

# Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι

## Διάλεξη 20

Α. Δροσόπουλος

08-01-2025

1 Συντονισμός

2 Κλίμακα dB

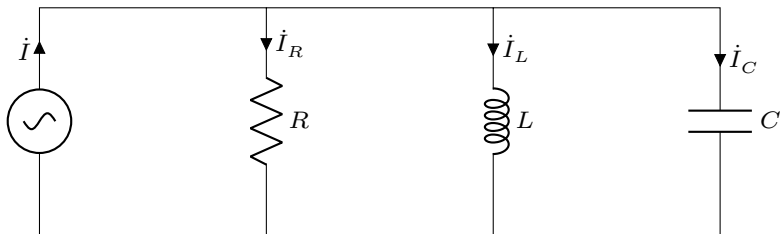
3 Ενδιαφέροντα video

1 Συντονισμός

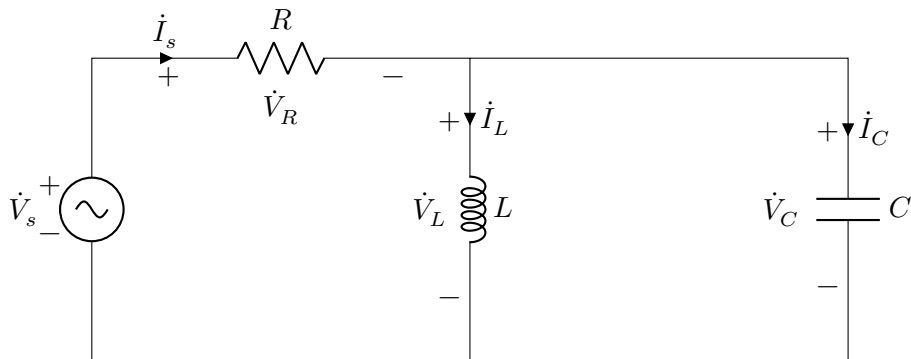
2 Κλίμακα dB

3 Ενδιαφέροντα video

# Συντονισμός παράλληλος



Σχήμα: Κύκλωμα RLC παράλληλο



**Σχήμα:** Κύκλωμα RLC παράλληλο, πρακτική υλοποίηση

Σε RLC κύκλωμα παράλληλο μας βολεύει να χρησιμοποιήσουμε την ολική σύνθετη αγωγιμότητα που βλέπει η πηγή

$$Y(\omega) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

όπου  $G = 1/R$ . Αυτή είναι συνάρτηση συχνότητας και το φανταστικό μέρος μηδενίζεται για συχνότητα

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{ή} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

τη συχνότητα συντονισμού, ίδια σχέση όπως με τον εν σειρά συντονισμό. Το μέτρο της ολικής αγωγιμότητας γίνεται τότε ελάχιστο και η παράλληλη, κοινή τάση στους κλάδους γίνεται τότε μέγιστη.

Στον παράλληλο συντονισμό έχουμε μέγιστη τάση στη συχνότητα συντονισμού και γιαυτό τον ονομάζουμε και *συντονισμό τάσης*.

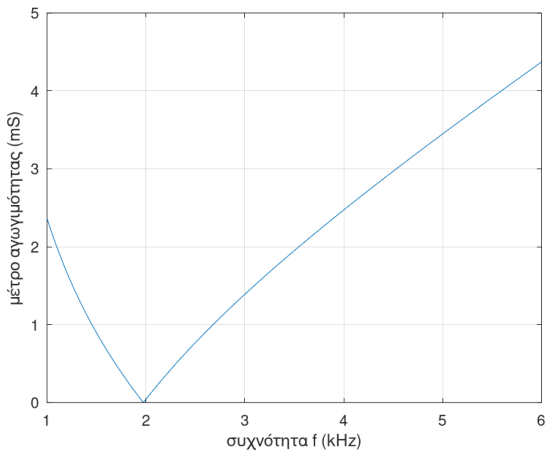
## ΣΠ (3)

Αν στο προηγούμενο κύκλωμα (σελ 17) δώσουμε τιμές στοιχείων  $\dot{I} = 1 \text{ mA}$ ,  $R = 900 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 50 \text{ mH}$  και  $C = 130 \text{ nF}$  η συχνότητα συντονισμού είναι  $f_0 = 1974.1 \text{ Hz}$  και μπορούμε να σχεδιάσουμε τα μέτρα της ολικής αγωγιμότητας που βλέπει η πηγή καθώς και της τάσης στον κοινό κόμβο.

