Επανάληψη θεωρίας πιθανοτήτων

- Θεωρούμε το παράδειγμα ρίψης ενός κύβου
- Δειγματικός χώρος S: Το σύνολο όλων των δυνατών ενδεχομένων
  - $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Ένα ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου S και αποτελείται από δείγματα του πειράματος τύχης
- Παράδειγμα: $A = \{2,4\}$

Επανάληψη θεωρίας πιθανοτήτων

- Το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του A, αποτελείται από τα δείγματα του S που δεν ανήκουν στο A, ήτοι

$$\overline{A} = \{1, 3, 5, 6\}$$

- Δύο ενδεχόμενα ονομάζονται αμοιβαίως ξένα (mutually exclusive) όταν δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο
  - Αν ένα ενδεχόμενο συμβεί το αντίστοιχο ξένο προς αυτό δεν πρόκειται να συμβει
  - Παράδειγμα: A ορίζεται όπως προηγουμένως και B = {1,3, 6}
  - A και B είναι αμοιβαίως ξένα μεταξύ τους

Επανάληψη θεωρίας πιθανοτήτων

- Για το ενδεχόμενο A, ορίζουμε την πιθανότητα $P(A)$, με βάση τρία αξιώματα:
  - Αξίωμα 1: $P(A) \geq 0$
  - Αξίωμα 2: $P(S) = 1$
  - Αξίωμα 3: Έστω ότι τα ενδεχόμενα A_i $i =$ 1,2, … τα οποία είναι υποσύνολα του δειγματαικού χώρου είναι αμοιβαίως ξένα μεταξύ τους

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad i \neq j = 1, 2, \ldots$$

  - Η πιθανότητα της ένωσης αυτών των ενδεχομένων είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοντήτων των A_i

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

Επανάληψη θεωρίας πιθανοτήτων

- Παράδειγμα: Σε ρίψη ενός δίκαιου ζαριού όλα τα ενδεχόμενα έχουν πιθανότητα 1/6
- Το ενδεχόμενο A αποτελείται από αμοιβαίως ξένα υπο-ενδεχόμενα
  - $P(A)$ = 2/6 = 1/3
- Η πιθανότητα της ένωσης του A με το B είναι ίση με $P(A) + P(B) = 1/3+1/2 = 5/6$ γιατί είναι αμοιβαίως ξένα

Από κοινού ενδεχόμενα και πιθανότητες

- Θεωρούμε δύο πειράματα τύχης και τα αντίστοιχα ενδεχόμενά τους
  – Παράδειγμα: Διαδοχικές ρίψεις ενός ζαριού ή ταυτόχρονη ρίψη δύο ζαριών
  – Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από 36 δυνατά ενδεχόμενα (αριθμός ζευγών (i,j), $i = 1 \ldots 6$, $j = 1 \ldots 6$)
  – Αν το ζάρι είναι δίκαιο η πιθανότητα κάθε ενδεχομένου είναι 1/36

Από κοινού ενδεχόμενα και πιθανότητες

- Γενικά αν ένα πείραμα τύχης έχει τα δυνατά ενδεχόμενα A_i i = 1… n, και ένα δεύτερο πείραμα τα ενδεχόμενα B_j $j =$ 1…m, τότε το συνδυασμένο πείραμα έχει τα δυνατά ενδεχόμενα (A_i, B_j) για κάθε $i =$ 1… n, j = 1…m
- Σε κάθε ενδεχόμενο (A_i, B_j) ορίζουμε την από κοινού πιθανότητα $P(A_i, B_j)$ η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη $0 \leq P(A_i, B_j) \leq 1$

Από κοινού ενδεχόμενα και πιθανότητες

- Αν τα ενδεχόμενα B_j j = 1…m, είναι αμοιβαίως ξένα μεταξύ τους, τότε ισχύει η σχέση

$$\sum_{j=1}^{m} P(A_i, B_j) = P(A_i)$$

- Αν τα ενδεχόμενα A_i i = 1…m, είναι αμοιβαίως ξένα μεταξύ τους, τότε ισχύει η σχέση

