

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι

Διάλεξη 09

Α. Δροσόπουλος

14-11-2025

Outline

Ασκήσεις

Κανόνες Kirchhoff - Μέθοδος βρόχων (οφθαλμών)

Κυκλώματα

Topic

Ασκήσεις

Κανόνες Kirchhoff - Μέθοδος βρόχων (οφθαλμών)

Κυκλώματα

Παλιές εξεταστικές

- Σεπτέμβριος 2025, a και b
- Ηλεκτροτεχνία Ι, Φεβρουάριος 2018

Topic

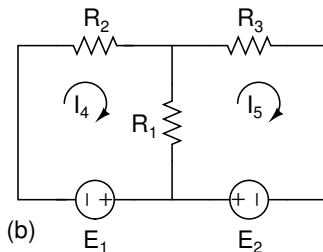
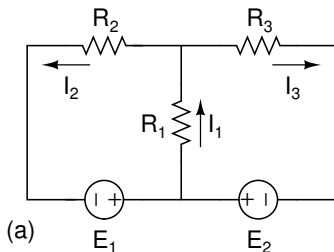
Ασκήσεις

Κανόνες Kirchhoff - Μέθοδος βρόχων (οφθαλμών)

Κυκλώματα

Μέθοδος βρόχων (οφθαλμών)

Να βρεθούν τα κλαδικά ρεύματα I_1 , I_2 , I_3 στο κύκλωμα (a) όταν $E_1 = 9\text{ V}$, $E_2 = 18\text{ V}$, $R_1 = 500\ \Omega$, $R_2 = 300\ \Omega$, $R_3 = 1.2\text{ k}\Omega$ με τη μέθοδο βρόχων.



Μέθοδος βρόχων (οφθαλμών)

$$\begin{aligned} -R_2 I_2 - R_1 I_1 + E_1 &= 0 \\ R_3 I_3 + R_1 I_1 - E_2 &= 0 \\ I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση των 3 κλαδικών ρευμάτων με τα 2 ρεύματα βρόχων (τι είναι ρεύματα βρόγχου;) έχουμε $I_2 = -I_4$, $I_1 = I_5 - I_4$, $I_3 = I_5$, οπότε

$$\left. \begin{aligned} -R_2 (-I_4) - R_1 (I_5 - I_4) &= -E_1 \\ R_3 I_5 + R_1 (I_5 - I_4) &= E_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (R_2 + R_1) I_4 - R_1 I_5 &= -E_1 \\ -R_1 I_4 + (R_1 + R_3) I_5 &= E_2 \end{aligned}$$

Μέθοδος βρόχων (οφθαλμών)

- Βασίζεται στον κανόνα τάσεων του Kirchhoff. Στην απλή εφαρμογή δεν θέλουμε πηγές ρεύματος στους βρόχους μας. Επομένως μετατρέπουμε τυχόν πηγές ρεύματος σε πηγές τάσης.
- Προσδιορίζουμε τους ελάχιστους βρόχους/οφθαλμούς, δηλ. βρόχους που δεν περιέχουν άλλους βρόχους.
- Σε κάθε οφθαλμό ορίζουμε ένα ρεύμα βρόχου με δεξιόστροφη φορά.
- Γράφουμε τις εξισώσεις της μεθόδου για κάθε οφθαλμό που είναι βασικά ο κανόνας τάσεων του Kirchhoff για τα ρεύματα βρόχου. Το αλγεβρικό άθροισμα των πτώσεων τάσης στις αντιστάσεις κάθε οφθαλμού ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των πηγών τάσης του οφθαλμού.
Μεταφέρουμε τις πηγές στα δεξιά και έχουμε θετικό πρόσημο για τις πηγές στις οποίες το ρεύμα εισέρχεται από τον αρνητικό ακροδέκτη και αρνητικό όταν το ρεύμα εισέρχεται από τον θετικό ακροδέκτη.

Μέθοδος βρόχων (οφθαλμών)

Γενικά για n οφθαλμούς έχουμε:

$$\begin{aligned} I_1 R_{11} - I_2 R_{12} - I_3 R_{13} - \dots - I_n R_{1n} &= \sum E_1 \\ -I_1 R_{21} + I_2 R_{22} - I_3 R_{23} - \dots - I_n R_{2n} &= \sum E_2 \\ -I_1 R_{31} - I_2 R_{32} + I_3 R_{33} - \dots - I_n R_{3n} &= \sum E_3 \\ &\vdots \\ -I_1 R_{n1} - I_2 R_{n2} - I_3 R_{n3} - \dots + I_n R_{nn} &= \sum E_n \end{aligned}$$

