

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι

Διάλεξη 14

Α. Δροσόπουλος

04-12-2024

- 1 Εναλλασσόμενο
- 2 Ασκήσεις
- 3 Θεωρήματα Thevenin, Norton και μέγιστη μεταφορά ισχύος

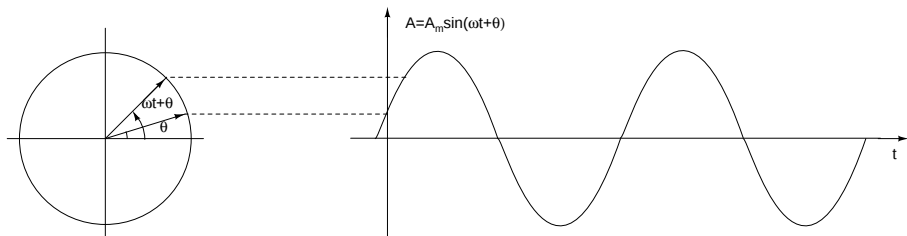
- 1 **Εναλλασσόμενο**
- 2 Ασκήσεις
- 3 Θεωρήματα Thevenin, Norton και μέγιστη μεταφορά ισχύος

- Σχέση τάσης – ρεύματος για πυκνωτές/πηνία περιλαμβάνει παραγώγους και ολοκληρώματα επομένως η εφαρμογή κανόνων Kirchhoff οδηγεί σε ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για τις κυματομορφές τάσης – ρεύματος σε ένα κύκλωμα.
- Όταν οι διεγέρσεις τάσης και ρεύματος σε ένα κύκλωμα που περιέχει γραμμικά στοιχεία (R , L , C) είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου, μπορούμε να κάνουμε μετασχηματισμό Fourier ή Laplace και να μετατρέψουμε τις ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις σε αλγεβρικές.

Φάσορες / Παραστατικοί Μιγάδες (συνέχεια 1)

Για διεγέρσεις μιας συχνότητας και για ημιτονικές συναρτήσεις παρατηρήστε το διάγραμμα όπου φαίνεται ότι μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα περιστρεφόμενο μιγαδικό διάνυσμα με μια ημιτονική συνάρτηση.

Όλα τα ημιτονοειδή ρεύματα και τάσεις στο κύκλωμα για την παραπάνω περίπτωση περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα άρα, «παγώνοντας» το χρόνο, μπορούμε να περιγράψουμε ημιτονοειδή ρεύματα και τάσεις με μιγαδικά διανύσματα.



By Gonfer at English Wikipedia, CC BY-SA 3.0, [εδώ](#).

Ένα ημιτονοειδές ρεύμα ή τάση γράφεται

$$y(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad \text{ή} \quad y(t) = A \sin(\omega t + \theta)$$

Θυμηθείτε και τη σχέση του Euler

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi$$

Οπότε

$$Ae^{j(\omega t + \theta)} = A \cos(\omega t + \theta) + jA \sin(\omega t + \theta)$$

$$\Re\{Ae^{j(\omega t + \theta)}\} = A \cos(\omega t + \theta) \quad \text{και} \quad \Im\{Ae^{j(\omega t + \theta)}\} = A \sin(\omega t + \theta)$$

- Επομένως, αν παραστήσουμε ένα ημιτονοειδές ρεύμα ή τάση με τον μιγαδικό αριθμό $Ae^{j\theta}$ μπορούμε να γυρίσουμε στην αρχική ημιτονοειδή μορφή πολ/ζοντας με $e^{j\omega t}$ και παίρνοντας το φανταστικό ή πραγματικό μέρος ανάλογα αν θέλουμε σαν αναφορά το ημίτονο ή το συνημίτονο.
- Επιπλέον, εφόσον το μέγεθος που μετράμε στα ημιτονοειδή ρεύματα είναι η ενεργός τιμή, αντί του πλάτους A στον παραπάνω μιγαδικό αριθμό, χρησιμοποιούμε την ενεργό τιμή A_{rms} .

