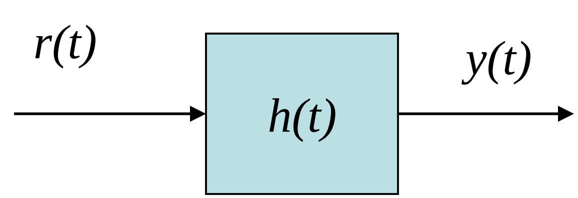
Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Μεγιστοποιεί το λόγο σήματος-προς-θόρυβο (SNR) στην έξοδό του
- Υποθέτουμε ότι ο θόρυβος είναι AWGN
- Το βέλτιστο φίλτρο είναι το προσαρμοσμένο φίλτρο

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Έστω ότι $r(t) = s(t)+n(t)$ όπου $n(t)$ λευκός θόρυβος με βασματική πυκνότητα ισχύος $N_0/2$ και $s(t)$ είναι σήμα περιορισμένης διάρκειας T
- Έστω ότι το σήμα $r(t)$ είναι είσοδος σε φίλτρο με κρουστική απόκριση $h(t)$
- Έστω y η έξοδος του φίλτρρου



Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Το επιθυμητό σήμα στην έξοδο του φίλτρου είναι:

$$y_s(\mathrm{t}) = \int_0^t s(u)h(t-u)\,\mathrm{d}u$$

- Ο θόρυβος στην έξοδο του φίλτρου είναι:

$$y_n(\mathrm{t}) = \int_0^t n(u)h(t-u)\,\mathrm{d}u$$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Ο λόγος σήματος προς θόρυβο στην έξοδο είναι ίσος με:

$$\mathrm{SNR} = \frac{y_s^2(t)}{E[y_n^2(t)]} = \frac{\left[\int_0^t s(u)h(t-u)\,\mathrm{d}u\right]^2}{E\left[\int_0^t s(u)h(t-u)\,\mathrm{d}u\right]^2}$$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Από τον ορισμό του λευκού θορύβου:

$$E[y_n^2(t)] = \int_0^t \int_0^t E[n(v)n(u)]h(t-u)h(t-v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^t \int_0^t \frac{N_0}{2}\delta(u-v)h(t-u)h(t-v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_0^t [h(t-u)]^2\,\mathrm{d}u$$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Ο λόγος σήματος-προς-θόρυβο γράφεται:

$$\mathrm{SNR} = \frac{\left[\displaystyle\int_0^t s(u)h(t-u)\,\mathrm{d}u\right]^2}{\dfrac{N_0}{2}\displaystyle\int_0^t [h(t-u)]^2\,\mathrm{d}u}$$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Εφαρμόζουμε την ανισότητα Cauchy-Schwartz
- Αν S και Q είναι στοιχεία ενός χώρου Hilbert τότε ισχύει η ανισότητα

$$\langle S,Q\rangle^2 \leq |S|^2 |Q|^2$$

- Το ίσον ισχύει όταν τα στοιχεία S και Q είναι γραμμικώς εξηρτημένα, ήτοι: $S = cQ$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Ανισότητα Cauchy-Schwartz για σήματα
- Αν S και Q είναι στοιχεία του χώρου Hilbert των τεραγωνικώς ολοκληρωσιμων συναρτήσεων. Τότε ισχύει η ανισότητα

$$\left[\int_0^t s(u)q(u)\,\mathrm{d}u\right]^2 \leq \int_0^t s(u)^2\,\mathrm{d}u \int_0^t q(u)^2\,\mathrm{d}u$$

- Το ίσον ισχύει όταν τα σήματα $s(t)$ και $q(t)$ είναι γραμμικώς εξηρτημένα, ήτοι: $s(t)= cq(t)$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Θυμόμαστε ότι ο αριθμητής του SNR είναι

$$\left[\int_0^t s(u)h(t-u)\,\mathrm{d}\,u\right]^2$$

- Θεωρούμε ότι το $h(t\text{-}u)$ είναι ίσο με το $cs(u)$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Αντικαθιστούμε $h(t-u) = cs(u)$

$$\mathrm{SNR} = \frac{\left[c \int_0^t s^2(u)\,\mathrm{d}u \right]^2}{\frac{N_0 c^2}{2} \int_0^t s^2(u)\,\mathrm{d}u} = \frac{\int_0^t s^2(u)\,\mathrm{d}u}{\frac{N_0}{2}}$$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Βελτιστοποίηση του t:
- Αν ο $s(t)$ έχει περιορισμένη διάρκεια T τότε το SNR βελτιστοποιείται θέτοντας $t = T$

