Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Πρόβλημα: Σχεδιασμός σήματος όταν το κανάλι έχει πεπερασμένο εύρος ζώνης ίσο με W
- Το κανάλι μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν βαθυπερατό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $C_l(f)$ η οποία είναι μηδενική για $|C_l(f)| > W$
- Πρόβλημα: Βέλτιστος σχεδιασμός ενός παλμού g(t) σε ένα γραμμικά διαμορφωμένο σήμα το οποίο μπορεί να παρασταθεί ως

$$s_\ell(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n g(t - nT)$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Το σήμα στη λήψη μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$
\begin{aligned}
r_\ell(t) &= c_\ell(t) \star s_\ell(t) + n_\ell(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} c_\ell(\tau) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n g(t-\tau-nT) \right) d\tau + n_\ell(t) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \int_{-\infty}^{\infty} g(t-nT-\tau) c_\ell(\tau)\, d\tau + n_\ell(t)
\end{aligned}
$$

Ο $n_l(t)$ είναι βαθυπερτατή στοχαστική διαδικασία λευκού θορύβου

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

Μπορούμε να γράψουμε

$$r_\ell(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n h_\ell(t-nT) + n_\ell(t) \qquad h_\ell(t) = g(t) \star c_\ell(t)$$

Υποθέτουμε ότι το κανάλι με ισοδύναμη βαθυπερατή κρουστική απόκριση

$$c(t) = \mathbf{Re}\{c_\ell(t) e^{\imath 2\pi f_c t}\})$$

είναι γνωστό στο δέκτη

Το σήμα στην έξοδο του προσαρμοσμένου φίλτρου είναι

$$y_\ell(t) = r_\ell(t) \star h_\ell^*(T-t) = \sum_n I_n x_\ell(t-nT) + z_\ell(t)$$

$$x_\ell(t) = h_\ell(t) \star h_\ell^*(T-t)$$

$$z_\ell(t) = n_\ell(t) \star h_\ell^*(T-t).$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

Η έξοδος προκύπτει λαμβάνοντας δείγματα τις χρονικές στιγμές

$$t = kT,\ k \in \mathbb{Z},$$

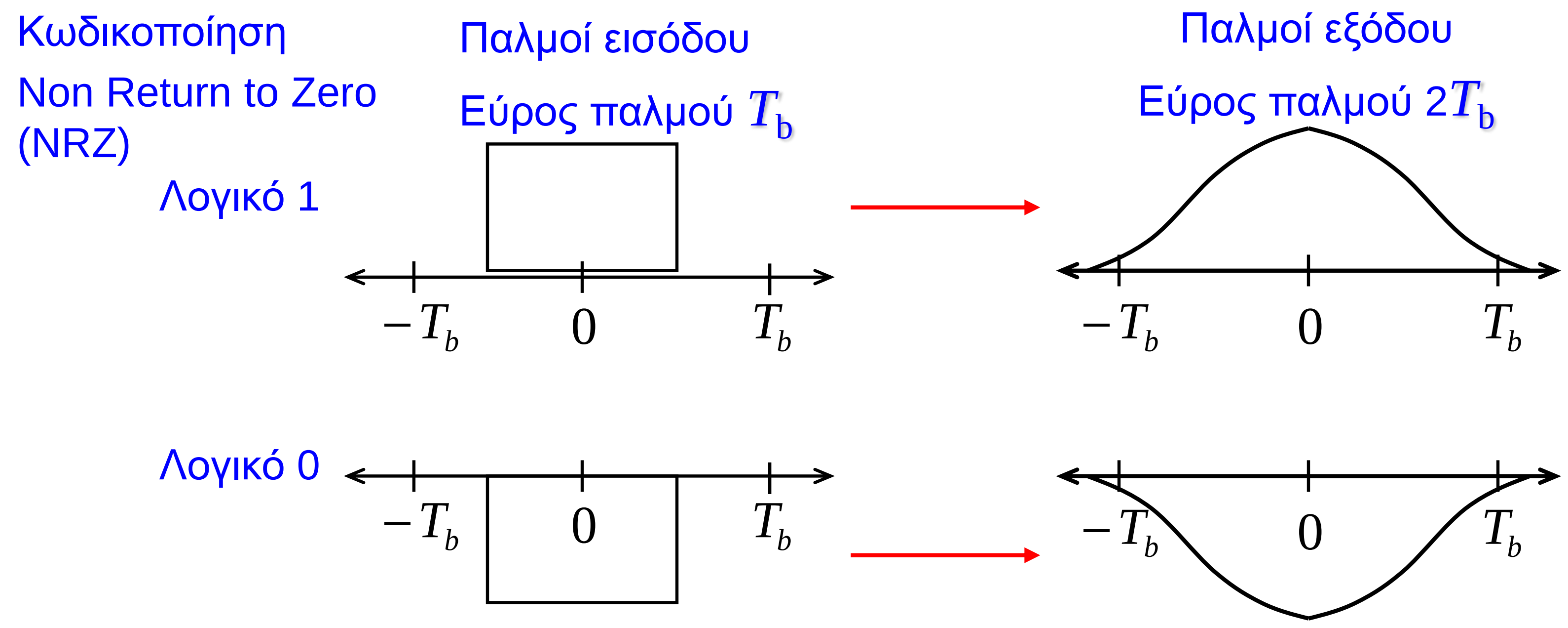
$$y_k = y_\ell(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n x_\ell(kT - nT) + z_\ell(kT) = \sum_n I_n x_{k-n} + z_k$$

$$x_{k-n} = x_\ell(kT - nT).$$

- Η έξοδος περιέχει εκτός από τον επιθυμητό όρο I_k και επιπρόσθετους
- **Διασυμβολική παρεμβολή (Intersymbol Interference ISI)**