Φάσορες / Παραστατικοί Μιγάδες (συνέχεια 4)

Οπότε, ο φάσορας ή παραστατικός μιγάδας ενός ημιτονοειδούς ρεύματος $i(t) = I_0 \sin(\omega t + \theta)$ ή τάσης $v(t) = V_0 \sin(\omega t + \theta)$ είναι

$$\dot{I} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} e^{j\theta} = I_{rms} \underline{\angle \theta} \quad \text{ή} \quad \dot{V} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} e^{j\theta} = V_{rms} \underline{\angle \theta}$$

και από τον φάσορα ή παραστατικό μιγάδα πηγαίνουμε στο ημιτονοειδές ρεύμα ή τάση

$$\dot{I} = I_{rms} \underline{\angle \theta} \Rightarrow i(t) = \Im m\{I_{rms} \underline{\angle \theta} \cdot \sqrt{2}e^{j\omega t}\} = I_0 \sin(\omega t + \theta)$$

με αναφορά το ημίτονο, ή

$$\dot{V} = V_{rms} \underline{\angle \theta} \Rightarrow v(t) = \Re e\{V_{rms} \underline{\angle \theta} \cdot \sqrt{2}e^{j\omega t}\} = V_0 \cos(\omega t + \theta)$$

με αναφορά το συνημίτονο.

Άσκηση

Δυο κυματομορφές τάσης δίδονται από τις σχέσεις

$$v_1(t) = 12 \sin(314t + 45^\circ) \text{ V} \quad \text{και} \quad v_2(t) = 6 \sin(314t - 15^\circ) \text{ V}$$

Να βρείτε τη συχνότητα των τάσεων, τη διαφορά φάσης μεταξύ τους και να γράψετε τους φάσορες.

Η συχνότητα f σε Hz είναι

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$$

Η διαφορά φάσης είναι

$$45^\circ - (-15^\circ) = 60^\circ$$

δηλ. η $v_1(t)$ προηγείται της $v_2(t)$ κατά 60° ή η $v_2(t)$ έπεται της $v_1(t)$ κατά 60° . Οι φάσορες με βάση το ημίτονο είναι

$$\dot{V}_1 = \frac{12}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ = 8.485 \angle 45^\circ \text{ V} \quad \text{και} \quad \dot{V}_2 = \frac{6}{\sqrt{2}} \angle -15^\circ = 4.243 \angle -15^\circ \text{ V}$$

Σύνθετη Αντίσταση

Οι αντικαταστάσεις κυματομορφών με φάσORES είναι στην ουσία μετασχηματισμοί Fourier. Και εφόσον στους μετασχηματισμούς Fourier

$$\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega \quad \text{και} \quad \int dt \rightarrow \frac{1}{j\omega}$$

για το πηνίο

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow \dot{V} = j\omega L \dot{I}$$

και για τον πυκνωτή

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt \rightarrow \dot{V} = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}$$

Σύνθετη Αντίσταση (συνέχεια 1)

Δηλαδή έχουμε τις σύνθετες αντιστάσεις (ή εμπεδήσεις)

για το πηνίο

$$Z_L = jX_L = j\omega L \quad \Omega$$

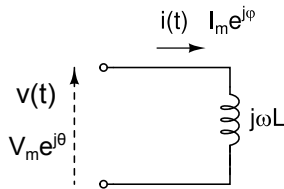
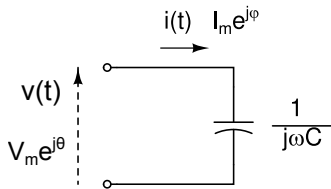
και για τον πυκνωτή

$$Z_C = jX_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} \quad \Omega$$

Φυσικά για την ωμική αντίσταση δεν αλλάζει τίποτα, $R \rightarrow R$ και η φάση της τάσης / ρεύματος που την διαρρέουν παραμένει ίδια με αυτήν του κλάδου που ευρίσκονται.

Προσοχή. Οι σύνθετες αντιστάσεις **ΔΕΝ** είναι φάσορες. Μπορούμε όμως να τις χρησιμοποιούμε σε κυκλώματα όπως ακριβώς και τις ωμικές αντιστάσεις αν αντικαταστήσουμε επίσης και όλες τις τάσεις/ρεύματα με τους αντίστοιχους φάσορες.

