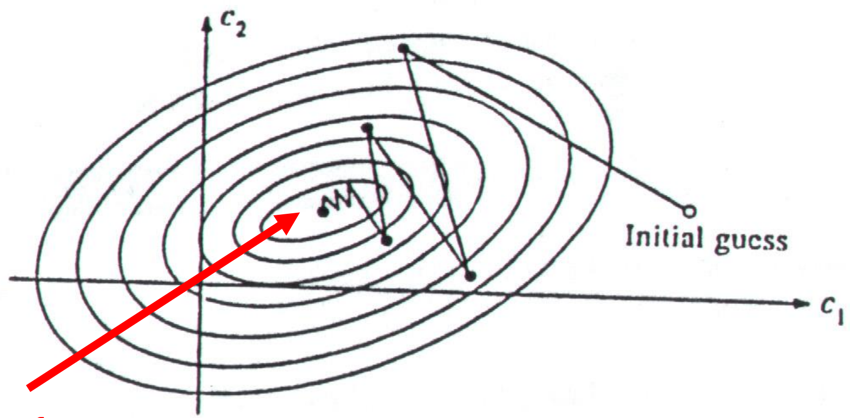
Εμπειρικός κανόνας:

$$\mu = \frac{1}{5(2N+1)P_R}$$

όπου, N είναι το μέγεθος του ισοσταθμιστή,
P_R, είναι η ισχύς λήψης (σήμα και θόρυβος)
ο οποίος μπορεί να εκτιμηθεί στη λήψη.

Σύγκλιση του αλγορίθμου

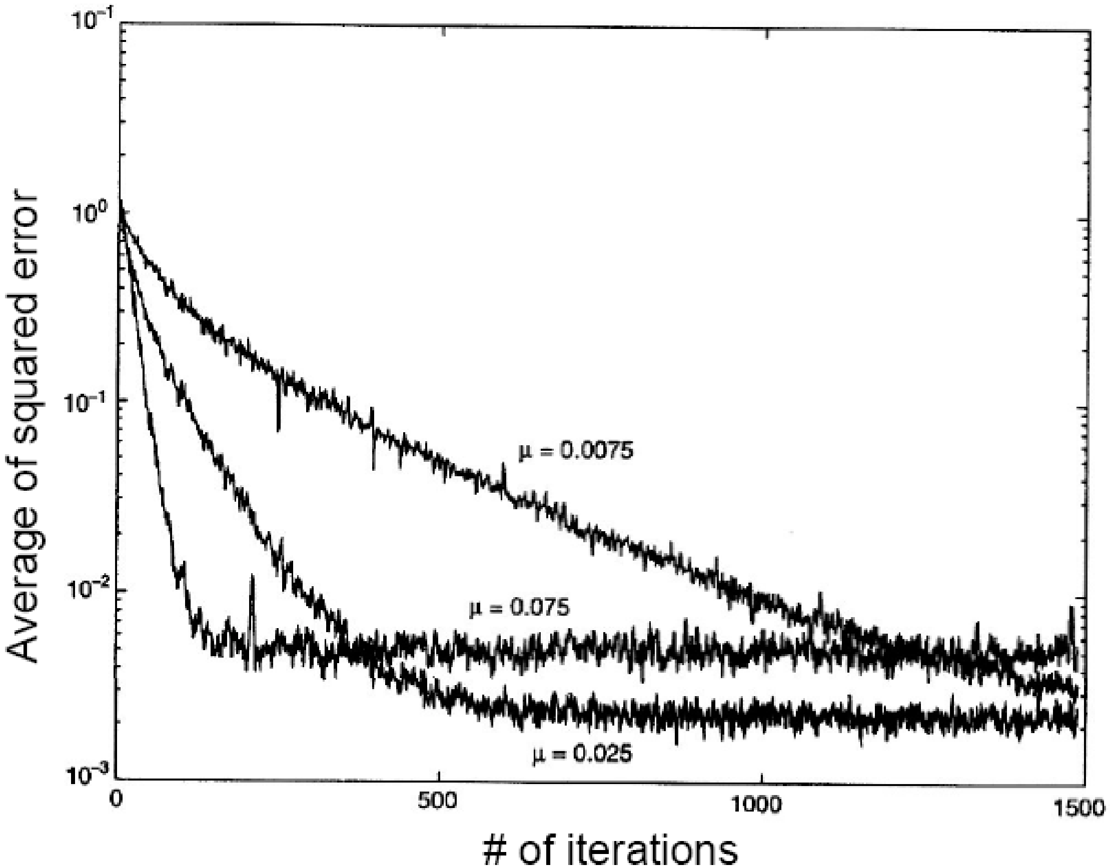
Παράδειγμα για άγνωστο κανάλι δευτέρας τάξης :



