Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι

Διάλεξη 08

Α. Δροσόπουλος

08-11-2024

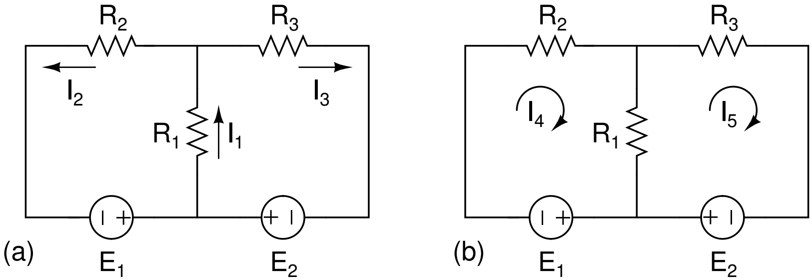
Outline

Topic

1. Κανόνες Kirchhoff - Μέθοδος βρόχων (οφθαλμών)
2. Κυκλώματα
3. Ασκήσεις

Μέθοδος βρόχων (οφθαλμών)

Να βρεθούν τα κλαδικά ρεύματα I_1, I_2, I_3 στο κύκλωμα (a) όταν $E_1 = 9$ V, $E_2 = 18$ V, $R_1 = 500\ \Omega$, $R_2 = 300\ \Omega$, $R_3 = 1.2$ kΩ με τη μέθοδο βρόχων.



Μέθοδος βρόχων (οφθαλμών)

$$\begin{aligned} -R_2\, I_2 - R_1\, I_1 + E_1 &= 0 \\ R_3\, I_3 + R_1\, I_1 - E_2 &= 0 \\ I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση των 3 κλαδικών ρευμάτων με τα 2 ρεύματα βρόχων (τι είναι ρεύματα βρόγχου;) έχουμε $I_2 = -I_4$, $I_1 = I_5 - I_4$, $I_3 = I_5$, οπότε

$$\left.\begin{aligned} -R_2\,(-I_4) - R_1\,(I_5 - I_4) &= -E_1 \\ R_3\, I_5 + R_1\,(I_5 - I_4) &= E_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (R_2 + R_1)\, I_4 - R_1\, I_5 &= -E_1 \\ -R_1\, I_4 + (R_1 + R_3)\, I_5 &= E_2 \end{aligned}$$

Μέθοδος βρόχων (οφθαλμών)

- Βασίζεται στον κανόνα τάσεων του Kirchhoff. Στην απλή εφαρμογή δεν θέλουμε πηγές ρεύματος στους βρόχους μας. Επομένως μετατρέπουμε τυχών πηγές ρεύματος σε πηγές τάσης.
- Προσδιορίζουμε τους ελάχιστους βρόχους/οφθαλμούς, δηλ. βρόχους που δεν περιέχουν άλλους βρόχους.
- Σε κάθε οφθαλμό ορίζουμε ένα ρεύμα βρόχου με δεξιόστροφη φορά.
- Γράφουμε τις εξισώσεις της μεθόδου για κάθε οφθαλμό που είναι βασικά ο κανόνας τάσεων του Kirchhoff για τα ρεύματα βρόχου. Το αλγεβρικό άθροισμα των πτώσεων τάσης στις αντιστάσεις κάθε οφθαλμού ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των πηγών τάσης του οφθαλμού. Μεταφέρουμε τις πηγές στα δεξιά και έχουμε θετικό πρόσημο για τις πηγές στις οποίες το ρεύμα εισέρχεται από τον αρνητικό ακροδέκτη και αρνητικό όταν το ρεύμα εισέρχεται από τον θετικό ακροδέκτη.