Σχέση Τάσης/Ρεύματος



Για τον πυκνωτή:

$$\frac{V_m e^{j\theta}}{I_m e^{j\phi}} = \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow \frac{V_m}{I_m} e^{j(\theta-\phi)} = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} \Rightarrow$$

$$\theta - \phi = -\pi/2 \Rightarrow \phi = \theta + \pi/2$$

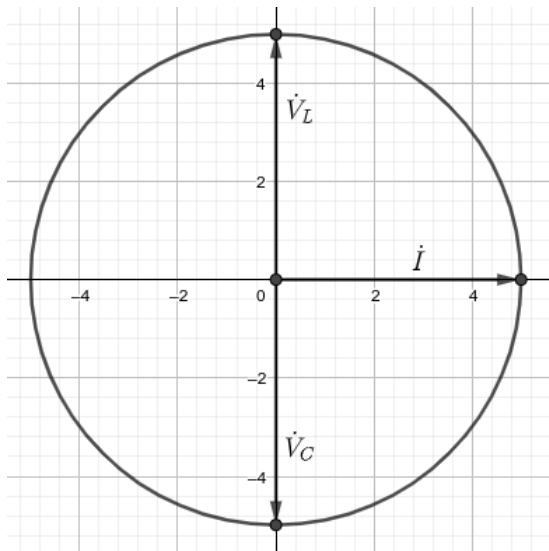
δηλ. το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά 90° ή η τάση καθυστερεί του ρεύματος κατά 90° .

Για το πηνίο:

$$\frac{V_m e^{j\theta}}{I_m e^{j\phi}} = j\omega L \Rightarrow \frac{V_m}{I_m} e^{j(\theta-\phi)} = \omega L e^{j\pi/2} \Rightarrow \theta - \phi = \pi/2 \Rightarrow \phi = \theta - \pi/2$$

δηλ. το ρεύμα καθυστερεί της τάσης κατά 90° ή η τάση προηγείται του ρεύματος κατά 90° .

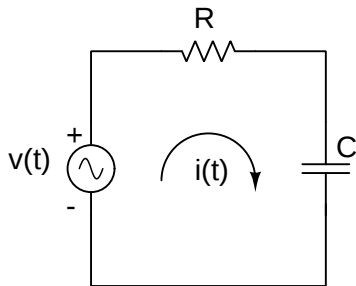
Σχέση Τάσης/Ρεύματος (συνέχεια 1)



- 1 Εναλλασσόμενο
- 2 **Ασκήσεις**
- 3 Θεωρήματα Thevenin, Norton και μέγιστη μεταφορά ισχύος

Άσκηση

Στο παρακάτω κύκλωμα είναι $v(t) = 10 \sin(628t + 15^\circ)$, $R = 1 \text{ k}\Omega$ και $C = 3 \text{ }\mu\text{F}$. Να βρείτε την σύνθετη αντίσταση που βλέπει η πηγή καθώς και τις κυματομορφές τάσης και ρεύματος στα στοιχεία του κυκλώματος.



Άσκηση (συνέχεια 1)

$$\omega = 628 \text{ rad/s και } \dot{V} = (10/\sqrt{2}) \angle 15^\circ = 7.071 \angle 15^\circ \text{ V}$$

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = 1000 - \frac{j}{1884 \times 10^{-6}} = 1000 - j530.8 = 1132.14 \angle -27.96^\circ \Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = 4.571 + j4.256 = 6.246 \angle 42.96^\circ \text{ mA} \Rightarrow$$

$$i(t) = 6.246\sqrt{2} \sin(628t + 42.96^\circ) \text{ mA} = 8.833 \sin(628t + 42.96^\circ) \text{ mA}$$

$$\dot{V}_R = \dot{I}R = 4.571 + j4.256 = 6.246 \angle 42.96^\circ \text{ V} \Rightarrow$$

$$v_R(t) = 6.246\sqrt{2} \sin(628t + 42.96^\circ) \text{ V} = 8.833 \sin(628t + 42.96^\circ) \text{ V}$$

$$\dot{V}_C = \dot{I} \cdot Z_C = \frac{\dot{I}}{j\omega C} = 2.259 - j2.426 = 3.315 \angle -47.04^\circ \text{ V} \Rightarrow$$

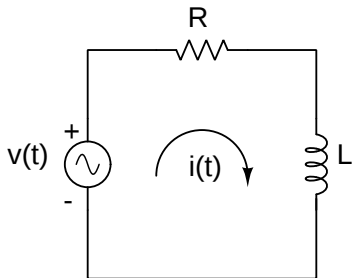
$$v_C(t) = 3.315\sqrt{2} \sin(628t - 47.04^\circ) \text{ V} = 4.688 \sin(628t - 47.04^\circ) \text{ V}$$