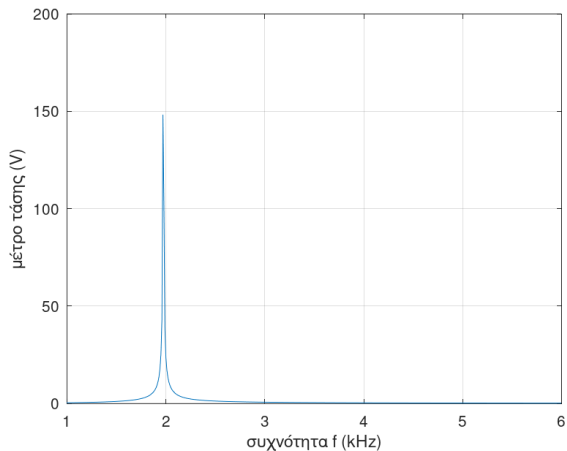
```
I=1e-3; R=900e3; L=50e-3; C=130e-9; w0 = 1/sqrt(L*C);  
f0 = w0/(2*pi)  
f = 1e3:10:6e3; w = 2*pi*f;  
Y = 1/R + j*C.*w - j./(w.*L);  
plot(f*1e-3,abs(Y)*1e3); grid()  
xlabel("συχνότητα f (kHz)"); ylabel("μέτρο αγωγιμότητας (mS)");  
  
V = I./abs(Y);  
figure()  
plot(f*1e-3,V); grid()  
xlabel("συχνότητα f (kHz)"); ylabel("μέτρο τάσης (V)");
```

Μέγιστη τάση  $\dot{V}_{\max} = \dot{I}R = 900 \text{ V}$  και μέγιστη ισχύς  $P_{\max} = |\dot{V}_{\max}|^2/R = 0.9 \text{ W}$ .

## Μέτρο ολικής αγωγιμότητας



## Μέτρο τάσης κόμβου



# Ωφέλιμη ζώνη και συντελεστής ποιότητας $Q$

Στην πράξη μας ενδιαφέρει και εδώ μια περιοχή συχνοτήτων γύρω από την συχνότητα συντονισμού,  $f_1 < f_0 < f_2$ , η ωφέλιμη ζώνη, όπου μπορούμε να έχουμε πραγματική ισχύ  $P \geq P_{\max}/2$ . Μπορούμε να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία όπως και στον εν σειρά συντονισμό για να βρούμε την ωφέλιμη ζώνη και τον αντίστοιχο συντελεστή ποιότητας ή, να χρησιμοποιήσουμε την αρχή δυαδικότητας, όπου κάνουμε τις αντικαταστάσεις  $R \rightarrow G$ ,  $C \rightarrow L$ ,  $L \rightarrow C$ . Επομένως

$$\omega_1 \omega_2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad \text{ή} \quad f_1 f_2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} = f_0^2$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{G}{C} \quad \text{ή} \quad \Delta f = f_2 - f_1 = \frac{G}{2\pi C}$$

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \omega_0 RC = \frac{1}{\omega_0 GL} = \frac{R}{\omega_0 L} = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Το εύρος της ωφέλιμης ζώνης συχνοτήτων για την μισή ισχύ  $\Delta\omega$  ή  $\Delta f$  μπορεί να γραφεί τώρα ως

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad \text{ή} \quad \Delta f = \frac{f_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

Παρατηρούμε επίσης στον συντονισμό ότι για τα μέτρα των ρευμάτων  $I$  (πηγής),  $I_L$  (πηνίου) και  $I_C$  (πυκνωτή) έχουμε

$$\frac{I_L}{I} = \frac{V}{\omega_0 L V G} = Q \quad \text{και} \quad \frac{I_C}{I} = \frac{V \omega_0 C}{V G} = Q$$

που σημαίνει ότι

$$I_L = QI \quad \text{και} \quad I_C = QI$$

δηλ. παρατηρούμε ότι το ρεύμα στον πυκνωτή και το πηνίο είναι πολ/σιο του ρεύματος της πηγής κατά  $Q$ . Το φαινόμενο αυτό το ονομάζουμε *κέρδος έντασης*.