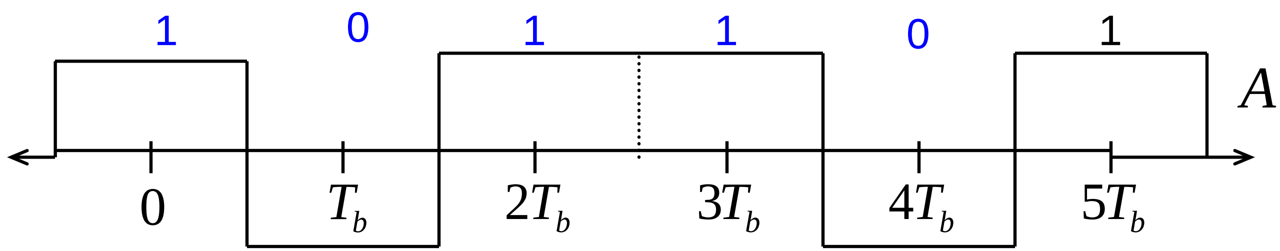
Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- **Διασυμβολική παρεμβολή** συμβαίνει όταν ένας παλμός εξαμπλώνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να παρεμβάλλεται με γειτονικούς παλμούς στο σημείο δειγματοληψίας.
- Παράδειγμα: Θεωρούμε παλμούς με κωδικοποίηση NRZ. Η διάρκεια των παλμών εξόδου είναι αυξημένοι (το πλάτος T_b έγινε $2T_b$) λόγω του πεπερασμένου εύρους ζώνης του καναλιού μετάδοσης.

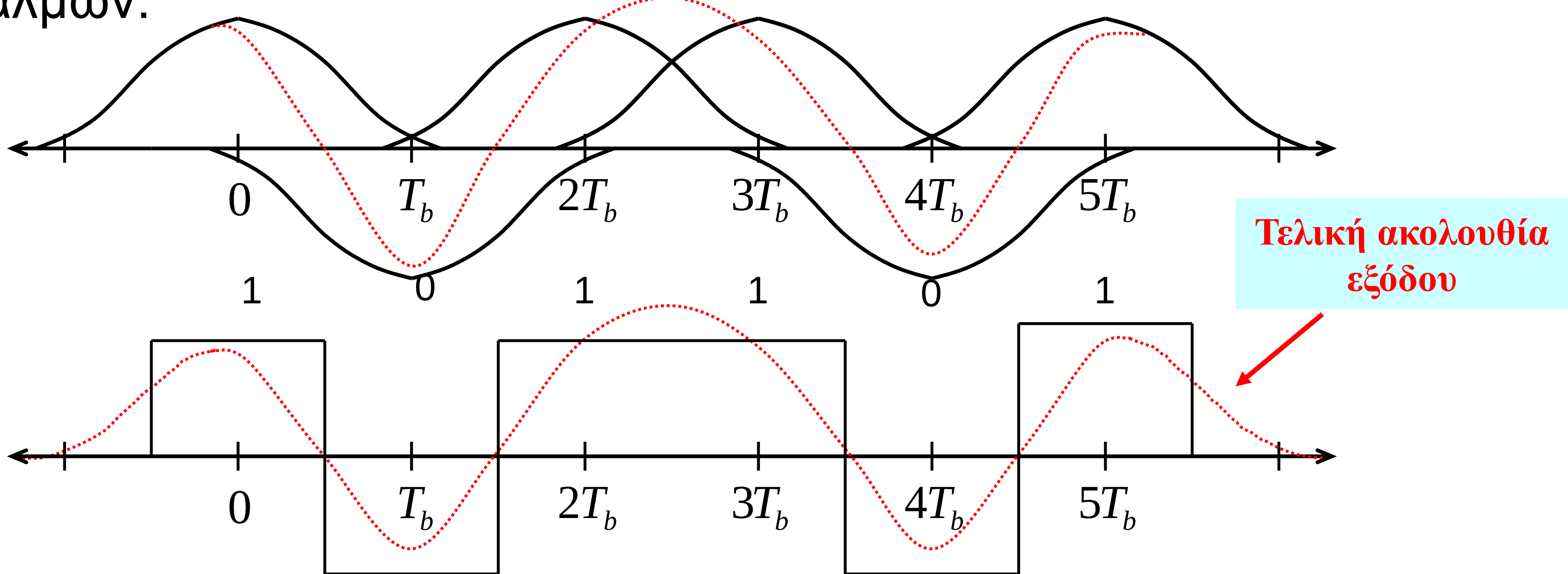


Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

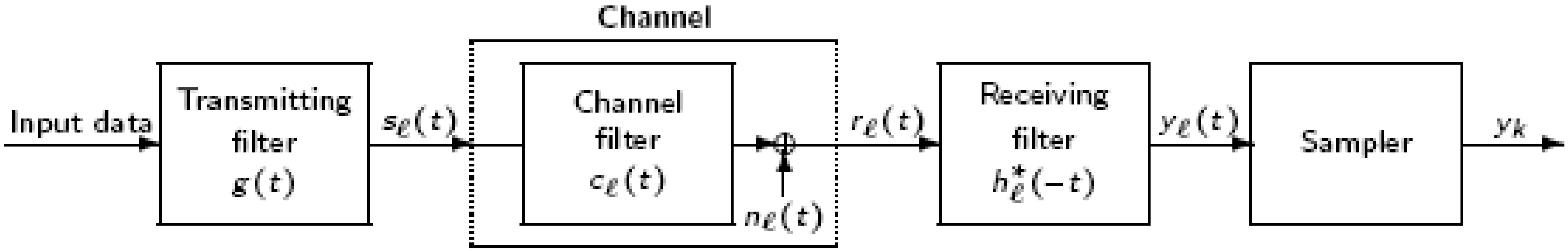
- Θεωρούμε την ακολουθία εισόδου του σχήματος:



- Η ακολουθία εξόδου προκύπτει από την υπέρθεση των επιμέρους παλμών:



Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης



- **Σήμα μετάδοσης:** $s_\ell(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n g(t - nT)$

- **Σήμα λήψης:** $r_\ell(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n h_\ell(t - nT) + n_\ell(t)$

$$h_\ell(t) = g(t) \star c_\ell(t).$$

- **Προσαρμοσμένο φίλτρο:** $y_\ell(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n x_\ell(t - nT) + z_\ell(t)$

