

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι

Διάλεξη 13

Α. Δροσόπουλος

29-11-2024

1 Εναλλασσόμενο

1 Εναλλασσόμενο

Ορισμός Εναλλασσομένου Ρεύματος

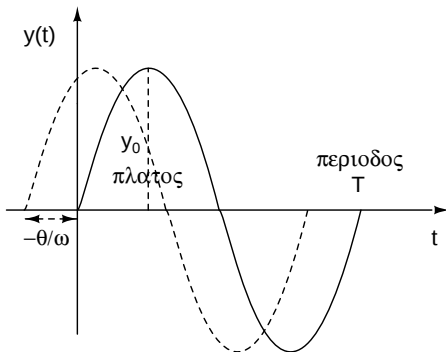
Εναλλασσόμενο ρεύμα είναι το ρεύμα που επαναλαμβάνεται περιοδικά στο χρόνο και διαγράφει ίσες θετικές και αρνητικές επιφάνειες σε μια περίοδο.

Σύμβολα συνεχούς: I για ρεύμα, V για τάση

Σύμβολα εναλλασσομένου: i ή $i(t)$ για ρεύμα, v ή $v(t)$ για τάση

Σύνθεση

Η πιο απλή μορφή εναλλασσομένου: $y(t) = y_0 \sin(\omega t + \theta)$



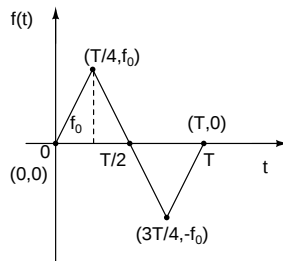
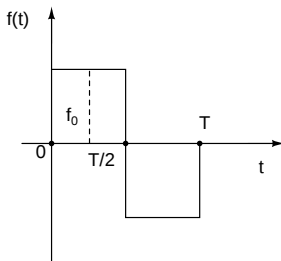
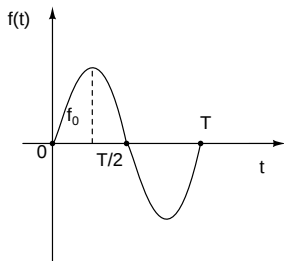
Με σύνθεση Fourier μπορούμε να συνθέσουμε οποιαδήποτε μορφή εναλλασσομένου ρεύματος από ημίτονα με διαφορετικά πλάτη, συχνότητες και αρχικές φάσεις. Με ανάλυση Fourier μπορούμε να αναλύσουμε οποιοδήποτε εναλλασσόμενο ρεύμα σε ημίτονα (αρμονικές).

- Το ρεύμα που διαρρέει μια ωμική αντίσταση αναπτύσσει θερμότητα (φαινόμενο Joule). Ορίζουμε ενεργό τιμή εναλλασσόμενου ρεύματος, την τιμή της αντίστοιχης τάσης ή ρεύματος του συνεχούς ρεύματος που έχει τα ίδια θερμικά αποτελέσματα με το εναλλασσόμενο σε μια ωμική αντίσταση.
- Τρόπος υπολογισμού για διάφορα είδη εναλλασσόμενου:
- Σε περιοδικές συναρτήσεις (και το εναλλασσόμενο είναι περιοδική συνάρτηση), $f(t) = f(t + kT)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, με περίοδο T , η ενεργός τιμή της συνάρτησης (rms - root mean square) είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός που ορίζεται ως:

$$f_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt}$$

Ενεργός Τιμή (συνέχεια 1)

Τρία κοινά είδη εναλλασσομένου



$$f_{\text{rms}} = K f_0$$

Ενεργός Τιμή ημιτόνου

$$f_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt}$$

όπου $f(t) = f_0 \sin(\omega t)$ με $\omega = 2\pi/T$. Έχουμε τότε

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt &= \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos(2\omega t) dt = \frac{1}{2}(T - 0) - \frac{1}{4\omega} \int_0^T \cos(2\omega t) d(2\omega t) = \\ &= \frac{T}{2} - \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t) \Big|_0^T = \frac{T}{2} - \frac{1}{4\omega} \left[\sin\left(2\frac{2\pi}{T}T\right) - \sin 0 \right] = \frac{T}{2} \end{aligned}$$

