

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι

Διάλεξη 18

Α. Δροσόπουλος

18-12-2024

- 1 Ασκήσεις
- 2 Συντονισμός

1 Ασκήσεις

2 Συντονισμός

Άσκηση

Να βρείτε τις εμπεδήσεις που έχουν τα παρακάτω στοιχεία:

- Πηνίο 2 H στα 100 Hz.
 - Πυκνωτής 25 μF στα 50 Hz.
 - Πυκνωτής 25 μF στα 50 rad/s.
 - Ωμική αντίσταση 75 Ω στα 377 rad/s.
-

$$Z_L = j\omega L = j2\pi fL = j628.32 \cdot 2 = j1256.6 \Omega$$

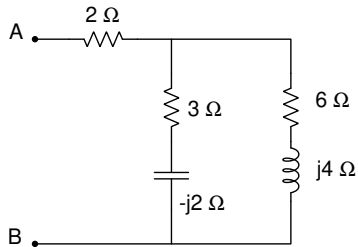
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{2\pi fC} = -j127.32 \Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j800 \Omega$$

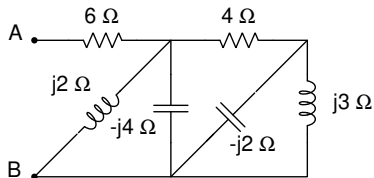
$$R = 75 \Omega$$

Άσκηση

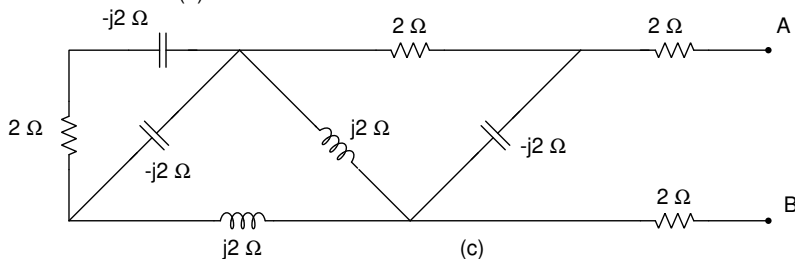
Να βρείτε την ολική εμπέδηση που φαίνεται από τα A, B στα παρακάτω κυκλώματα.



(a)



(b)



(c)

Άσκηση (συνέχεια 1)

- $Z_{AB} = [(6 + j4) \parallel (3 - j2)] + 2 = 4.792 \angle -7.334^\circ \Omega$
- $Z_{AB} = \left[\left\{ \left([(j3) \parallel (-j2)] + 4 \right) \parallel (-j4) \right\} \parallel (j2) \right] + 6 = 10.77 \angle 31.33^\circ \Omega$
- $Z_{AB} = \left\{ \left[\left\{ \left([(2 - j2) \parallel (-j2)] + (j2) \right) \parallel (j2) \right\} + 2 \right] \parallel (-j2) \right\} + 2 + 2 = 5.423 \angle -12.53^\circ \Omega$

1 Ασκήσεις

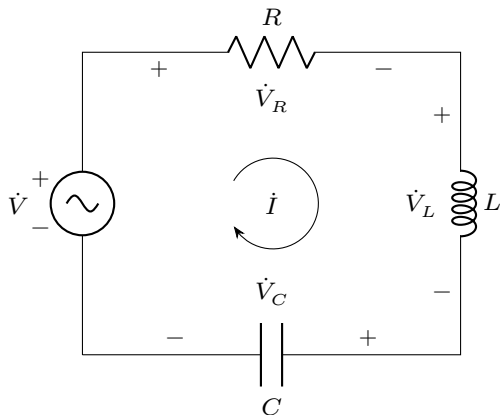
2 Συντονισμός

Ο βασικός στόχος που κατασκευάζουμε κυκλώματα είναι να πάρουμε ενέργεια από κάποια πηγή(ές), να την διαμορφώσουμε κατάλληλα και να οδηγήσουμε το αποτέλεσμα σε κάποια έξοδο, συνήθως κάποιο φορτίο. Οι όποιες αντιστάσεις, ανάλογα με τη συχνότητα, έχουν τελική συμπεριφορά χωρητική (υπερισχύουν οι πυκνωτές) ή επαγωγική (υπερισχύουν τα πηνία).

Σε κάποια συχνότητα, η χωρητική και επαγωγική συμπεριφορά εξουδετερώνει η μια την άλλη και έχουμε μέγιστη μεταφορά ενέργειας και ισχύος.

Έχουμε τότε κατάσταση συντονισμού.

Συντονισμός σειράς



Σχήμα: Κύκλωμα RLC σειράς

Σε RLC κύκλωμα σειράς η ολική αντίσταση που βλέπει η πηγή

$$Z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

είναι συνάρτηση συχνότητας και το φανταστικό μέρος μηδενίζεται για συχνότητα

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{ή} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

τη συχνότητα συντονισμού. Το μέτρο της ολικής αντίστασης γίνεται τότε ελάχιστο και το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα μέγιστο. Στο συντονισμό σειράς έχουμε μέγιστο ρεύμα στη συχνότητα συντονισμού και γιαυτό τον ονομάζουμε και **συντονισμό έντασης**.