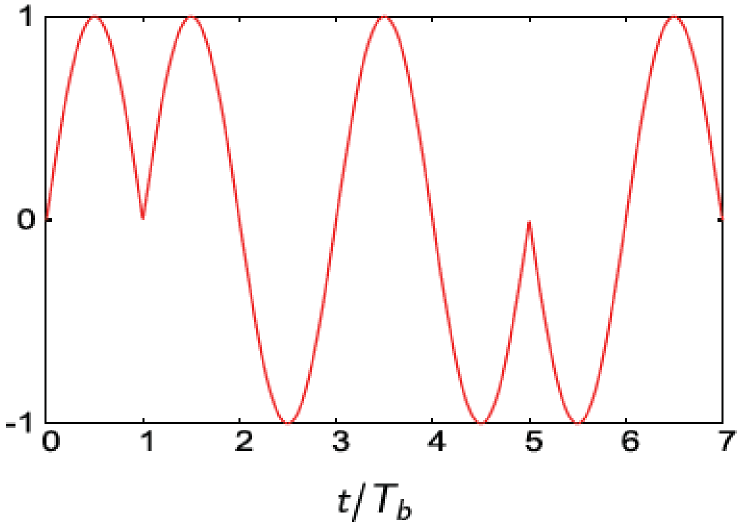
$$x_\ell(t) = h_\ell(t) \star h_\ell^*(-t)$$

$$X_\ell(f) = |H_\ell(f)|^2 = |G(f)|^2 \, |C_\ell(f)|^2 .$$

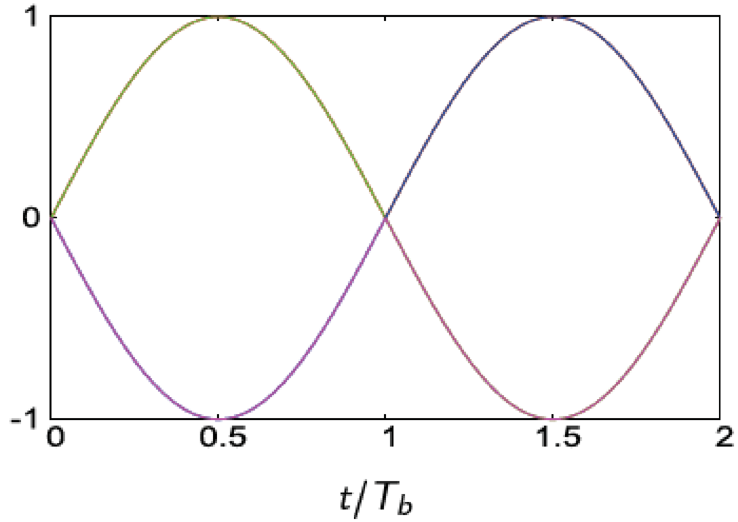
- **Δείγματα:** $t = kT$ $\quad y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n x_{k-n} + z_k .$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Ένα χρήσιμο εργαλείο για τη μελέτη της ISI είναι το διάγραμμα οφθαλμού (eye diagram)
- Υπέρθεση όλων των δυνατών στιγμιότυπων του σήματος μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό παράθυρο
- Στο σχήμα: Μετάδοση BPSK χωρίς σφάλματα, $c_l(t)$ = δ(t), g(t) ημιτονοειδής παλμός μισού κύματος



BPSK signals



Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Παράδειγμα:

Θεωρούμε: $c_\ell(t) = \delta(t),$

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \\
h_\ell(t) &= g(t) \star c_\ell(t) = g(t) \\
x_\ell(t) &= h_\ell(t) \star h_\ell^*(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_\ell(\tau) h_\ell^*(-(t-\tau)) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) g(\tau - t) d\tau = \begin{cases} \frac{T-|t|}{T}, & |t| \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}
\end{aligned}
$$

πεπερασμένη χρονική διάρκεια, άπειρο εύρος ζώνης

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

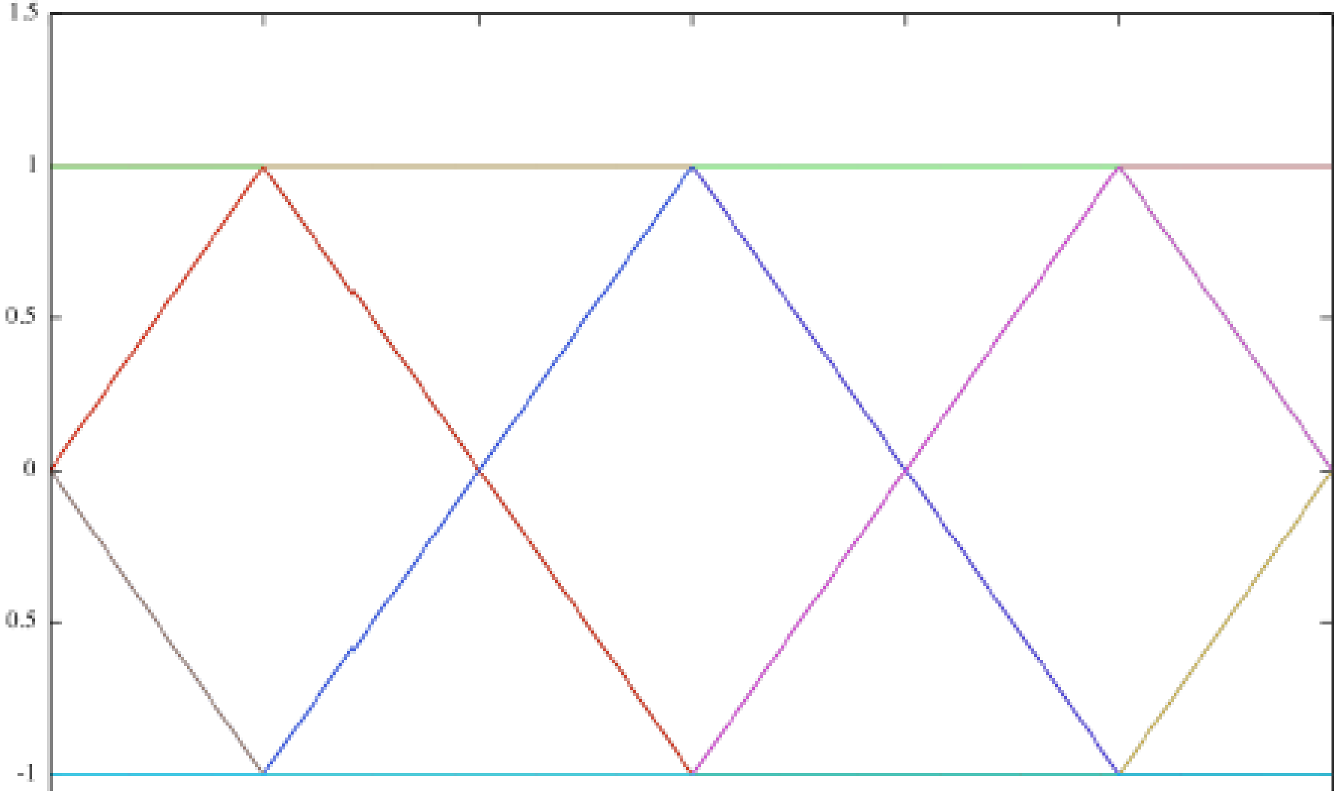
- Παράδειγμα: $c_\ell(t) = \delta(t) + \delta(t-T)$,