εφόσον τα ημίτονα μηδενίζονται. Οπότε

$$f_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{T f_0^2}{2}} = \frac{f_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow K = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ενεργός Τιμή τετραγωνικού παλμού

$$f(t) = \begin{cases} f_0 & \text{για } 0 \leq t < T/2 \\ -f_0 & \text{για } T/2 \leq t < T \end{cases}$$

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt = \int_0^{T/2} f_0^2 dt + \int_{T/2}^T f_0^2 dt = f_0^2 \left(\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right) = f_0^2 T \Rightarrow$$

$$f_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} f_0^2 T} = f_0 \Rightarrow K = 1$$

Ενεργός Τιμή τριγωνικού παλμού

Εδώ έχουμε

$$f(t) = \begin{cases} \frac{4f_0}{T}t & \text{για } 0 \leq t < T/4 \\ 2f_0 - \frac{4f_0}{T}t & \text{για } T/4 \leq t < 3T/4 \\ -4f_0 + \frac{4f_0}{T}t & \text{για } 3T/4 \leq t < T \end{cases}$$

με

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt = \int_0^{T/4} \left(\frac{4f_0}{T}t\right)^2 dt + \int_{T/4}^{3T/4} \left(2f_0 - \frac{4f_0}{T}t\right)^2 dt + \int_{3T/4}^T \left(-4f_0 + \frac{4f_0}{T}t\right)^2 dt$$

$$\int_0^{T/4} \left(\frac{4f_0}{T}t\right)^2 dt = \left(\frac{4f_0}{T}\right)^2 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{T/4} = \left(\frac{4f_0}{T}\right)^2 \frac{1}{3} \left(\frac{T}{4}\right)^3 = \frac{f_0^2 T}{12}$$

$$\left(2f_0 - \frac{4f_0}{T}t\right)^2 = 4f_0^2 \left(1 + \frac{4}{T^2}t^2 - \frac{4}{T}t\right) \Rightarrow \int_{T/4}^{3T/4} \left(2f_0 - \frac{4f_0}{T}t\right)^2 dt =$$

Ενεργός Τιμή τριγωνικού παλμού (συνέχεια 1)

$$= 4f_0^2 \left([t]_{T/4}^{3T/4} + \frac{4}{T^2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{T/4}^{3T/4} - \frac{4}{T} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{T/4}^{3T/4} \right) = \dots = \frac{f_0^2 T}{6}$$

$$\left(-4f_0 + \frac{4f_0}{T}t \right)^2 = (4f_0)^2 \left(\frac{t}{T} - 1 \right)^2 = (4f_0)^2 \left(\frac{t^2}{T^2} + 1 - \frac{2t}{T} \right) \Rightarrow$$

$$\int_{3T/4}^T \left(-4f_0 + \frac{4f_0}{T}t \right)^2 dt = (4f_0)^2 \left(\frac{1}{T^2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{3T/4}^T + [t]_{3T/4}^T - \frac{2}{T} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{3T/4}^T \right) = \dots = \frac{f_0^2 T}{12}$$

Οπότε τελικά

$$\begin{aligned} f_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \left(\frac{f_0^2 T}{12} + \frac{f_0^2 T}{6} + \frac{f_0^2 T}{12} \right)} = \sqrt{f_0^2 \frac{1}{3}} = \frac{f_0}{\sqrt{3}} \Rightarrow K = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Άλλες τιμές - Ισχύς και Ενέργεια

- Μέση αριθμητική τιμή:

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

- Μέση αριθμητική τιμή ανορθωμένου:

$$|\bar{f}| = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} |f(t)| dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} |f(t)| dt$$

- Ισχύς και Ενέργεια:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

και εφόσον η ισχύς είναι πάντα ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας, η ενέργεια που «δίνει» ή «παίρνει» κάποιο στοιχείο τη χρονική στιγμή t είναι

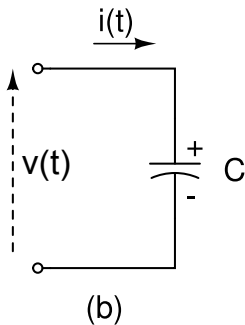
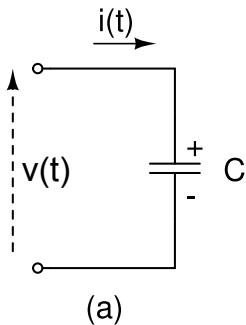
$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt$$

