Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Η μετάδοση δεδομένων σε ασύρματα κανάλια είναι ένα πολύπλοκο φαινόμενο το οποίο συμπεριλαμβάνει διαλείψεις και σκίαση
- Η ακριβής μαθηματική περιγραφή του φαινομένου είναι είτε άγνωστη είτε εξαιρετικά πολύπλοκη
- Σημαντική ερευνητική προσπάθεια έχει γίνει τα τελευταία χρόνια στη στατιστική μοντελοποίηση των φαινομένων που διέπουν τη διάδοση σημάτων σε ασύρματα κανάλια
- Σκοπός: Επισκόπηση των χαρακτηριστικών και των μοντέλων για κανάλια με διαλείψεις. Βασικές αρχές ψηφιακών επικοινωνιών σε κανάλια με διαλείψεις.

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Όταν ένα σήμα παραμορφώνεται λόγω διαλείψεων η περιβάλλουσά του και η φάση του μεταβάλλονται με το χρόνο
- Για σύμφωνες διαμορφώσεις η παραμόρφωση φάσης μπορεί να μειώσει δραστικά την επίδοση εκτός αν ληφθούν τα κατάλληλα μέτρα.
  - Για την αξιολόγηση επίδοσης τέτοιων συστημάτων υποθέτουμε ότι η επίδραση των διαλείψεων στη φάση εξουδετερώνεται πλήρως (ιδανική σύμφωνη διαμόρφωση)
- Για ασύμφωνες διαμορφώσεις δεν απαιτείται η πληροφορία της φάσης στο δέκτη. Συνεπώς η παραμόρφωση φάσης δεν επηρεάζει την επίδοση του συστήματος.
- Συνεπώς η αξιολόγηση επίδοσης για ιδανικές σύμφωνες και ασύμφωνες διαμορφώσεις απαιτεί γνώση της στατιστικής του πλάτους.
- Για αργές διαλείψεις, η στοχαστική ανέλιξη της περιβάλλουσας μπορεί να περιγραφεί μέσω μίας τυχαίας μεταβλητής κατά τη διάρκεια ενός συμβόλου.

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Η διάκριση μεταξύ αργών και γρήγορων διαλείψεων είναι σημαντική για τη μαθηματική μοντελοποίηση του καναλιού και την αξιολόγηση επίδοσης των συστημάτων
- Η διάκριση αυτή σχετίζεται με το χρόνο συνοχής T_c του καναλιού.
  - Μέτρο της χρονικής περιόδου για την οποία η στοχαστική ανέλιξη των διαλείψεων είναι συσχετισμένη.
  - Ισοδύναμα: Η χρονική περίοδος μετά από την οποία η συνάρτηση συσχέτισης δύο δειγμάτων του καναλιού τα οποία λαμβάνονται στην ίδια συχνότητα αλλά σε διαφορετικές χρονικές στιγμές δεν υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο κατώφλι.
- Οι διαλείψεις είναι αργές όταν η διάρκεια του συμβόλου είναι μικρότερη από το χρόνο συνοχής αλλιώς είναι γρήγορες
- Σε αργές διαλείψεις μία συγκεκριμένη στάθμη διαλείψεων επηρεάζει πολλά διαδοχικά συμβολα πράγμα το οποίο οδηγεί σε συγκεντρωμένα λάθη ενώ στις γρήγορες διαλείψεις έχουμε αποσυσχέτιση από σύμβολο σε σύμβολο
- Στην τελευταία περίπτωση και όταν οι αποφάσεις στο δέκτη βασίζονται στην παρατήρηση του σήματος λήψης για δύο ή περισσότερα σύμβολα (πχ σε εποικοινωνίες με κωδικοποίηση) είναι απαραίτητο να θεωρήσουμε τη μεταβολή του καναλιού από σύμβολο σε σύμβολο
- Μοντέλα συσχέτισης τα οποία εξαρτώνται από τη διάδοση και τον τρόπο που γίνεται η επικοινωνία