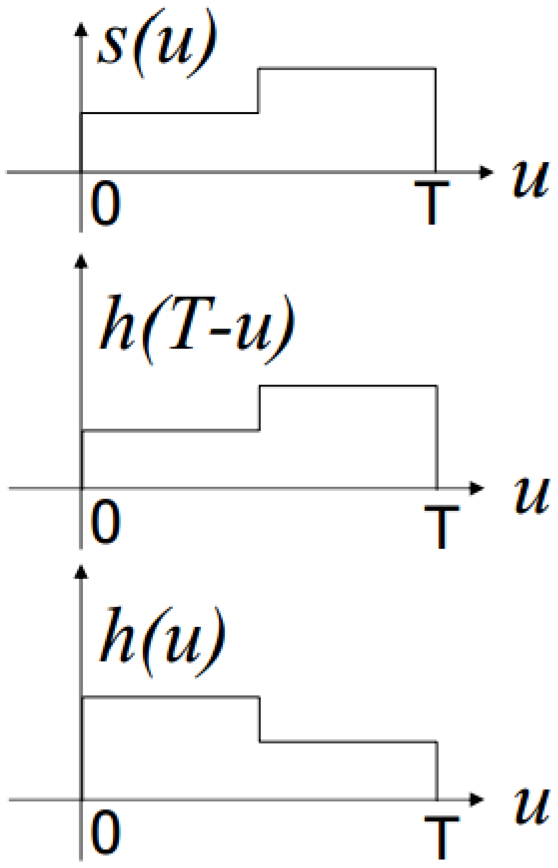
$$\mathrm{SNR}^{\mathrm{OPT}} = \frac{\int_0^T s^2(u)\,\mathrm{d}u}{\frac{N_0}{2}} = \frac{2E_s}{N_0}$$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Η κρουστική απόκριση του προσαρμοσμένου φίλτρου προκύπτει από ανάκλαση και μετατόπιση του σήματος $s(u)$
- $h(T\text{-}u) = cs(u)$

  ή

  $h(u) = cs(T\text{-}u)$



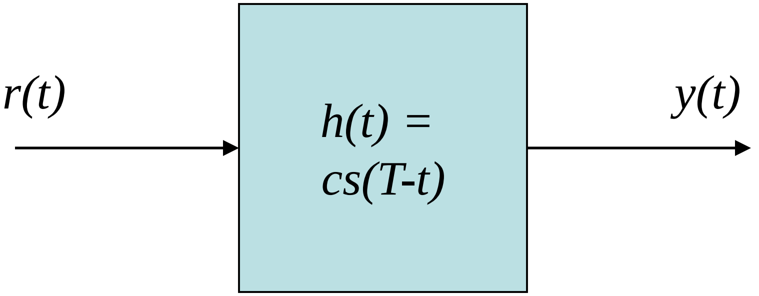
Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Μαθηματική ερμηνεία του προσαρμοσμένου φίλτρου (σαν εσωτερικό γινόμενο)

$$y(T)=\int_0^T h(u)r(T-u)\,\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^T cs(T-u)r(T-u)\,\mathrm{d}u$$

$$c\int_0^T s(u)r(u)\,\mathrm{d}u=c\langle s,r\rangle$$



Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Ποια η απόκριση του προσαρμοσμένου φίλτρου στο πεδίο της συχνότητας;
- Θεωρούμε το μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής απόκρισης

$$H(f) = \int_0^T h(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f u}\,\mathrm{d}u$$

$$= c\int_0^T s(T-u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f u}\,\mathrm{d}u$$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Θέτουμε $r = T\text{-}u$;

$$H(f) = c\int_0^T s(T-u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fu}\,\mathrm{d}u$$

$$= -c\int_T^0 s(r)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f(T-r)}\,\mathrm{d}r$$

$$c\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fT}\int_0^T s(r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi fr}\,\mathrm{d}r = c\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fT}\left[S(f)\right]^*$$