Με τις τιμές στοιχείων που είχαν δοθεί προηγουμένως, έχουμε:

$$f_0 = 1974.1 \text{ Hz}$$

$$f_1 = 1973.4 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 1974.8 \text{ Hz}$$

$$\Delta f = 1.36 \text{ Hz}$$

$$Q = 1451.2$$

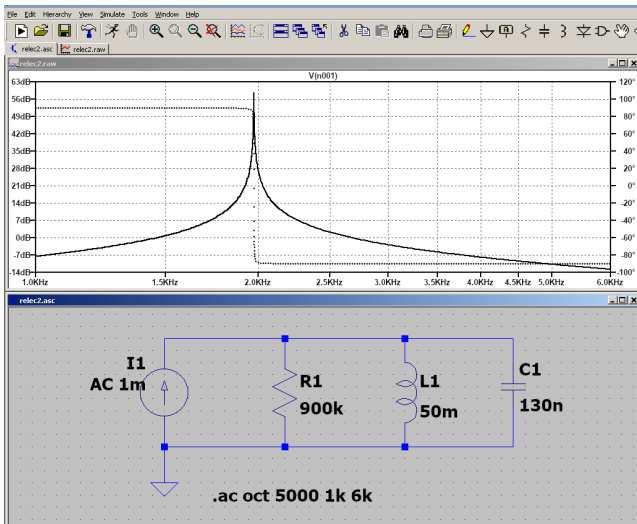
$$V_{\max} = 900 \text{ V}$$

$$V_1 = V_2 = V_{\max}/\sqrt{2} = 636.4 \text{ V}$$

$$20 \log_{10} V_{\max} = 59.1 \text{ dB}$$

$$20 \log_{10} V_1 = 56.1 \text{ dB}$$

$$20 \log_{10} V_{\max} - 20 \log_{10} V_1 = 3.01 \text{ dB}$$



# Πραγματικό

Τα πραγματικό πηνίο έχει εκτός από την αυτεπαγωγή και μια μικρή ωμική αντίσταση  $R_L$  σε σειρά. Ο πραγματικός πυκνωτής εκτός από την χωρητικότητα έχει και μια μεγάλη ωμική αντίσταση  $R_C$  παράλληλα. Εφόσον  $R_C \gg R$  μπορούμε να πούμε ότι  $R_C \parallel R \approx R$ .

Η μόνη διαφορά από το παράλληλο RLC είναι η εν σειρά  $R_L$ . Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι ίδια. Η σύνθετη αγωγιμότητα είναι

$$\begin{aligned} Y &= G + j\omega C + \frac{1}{R_L + j\omega L} = G + j\omega C + \frac{R_L - j\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} = \\ &= G + \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2} + j \left[ \omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} \right] \end{aligned}$$

Στον συντονισμό

$$\begin{aligned} \omega_0 C &= \frac{\omega_0 L}{R_L^2 + (\omega_0 L)^2} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \left( \frac{R_L}{L} \right)^2 = \frac{1}{LC} \left[ 1 - \frac{R_L^2 C}{L} \right] \Rightarrow \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R_L^2 C}{L}} \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι συντονισμός επιτυγχάνεται σε χαμηλότερη συχνότητα από ότι στην ιδανική περίπτωση.

## Πραγματικό (2)

Η σύνθετη αγωγιμότητα είναι τότε

$$Y_0 = G + \frac{R_L C}{L} = G'$$

Επίσης, εάν  $(\omega L)^2 \gg R_L^2$ , για την ωφέλιμη περιοχή συχνοτήτων, έχουμε

$$\omega_0 C = \frac{\omega_0 L}{R_L^2 + (\omega_0 L)^2} \Rightarrow \omega_0 C = \frac{\omega_0 L}{(\omega_0 L)^2} \Rightarrow \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \Rightarrow$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Y = G' + j \left[ \omega C - \frac{1}{\omega L} \right]$$

οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε (με αρκετά καλή ακρίβεια) τις σχέσεις που ισχύουν για το ιδανικό παράλληλο κύκλωμα. Για τον συντελεστή ποιότητας π.χ. έχουμε