Desired Combination of taps

Το γράφημα απεικονίζει τον αλγόριθμο LMS algorithm. Ξεκινάμε από έναν συνδυασμό των βαρών του ισοσταθμιστή. Κινούμαστε με κατεύθυνση αντίθετη από το διάνυσμα κλίσης, υπολογίζουμε τα επόμενα βάρη, μέχρις ότου το MSE να γίνει 0 ή μια τιμή πολύ κοντινή σε αυτό. (Στην πράξη ποτέ 0 γιατί ο θόρυβος είναι τυχαία διαδικασία, μπορούμε να πάρουμε σφάλμα κοντά σε μία επιθυμητή τιμή)

Σύγκλιση του αλγορίθμου

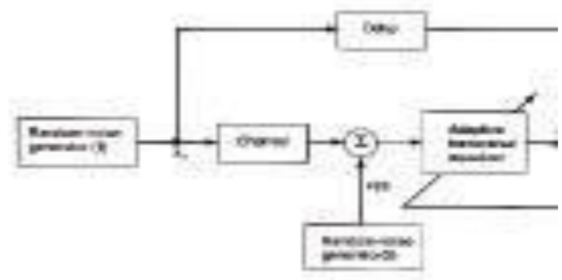


Πρακτικό παράδειγμα

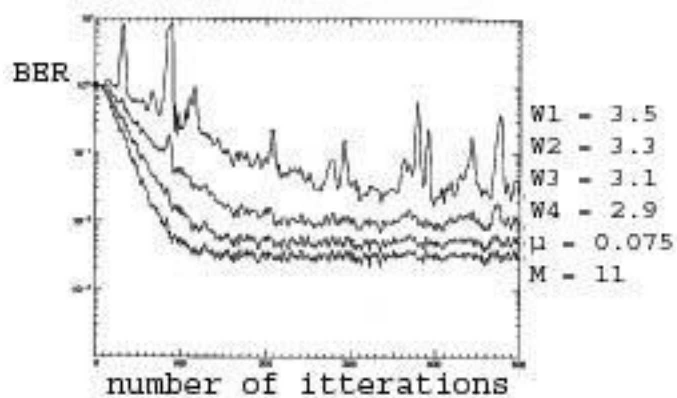
- Transmitted signal: random sequence of ± 1's.
- The transmitted signal is corrupted by a channel.
- Channel impulse response:

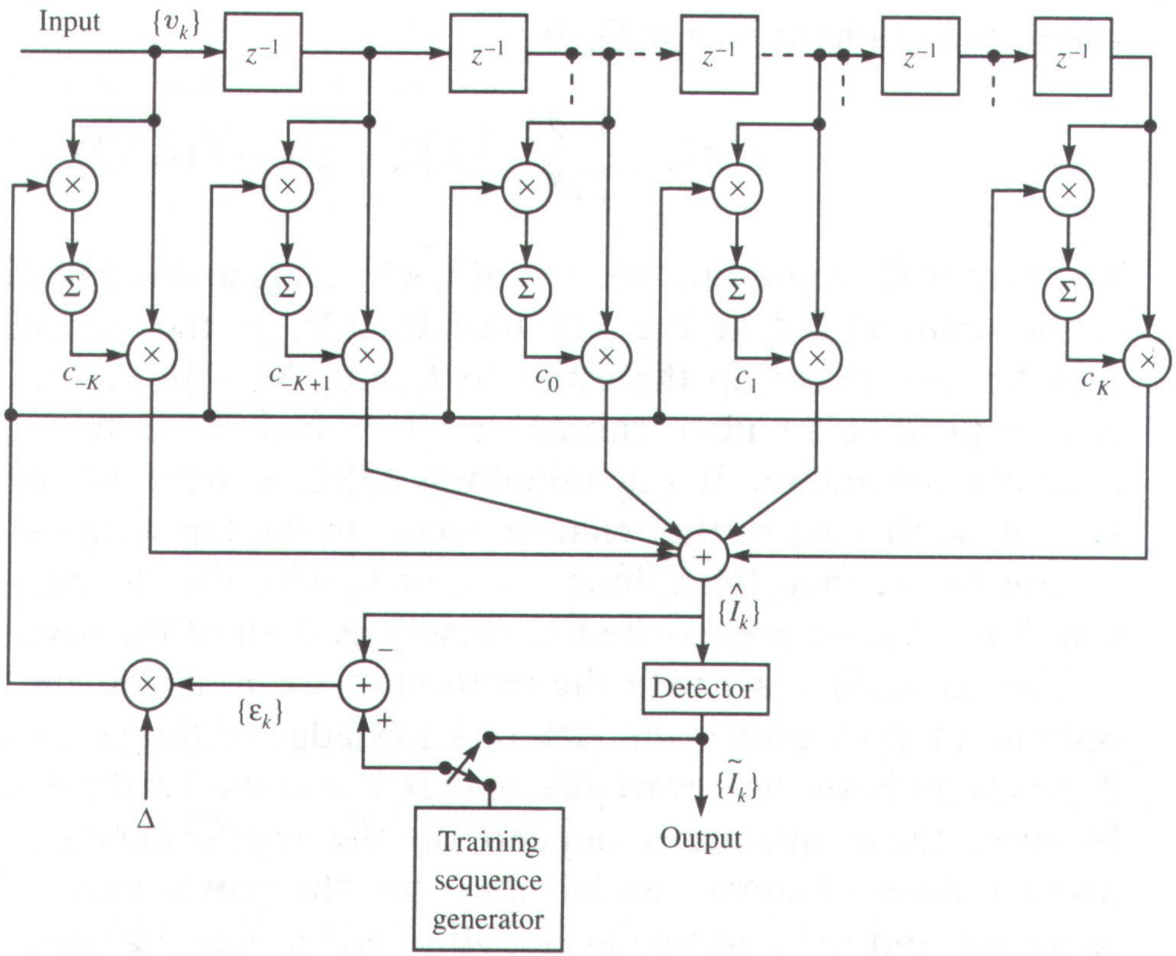
$$h_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{W}(n-2)\right)\right], & n=1,2,3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- To the output of channel, white Gaussian noise with $\sigma_v^2 = 0.001$ is added.
- The received signal is processed by a linear, 11-tap FIR equalizer adapted with the LMS algorithm



Channel response





Input
$\{v_k\}$
z^{-1}
z^{-1}
z^{-1}
z^{-1}
z^{-1}
c_{-K}
c_{-K+1}
c_0
c_1
c_K
$\{\hat{I}_k\}$
Detector
$\{\varepsilon_k\}$
Δ
$\{\tilde{I}_k\}$
Output
Training sequence generator

Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα του αλγορίθμου LMS

Πλεονεκτήματα:

- **Απλότητα υλοποίησης**
- **Δεν αγνοεί το θόρυβο όπως ο ZF**
- **Δεν απαιτείται ο υπολογισμός αντιστρόφου πίνακα.**

Μειοκεκτήματα:

Αργή σύγκλιση

απαιτεί τη χρήση ακολουθίας εκμάθησης, ελαττώνοντας το εύρος ζώνης