Άσκηση (συνέχεια 2)

```
>> w=628; R=1e3; C=3e-6; V0=10; Zc=-j/(w*C);
>> Z=R+Zc
Z = 1000.00 - 530.79i
>> [abs(Z) angle(Z)*180/pi]
ans =
    1132.137    -27.959
>> V=(V0/sqrt(2))*exp(j*15*pi/180)
V = 6.8301 + 1.8301i
>> [abs(V) angle(V)*180/pi]
ans =
     7.0711    15.0000
>> I=V/Z
I = 0.0045709 + 0.0042563i
>> [abs(I) angle(I)*180/pi]
ans =
    0.0062458    42.9587172
>> Vr=I*R
Vr = 4.5709 + 4.2563i
>> [abs(Vr) angle(Vr)*180/pi]
ans =
     6.2458    42.9587
>> Vc=I*Zc
Vc = 2.2592 - 2.4262i
>> [abs(Vc) angle(Vc)*180/pi]
ans =
     3.3152   -47.0413
```

Άσκηση

Στο παρακάτω κύκλωμα είναι $v(t) = 10 \sin(628t + 15^\circ)$, $R = 1 \text{ k}\Omega$ και $L = 150 \text{ mH}$. Να βρείτε την σύνθετη αντίσταση που βλέπει η πηγή καθώς και τις κυματομορφές τάσης και ρεύματος στα στοιχεία του κυκλώματος.



Άσκηση (συνέχεια 2)

```
>> w=628; R=1e3; L=150e-3; V0=10; ZL=j*w*L;
>> Z=R+ZL
Z = 1000.000 + 94.200i
>> [abs(Z) angle(Z)*180/pi]
ans =
    1004.4270     5.3814
>> V=(V0/sqrt(2))*exp(j*15*pi/180)
V = 6.8301 + 1.8301i
>> [abs(V) angle(V)*180/pi]
ans =
    7.0711    15.0000
>> I=V/Z
I = 0.0069409 + 0.0011763i
>> [abs(I) angle(I)*180/pi]
ans =
    0.0070399     9.6186176
>> Vr=I*R
Vr = 6.9409 + 1.1763i
>> [abs(Vr) angle(Vr)*180/pi]
ans =
    7.0399     9.6186
>> VL=I*ZL
VL = -0.11081 + 0.65384i
>> [abs(VL) angle(VL)*180/pi]
ans =
    0.66316    99.61862
```

Άσκηση (συνέχεια 3)

$$\dot{V} = (10/\sqrt{2}) \angle 15^\circ = 7.071 \angle 15^\circ \text{ V}$$

$$Z = R + j\omega L = 1004.43 \angle 5.38^\circ \Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = 7.04 \angle 9.62^\circ \text{ mA} \Rightarrow$$

$$i(t) = 9.956 \sin(628t + 9.62^\circ) \text{ mA}$$

$$\dot{V}_R = \dot{I} R = 7.04 \angle 9.62^\circ \text{ V} \Rightarrow$$

$$v_R(t) = 9.956 \sin(628t + 9.62^\circ) \text{ V}$$

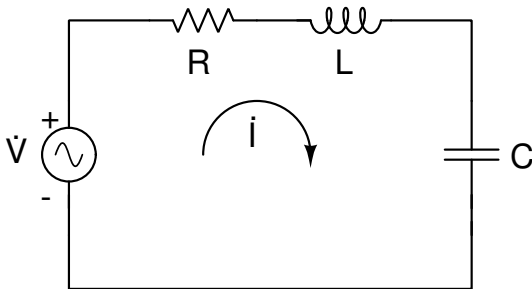
$$\dot{V}_L = \dot{I} \cdot Z_L = 0.663 \angle 99.6^\circ \text{ V} \Rightarrow$$

$$v_L(t) = 0.938 \sin(628t + 99.6^\circ) \text{ V}$$

Άσκηση

Στο παρακάτω κύκλωμα έχουμε $\dot{V} = 100 \text{ V}$ και τιμές στοιχείων $R = 100 \Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$, $L = 15 \text{ mH}$ και συχνότητα πηγής $f = 1 \text{ kHz}$. Να βρεθούν:

- Η εμπέδηση που βλέπει η πηγή.
- Οι κυματομορφές τάσης και ρεύματος στα στοιχεία του κυκλώματος.
- Το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων.
- Το κύκλωμα έχει χωρητική ή επαγωγική αντίσταση και γιατί;



Άσκηση (συνέχεια 1)

Η εμπέδηση που βλέπει η πηγή είναι η εν σειρά εμπέδηση της ωμικής, επαγωγικής και χωρητικής αντίστασης

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 100 + j94.2478 - j159.155 = 100.000 - j64.907 = 119.22 \angle -32.986^\circ \Omega$$