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i, B_j) = P(B_j)$$

Δεσμευμένη πιθανότητα

- Θεωρούμε ένα συνδυασμένο πείραμα στο οποίο ένα από κοινού ενδεχόμενο συμβαίνει με πιθανότητα $P(A, B)$
- Έστω ότι το ενδεχόμενο Β έχει συμβεί και ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α
- Οριζουμε τη δεσμευμενη πιθανότητα του ενδεχομένου Α δεδομένου του Β ως

$$P(A \mid B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}$$

Δεσμευμένη πιθανότητα

- Ορίζουμε αντίστοιχα τη δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου Β δεδομένου του Α, ως

$$P(A \mid B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}$$

- Οι δύο σχέσεις μπορούν να εκφραστούν σε κοινή μορφή ως

$$P(A, B) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A)$$

Δεσμευμένη πιθανότητα

- Οι σχέσεις ισχύουν και για το απλό πείραμα τύχης. Στην περίπτωση αυτή ο αριθμητής είναι η τομή των A και B
- Παράδειγμα: Για τη ρίψη ενός ζαριού Ορίζουμε τα ενδεχόμενα B = {1,3,6} και C = {1,2,3}
  – $P(B,C) = P(\{1,3\}) = 2/6$ και $P(B) = 3/6$
  – $P(C|B) = P(B,C)/P(B) = (2/6)/(3/6) = 2/3$

Δεσμευμένη πιθανότητα

- Ειδικές περιπτώσεις:
  - A, B αμοιβαίως ξένα: $P(A, B) = 0$, $P(A|B) = 0$
  - A υποσύνολο του B: $P(A, B) = P(A)$, $P(A|B) = P(A)/P(B)$
  - B υποσύνολο του A: $P(A, B) = P(A)$, $P(A|B) =1$

Τύπος Bayes

- Έστω A_i αμοιβαίως ξένα ενδεχόμενα η ένωση των οποίων δίνει το δειγματικό χώρο:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$$

Έστω B ένα αυθαίρετο ενδεχόμενο με μη μηδενική πιθανότητα: Τότε ισχύει η σχέση:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i, B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)P(A_j)}$$

Τύπος Bayes

- Ο τύπος αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό του βέλτιστου δέκτη σε ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα
  - A_i τα μεταδιδόμενα μηνύματα σε καθορισμένο χρονικό διάστημα
  - P(A_i) είναι οι a-priori πιθανότητες
  - B είναι το σήμα εισόδου στο δέκτη (ένα από τα A_i με παραμόρφωση λόγω θορύβου)
  - P($A_i|B$) είναι η a-posteriori πιθανότητα του A_i δεδομένου ότι έχει παρατηρηθεί το σήμα B

Στατιστική Ανεξαρτησία

- Θεωρούμε δύο ενδεχόμενα A, B και τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(A|B)$
- Υποθέτουμε ότι το να συμβεί το A δεν εξαρτάται από το να συμβεί το B ($P(A|B) = P(A)$)
- Αντικατάσταση στη σχέση της δεσμευμένης πιθανότητας δίνει: $P(A, B) = P(A)\, P(B)$

Στατιστική Ανεξαρτησία

- Παράδειγμα: Θεωρούμε δύο διαδοχικές ρίψεις ενός κύβου
  - Ενδεχόμενο Α: Στην πρώτη ρίψη να φέρουμε άρτιο αριθμό
  - Ενδεχόμενο Β: Στην πρώτη ρίψη να φέρουμε περιττό αριθμό
  - $P(A) = P(B) = ½$
  - Ποια η πιθανότητα του ενδεχόμενο $A \cap B$;
  - Αποτελείται από 9 ζεύγη των αποτελεσμάτων (i, j) με $i = \{2, 4, 6\}$ και $j = \{2,4,6\}$
  - $P(A \cap B) = 9/36 = ¼ = P(A)P(B)$

Τυχαίες Μεταβλητές

- Έστω πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο S
- Ορίζουμε μία συνάρτηση $X(s)$ με πεδίο ορισμού το S και σύνολο τιμών ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών
- Παράδειγμα: Ρίχνουμε ένα νόμισμα
  - Δυνατά ενδεχόμενα: Κορώνα (H) ή Γράμματα (T)
- Ορίζουμε την ακόλουθη συνάρτηση:

$$X(s) = \begin{cases} 1 & (s = H) \\ -1 & (s = T) \end{cases}$$

- Τα δύο ενδεχόμενα του πειράματος τύχης αντιστοιχίζονται σε δύο πραγματικούς αριθμούς (±1)