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Η επιλεκτικότητα ως προς τη συχνότητα είναι ένα άλλο χαρακτηριστικό των καναλιών με διαλείψεις
- Αν όλες οι φασματικές συνιστώσες του σήματος μετάδοσης επηρεάζονται με τον ίδο τρόπο λόγω διαλείψεων το κανάλι λέγεται επίπεδο ως προς τη συχνότητα (frequency flat)
  - Τέτοια είναι η περίπτωση συστημάτων στενής ζώνης για τα οποία το εύρος ζώνης μετάδοσης είναι πολύ μικρότερο από το εύρος ζώνης συνοχής
  - Το εύρος ζώνης συνοχής μετρά την περιοχή των συχνοτήτων για την οποία η διαδικασία των διαλείψεων είναι συσχετισμένη.
  - Ορίζεται ώς το εύρος ζώνης συχνοτήτων πέρα από το οποίο η συσχέτιση δύο δειγμάτων του καναλιού η οποία λαμβάνεται την ίδια χρονική στιγμή αλλά για διαφορετικές συχνότητες δεν υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο κατώφλι
- Αν οι φασματικές συνιστώσες του σήματος μετάδοσης επηρεάζονται με διαφορετικό τρόπο από τις διαλείψεις (διαφορετικά πλάτη και φάσεις) τότε το κανάλι λέγεται επιλεκτικό ως προς τη συχνότητα.
  - Εφαρμογή σε συστήματα ευρείας ζώνης όπου το εύρος ζώνης μετάδοσης είναι μεγαλύτερο από το εύρος ζώνης συνοχής του καναλιού

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Όταν οι διαλείψεις επηρεάζουν συστήματα στενής ζώνης το πλάτος του φέροντος στη λήψη διαμορφώνεται από το πλάτος των διαλείψεων α, όπου α είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τετραγωνική τιμή Ω και PDF $f_\alpha(\alpha)$.
- Η PDF εξαρτάται από τη φύση του περιβάλλοντος διάδοσης
- Το σήμα στη λήψη επηρεάζεται από θόρυβο ο οποίος υποτίθεται στατιστικώς ανεξάρτητος του πλάτους με μονόπλευρη φασματική πυκνότητα ισχύος N_0 (W/Hz)
- Ο SNR στη λήψη ισούται με $\gamma = \alpha^2 E_s/N_0$ όπου E_s η ενέργεια ανά σύμβολο

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Η μέση τετραγωνική τιμή του SNR ορίζεται από τη σχέση

$$\bar{\gamma} = \Omega E_s / N_0$$

- Εισάγοντας μία αλλαγή μεταβλητής η PDF του SNR δίνεται από τη σχέση

$$f_\gamma(\gamma) = \frac{f_a\left(\sqrt{\Omega\gamma / \bar{\gamma}}\right)}{\sqrt{\gamma\bar{\gamma} / \Omega}}$$

- Ένα πολύ σημαντικό στατιστικό μέγεθος είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση του SNR (Moment Generating Function, MGF)

$$\mathrm{M}_\gamma(s) = \int_0^\infty f_\gamma(\gamma) e^{-s\gamma} d\gamma$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Οι διαλείψεις πολλαπλών διαδρομών οφείλονται στην υπέρθεση συνιστωσών του σήματος οι οποίες υφίστανται τυχαίες ανακλάσεις, καθυστερήσεις, σκεδάσεις και περιθλάσεις
- Ο τύπος αυτός των διαλείψεων είναι σχετικά γρήγορος και είναι υπεύθυνος για γρήγορες μεταβολές του σήματος στη λήψη.
- Ανάλογα με τη φύση του περιβάλλοντος διάδοσης υπάρχουν στη βιβλιογραφία διαφορετικά μοντέλα που περιγράφουν τη στατιστική συμπεριφορά της περιβάλλουσας του σήματος
- Στα πλαίσια του μαθήματος εξετάζουμε τις διαλείψεις Rayleigh, Rice και Nakagami-m

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Διαλείψεις τύπου Rayleigh: Η κατανομή Rayleigh χρησιμοποιείται συχνά για τη μοντελοποίηση των διαλείψεων πολλαπλών διαδρομών όταν δεν υπάρχει συνιστώσα οπτικής επαφής
- Η κατανομή του πλάτους του καναλιού α δίνεται από τη σχέση:

$$f_a(a) = \frac{2a}{\Omega} \exp\left(-\frac{a^2}{\Omega} \right)$$

- Ο SNR είναι εκθετικά κατανεμημένος:

$$f_\gamma(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}} \right)$$

- Η ροπογεννήτρια συνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{M}_\gamma(s) = (1 + s\bar{\gamma})^{-1}$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Το μοντέλο Rayleigh συμφωνεί τυπικά πολύ καλά με πειραματικά δεδομένα για συστήματα κινητών επικοινωνιών όταν δεν υπάρχει διαδρομή οπτικής επαφής μεταξύ της κεραίας μετάδοσης και της κεραίας λήψης.
- Επίσης βρίσκει εφαρμογή στη διάδοση ανακλωμένων και σκεδαζομένων κυμάτων στην ιονόσφαιρα, στην τροπόσφαιρα καθώς και σε ζεύξεις από πλοίο σε πλοίο