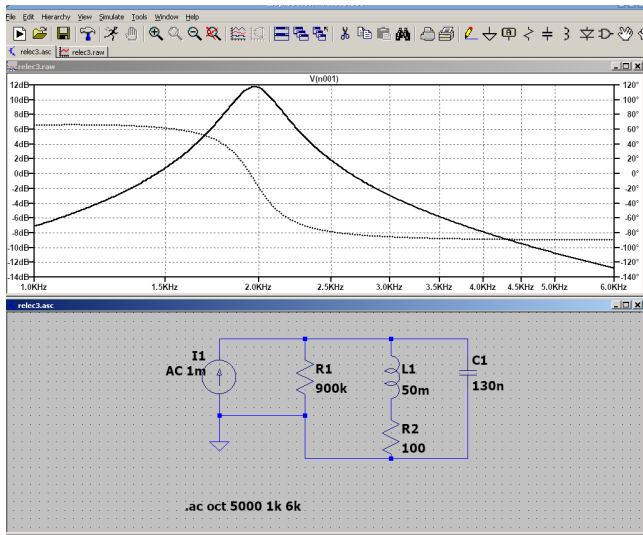
$$Q = \frac{\omega_0 C}{G'} = \frac{\sqrt{\frac{C}{L}}}{G + \frac{R_L C}{L}}$$

Για το ιδανικό RLC με  $R_L = 100 \, \Omega$

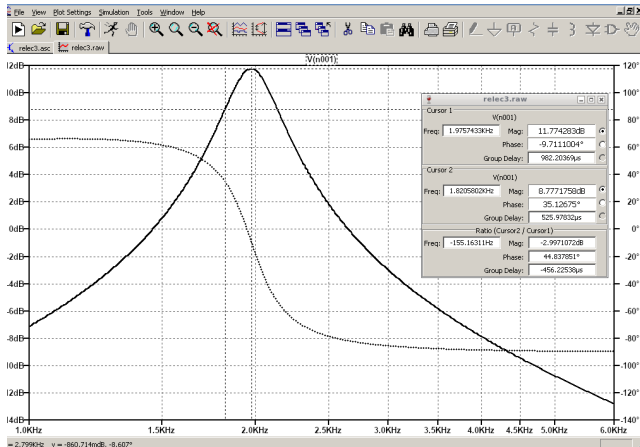
$$f_0 = 1948.2 \, \text{Hz}$$

$$Q = 6.175$$

# και SPICE για πραγματικό



# και SPICE για πραγματικό (2)



$$f_0 = 1975.7 \text{ Hz}$$

$$f_1 = 1820.6 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 2139.2 \text{ Hz}$$

$$\Delta f = 318.6 \text{ Hz}$$

$$Q = 6.2$$

1 Συντονισμός

2 Κλίμακα dB

3 Ενδιαφέροντα video

# Κλίμακα dB

Σχετική μονάδα μέτρησης σε λογαριθμική κλίμακα.

Για ισχύ

$$X_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{X_W}{X_0}$$

όπου  $X_0$  ισχύς αναφοράς,  $X_0 = 1 \text{ W}$ , ή

$$X_{\text{dBm}} = 10 \log_{10} \frac{X_W}{X_0}$$

όπου  $X_0$  ισχύς αναφοράς,  $X_0 = 1 \text{ mW}$ .

Για τάση (ότι ισχύει για τάση ισχύει και για ρεύμα)

$$X_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{X_V}{X_0}$$

όπου  $X_0$  τάση αναφοράς,  $X_0 = 1 \text{ V}$ , ή

$$X_{\text{dBm}} = 20 \log_{10} \frac{X_V}{X_0}$$

όπου  $X_0$  τάση αναφοράς,  $X_0 = 1 \text{ mV}$ .

Η μονάδα αυτή είναι πολύ χρήσιμη για συνοπτική παράσταση μεγεθών που καταλαμβάνουν μεγάλο εύρος τιμών.

## Κλίμακα dB (2)

Στον συντονισμό αν  $X_0 = X_{\max}$  η μέγιστη ισχύς, η μισή ισχύς έχει διαφορά

$$10 \log_{10} \frac{X_{1/2}}{X_{\max}} = 10 \log_{10} \frac{1}{2} = -3.01 \approx -3 \text{ dB}$$

Για κέρδος τάσης ή ρεύματος όπου θέλουμε τη διαφορά μεταξύ της μέγιστης τάσης ή ρεύματος και της τιμής αυτής  $/\sqrt{2}$ , έχουμε

$$20 \log_{10} \frac{X_{1/\sqrt{2}}}{X_{\max}} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}} = -3.01 \approx -3 \text{ dB}$$

Που σημαίνει σε διάγραμμα απόκρισης συντονισμού σε dB κλίμακα κοιτάτε ποιες συχνότητες αντιστοιχούν σε 3 dB κάτω από το μέγιστο για να έχετε την ωφέλιμη ζώνη.

1 Συντονισμός

2 Κλίμακα dB

3 **Ενδιαφέροντα video**

Should a Person Touch 200,000 Volts?

Is it the volts or amps that kill?