Μέθοδος βρόχων (οφθαλμών)

Γενικά για n οφθαλμούς έχουμε:

$$\begin{aligned}
I_1R_{11} - I_2R_{12} - I_3R_{13} - ... - I_nR_{1n} &= \sum E_1 \\
-I_1R_{21} + I_2R_{22} - I_3R_{23} - ... - I_nR_{2n} &= \sum E_2 \\
-I_1R_{31} - I_2R_{32} + I_3R_{33} - ... - I_nR_{3n} &= \sum E_3 \\
... & \\
-I_1R_{n1} - I_2R_{n2} - I_3R_{n3} - ... + I_nR_{nn} &= \sum E_n
\end{aligned}$$

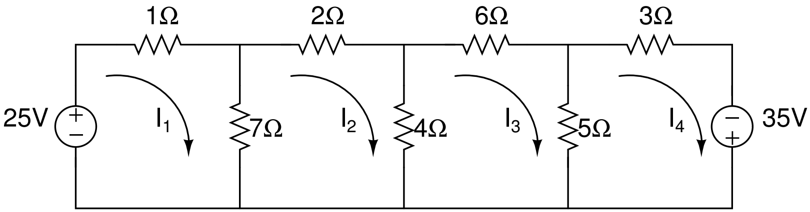
- Ο συντελεστής του ρεύματος βρόχου R_{ii} για την i εξίσωση βρόχου είναι το άθροισμα των αντιστάσεων που συναντά το i ρεύμα βρόχου και έχει πρόσημο θετικό. Οι άλλοι συντελεστές R_{ij} για την i εξίσωση βρόχου δείχνουν τις αντιστάσεις που μοιράζεται ο βρόχος i με τον βρόχο j και είναι αρνητικοί. Στην μορφή πινάκων φαίνεται ότι όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι θετικά και όλα τα άλλα, αρνητικά και συμμετρικά.

Μέθοδος βρόχων (οφθαλμών)

- Τέλος, λύνουμε το ανωτέρω σύστημα με μία από τις γνωστές μεθόδους, βρίσκουμε όλα τα ρεύματα βρόχου και μπορούμε κατόπιν να υπολογίσουμε και τα κλαδικά ρεύματα.
- Το κέρδος είναι λιγότερες εξισώσεις και ένας αυτοματοποιημένος τρόπος επίλυσης κυκλωμάτων αυτής της κατηγορίας.

Παράδειγμα 3.12

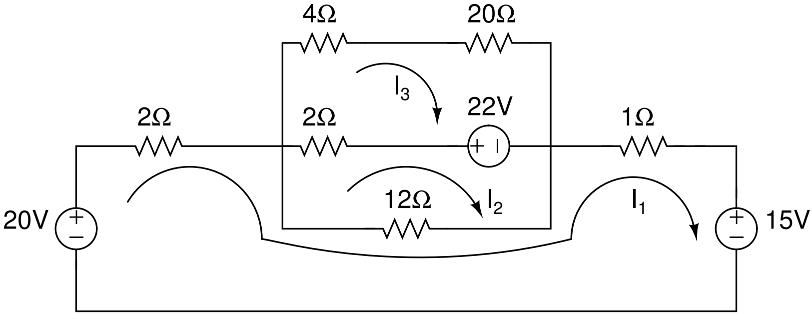
Να βρεθούν τα ρεύματα οφθαλμών στο παρακάτω κύκλωμα.



$$\begin{aligned}
8I_1 - 7I_2 - 0I_3 - 0I_4 &= 25 \\
-7I_1 + 13I_2 - 4I_3 - 0I_4 &= 0 \\
0I_1 - 4I_2 + 15I_3 - 5I_4 &= 0 \\
0I_1 - 0I_2 - 5I_3 + 8I_4 &= 35
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.13

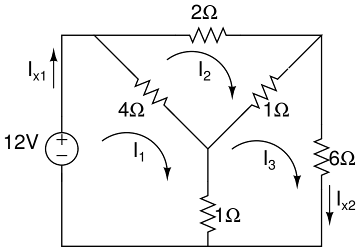
Να βρεθούν οι τάσεις στις αντιστάσεις των $20\ \Omega$, $12\ \Omega$ και $1\ \Omega$ με τη μέθοδο των οφθαλμών στο παρακάτω κύκλωμα.