Τυχαίες μεταβλητές

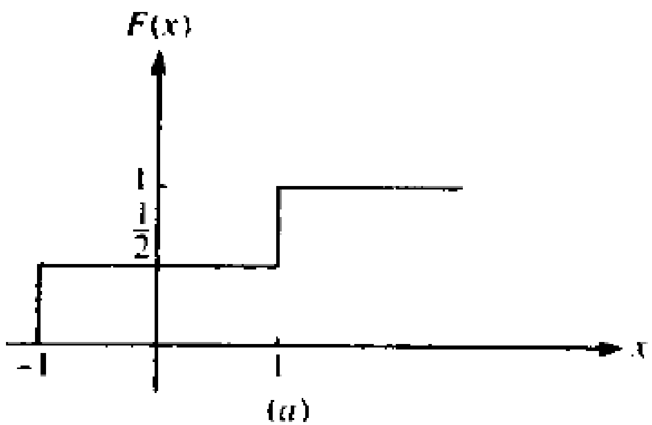
- Το προηγούμενο παράδειγμα αφορά σε διακριτή τυχαία μεταβλητή
- Σε πολλές πρακτικές περιπτώσεις έχουμε συνεχείς τυχαίες μεταβλητές
  - Παράδειγμα: Η τάση θορύβου στην έξοδο ενός ενισχυτή έχει συνεχές πλάτος
- Θεωρούμε τυχαία μεταβλητή και το ενδεχόμενο $(X \leq x)$, x πραγματικός αριθμός
- Η συνάρτηση $F(x) = P(X \leq x)$ ονομάζεται ***συνάρτηση κατανομής*** της τυχαίας μεταβλητής X

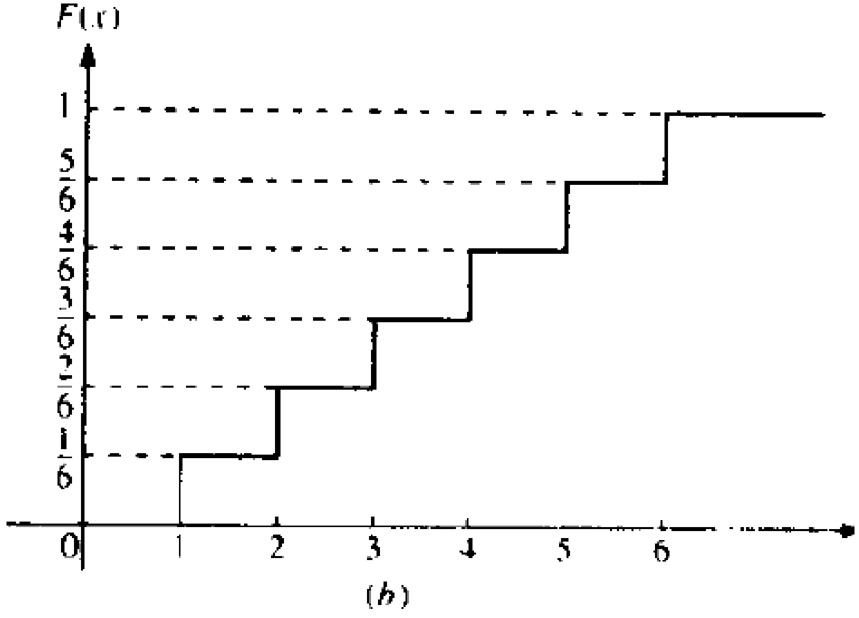
Τυχαίες μεταβλητές

- Το προηγούμενο παράδειγμα αφορά σε διακριτή τυχαία μεταβλητή
- Σε πολλές πρακτικές περιπτώσεις έχουμε συνεχείς τυχαίες μεταβλητές
  - Παράδειγμα: Η τάση θορύβου στην έξοδο ενός ενισχυτή έχει συνεχές πλάτος
- Θεωρούμε τυχαία μεταβλητή και το ενδεχόμενο $(X \leq x)$, x πραγματικός αριθμός
- Η συνάρτηση $F(x) = P(X \leq x)$ ονομάζεται ***συνάρτηση κατανομής*** (cumulative distribution function, cdf) της τυχαίας μεταβλητής Χ