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & 0 \le t < T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \\
h_\ell(t) &= g(t) \star c_\ell(t) = g(t) + g(t-T) = g(t/2) \\
x_\ell(t) &= h_\ell(t) \star h_\ell^*(2T-t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_\ell(\tau) h_\ell^*(2T-(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau/2) g((2T+\tau-t)/2) d\tau \\
&= \begin{cases} \frac{2T-|t-2T|}{T}, & |t-2T| \le 2T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
y_k = y_\ell(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n x_\ell(kT-nT) + z_\ell(kT) = 2I_{k-2} + \underbrace{I_{k-1} + I_{k-3}}_{\text{ISI}} + z_k
$$

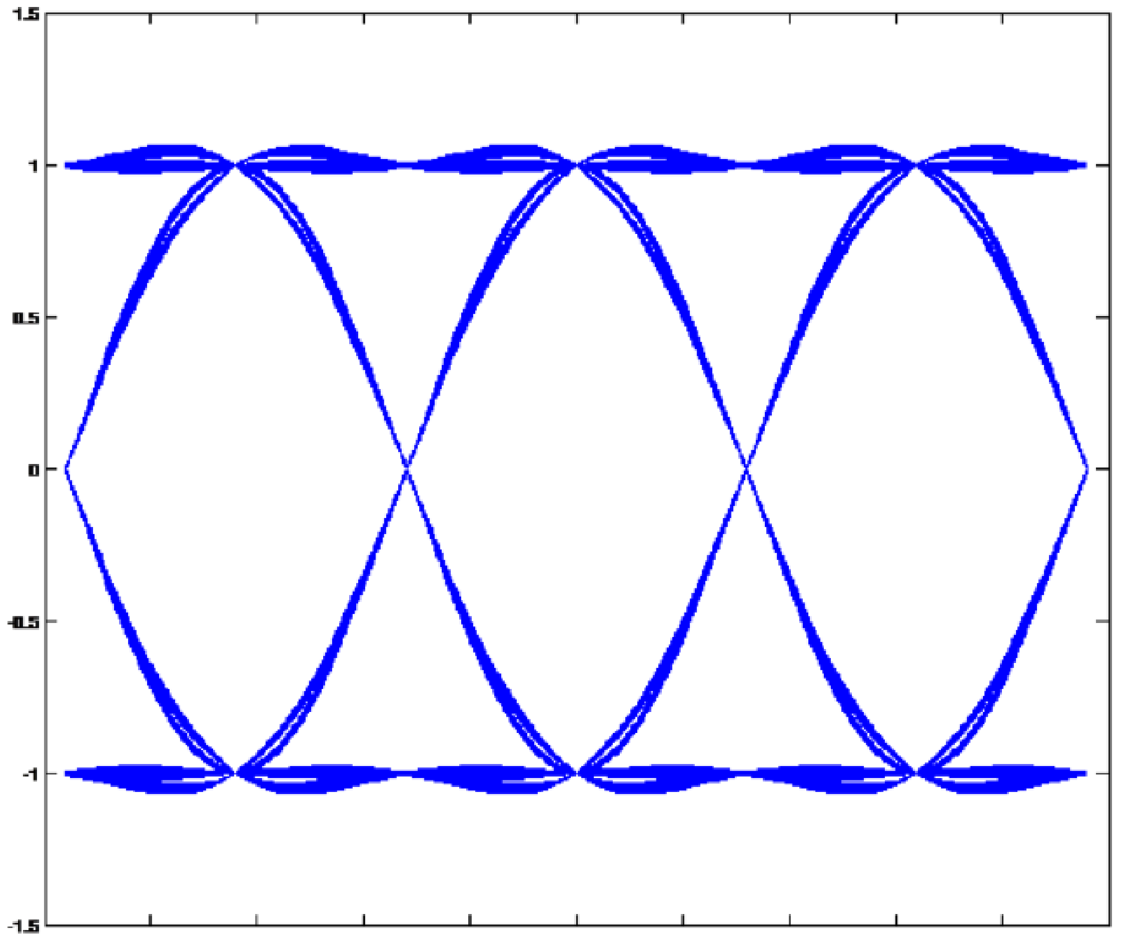
Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

$y_\ell(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n x_\ell(t - nT)$ για όλα τα $\{I_n \in \{\pm 1\}\}_{n=-\infty}^{\infty}$.
$(y_k = y_\ell(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n x_\ell(kT - nT) = I_k;$ όχι ISI!)