Το ρεύμα στον βρόχο που διέρχεται και από τις τρεις εμπεδήσεις (κανόνας τάσεων Kirchhoff) είναι

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = 0.7036 + j0.4567 = 0.839 \angle 32.986^\circ \text{ A}$$

Η κυματομορφή του ρεύματος που διέρχεται από όλα τα στοιχεία του κυκλώματος είναι

$$i(t) = 0.839\sqrt{2} \sin(6283.2t + 32.986^\circ) \text{ A} = 1.1862 \sin(6283.2t + 32.986^\circ) \text{ A}$$

Η κυματομορφή της τάσης της πηγής είναι

$$v(t) = 100\sqrt{2} \sin(6283.2t) = 141.42 \sin(6283.2t) \text{ V}$$

Η κυματομορφή της τάσης στα άκρα της ωμικής αντίστασης είναι

$$\dot{V}_R = \dot{I} \cdot R = 70.358 + j45.668 = 83.88 \angle 32.986^\circ \text{ V} \Rightarrow$$

$$v_R(t) = 118.62 \sin(6283.2t + 32.986^\circ) \text{ V}$$

Άσκηση (συνέχεια 2)

Η κυματομορφή της τάσης στα άκρα του επαγωγέα είναι

$$\dot{V}_L = \dot{I} \cdot Z_L = -43.041 + j66.311 = 79.055 \angle 122.99^\circ \text{ V} \Rightarrow$$

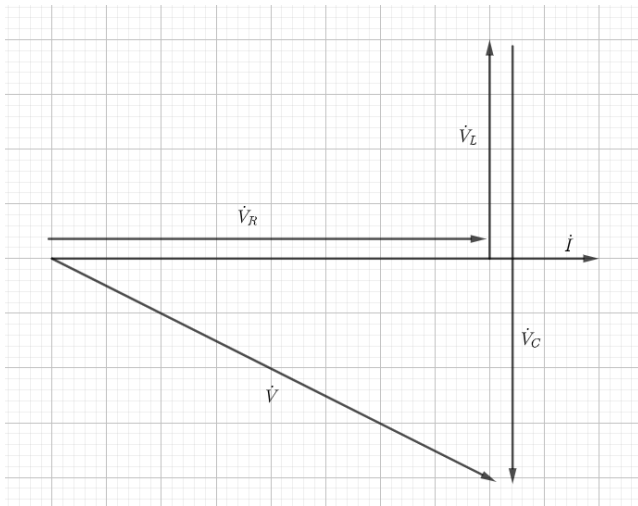
$$v_L(t) = 111.8 \sin(6283.2t + 122.99^\circ) \text{ V}$$

Η κυματομορφή της τάσης στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$\dot{V}_C = \dot{I} \cdot Z_C = 72.682 - j111.979 = 133.5 \angle -57.014^\circ \text{ V} \Rightarrow$$

$$v_C(t) = 188.8 \sin(6283.2t - 57.014^\circ) \text{ V}$$

Άσκηση (συνέχεια 3)



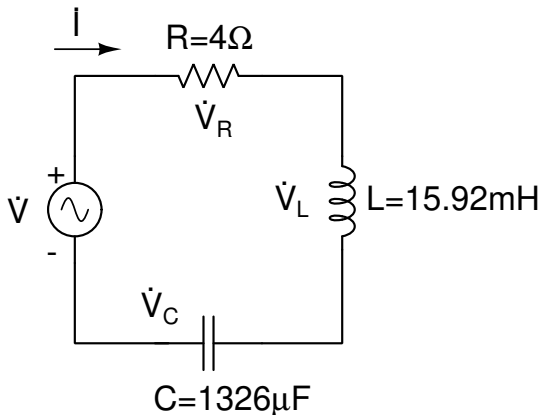
Το κύκλωμα έχει χωρητική αντίσταση εφόσον

$$\Im m Z = \omega L - 1/(\omega C) = -64.907 \, \Omega < 0$$

Άσκηση

Στο παρακάτω κύκλωμα έχουμε $v(t) = 12\sqrt{2} \cos(377t + 90^\circ)$ V. Να βρεθούν

- Η εμπέδηση που βλέπει η πηγή.
- Οι κυματομορφές τάσης και ρεύματος στα στοιχεία του κυκλώματος.



Άσκηση (συνέχεια 1)

Η συχνότητα του εναλλασσομένου είναι $\omega = 377 \text{ rad/s} \Rightarrow f = \omega/(2\pi) = 60 \text{ Hz}$ και ο φάσορας της τάσης με βάση το συνημίτονο είναι $\dot{V} = 12 \angle 90^\circ = j12 \text{ V}$.