Ο πυκνωτής στο εναλλασσόμενο

Ο πυκνωτής (**capacitor**) είναι ένα ηλεκτρικό στοιχείο που αποτελείται από δυο αγωγίμες επιφάνειες (οπλισμοί) με διηλεκτρικό υλικό ανάμεσά τους. Εάν συνδεθεί κάποια πηγή στα άκρα του πυκνωτή, ο ένας οπλισμός θα φορτιστεί με θετικό φορτίο και ο άλλος με αρνητικό. Το ολικό φορτίο στον πυκνωτή είναι ανάλογο με την τάση στα άκρα του

$$q = Cv$$

όπου η σταθερά αναλογίας C είναι η χωρητικότητα του πυκνωτή με διαστάσεις Coulomb ανά Volt ή Farad (F).



Ο πυκνωτής στο εναλλασσόμενο (συνέχεια 1)

- Η διαφορά φορτίου μεταξύ των οπλισμών δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο που μπορεί να αποθηκεύσει ενέργεια.
- Λόγω του διηλεκτρικού μεταξύ των οπλισμών, δεν υπάρχει κίνηση ηλεκτρικών φορτίων μεταξύ τους.
- Αν μεταβάλλεται το φορτίο στους οπλισμούς, τότε μεταβάλλεται και το ηλεκτρικό πεδίο, και είναι σαν να διέρχεται ρεύμα

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt}$$

- Με αντιστροφή, και για $v(-\infty) = 0$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \, dt$$

- Επίσης, για αρχική τάση σε κάποιο χρόνο t_0

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i \, dt + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i \, dt = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i \, dt$$

Ο πυκνωτής στο εναλλασσόμενο (συνέχεια 2)

Σχέση ρεύματος - τάσης

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

Ισχύς

$$p(t) = v(t)i(t) = C v(t) \frac{dv(t)}{dt}$$

Ενέργεια

$$w_C(t) = \int_{-\infty}^t C v(t) \frac{dv(t)}{dt} dt = \int_{-\infty}^t C v(t) dv(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) \Big|_{v(-\infty)}^{v(t)} \Rightarrow$$

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) \quad \text{J}$$

εφόσον $v(-\infty) = 0$.

Ο πυκνωτής στο εναλλασσόμενο (συνέχεια 3)

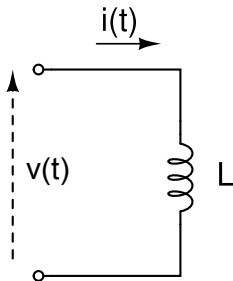
- Ιδανικός πυκνωτής
- Πραγματικός πυκνωτής
- Οι πυκνωτές μπορεί να έχουν σταθερή ή μεταβλητή τιμή χωρητικότητας με συνήθεις τιμές της τάξεως των mF μέχρι pF και έχουν πολλές εφαρμογές στα ηλεκτρικά κυκλώματα
- Στο συνεχές, στη σταθερή κατάσταση, ο πυκνωτής δρα σαν διακόπτης / ανοικτό κύκλωμα.

Το πηνίο στο εναλλασσόμενο

Πηνίο (**inductor**) είναι ένα ηλεκτρικό στοιχείο που αποτελείται από αγωγό τυλιγμένο συνήθως γύρω από κάποιον κυλινδρικό σιδηρομαγνητικό πυρήνα. Σύμφωνα με το φαινόμενο επαγωγής, μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο που προέρχεται από μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό ρεύμα, προκαλεί την δημιουργία τάσης στα άκρα του πηνίου σύμφωνα με τη σχέση

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

όπου η σταθερά αναλογίας L είναι η αυτεπαγωγή του πηνίου (συνήθως συντομεύεται απλώς σε επαγωγή) με διαστάσεις Volt-second ανά Ampere ή Henry (H).