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Διαλείψεις τύπου Rice: Η κατανομή Rice χρησιμοποιείται συχνά για τη μοντελοποίηση των διαλείψεων πολλαπλών διαδρομών όταν υπάρχει ισχυρή συνιστώσα οπτικής επαφής
- Η κατανομή του πλάτους του καναλιού α δίνεται από τη σχέση:

$$f_a(a) = \frac{2(1+n^2)e^{-n^2} a}{\Omega} \exp\left[-\frac{(1+n^2)a^2}{\Omega}\right] I_0\left(2na\sqrt{\frac{1+n^2}{\Omega}}\right)$$

- Η κατανομή του SNR δίνεται από τη σχέση:

$$f_\gamma(\gamma) = \frac{(1+n^2)e^{-n^2} a}{\bar{\gamma}} \exp\left[-\frac{(1+n^2)\gamma}{\bar{\gamma}}\right] I_0\left(2n\sqrt{\frac{(1+n^2)\gamma}{\bar{\gamma}}}\right)$$

- Η παράμετρος *n* είναι θετική και σχετίζεται με τον παράγοντα Rice, *K*, ως $K = n^2$.
- Για n = 0 προκύπτει η κατανομή Rayleigh ενώ για n άπειρο δεν υπάρχουν διαλείψεις

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

Η MGF του SNR δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{M}_{\gamma}(s)=\frac{(1+n^{2})}{1+n^{2}+s\bar{\gamma}}\exp\left[-\frac{n^{2}s\bar{\gamma}}{1+n^{2}+s\bar{\gamma}}\right]$$

- Η κατανομή Rice βρίσκει εφαρμογή σε ζεύξεις με οπτική επαφή σε αστικά συστήματα μικροκυψελών σε συστήματα πικο-κυψελών εσωτερικού χώρου, σε εργοστασιακά περιβάλλοντα, δορυφορικές επικοινωνίες και ζεύξεις από πλοίο σε πλοίο

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Διαλείψεις τύπου Nakagami-m: Η κατανομή Nakagami-m αποτελεί ουσιαστικά μαθηματικό μοντέλο χωρίς κάποια φυσική σημασία.
- Η κατανομή του πλάτους του καναλιού α δίνεται από τη σχέση:

$$f_a(a) = \frac{2m^m a^{2m-1}}{\Omega^m \Gamma(m)} \exp\left[-\frac{ma^2}{\Omega}\right]$$

- Η κατανομή του SNR δίνεται από τη σχέση:

$$f_\gamma(\gamma) = \frac{m^m \gamma^{m-1}}{\bar{\gamma}^m \Gamma(m)} \exp\left[-\frac{m\gamma}{\bar{\gamma}}\right]$$

- Η ροπογεννήτρια συνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{M}_\gamma(s) = (1 + s\bar{\gamma})^m$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Το μοντέλο Nakagami-m συμφωνεί τυπικά πολύ καλά με πειραματικά δεδομένα για πλήθος συστημάτων ασύρματων επικοινωνιών
- Για m = 1 προκύπτει η κατανομή Rayleigh
- Για m = ½ η μονόπλευρη κανονική κατανομή
- Όταν το m τείνει στο άπειρο το μοντέλο είναι λευκός θόρυβος Gauss.
- Μπορεί να προσεγγίσει με ακρίβεια το μοντέλο Rice χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ροπών.

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Ο μέσος λόγος σήματος προς θόρυβο είναι το πιο κοινό και το πιο κατανοητό μέτρο της επίδοσης του συστήματος
- Συνήθως μετράται στη έξοδο του δέκτη και συνεπώς σχετίζεται άμεσα με τη διαδικασία της ανίχνευσης
- Από όλες τις δυνατές μετρικές ο υπολογισμός του είναι ο πιο εύκολος.
- Σε πολλές περιπτώσεις ο μέσος SNR αποτελεί εξαιρετική ένδειξη τια την αξιοπιστία του συστήματος.
- Σε ένα συμβατικό σύστημα επικοινωνιών ο SNR αναφέρεται στο θερμικό θόρυβο ο οποίος υπάρχει πάντα στην είσοδο του δέκτη.
- Σε ένα ασύρματο ψηφιακό σύστημα επικοινωνιών η πιο κατάλληλη μετρική είναι ο μέσος SNR όπου αναφερόμαστε στο στατιστικό μέσο πάνω στην πιθανότητα κατανομής των διαλείψεων:

$$\bar{\gamma} = \int_0^\infty \gamma f_\gamma(\gamma)\, d\gamma$$

- Χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια συνάρτηση του γ, ο μέσος SNR μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\bar{\gamma} = \left.\frac{d\mathrm{M}(s)}{ds}\right|_{s=0}$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Αν η MGF του στιγμιαίου SNR είναι άμεσα διαθέσιμη σε κλειστή μορφή, τότε ο μέσος SNR μπορεί να υπολογιστεί άμεσα με απλές μαθηματικές διαδικασίες (διαφόριση)
- Σε πολλά ασύρματα συστήματα επικοινωνιών χρησιμοποιούνται πολλαπλές κεραίες (διαφορισμός)
  - Παράδειγμα: Διαφορισμός μεγίστης απολαβής (Maximal Ratio Combining, MRC)
  - Αν χρησιμοποιήσουμε L κεραίες στο δέκτη, ο στιγμιαίος SNR στην έξοδο είναι ίσος με το άθροισμα των επιμέρους SNR.

$$\gamma = \sum_{l=1}^{L} \gamma_l$$

  - Υποθέτοντας ότι οι SNRs κάθε κλάδου είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, η PDF του γ απαιτεί πολλαπλές συνελικτικές ολοκληρώσεις για τον υπολογισμό της.
  - Η MGF του SNR είναι ίση με το γινόμενο των MGFs κάθε κλάδου οπότε μπορεί συχνά να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή
  - Αποφεύγουμε τον υπολογισμό της PDF ο οποίος δεν είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί
  - Στην περίπτωση του μέσου SNR, υποθέτοντας στατιστική ανεξαρτησία μεταξύ των κλάδων ο μέσος SNR μπορεί πολύ εύκολα να υπολογιστεί ως άθροισμα των μέσων SNR κάθε επιμέρους κλάδου. ***Σε πιο πολύπλοκες μετρικές, όπως η πιθανότητα σφάλματος η προσέγγιση βασισμένη στην MGF αποτελεί ένα πολύ ισχυρό αναλυτικό εργαλείο.***
  - Αλλο σύνθετο παράδειγμα διαφορισμού αποτελεί η επιλογή των K ισχυρότερων κλάδων από τα L διαθέσιμα (Generalized Selection Combining). Πρόβλημα διατεταγμένης στατιστικής (order statistics). Η προσέγγιση βασισμένη στην MGF είναι ιδιαίτερτα χρήσιμη σε τέτοιες περιπτώσεις

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Η πιθανότητα διακοπής επικοινωνίας ορίζεται ως η πιθανότητα ο στιγμιαίος SNR, γ, να πέσει κάτω από ένα προκαθορισμένο κατώφλι, γ_{th}.
- Μαθηματικά μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$P_{\text{out}} = \Pr\{\gamma < \gamma_{th}\} = \int_0^{\gamma_{th}} f_\gamma(\gamma)d\gamma = F_\gamma(\gamma_{th})$$

- Από την ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace $\mathcal{M}_\gamma(s) = s\mathbb{L}\{F_\gamma(\gamma)\}$ η πιθανότητα διακοπής επικοινωνίας μπορεί να υπολογιστεί με αριθμητικη αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace

$$P_{\text{out}} = \mathbb{L}^{-1}\left\{\frac{\mathcal{M}_\gamma(s)}{s}; s; t\right\}\Big|_{t=\gamma_{\text{th}}}$$

- Πχ από την εργασία των [Abate & Whitt]

[Abate & Whitt 1995], Abate, J. and Whit W. , Numerical Inversion of Laplace Transforms of Probability Distributions, ORSA Journal on Computing 1(7), 36-43