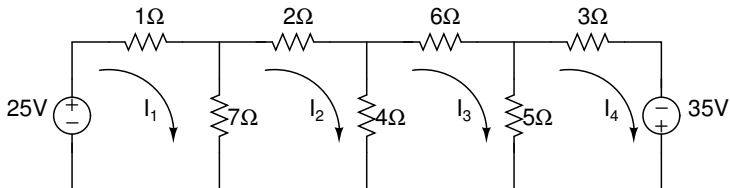
- Ο συντελεστής του ρεύματος βρόχου R_{ii} για την i εξίσωση βρόχου είναι το άθροισμα των αντιστάσεων που συναντά το i ρεύμα βρόχου και έχει πρόσημο θετικό. Οι άλλοι συντελεστές R_{ij} για την i εξίσωση βρόχου δείχνουν τις αντιστάσεις που μοιράζεται ο βρόχος i με τον βρόχο j και είναι αρνητικοί. Στην μορφή πινάκων φαίνεται ότι όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι θετικά και όλα τα άλλα, αρνητικά και συμμετρικά.

Μέθοδος βρόχων (οφθαλμών)

- Τέλος, λύνουμε το ανωτέρω σύστημα με μία από τις γνωστές μεθόδους, βρίσκουμε όλα τα ρεύματα βρόχου και μπορούμε κατόπιν να υπολογίσουμε και τα κλαδικά ρεύματα.
- Το κέρδος είναι λιγότερες εξισώσεις και ένας αυτοματοποιημένος τρόπος επίλυσης κυκλωμάτων αυτής της κατηγορίας.

Παράδειγμα 3.12

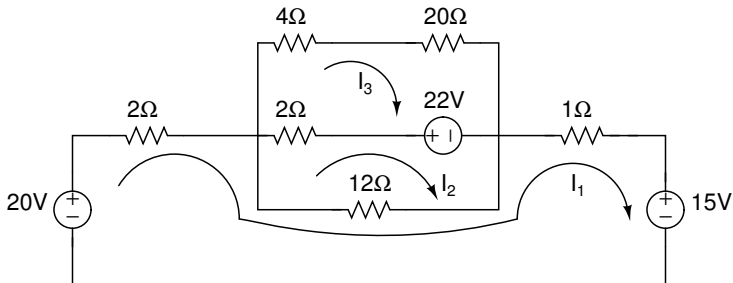
Να βρεθούν τα ρεύματα οφθαλμών στο παρακάτω κύκλωμα.



$$\begin{aligned} 8I_1 - 7I_2 - 0I_3 - 0I_4 &= 25 \\ -7I_1 + 13I_2 - 4I_3 - 0I_4 &= 0 \\ 0I_1 - 4I_2 + 15I_3 - 5I_4 &= 0 \\ 0I_1 - 0I_2 - 5I_3 + 8I_4 &= 35 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.13

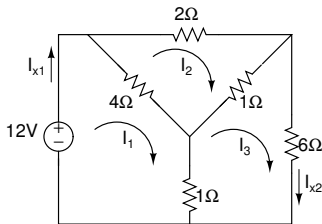
Να βρεθούν οι τάσεις στις αντιστάσεις των $20\ \Omega$, $12\ \Omega$ και $1\ \Omega$ με τη μέθοδο των οφθαλμών στο παρακάτω κύκλωμα.



$$\begin{aligned} 15I_1 - 12I_2 - 0I_3 &= 5 \\ -12I_1 + 14I_2 - 2I_3 &= -22 \\ 0I_1 - 2I_2 + 26I_3 &= 22 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.14

Να υπολογιστούν τα κλαδικά ρεύματα I_{x1} και I_{x2} καθώς και η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση των $4\ \Omega$ με τη μέθοδο των οφθαλμών στο παρακάτω κύκλωμα.



$$\begin{aligned} 5I_1 - 4I_2 - I_3 &= 12 \\ -4I_1 + 7I_2 - I_3 &= 0 \\ -I_1 - I_2 + 8I_3 &= 0 \end{aligned}$$

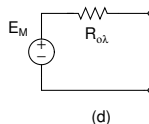
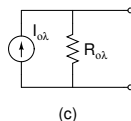
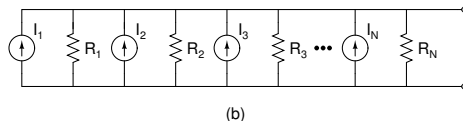
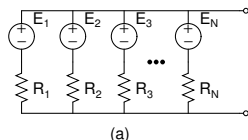
Topic

Ασκήσεις

Κανόνες Kirchhoff - Μέθοδος βρόχων (οφθαλμών)