Η εμπέδηση που βλέπει η πηγή είναι η εν σειρά εμπέδηση της ωμικής, επαγωγικής και χωρητικής αντίστασης

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 4 + j6 - j2 = 4 + j4 = 5.66 \angle 45^\circ \Omega$$

Το ρεύμα στον βρόχο που διέρχεται και από τις τρεις εμπεδήσεις (κανόνας τάσεων Kirchhoff) είναι

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = 1.5 + j1.5 = 2.12 \angle 45^\circ \text{ A} \Rightarrow$$

$$i(t) = 2.12\sqrt{2} \cos(377t + 45^\circ) \text{ A} = 3 \cos(377t + 45^\circ) \text{ A}$$

Η κυματομορφή της τάσης στα άκρα της ωμικής αντίστασης είναι

$$\dot{V}_R = \dot{I} \cdot R = 6 + j6 = 8.485 \angle 45^\circ \text{ V} \Rightarrow v_R(t) = 12 \cos(377t + 45^\circ) \text{ V}$$

Άσκηση (συνέχεια 2)

Η κυματομορφή της τάσης στα άκρα του επαγωγέα είναι

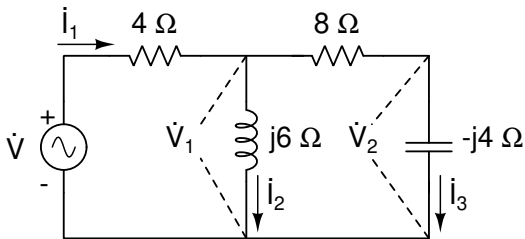
$$\dot{V}_L = \dot{I} \cdot j\omega L = -9 + j9 = 12.732 \angle 135^\circ \text{ V} \Rightarrow v_L(t) = 18 \cos(377t + 135^\circ) \text{ V}$$

Η κυματομορφή της τάσης στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$\dot{V}_C = \dot{I} / (j\omega C) = 3 - j3 = 4.243 \angle -45^\circ \text{ V} \Rightarrow v_C(t) = 6 \cos(377t - 45^\circ) \text{ V}$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν οι τάσεις και τα ρεύματα στο παρακάτω κύκλωμα όταν $\dot{V} = 24 \angle 60^\circ \text{ V}$.



Άσκηση (συνέχεια 1)

Η εμπέδηση που βλέπει η πηγή είναι

$$\begin{aligned} Z &= 4 + \frac{j6(8 - j4)}{j6 + 8 - j4} = 4 + \frac{24 + j48}{8 + j2} = 4 + \frac{288 + j336}{68} = \\ &= 8.235 + j4.941 = 9.604 \angle 30.964^\circ \Omega \end{aligned}$$

Βήμα-βήμα τα υπόλοιπα μεγέθη είναι

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}}{Z} = \frac{24 \angle 60^\circ}{9.604 \angle 30.964^\circ} = 2.499 \angle 29.036^\circ \text{ A}$$

$$\dot{V}_1 = \dot{V} - 4\dot{I}_1 = 16.263 \angle 78.435^\circ \text{ V}$$

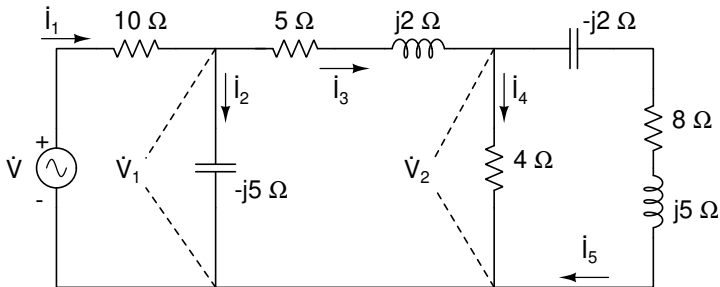
$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_1}{j6} = 2.710 \angle -11.565^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 1.818 \angle 105^\circ \text{ A}$$

$$\dot{V}_2 = \dot{I}_3(-j4) = 7.273 \angle 15^\circ \text{ V}$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί η τάση της πηγής στο παρακάτω κύκλωμα όταν $\dot{I}_4 = 3 \angle 45^\circ \text{ A}$.