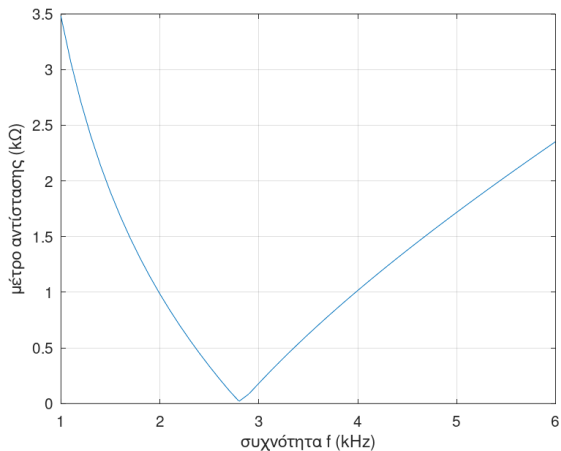
ΣΣ (3)

Αν στο προηγούμενο κύκλωμα δώσουμε τιμές στοιχείων $\dot{V} = 1 \text{ V}$, $R = 15 \Omega$, $L = 80 \text{ mH}$ και $C = 40 \text{ nF}$ η συχνότητα συντονισμού είναι $f_0 = 2813.5 \text{ Hz}$ και μπορούμε να σχεδιάσουμε τα μέτρα της ολικής αντίστασης που βλέπει η πηγή καθώς και του ρεύματος βρόχου.

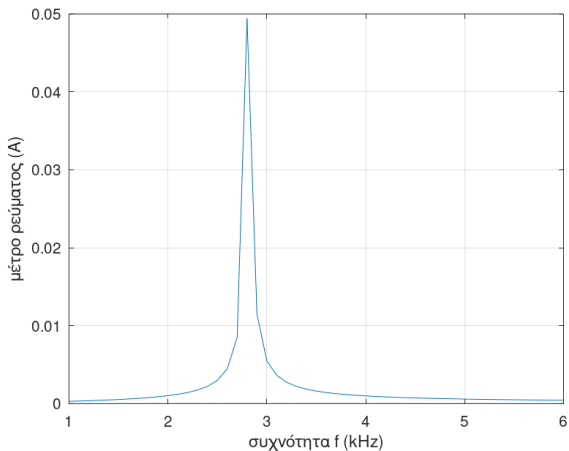
```
V=1; R=15; L=80e-3; C=40e-9; w0 = 1/sqrt(L*C);  
f0 = w0/(2*pi)  
f = 1e3:100:6e3; w = 2*pi*f;  
Z = R + j*L.*w - j./(w.*C);  
plot(f*1e-3,abs(Z)*1e-3); grid()  
xlabel("συχνότητα f (kHz)"); ylabel("μέτρο αντίστασης (kΩ)");  
  
I = V./abs(Z);  
figure()  
plot(f*1e-3,I); grid()  
xlabel("συχνότητα f (kHz)"); ylabel("μέτρο ρεύματος (A)");
```

Μέγιστο ρεύμα $\dot{I}_{\max} = \dot{V}/R = 66.7 \text{ mA}$ και μέγιστη ισχύς
 $P_{\max} = |\dot{I}_{\max}|^2 R = 66.7 \text{ mW}$.

Μέτρο ολικής αντίστασης



Μέτρο ρεύματος βρόχου



Ωφέλιμη ζώνη

Στην πράξη μας ενδιαφέρει μια περιοχή συχνοτήτων γύρω από την συχνότητα συντονισμού, $f_1 < f_0 < f_2$, η ωφέλιμη ζώνη, όπου μπορούμε να έχουμε πραγματική ισχύ $P \geq P_{\max}/2$. Έχουμε $P_{\max} = |\dot{I}|_{\max}^2 R$ οπότε η σχέση γίνεται

$$P \geq P_{\max}/2 \Rightarrow |\dot{I}|^2 R \geq \frac{|\dot{I}_{\max}|^2 R}{2} \Rightarrow |\dot{I}| \geq \frac{|\dot{I}_{\max}|}{\sqrt{2}}$$

Θέτοντας για ευκολία $I = |\dot{I}|$, για τις συχνότητες ω_1, ω_2 όπου ισχύει η ισότητα, έχουμε:

$$I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{|\dot{V}|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{|\dot{V}|}{R\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = R^2 \Rightarrow \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 - R^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} + R\right) \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} - R\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(\omega^2 LC - 1 + \omega RC)(\omega^2 LC - 1 - \omega RC)}{\omega^2 C^2} = 0$$

Ωφέλιμη ζώνη (2)

οπότε

$$\omega^2 LC + \omega RC - 1 = 0 \Rightarrow \omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega^2 LC - \omega RC - 1 = 0 \Rightarrow \omega_2 = \frac{RC + \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

όπου κρατήσαμε μόνο τις θετικές συχνότητες που έχουν φυσική σημασία και η διάταξη είναι $\omega_1 < \omega_2$.