$$\begin{aligned} 15I_1 - 12I_2 - 0I_3 &= 5 \\ -12I_1 + 14I_2 - 2I_3 &= -22 \\ 0I_1 - 2I_2 + 26I_3 &= 22 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.14

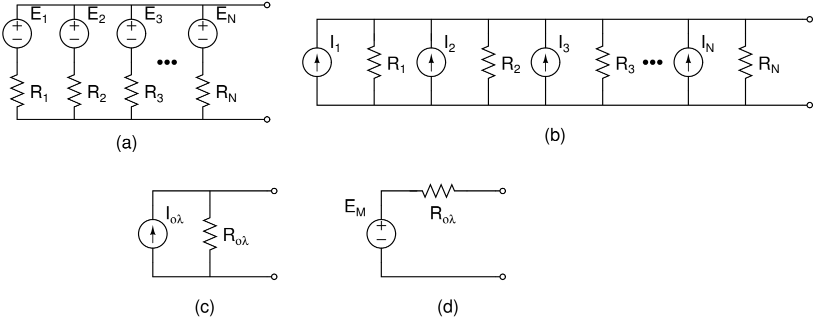
Να υπολογιστούν τα κλαδικά ρεύματα I_{x1} και I_{x2} καθώς και η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση των $4\ \Omega$ με τη μέθοδο των οφθαλμών στο παρακάτω κύκλωμα.



$$
\begin{aligned}
5I_1 - 4I_2 - I_3 &= 12 \\
-4I_1 + 7I_2 - I_3 &= 0 \\
-I_1 - I_2 + 8I_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Topic

Θεώρημα Millman

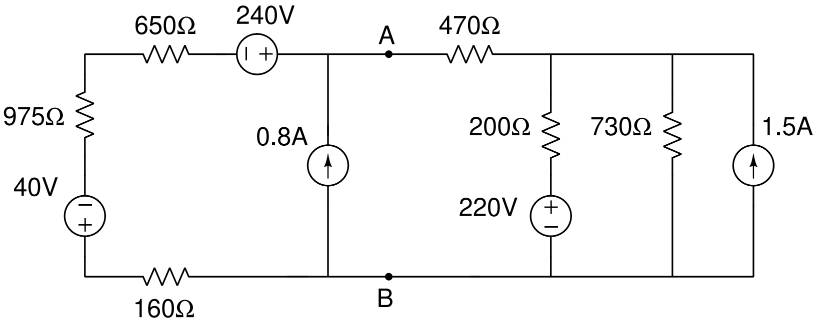


$$\frac{1}{R_{\text{ολ}}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$$

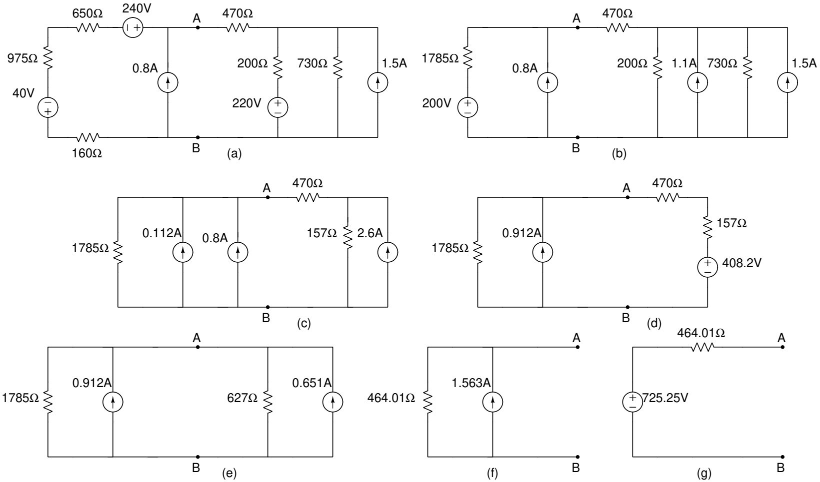
$$E_M = (I_1 + I_2 + \ldots + I_N)\, R_{\text{ολ}} = \frac{\dfrac{E_1}{R_1} + \dfrac{E_2}{R_2} + \ldots + \dfrac{E_N}{R_N}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \ldots + \dfrac{1}{R_N}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \dfrac{E_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{R_i}}$$