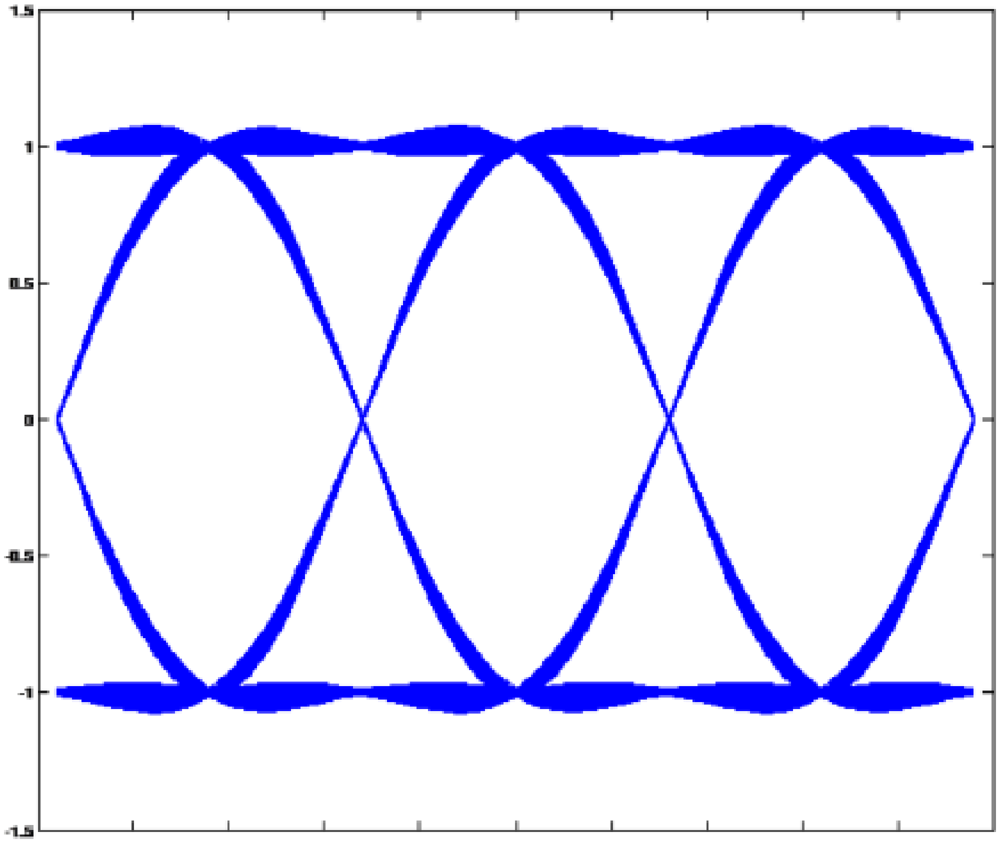
Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Παράδειγμα: BPSK με 1/T = 1KHz και W = 3kHz
- Έξοδος $y_l(t)$ όπου $c_l(t)$ ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο εύρους ζώνης W



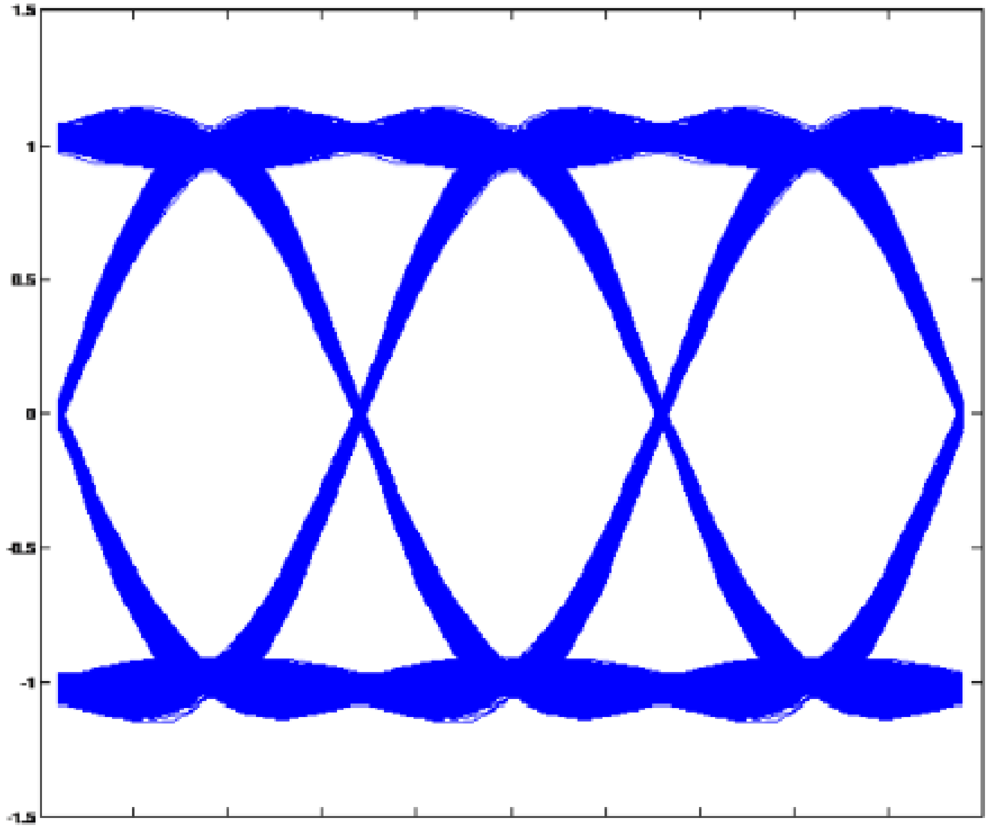
Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Παράδειγμα: BPSK με 1/T = 1KHz και W = 1kHz
- Έξοδος $y_l(t)$ όπου $c_l(t)$ ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο εύρους ζώνης W