Αν πάρουμε το γινόμενο των ω_1, ω_2 βρίσκουμε ότι

$$\omega_1 \omega_2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad \text{ή} \quad f_1 f_2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} = f_0^2$$

Αν πάρουμε τη διαφορά τους

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \quad \text{ή} \quad \Delta f = f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L}$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει το εύρος της ωφέλιμης ζώνης συχνοτήτων για τον εν σειρά συντονισμό.

Ωφέλιμη ζώνη (3)

Μπορούμε να εξετάσουμε και τη φάση της $Z(\omega)$ στα όρια της ζώνης. Έχουμε

$$\phi_Z(\omega_1) = \tan^{-1} \frac{\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}}{R} = \tan^{-1} \frac{-R}{R} = -45^\circ$$

$$\phi_Z(\omega_2) = \tan^{-1} \frac{\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}}{R} = \tan^{-1} \frac{R}{R} = 45^\circ$$

και φυσικά

$$\phi_Z(\omega_0) = \tan^{-1} \frac{0}{R} = 0^\circ$$

Η φάση δηλ. της σύνθετης αντίστασης «σαρώνει» από -90° έως 90° (γιατί όχι από -180° έως 180° ;) με -45° και 45° για τα άκρα της ωφέλιμης ζώνης και 0° στον συντονισμό.

Από τη σχέση $\dot{I} = \dot{V}/Z \Rightarrow \phi_i = \phi_v - \phi_Z$ βλέπουμε ότι η φάση του ρεύματος (εκτός από την προσθήκη της σταθερής φάσης ϕ_v) «σαρώνει» από 90° έως -90° με 45° και -45° για τα άκρα της ωφέλιμης ζώνης και 0° στον συντονισμό.

Συντελεστής ποιότητας Q

Ένα άλλο σημαντικό μέγεθος στα κυκλώματα συντονισμού, είναι ο *συντελεστής ποιότητας* του κυκλώματος που ορίζεται σαν

$$Q = \frac{\text{άεργος ισχύς σε μια περίοδο}}{\text{μέση ισχύς}} = \frac{I^2 X_L}{I^2 R} = \frac{I^2 X_C}{I^2 R}$$

οπότε

$$Q = \frac{I^2 X_L}{I^2 R} = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

ή

$$Q = \frac{I^2 X_C}{I^2 R} = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Στα παραπάνω η άεργος ισχύς σε μια περίοδο που αποθηκεύεται/μοιράζεται στα L , C ταλαντώνεται μεταξύ δυο καταστάσεων. Μέγιστη στο L και μηδενική στο C και μέγιστη στο C και μηδενική στο L . Γιαυτό και οι δυο τελευταίες σχέσεις καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα.

Το εύρος της ωφέλιμης ζώνης μπορεί να γραφεί τώρα σαν

$$\Delta\omega = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad \text{ή} \quad \Delta f = \frac{f_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

Επομένως βλέπουμε ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής Q τόσο μικρότερο είναι το εύρος ζώνης Δf που σημαίνει ότι η δυνατότητα επιλογής μιας συγκεκριμένης συχνότητας από το κύκλωμα γίνεται μεγαλύτερη.

Παρατηρούμε επίσης στον συντονισμό σειράς ότι για τα μέτρα των τάσεων V (πηγής), V_L (πηνίου) και V_C (πυκνωτή) έχουμε

$$\frac{V_L}{V} = \frac{I\omega_0 L}{IR} = Q \quad \text{και} \quad \frac{V_C}{V} = \frac{I}{\omega_0 C IR} = Q$$

που σημαίνει ότι

$$V_L = QV \quad \text{και} \quad V_C = QV$$

δηλ. παρατηρούμε ότι η τάση στον πυκνωτή και το πηνίο είναι πολ/σιο της τάσης της πηγής κατά Q . Το φαινόμενο αυτό το ονομάζουμε *κέρδος τάσης*.

Με τις τιμές στοιχείων που είχαν δοθεί προηγουμένως, έχουμε:

$$f_0 = 2813.5 \text{ Hz}$$

$$f_1 = 2798.6 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 2828.4 \text{ Hz}$$

$$\Delta f = 29.84 \text{ Hz}$$

$$Q = 94.28$$

$$I_{\max} = 66.7 \text{ mA}$$

$$I_1 = I_2 = I_{\max} / \sqrt{2} = 47.1 \text{ mA}$$

$$20 \log_{10} I_{\max} = -23.52 \text{ dB}$$

$$20 \log_{10} I_1 = -26.53 \text{ dB}$$

$$20 \log_{10} I_{\max} - 20 \log_{10} I_1 = 3.01 \text{ dB}$$