Κυκλώματα

Θεώρημα Millman

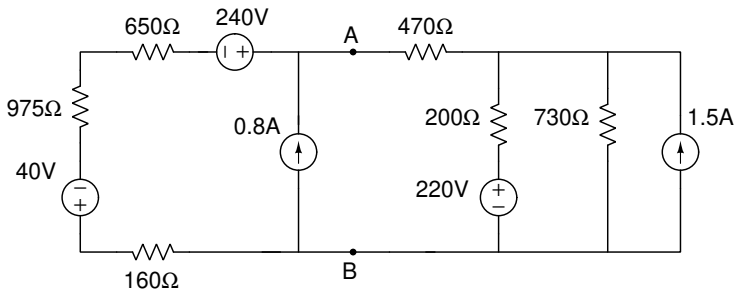


$$\frac{1}{R_{oλ}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

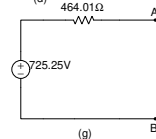
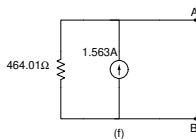
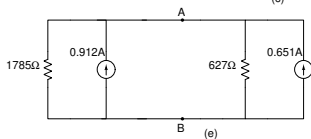
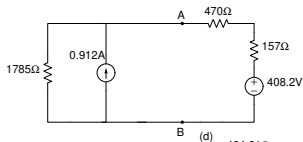
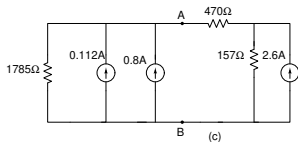
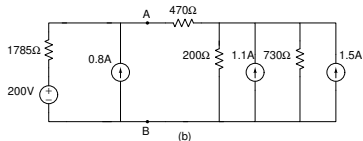
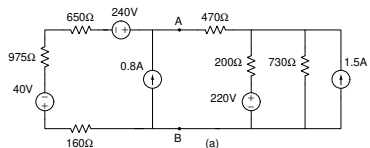
$$E_M = (I_1 + I_2 + \dots + I_N) R_{oλ} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \dots + \frac{E_N}{R_N}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{E_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}}$$

Παράδειγμα

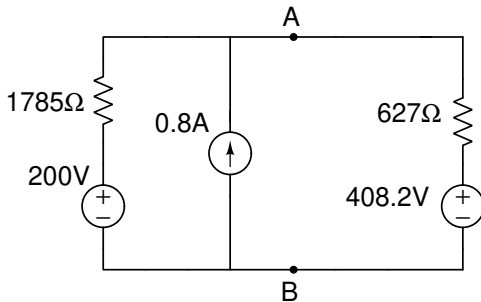
Να βρεθεί η τάση V_{AB} στο παρακάτω κύκλωμα.



Παράδειγμα 2



Παράδειγμα 3



Με κομβική ανάλυση:

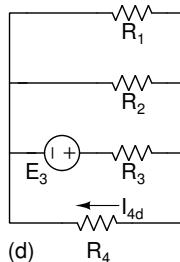
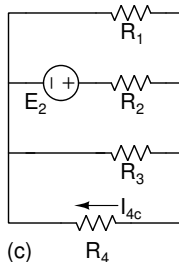
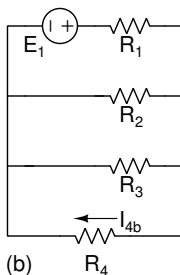
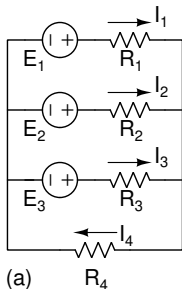
$$\frac{V_{AB} - 200}{1785} - 0.8 + \frac{V_{AB} - 408.2}{627} = 0 \Rightarrow V_{AB} = 725.3 \text{ V}$$

Θεώρημα Επαλληλίας – Αρχή Υπέρθεσης

- Ένα άλλο σημαντικό και χρήσιμο θεώρημα είναι το θεώρημα επαλληλίας ή αλλιώς η αρχή της υπερθέσεως. Σε ένα γραμμικό κύκλωμα που έχει περισσότερες από μία πηγές μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκρισή του (τάση και ρεύμα σε κάθε στοιχείο) για κάθε πηγή ξεχωριστά, «σβήνοντας» τις υπόλοιπες. Η συνολική απόκριση είναι το άθροισμα των επί μέρους αποκρίσεων. Με το θεώρημα αυτό μπορούμε πολλές φορές να απλοποιήσουμε σύνθετα κυκλώματα σε πιο απλά.
- Πηγή τάσης την «σβήνουμε» βραχυκυκλώνοντάς την.
- Πηγή ρεύματος την «σβήνουμε» ανοίγοντάς την.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το ρεύμα I_4 στο κύκλωμα (a) με τη μέθοδο υπέρθεσης όταν $E_1 = 18 \text{ V}$, $E_2 = 9 \text{ V}$, $E_3 = 20 \text{ V}$, $R_1 = 1.2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 800 \text{ }\Omega$, $R_3 = 1.4 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 600 \text{ }\Omega$.