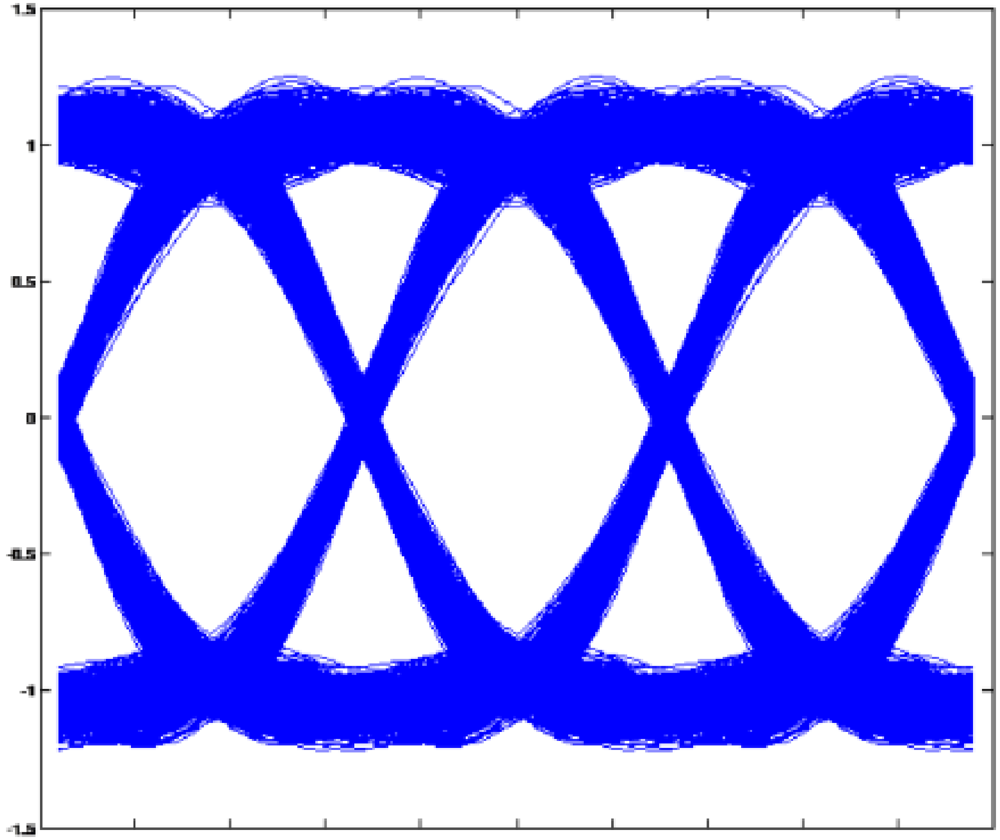
Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Παράδειγμα: BPSK με 1/T = 1KHz και W = 0.8kHz
- Έξοδος $y_l(t)$ όπου $c_l(t)$ ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο εύρους ζώνης W



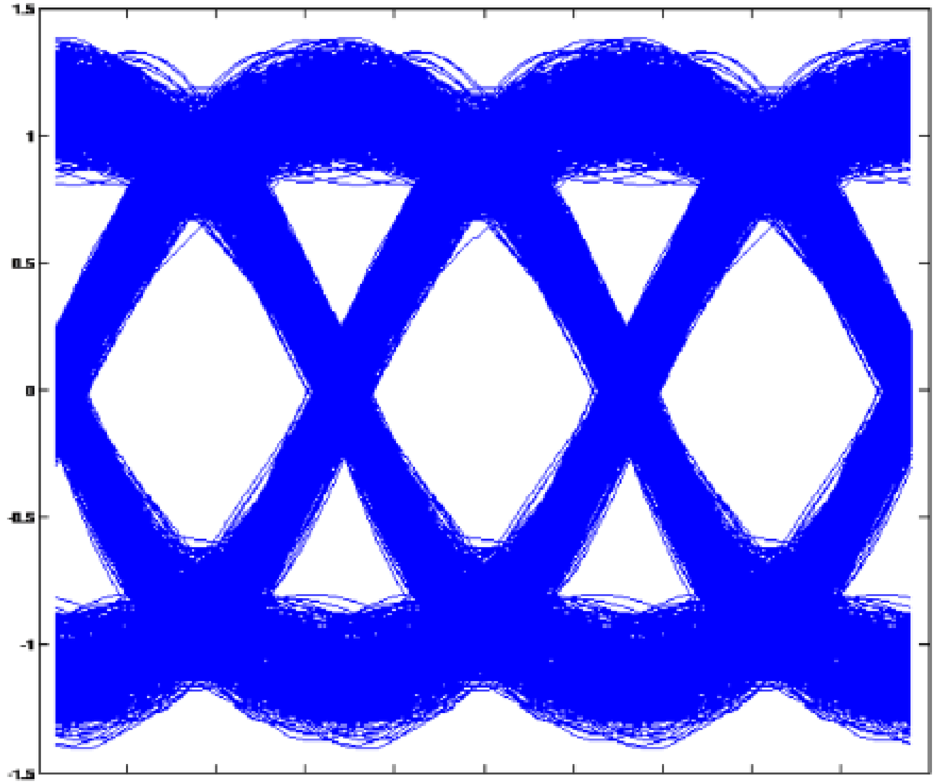
Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Παράδειγμα: BPSK με 1/T = 1KHz και W = 0.7kHz
- Έξοδος $y_l(t)$ όπου $c_l(t)$ ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο εύρους ζώνης W