Τυχαίες μεταβλητές

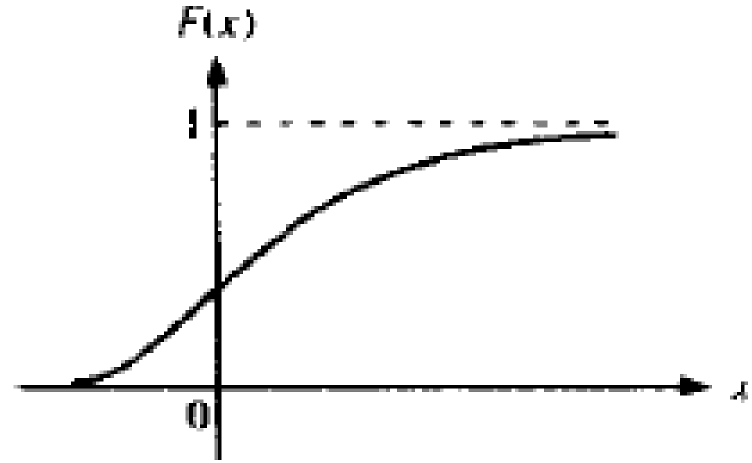
- Επειδή η συνάρτηση κατανομής είναι πιθανότητα πρέπει $0 \leq F(x) \leq 1$
- $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$
- Παραδείγματα συναρτήσεων κατανομής διακριτών τυχαίων μεταβλητών:
  - a) Ρίψη ενός νομίσματος, b) Ρίψη ενός ζαριού





Τυχαίες μεταβλητές

- Παράδειγμα συνάρτησης κατανομής συνεχούς τυχαίας μεταβλητής



- Η παράγωγος της συνάρτησης κατανομής ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function, PDF)

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)\, du \quad (-\infty < x < \infty)$$

Τυχαίες μεταβλητές

- Εύρεση της πιθανότητας $P(x_1 \leq X \leq x_2)$

$$P(X \leq x_2) = P(X \leq x_1) + P(x_1 < X \leq x_2)$$

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 < X \leq x_2)$$

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx$$

- Η πιθανότητα είναι αριθμητικά ίση με το εμβαδό της επιφάνειας που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της PDF και τις ευθείες $x = x_1$ και $x = x_2$

Πολλαπλές τυχαίες μεταβλητές

- Από κοινού συνάρτηση κατανομής:

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p(u_1, u_2)\, du_1\, du_2$$

- Από κοινού συνάρτηση κατανομής πυκνότητας πιθανότητας:

$$p(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F(x_1, x_2)$$

- Περιθώριες Κατανομές

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2)\, dx_1 = p(x_2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2)\, dx_2 = p(x_1)$$

Ισχύει η σχέση: $$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = F(\infty, \infty) = 1$$

Συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών

- Δίνεται τυχαία μεταβλητή X. Ποια η κατανομή της Y = g(X);
- Παράδειγμα: $Y = aX+b,\ a > 0$

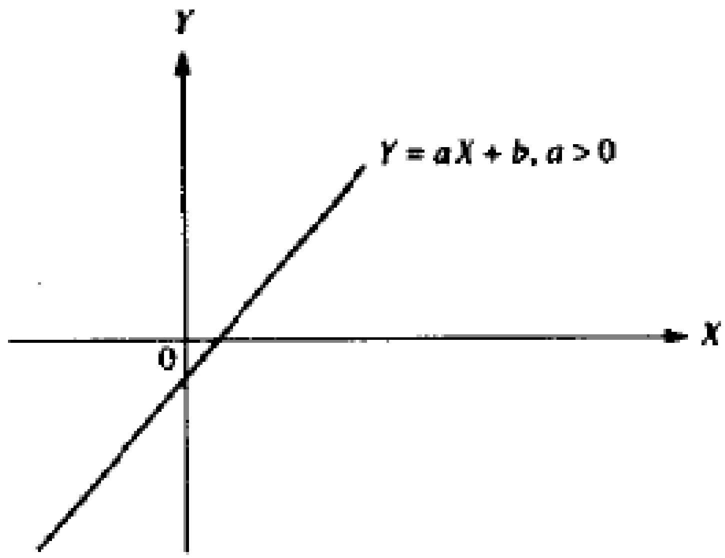
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{(y-b)/a} p_X(x)\,dx = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

- Η PDF προκύπτει με παραγώγιση ως προς y

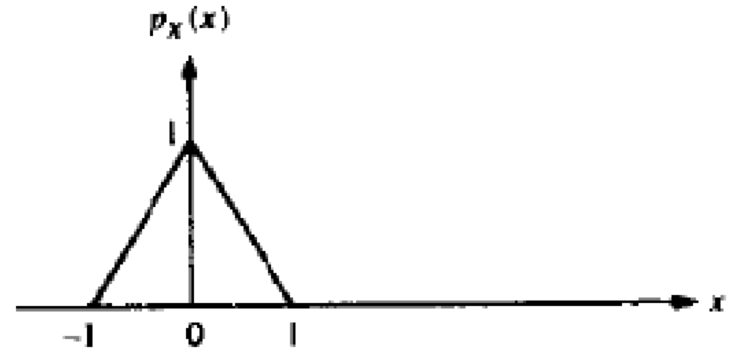
$$p_Y(y) = \frac{1}{a} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών

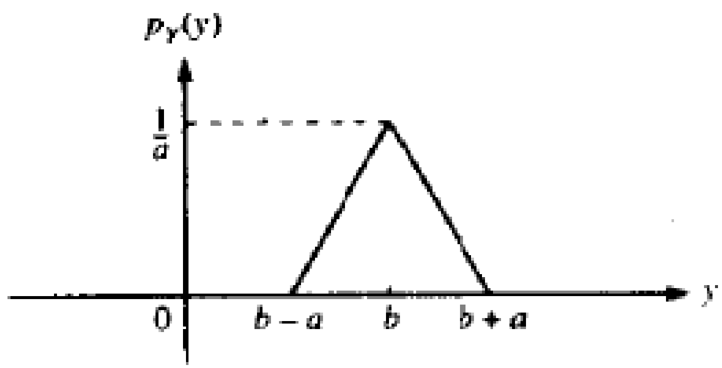
- Γραφική παράσταση του αποτελέσματος



(a)



(b)



Συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών

- Παράδειγμα: $Y = aX^2+b,\ a > 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX^2 + b \leq y)$$

$$= P\left(|X| \leq \sqrt{\frac{y-b}{a}}\right)$$

$$F_Y(y) = F_X\left(\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right)$$

- Η PDF προκύπτει με παραγώγιση ως προς y

$$p_Y(y) = \frac{p_X[\sqrt{(y-b)/a}]}{2a\sqrt{[(y-b)/a]}} + \frac{p_X[-\sqrt{(y-b)/a}]}{2a\sqrt{[(y-b)/a]}}$$

Συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών

- Παρατηρούμε ότι αν $g(x) = ax^2+b = y$ και x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $g(x) = y$ τότε

$$p_Y(y) = \frac{p_X[x_1 = \sqrt{(y-b)/a}]}{|g'[x_1 = \sqrt{(y-b)/a}]|} + \frac{p_X[x_2 = -\sqrt{(y-b)/a}]}{|g'[x_2 = -\sqrt{(y-b)/a}]|}$$

- Γενικά ισχύει η σχέση:

$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

Ροπές τυχαίων μεταβλητών

Ορισμός μέσης τιμής $$E(X) \equiv m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\, dx$$

Ροπή n-τάξης $$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x)\, dx$$

Μέση τιμή συνάρτησης τυχαίας μεταβλητής $$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p(x)\, dx$$

Κεντρική Ροπή n-τάξης $$E(Y) = E[(X - m_x)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^n p(x)\, dx$$

Κεντρική Ροπή 2-τάξης (διασπορά)

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x)\, dx$$

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - m_x^2$$

Χαρακτηριστική συνάρτηση

Ορισμός:

$$E(e^{j\upsilon X}) \equiv \psi(j\upsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\upsilon x} p(x)\,dx$$

Υπολογισμός PDF:

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(j\upsilon) e^{-j\upsilon x}\,d\upsilon$$

Μέση τιμή:

$$\frac{d\psi(j\upsilon)}{d\upsilon} = j\int_{-\infty}^{\infty} x e^{j\upsilon x} p(x)\,dx$$

$$E(X) = m_x = -j\left.\frac{d\psi(j\upsilon)}{d\upsilon}\right|_{\upsilon=0}$$

Ροπές n-τάξης

$$E(X^n) = (-j)^n \left.\frac{d^n\psi(j\upsilon)}{d\upsilon^n}\right|_{\upsilon=0} \qquad \psi(j\upsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{d^n\psi(j\upsilon)}{d\upsilon^n}\right]_{\upsilon=0}\frac{\upsilon^n}{n!}$$

$$\psi(j\upsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} E(X^n)\frac{(j\upsilon)^n}{n!}$$

Υπολογισμός κατανομής αθροίσματος ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών

Έστω: $$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\psi_Y(jv) &= E(e^{jvY}) \\
&= E\left[\exp\left(jv \sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] \\
&= E\left[\prod_{i=1}^{n} (e^{jvX_i})\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} e^{jvx_i}\right) p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n
\end{aligned}$$