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Μέση πιθανότητα εσφαλμένων bits: Ένα από τα πιο σημαντικά μεγέθη για την αξιολόγηση της επίδοσης του συστήματος
- Μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας προσέγγιση βασισμένη στην PDF ή βασισμένη στην MGF
- Προσέγγιση βασισμένη στην PDF:
  - Υπολογισμός μεταβλητών απόφασης και καθορισμός της πιθανότητας σφάλματος
  - Για δεδομένο SNR, *γ*, αναλυτικές εκφράσεις για την πιθανότητα σφάλματος είναι γνωστές για δυαδικές και Μ-αδικές διαμορφώσεις.
  - Όταν το *γ* μεταβάλλεται η μέση πιθανότητα σφάλματος υπολογίζεται λαμβάνοντας τη μέση τιμή της υπό συνθήκη πιθανότητας σφάλματος ως προς την PDF του *γ*

$$\overline{P}_{be}(E) = \int_0^\infty P_e(E|\gamma) f_\gamma(\gamma) \mathrm{d}\gamma$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Για ασύμφωνες δυαδικές διαμορφώσεις η υπό συνθήκη πιθανότητα σφάλματος είναι της μορφής:

$$P_e(E|\gamma) = A\exp(-B\gamma)$$

- Για σύμφωνες δυαδικές διαμορφώσεις και για M-QAM

$$P_e(E|\gamma) = A\mathrm{erfc}(\sqrt{B\gamma})$$

- Για π/4-DQPSK με κωδικοποίηση Gray, M-PSK και M-DPSK

$$P_e(E|\gamma) = \int_0^{\Lambda} \exp[-B(\theta)\gamma]\mathrm{d}\theta$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

Modulation Scheme	A	B	Λ
BPSK	$1/2$	1	-
BFSK	$1/2$	$1/2$	-
QPSK and MSK	1	$1/2$	-
Square M-QAM	$2\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$	$\frac{3}{2(M-1)}$	-
NBFSK	$1/2$	$1/2$	-
BDPSK	$1/2$	1	-
$\pi/4$-DQPSK	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{2}{2-\sqrt{2}\cos(\theta)}$	π
M-PSK	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{\sin^2(\pi/M)}{\sin^2\theta}$	$\pi\left(1-\frac{1}{M}\right)$
M-DPSK	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{\sin^2(\pi/M)}{1+\cos(\pi/M)\cos\theta}$	$\pi\left(1-\frac{1}{M}\right)$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Για την αξιολόγηση της επίδοσης σύμφωνων διαμορφώσεων σε κανάλια με διαλείψεις πρέπει να υπολογιστούν ολοκληρώματα της μορφής:

$$I = \int_0^{\infty} Q(a\sqrt{\gamma}) f_{\gamma}(\gamma) d\gamma$$

- Σκοπός: Να δώσουμε μία γενικευμένη μεθοδολογία για τον υπολογισμό τέτοιων ολοκληρωμάτων για οποιαδήποτε κατανομή διαλείψεων
- Η συνάρτηση Q αποτελεί ως γνωστόν την ουρά της κατανομής Gauss.
- Η μορφή αυτή (ολοκληρώματος της κανονικής κατανομής) έχει μειονεκτήματα όταν πρόκειται να γίνει αξιολόγηση επίδοσης ασύρματων ψηφιακών συστημάτων.
- Το κλειδί: ***Η ανάπτυξη εναλλακτικών μορφών της συνάρτησης Q η οποία μπορεί να οδηγήσει σε λύσεις του* **I** *σε κλειστή μορφή***

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Η συνάρτηση Q έχει ως γνωστόν την ακόλουθη μορφή:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

- Η μορφή αυτή της συνάρτησης Q έχει δύο μειονεκτήματα:
  - Από υπολογιστικής πλευράς, η σχέση απαιτεί αποκοπή στο άπειρο άνω όριο όταν χρησιμοποιείται αριθμητική ολοκλήρωση ή άλλη αλγοριθμική τεχνική
  - Πιο σημαντική είναι η παρουσία του κάτω ορίου, όταν αυτό είναι κάποια συνάρτηση τυχαίας μεταβλητής. Σε μία τέτοια περίπτωση, όταν ζητείται η εύρεση ενός στατιστικού μέσου, όπως στο ολοκλήρωμα I, απαιτείται ο υπολογισμός διπλού γενικευμένου ολοκληρώματος
- Για αξιολόγηση επίδοσης σε κανάλι λευκού θορύβου μόνο το πρώτο μειονέκτημα υφίσταται.
- Για ασύρματα κανάλια το δεύτερο μειονέκτημα δυσχεραίνει σημαντικά τη διαδικασία αξιολόγησης επίδοσης.