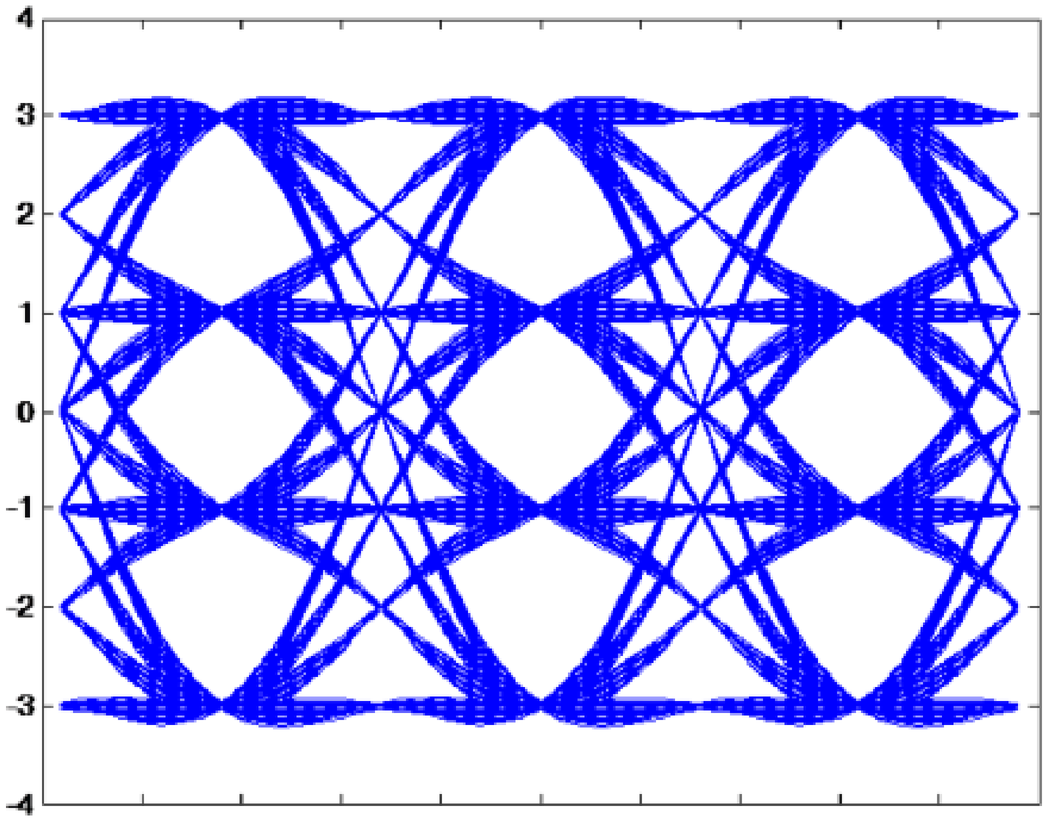
Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Παράδειγμα: BPSK με 1/T = 1KHz και W = 0.6kHz
- Έξοδος $y_l(t)$ όπου $c_l(t)$ ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο εύρους ζώνης W



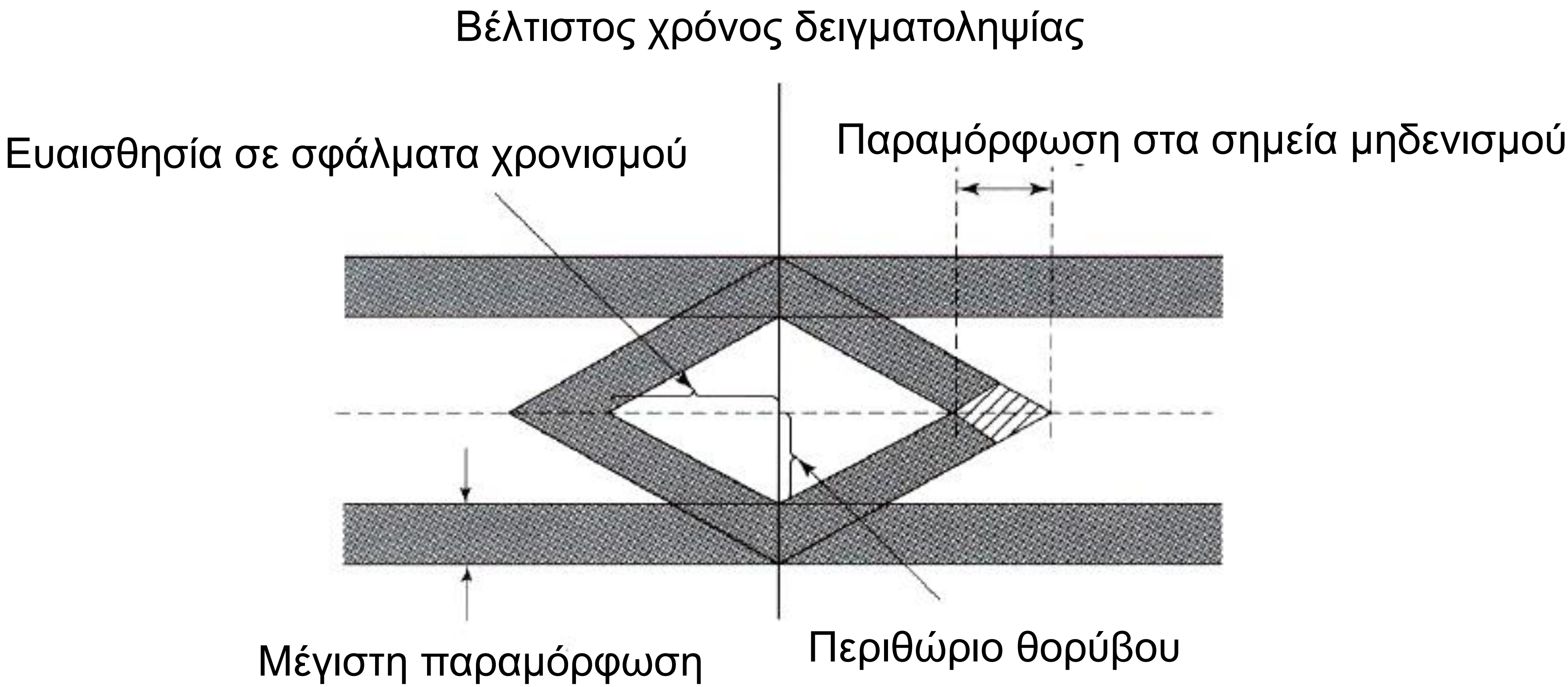
Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

- Παράδειγμα: ASK με 1/T = 1KHz και W = 1kHz
- Έξοδος $y_l(t)$ όπου $c_l(t)$ ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο εύρους ζώνης W



Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

Πληροφορία από διαγράμματα οφθαλμού:



Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n x_{k-n} + z_k$$

Σκοπός Σχεδίασης

Δεδομένων των W, T και $c_l(t)$ να βρεθεί το $g(t)$ έτσι ώστε

$$x_{k-n} = \delta_{k-n}$$

και

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n x_{k-n} + z_k = I_k + z_k$$

Η συνάρτηση δέλτα του Kronecker ορίζεται ως εξής:

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}.$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

Θεώρημα 1: Κριτήριο του Nyquist

Έστω $x_l(t)$ βαθυπερατό σήμα με εύρος ζώνης συχνοτήτων [-W,W] και $x_l(0) = 1$. Δείγματα του σήματος που λαμβάνονται με ρυθμό 1/T, ικανοποιούν τη σχέση:

$$x_k = x_\ell(kT) = \int_{-\infty}^{\infty} x_\ell(t)\delta(t-kT)\,dt = \delta_k$$

αν και μόνο άν ισχύει η συνθήκη

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_\ell\left(f-\frac{m}{T}\right) = T$$

όπου $X_\ell(f) = \mathcal{F}\{x_\ell(t)\}$.