Παράδειγμα

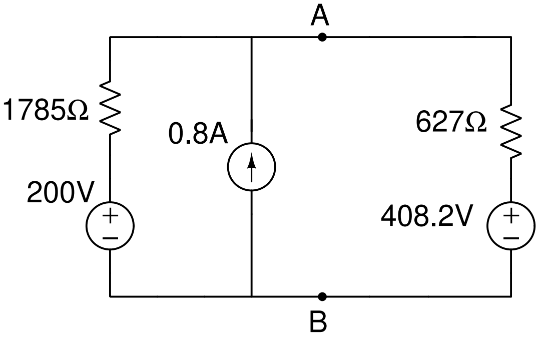
Να βρεθεί η τάση V_{AB} στο παρακάτω κύκλωμα.



Παράδειγμα 2



Παράδειγμα 3

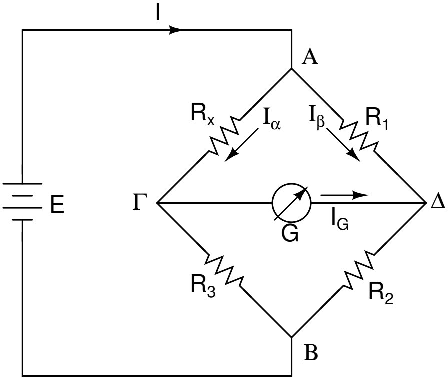


Με κομβική ανάλυση:

$$\frac{V_{AB}-200}{1785}-0.8+\frac{V_{AB}-408.2}{627}=0 \;\Rightarrow\; V_{AB}=725.3\text{ V}$$

Γέφυρα Wheatstone

Η γέφυρα Wheatstone είναι ένα κύκλωμα που εφαρμόζεται πολύ σε ηλεκτρικές μετρήσεις. Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει ότι αποτελείται από 4 ωμικές αντιστάσεις εκ των οποίων η μία είναι άγνωστη και οι άλλες τρεις γνωστές.



Γέφυρα Wheatstone 2

Το γαλβανόμετρο που συνδέει τα Γ και Δ είναι ένα πολύ ευαίσθητο όργανο που δείχνει την παρουσία ηλεκτρικού ρεύματος. Λέμε ότι η γέφυρα βρίσκεται σε ισορροπία όταν το ρεύμα που περνάει από το γαλβανόμετρο είναι $I_G = 0$. Έχουμε τότε $I = I_\alpha + I_\beta$ όπου I_α είναι το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο ΑΓΒ και I_β το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο ΑΔΒ. Εφόσον $I_G = 0$ τα σημεία Γ και Δ έχουν το ίδιο δυναμικό. Προσοχή εδώ. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των Γ και Δ είναι μηδέν. Τα δυναμικά στα Γ και Δ είναι ίδια αλλά όχι απαραίτητα μηδέν. Επομένως,

$$V_{\text{ΑΓ}} = V_{\text{Α}\Delta} \quad \Rightarrow \quad I_\alpha R_x = I_\beta R_1$$