Άσκηση (συνέχεια 1)

Έχουμε $\dot{I}_4 = 3 \angle 45^\circ$ A οπότε:

$$\dot{V}_2 = 4\dot{I}_4 = 12 \angle 45^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{V}_2}{8 + j5 - j2} = 1.404 \angle 24.444^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_4 + \dot{I}_5 = 4.343 \angle 38.480^\circ \text{ A}$$

$$\dot{V}_1 = \dot{I}_3(5 + j2) + \dot{V}_2 = 35.107 \angle 55.113^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_1}{-j5} = 7.021 \angle 145.113^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 7.121 \angle 109.352^\circ \text{ A}$$

$$\dot{V} = 10\dot{I}_1 + \dot{V}_1 = 96.047 \angle 92.098^\circ \text{ V}$$

στιγμιαία ισχύς

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

Για εναλλασσόμενο ρεύμα ημιτονικής μορφής όπου

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v) \quad \text{και} \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

η στιγμιαία ισχύς γίνεται

$$\begin{aligned} p(t) &= V_m I_m \cos(\omega t + \phi_v) \cos(\omega t + \phi_i) = \\ &= \frac{V_m I_m}{2} \left[\cos(\phi_v - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) \right] \Rightarrow \\ p(t) &= V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \left[\cos(\phi_v - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) \right] \end{aligned}$$

Βλέπουμε ένα τμήμα που είναι σταθερό με το χρόνο και ένα δεύτερο που μεταβάλλεται με το χρόνο, αλλά με διπλάσια συχνότητα από αυτή του ρεύματος. Παίρνοντας την μέση τιμή της στιγμιαίας ισχύος σε μια περίοδο T έχουμε την

μέση ή ενεργό ισχύ

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt =$$
$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \left[\cos(\phi_v - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) \right] dt \Rightarrow$$
$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\phi_v - \phi_i)$$

συντελεστής ισχύος, ωμικά, χωρητικά και επαγωγικά φορτία

Περί ισχύος (συνέχεια 2)

μιγαδική ισχύς

$$\dot{S} = \dot{V} \cdot \dot{I}^* = P + jQ$$

όπου το * δηλώνει συζυγή μιγαδικό. Επομένως

$$\dot{S} = V_{\text{rms}} \angle \phi_v \cdot I_{\text{rms}} \angle -\phi_i = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \angle \phi_v - \phi_i \Rightarrow$$

$$\Re\{\dot{S}\} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\phi_v - \phi_i) = P \quad \text{και} \quad \Im\{\dot{S}\} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(\phi_v - \phi_i) = Q$$

και το πραγματικό μέρος P είναι η **μέση ή ενεργός ισχύς** που ορίσαμε παραπάνω ενώ το φανταστικό Q το ονομάζουμε **άεργο ισχύ**.

Το μέτρο της μιγαδικής ισχύος το ονομάζουμε **φαινομένη ισχύ** και είναι

$$S = |\dot{S}| = |\dot{V}| \cdot |\dot{I}^*| = V \cdot I$$

Για λόγους διαχωρισμού, οι μονάδες της μιγαδικής (και φαινομένης) ισχύος είναι VA, της πραγματικής W και της αέργου VAR.

1 Εναλλασσόμενο

2 Ασκήσεις

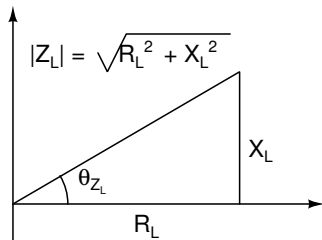
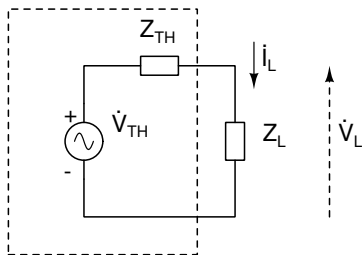
3 Θεωρήματα Thevenin, Norton και μέγιστη μεταφορά ισχύος

Ένα γραμμικό κύκλωμα με δύο ακροδέκτες A, B μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με ένα ισοδύναμο κύκλωμα που περιέχει μία πηγή τάσης σε σειρά με μία εμπέδηση. Η εμπέδηση, Z_{TH} είναι η εμπέδηση που φαίνεται από τους ακροδέκτες A, B όταν αντικαταστήσουμε τις πηγές με τις εσωτερικές τους αντιστάσεις (για πηγές πραγματικές) ή βραχυκυκλώσουμε τις πηγές τάσης και ανοίξουμε τις πηγές ρεύματος (για πηγές ιδανικές) στο κύκλωμα. Η τάση $\dot{V}_{TH}$ είναι η τάση που φαίνεται με το κύκλωμα ενεργό, στους ανοικτούς ακροδέκτες A, B.