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

Θεμελιώδες λήμμα:

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)\right\} = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{m}{T}\right)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(f) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{m}{T}\right)$ η οποία είναι περιοδική με περίοδο 1/T. Αναπτύσσοντάς την σε μιγαδική σειρά Fourier έχουμε:

$$\alpha(f) = \frac{1}{1/T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\imath 2\pi n f/(1/T)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\imath 2\pi n f T}$$

Οι συντελεστές Fourier προκύπτουν ως εξής:

$$c_n = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \alpha(f) e^{\imath 2\pi n f/(1/T)} df = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \frac{1}{T}\delta(f) e^{\imath 2\pi n f/(1/T)} df = \frac{1}{T}$$

Για τον υπολογισμό των συντελεστών Fourier χρησιμοποιήθηκε η θεμελιώδης ιδιότητα της συνάρτησης δέλτα του Dirac.

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

Η απόδειξη του λήμματος ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Fourier

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)e^{-\imath 2\pi ft}\,dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\imath 2\pi fkT}.$$

Q.E.D

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

Η απόδειξη του λήμματος ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Fourier

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)e^{-\imath 2\pi ft}\,dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\imath 2\pi fkT}.\end{aligned}$$

Q.E.D

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

Απόδειξη θεωρήματος Nyquist:

Η συνθήκη $x_k = \delta_k$ είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη σχέση

$$x_\ell(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_\ell(kT)\delta(t-kT) = \delta(t). \qquad (1)$$

Από το θεμελιώδες λήμμα παίρνουμε τη σχέση:

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)\right\} = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{m}{T}\right) \text{ και } \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1.$$

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Fourier και των δύο μελών της (1) προκύπτει:

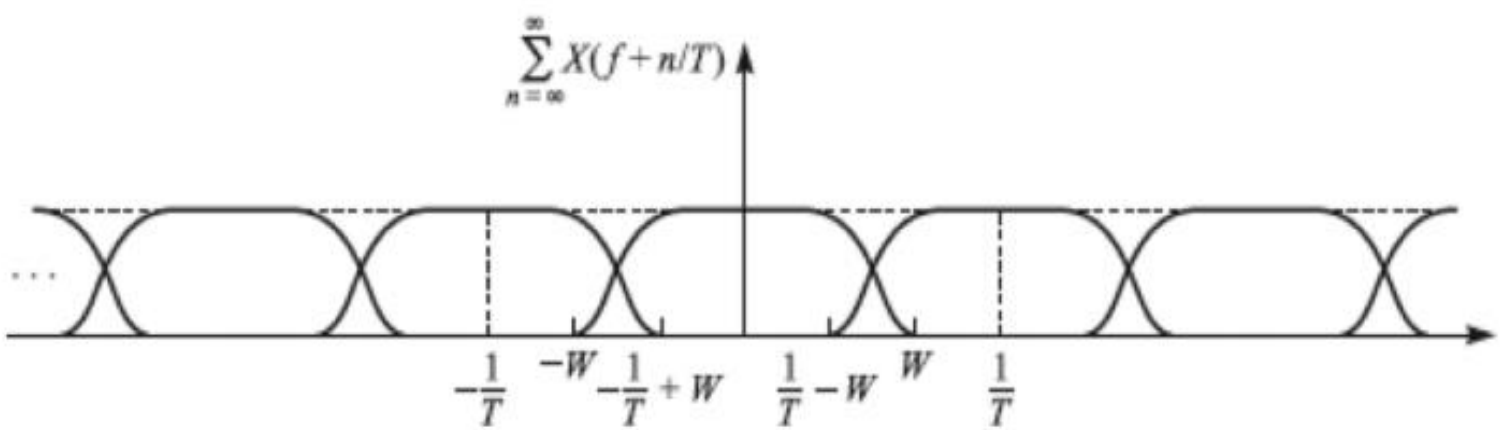
$$X_\ell(f) \star \left[\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{m}{T}\right)\right] = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_\ell\left(f-\frac{m}{T}\right) = 1, \qquad \textbf{Q.E.D}$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

Το θεώρημα του Nyquist μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$x_k = \delta_k \qquad \text{iff} \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_\ell\left(f - \frac{m}{T}\right) \; = \; T$$

Η σειρά μπορεί να παρασταθεί γραφικά με τον ακόλουθο τρόπο:



Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με περιορισμένο εύρος ζώνης

$$x_k = \delta_k \quad \text{iff} \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_\ell\left(f - \frac{m}{T}\right) = T \qquad (2)$$

1. $2W < \frac{1}{T}$:
   $X_\ell\left(f - \frac{m}{T}\right)$ και $X_\ell\left(f - \frac{m'}{T}\right)$ δεν επικαλύπτονται όταν $m \neq m'$.
   Η (2) είναι αδύνατό να ισχύει!

2. $2W = \frac{1}{T}$:
   Πρέπει $X_\ell(f) = T\text{rect}(Tf)$, συνεπώς $x_\ell(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$.
   Θεωρητικά σωστό, στην πράξη μή πραγματοποιήσιμο!

3. Αναγκαστικά πρέπε να ισχύει η συνθήκη: $2W > \frac{1}{T}$

Το εύρος ζώνης του καναλιού πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το ρυθμό δειγματοληψίας