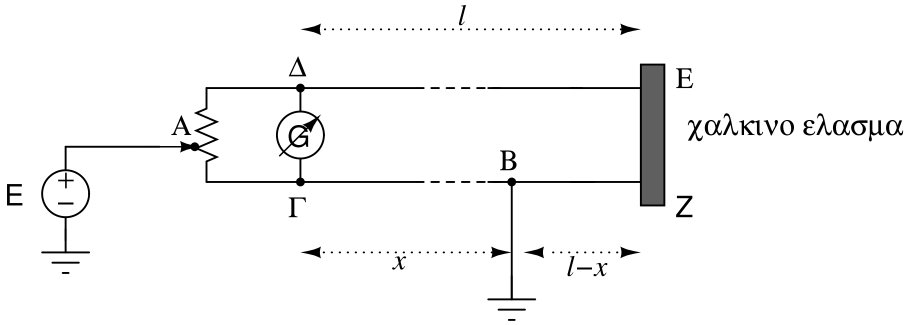
$$V_{\Gamma\text{Β}} = V_{\Delta\text{Β}} \quad \Rightarrow \quad I_\alpha R_3 = I_\beta R_2$$

Διαιρώντας κατά μέλη βγαίνει η συνθήκη ισορροπίας την οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε την άγνωστη αντίσταση από τις γνωστές.

$$\frac{R_x}{R_3} = \frac{R_1}{R_2} \;\Rightarrow\; R_x = R_3 \frac{R_1}{R_2}$$

Εντοπισμός θέσης σφάλματος

Το παρακάτω σχήμα δείχνει μια γραμμή μεταφοράς μήκους ℓ που αποτελείται από δύο ηλεκτρικές γραμμές (π.χ. υπόγειο καλώδιο). Έστω ότι υπάρχει διαρροή στο σημείο Β που απέχει άγνωστη απόσταση x από το Γ. Η αρχή της γραμμής είναι τα σημεία Γ και Δ και το τέρμα της γραμμής τα σημεία Ε και Ζ. Βραχυκυκλώνουμε το τέρμα Ε, Ζ με ένα μικρό χάλκινο έλασμα αμελητέας αντίστασης.



Εντοπισμός θέσης σφάλματος 2

Στην αρχή Γ, Δ συνδέουμε το γαλβανόμετρο G, μια μεταβλητή αντίσταση και την πηγή με τάση Ε. Ο συμβολισμός είναι ίδιος με το διάγραμμα που ορίστηκε η γέφυρα Wheatstone. Η συνθήκη ισορροπίας μας δίνει

$$\frac{R_{\mathrm{A\Delta}}}{R_{\mathrm{A\Gamma}}} = \frac{R_{\Delta EZB}}{R_{\Gamma B}} = \frac{l + (l - x)}{x} = \frac{2l - x}{x} \;\Rightarrow\; x = \frac{2l}{1 + \dfrac{R_{A\Delta}}{R_{A\Gamma}}}$$

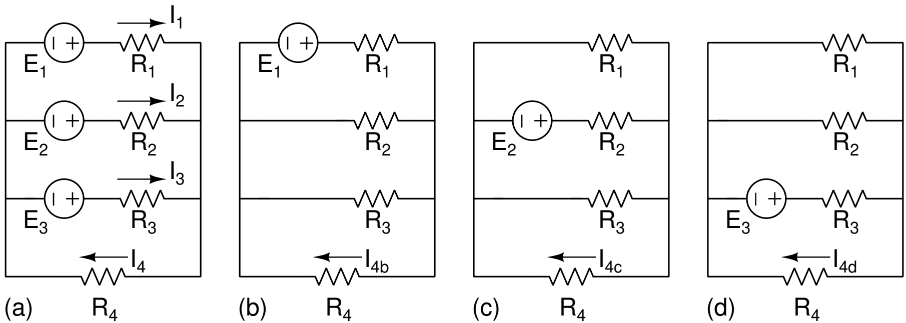
όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση $R = \rho\, l/S$ για τις αντιστάσεις και το γεγονός ότι το υλικό και η διατομή των αγωγών είναι ίδια (ρ και S ίδια).