Ένα γραμμικό κύκλωμα με δύο ακροδέκτες A, B μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με ένα ισοδύναμο κύκλωμα που περιέχει μία πηγή ρεύματος παράλληλα με μία εμπέδηση. Η εμπέδηση, Z_N είναι η εμπέδηση που φαίνεται από τους ακροδέκτες A, B όταν αντικαταστήσουμε τις πηγές με τις εσωτερικές τους αντιστάσεις (για πηγές πραγματικές) ή βραχυκυκλώσουμε τις πηγές τάσης και ανοίξουμε τις πηγές ρεύματος (για πηγές ιδανικές) στο κύκλωμα. Το ρεύμα I_N είναι το ρεύμα που παίρνουμε με το κύκλωμα ενεργό, όταν βραχυκυκλώσουμε τούς ακροδέκτες A, B.

Μέγιστη μεταφορά μέσης ή πραγματικής ισχύος

Μέγιστη μεταφορά πραγματικής ισχύος P σε κάποιο φορτίο Z_L από κάποιο κύκλωμα.



Στο αριστερό τμήμα του σχήματος βλέπουμε το ισοδύναμο κατά Thevenin ενός οποιουδήποτε γραμμικού κυκλώματος ενώ στο δεξιό τμήμα του σχήματος, έχουμε την απεικόνιση στο μιγαδικό επίπεδο του φορτίου Z_L .

Μέγιστη μεταφορά ισχύος (συνέχεια 1)

Οι εμπεδήσεις είναι $Z_{TH} = R_{TH} + jX_{TH}$ και $Z_L = R_L + jX_L$ ενώ το ρεύμα που διέρχεται από το φορτίο Z_L είναι

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{V}_{TH}}{Z_{TH} + Z_L}$$

Από διαιρέτη τάσης στο φορτίο έχουμε

$$\dot{V}_L = \frac{Z_L}{Z_{TH} + Z_L} \dot{V}_{TH}$$

Η μιγαδική ισχύς στο φορτίο είναι

$$\dot{S} = \dot{V}_L \dot{I}_L^* = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2 Z_L}{|Z_{TH} + Z_L|^2}$$

και η πραγματική ισχύς στο φορτίο είναι

$$P = \Re\{\dot{S}\} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2 R_L}{|Z_{TH} + Z_L|^2} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2 R_L}{(R_{TH} + R_L)^2 + (X_{TH} + X_L)^2}$$

Μέγιστη μεταφορά ισχύος (συνέχεια 2)

Η παραπάνω ισχύς P είναι πραγματική συνάρτηση δυο μεταβλητών, $P(R_L, X_L)$. Για την εύρεση των τιμών των R_L , X_L για τις οποίες έχουμε μέγιστη P , χρησιμοποιούμε γνωστό θεώρημα από τη μαθηματική ανάλυση όπου

$$\frac{\partial P}{\partial X_L} = -\frac{|\dot{V}_{TH}|^2 R_L 2 (X_{TH} + X_L)}{[(R_{TH} + R_L)^2 + (X_{TH} + X_L)^2]^2} = 0 \Rightarrow X_L = -X_{TH}$$

και

$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2 \left[[(R_{TH} + R_L)^2 + (X_{TH} + X_L)^2] - 2R_L(R_{TH} + R_L) \right]}{[(R_{TH} + R_L)^2 + (X_{TH} + X_L)^2]^2} = 0 \Rightarrow$$

$$(R_{TH} - R_L)^2 + (X_{TH} + X_L)^2 = 0 \Rightarrow R_L = R_{TH}$$

Τελικά, για σύνθετο φορτίο (μιγαδικό φορτίο) Z_L έχουμε ακρότατο για

$$Z_L = Z_{TH}^*$$

Μέγιστη μεταφορά ισχύος (συνέχεια 3)

Εξετάζουμε την ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial R_L^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial R_L \partial X_L} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial X_L \partial R_L} & \frac{\partial^2 P}{\partial X_L^2} \end{vmatrix}$$

στο ακρότατο. Εφόσον $D > 0$ και $\partial^2 P / \partial R_L^2 < 0$ για $Z_L = Z_{TH}^*$, τότε το ακρότατο είναι μέγιστο. Το μέγιστο αυτό είναι

$$P_{\max} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{4R_{TH}} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{4\Re\{Z_{TH}\}}$$