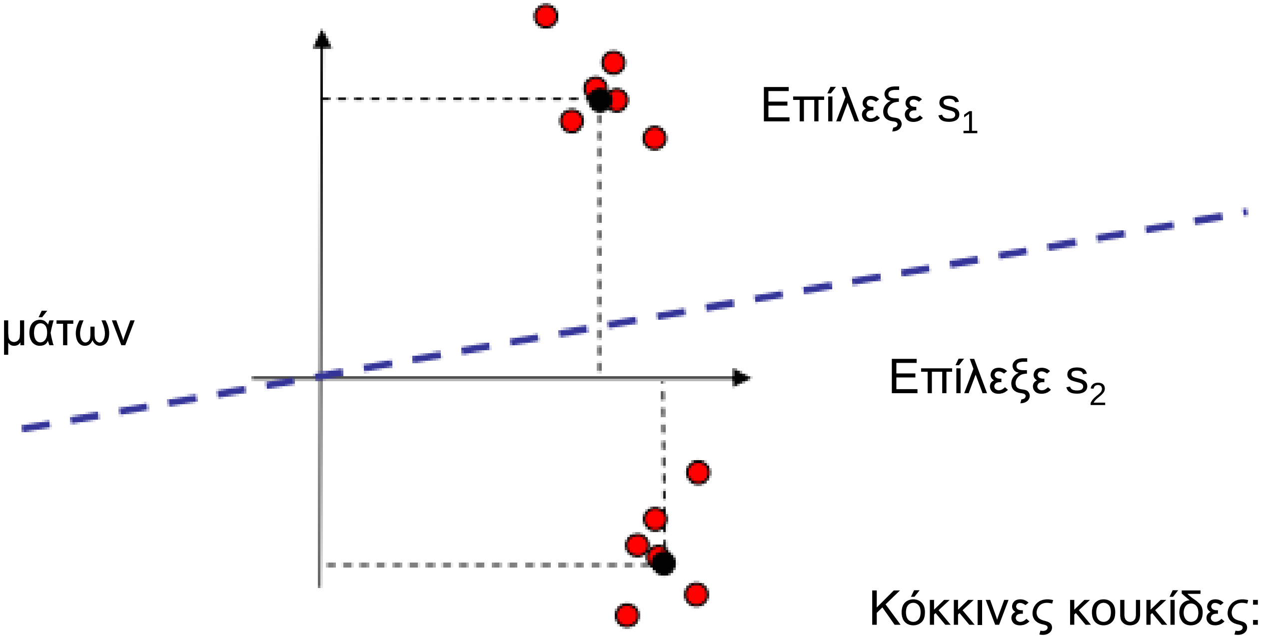
Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Το πλάτος της κρουστικής απόκρισης ενός προσαρμοσμένου φίλτρου είναι ο Μετασχηματισμός Fourier του σήματος πολλαπλασιασμένος επί μία σταθερά

$$|H(f)| = c\,|S(f)|$$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Ποια η σχέση του προσαρμοσμένου φίλτρου με την βέλτιστη ανίχνευση;



Χώρος σημάτων

Κόκκινες κουκίδες:
Σημεία του αστερισμού
υπό την επίδραση θορύβου

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Ο ανιχνευτής ελάχιστης απόστασης είναι δυνατό να γραφτεί ως εξής:
- Αναπτύσσουμε την απόσταση μεταξύ του σήματος λήψης $\mathbf{r}$ και των σημείων του αστερισμού $\mathbf{s_m}$ (χωρίς θόρυβο)

$$\left\|\mathbf{r} - \mathbf{s_m}\right\|^2 = \left\|\mathbf{r}\right\|^2 + \left\|\mathbf{s_m}\right\|^2 - 2\left\langle \mathbf{r}, \mathbf{s_m} \right\rangle$$

$$\hat{m}_{opt} = \arg\min_{m}\left[E_m - 2\left\langle \mathbf{r}, \mathbf{s_m} \right\rangle\right]$$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Ο ανιχνευτής ελάχιστης απόστασης είναι δυνατό να υλοποιηθεί σαν μία τράπεζα από προσαρμοσμένα φίλτρα:

$$\begin{aligned}\hat{m}_{opt} &= \arg\min_{m}\left[E_m - 2\langle \mathbf{r}, \mathbf{s_m}\rangle\right] \\ &= \arg\max_{m}\left[\langle \mathbf{r}, \mathbf{s_m}\rangle\right] \\ &= \arg\max_{m}\int_0^T r(t)s_m(t)\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Περίληψη:

1. Όταν η είσοδος είναι σήμα και λευκός θόρυβος τότε το φίλτρο που μεγιστοποιεί το λόγο σήματος προς θόρυβο είναι το προσαρμοσμένο φίλτρο
2. Η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή της ανισότητας Cauchy Schwartz
3. Το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς του φίλτρου έχει το ίδιο σχήμα με το μέτρο του σήματος στο πεδίο της συχνότητας
4. Ο δέκτης ελάχιστης απόστασης σε ένα ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα υλοποιείται σαν μία τράπεζα προσαρμοσμένων φίλτρων