Παράδειγμα 2

Με τη μέθοδο επαλληλίας έχουμε τα κυκλώματα (b),(c),(d). Ένας απλός τρόπος είναι να κάνουμε την κάθε πηγή τάσης πηγή ρεύματος, παράλληλες τις R_1 , R_2 , R_3 και έναν διαιρέτη ρεύματος για το κάθε ρεύμα I_{4b} , I_{4c} , I_{4d} .

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R = 357.45 \, \Omega$$

$$I_{4b} = \frac{R}{R + R_4} \frac{E_1}{R_1} = 5.6 \, \text{mA}$$

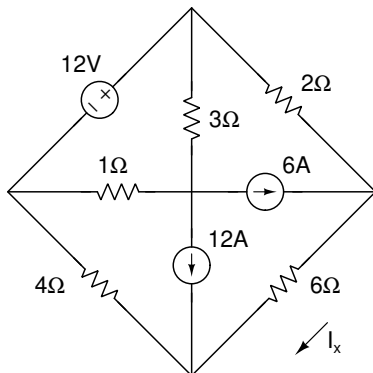
$$I_{4c} = \frac{R}{R + R_4} \frac{E_2}{R_2} = 4.2 \, \text{mA} \quad I_{4d} = \frac{R}{R + R_4} \frac{E_3}{R_3} = 5.33 \, \text{mA}$$

$$I_4 = I_{4b} + I_{4c} + I_{4d} = 15.1 \, \text{mA}$$

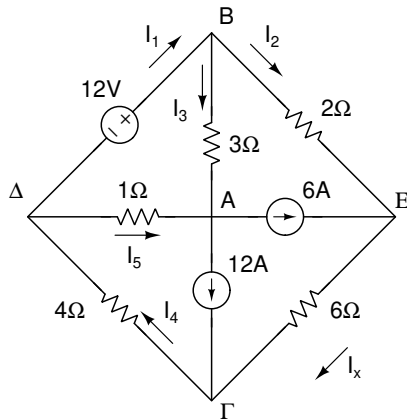
Στο βιβλίο βλέπετε και εναλλακτικούς τρόπους και μπορείτε και εσείς να σκεφτείτε και άλλους.

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ρεύμα και η καταναλισκόμενη ισχύς στην αντίσταση $6\ \Omega$ στο κύκλωμα (a).

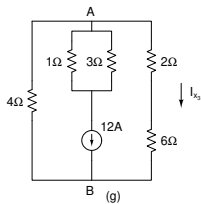
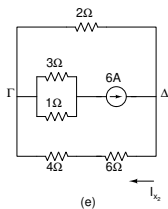
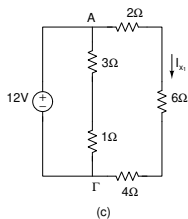
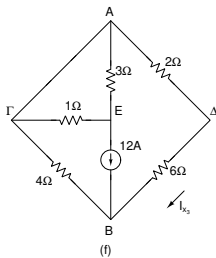
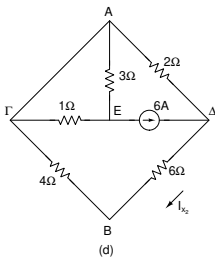
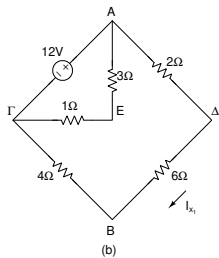


(a)



(b)

Παράδειγμα 2



Παράδειγμα 3

Όταν μόνο η πηγή τάσης είναι ενεργός, έχουμε το κύκλωμα (b) και το ισοδύναμό του (c). Η τάση V_{AG} στα άκρα του κλάδου που περιέχει την αντίσταση $6\ \Omega$ είναι 12 V . Οπότε,

$$I_{x_1} = \frac{12}{2 + 6 + 4} = 1\text{ A}$$

Όταν μόνο η πηγή ρεύματος 6 A είναι ενεργός, έχουμε το κύκλωμα (d) και το ισοδύναμό του (e). Με διαιρέτη ρεύματος

$$I_{x_2} = \frac{2}{2 + 10} 6 = 1\text{ A}$$

Όταν μόνο η πηγή ρεύματος 12 A είναι ενεργός, έχουμε το κύκλωμα (f) και το ισοδύναμό του (g). Και πάλι με διαιρέτη ρεύματος

$$I_{x_3} = -\frac{4}{4 + 8} 12 = -4\text{ A}$$

Τελικά, $I_x = I_{x_1} + I_{x_2} + I_{x_3} = 1 + 1 - 4 = -2\text{ A}$ και $P = I_x^2 \cdot 6 = 24\text{ W}$.