Το πηνίο στο εναλλασσόμενο (συνέχεια 1)

Σχέση ρεύματος - τάσης

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(t) dt = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt$$

Ισχύς

$$p(t) = v(t)i(t) = L \frac{di(t)}{dt} i(t)$$

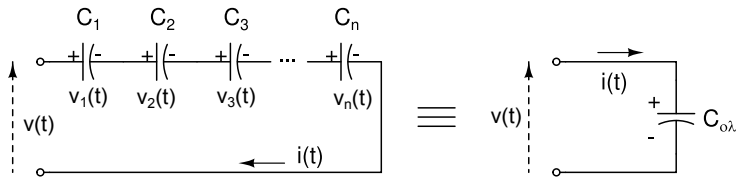
Ενέργεια

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^t L \frac{di(t)}{dt} i(t) dt = \int_{-\infty}^t L i(t) di(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \Big|_{i(-\infty)}^{i(t)} \Rightarrow$$

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \quad \text{J}$$

εφόσον $i(-\infty) = 0$.

Πυκνωτές σε σειρά



Από τον κανόνα τάσεων του Kirchhoff στο βρόχο έχουμε

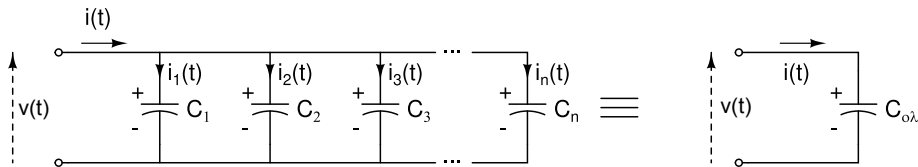
$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \dots + v_n(t) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{C_k} \int_{t_0}^t i_k(t) dt + v_k(t_0) \right) =$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{C_k} \right) \int_{t_0}^t i(t) dt + v(t_0) = \frac{1}{C_{\text{ολ}}} \int_{t_0}^t i(t) dt + v(t_0) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{C_{\text{ολ}}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{C_k} \right)$$

δηλ. πυκνωτές σε σειρά είναι σαν ωμικές αντιστάσεις παράλληλα.

Πυκνωτές παράλληλα



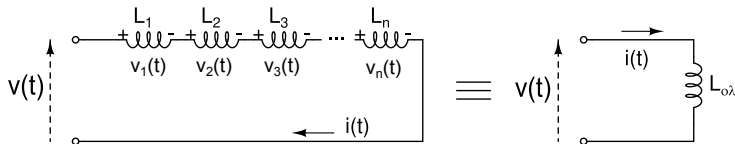
Από τον κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff στον επάνω κόμβο έχουμε

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \dots + i_n(t) = \sum_{k=1}^n \left(C_k \frac{dv(t)}{dt} \right) \Rightarrow$$

$$C_{ολ} = \sum_{k=1}^n C_k$$

δηλ. πυκνωτές παράλληλα είναι σαν ωμικές αντιστάσεις σε σειρά.

Πηνία σε σειρά

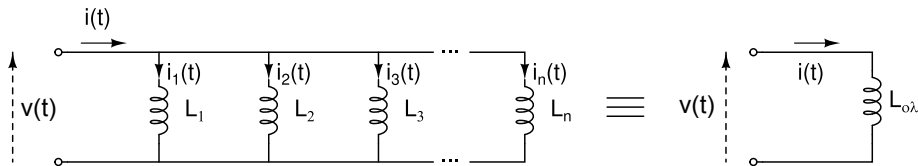


Από τον κανόνα τάσεων του Kirchhoff στο βρόχο έχουμε

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \dots + v_n(t) = \sum_{k=1}^n \left(L_k \frac{di(t)}{dt} \right) \Rightarrow L_{ολ} = \sum_{k=1}^n L_k$$

δηλ. επαγωγές σε σειρά είναι σαν ωμικές αντιστάσεις σε σειρά.

Πηνία παράλληλα



Από τον κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff στον επάνω κόμβο έχουμε

$$\begin{aligned} i(t) &= i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \dots + i_n(t) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{L_k} \int_{t_0}^t v(t) dt + i_k(t_0) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{L_k} \right) \int_{t_0}^t v(t) dt + i(t_0) \Rightarrow \\ &\frac{1}{L_{ολ}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{L_k} \right) \end{aligned}$$

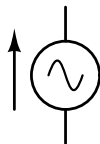
δηλ. επαγωγές παράλληλα είναι σαν ωμικές αντιστάσεις παράλληλα.

Είδη πηγών εναλλασσομένου

Ανεξάρτητες και εξαρτημένες



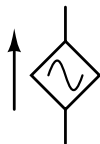
(a)



(b)



(c)



(d)