Επειδή έχουμε ανεξαρτησία τότε $$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1)F(x_2) \cdots F(x_n)$$

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(x_1)p(x_2) \cdots p(x_n)$$

Τελικά: $$\psi_Y(jv) = \prod_{i=1}^{n} \psi_{X_i}(jv)$$

Παράδειγμα: Κατανομή Gauss

PDF:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-m_x)^2/2\sigma^2}$$

CDF:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-(u-m_x)^2/2\sigma^2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{(x-m_x)/\sqrt{2}\sigma} e^{-t^2}\,dt$$

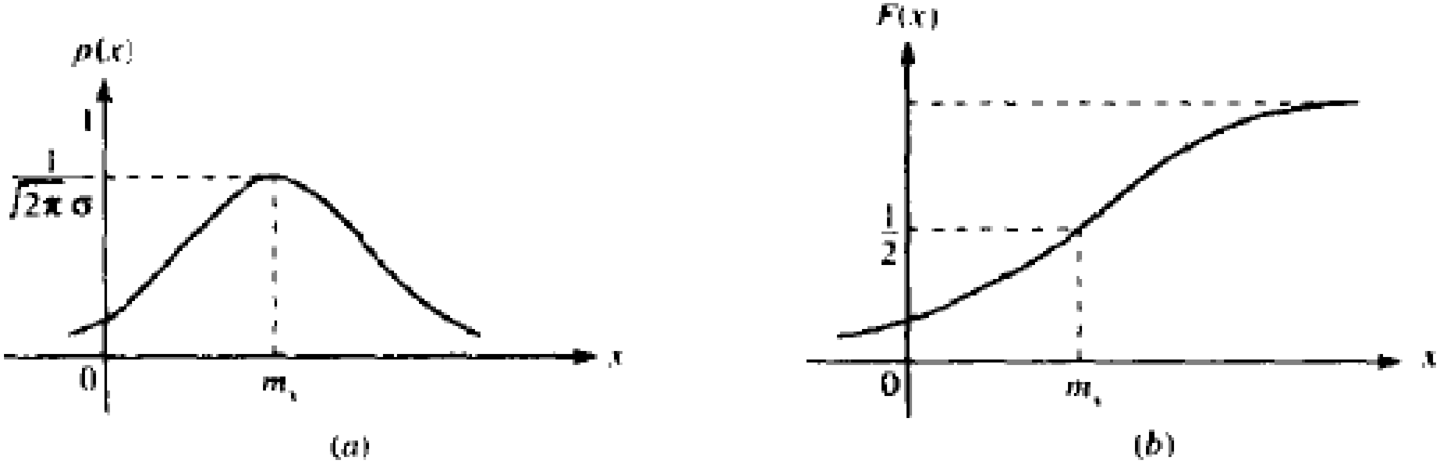
$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{x-m_x}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)$$

Συνάρτηση σφάλματος:

$$\mathbf{erf}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Παράδειγμα: Κατανομή Gauss

Γραφική παράσταση CDF και PDF:



Παράδειγμα: Κατανομή Gauss

Η CDF εκφράζεται μέσω της συμπληρωματικής συνάρτησης σφάλματος:

$$F(x) = 1 - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x - m_x}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)$$

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$
$$= 1 - \mathrm{erf}(x)$$

Συχνά Η CDF εκφράζεται μέσω της συνάρτησης Q:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt, \qquad x \geqslant 0$$

$$Q(x) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Παράδειγμα: Κατανομή Gauss

Χαρακτηριστική συνάρτηση:

$$\psi(jv) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-m_x)^2/2\sigma^2}\right] dx$$

$$= e^{jvm_x - (1/2)v^2\sigma^2}$$

Κεντρικές ροπές:

$$E[(X-m_x)^k] \equiv \mu_k = \begin{cases} 1\cdot 3\cdots(k-1)\sigma^k & \text{(even } k\text{)} \\ 0 & \text{(odd } k\text{)} \end{cases}$$

Συνήθεις ροπές:

$$E(X^k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} m_x^i \mu_{k-i}$$

Παράδειγμα: Κατανομή Gauss

Άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών Gauss:

$$\psi_Y(jv) = \prod_{i=1}^{n} \psi_{X_i}(jv)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{jvm_i - v^2\sigma_i^2/2}$$

$$= e^{jvm_y - v^2\sigma_y^2/2}$$

$$m_y = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

Η κατανομή του αθροίσματος είναι ακολουθεί την κατανομή Gauss