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Είναι επιθυμητό να βρεθεί μία εναλλακτική μορφή για τη συνάρτηση Q η οποία θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά:
  - Το όρισμα της συνάρτησης δεν θα αποτελεί άνω ή κάτω όριο ενός ολοκληρώματος αλλά στην ολοκληρωτέα ποσότητα
  - Η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι στοιχειώδης συνάρτηση
  - Τα όρια της ολοκλήρωσης είναι πεπερασμένα
- Λέμε ότι μία τέτοια αναπαράσταση της συνάρτησης Q έχει την ***επιθυμητή μορφή***
- Ευτυχώς αποδεικνύεται ότι όντως υφίσταται μία τέτοια επιθυμητή μορφή:
- Στην εργασία του Craig αποδεικνύεται ότι η Q(x) γράφεται ως εξής:

$$Q(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sin^2\theta}\right) d\theta$$

J.W. Craig: A new simple and exact result for calculating the probability of error for two dimensional constellations, IEEE Milcom 91, Conf. Boston, pp.25.5.1, 25.5.5

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

Απόδειξη: α) Μετασχηματίζουμε το ολοκλήρωμα της Q(z) σε διπλό:

$$Q(z) = \overbrace{2\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy}^{=1} \int_z^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_z^\infty \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dy\, dx$$

Απόδειξη: α) Μετασχηματίζουμε το διπλό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες:

$$x = r\cos\phi$$

$$y = r\sin\phi$$

$$dx\,dy = r\,dr\,d\phi$$

γ) Τελικό αποτέλεσμα:

$$Q(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \int_{z/\cos\phi}^\infty r\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr\,d\phi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{z^2}{2\cos^2\phi}\right) d\phi$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Βασισμένοι στο αποτέλεσμα αυτό βλέπουμε ότι η ολοκληρωτέα ποσότητα έχει Gaussian μορφή ως προς τη μεταβλητή x
- Η μορφή αυτή παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην απλοποίηση αποτελεσμάτων που αφορούν στην αξιολόγηση επίδοσης
- Μεγαλύτερη ενόραση αποκτούμε αν συσχετίσουμε το αποτέλεσμα με το φράγμα Chernoff
- Το μέγιστο της ολοκληρωτέας ποσότητας προκύπτει για θ = π/2 το οποίο ισούται με $\exp(-x^2/2)$
- Αντικαθιστώντας το ολοκλήρωμα με τη μέγιστή του τιμή προκύπτει το γνωστό άνω φράγμα της συνάρτησης Q, ήτοι $Q(x) \leq 1/2\exp(-x^2/2)$ (φράγμα Chernoff)
- Η νέα έκφραση μας δίνει συνεπώς την ευχέρεια στους υπολογισμούς που προσφέρει το εν λόγω φράγμα χωρίς την ανάγκη να χρησιμοποιηθεί φράγμα!

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Η νέα μορφή της συνάρτησης Q μας επιτρέπει το μετασχηματισμό του ολοκληρώματος I σε απλούστερες μορφές
- Συγκεκριμένα έχουμε:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(- \frac{a^2 \gamma}{2 \sin^2 \theta} \right) d\theta f_{\gamma}(\gamma) d\gamma$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\infty} \exp\left(- \frac{a^2 \gamma}{2 \sin^2 \theta} \right) f_{\gamma}(\gamma) d\gamma \right] d\theta$$

- Το εσωτερικό ολοκλήρωμα αναγνωρίζεται ως η MGF του γ
- Το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \mathrm{M}_{\gamma} \left(\frac{\alpha \gamma^2}{2 \sin^2 \theta} \right) d\theta$$

Ψηφιακές επικοινωνίες σε κανάλια με διαλείψεις

- Παράδειγμα 1): Διαλείψεις Rayleigh

$$I \triangleq I_r(a, \overline{\gamma}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(1 + \frac{a^2\overline{\gamma}}{2\sin^2\theta}\right)^{-1} d\theta = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{a^2\overline{\gamma}/2}{1 + a^2\overline{\gamma}/2}}\right)$$

- Παράδειγμα 2): Διαλείψεις Rice

$$I \triangleq I_n(a, n, \overline{\gamma})$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{(1+n^2)\sin^2\theta}{(1+n^2)\sin^2\theta + a^2\overline{\gamma}/2} \exp\left[-\frac{n^2 a^2\overline{\gamma}/2}{(1+n^2)\sin^2\theta + a^2\overline{\gamma}/2}\right] d\theta,$$