Θεώρημα Επαλληλίας – Αρχή Υπέρθεσης

- Ένα άλλο σημαντικό και χρήσιμο θεώρημα είναι το θεώρημα επαλληλίας ή αλλιώς η αρχή της υπερθέσεως. Σε ένα γραμμικό κύκλωμα που έχει περισσότερες από μία πηγές μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκρισή του (τάση και ρεύμα σε κάθε στοιχείο) για κάθε πηγή ξεχωριστά, «σβήνοντας» τις υπόλοιπες. Η συνολική απόκριση είναι το άθροισμα των επί μέρους αποκρίσεων. Με το θεώρημα αυτό μπορούμε πολλές φορές να απλοποιήσουμε σύνθετα κυκλώματα σε πιο απλά.
- Πηγή τάσης την «σβήνουμε» βραχυκυκλώνοντάς την.
- Πηγή ρεύματος την «σβήνουμε» ανοίγοντάς την.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το ρεύμα I_4 στο κύκλωμα (a) με τη μέθοδο υπέρθεσης όταν $E_1 = 18$ V, $E_2 = 9$ V, $E_3 = 20$ V, $R_1 = 1.2$ kΩ, $R_2 = 800\ \Omega$, $R_3 = 1.4$ kΩ, $R_4 = 600\ \Omega$.



Παράδειγμα 2

Με τη μέθοδο επαλληλίας έχουμε τα κυκλώματα (b),(c),(d). Ένας απλός τρόπος είναι να κάνουμε την κάθε πηγή τάσης πηγή ρεύματος, παράλληλες τις R_1, R_2, R_3 και έναν διαιρέτη ρεύματος για το κάθε ρεύμα I_{4b}, I_{4c}, I_{4d}.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R = 357.45\ \Omega$$

$$I_{4b} = \frac{R}{R + R_4}\frac{E_1}{R_1} = 5.6\ \text{mA}$$

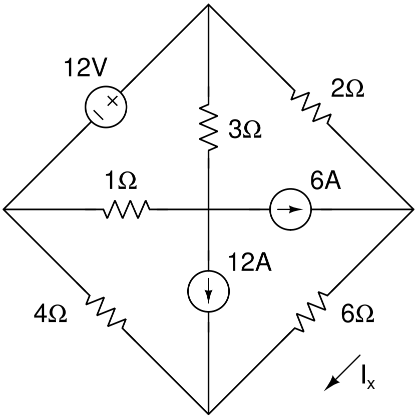
$$I_{4c} = \frac{R}{R + R_4}\frac{E_2}{R_2} = 4.2\ \text{mA} \qquad I_{4d} = \frac{R}{R + R_4}\frac{E_3}{R_3} = 5.33\ \text{mA}$$

$$I_4 = I_{4b} + I_{4c} + I_{4d} = 15.1\ \text{mA}$$

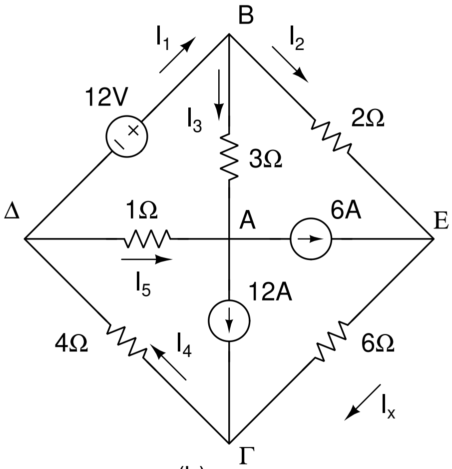
Στο βιβλίο βλέπετε και εναλλακτικούς τρόπους και μπορείτε και εσείς να σκεφτείτε και άλλους.

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ρεύμα και η καταναλισκόμενη ισχύς στην αντίσταση $6\ \Omega$ στο κύκλωμα (a).

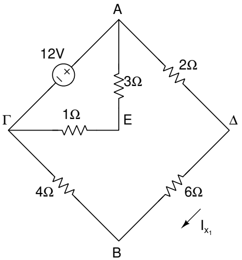


(a)

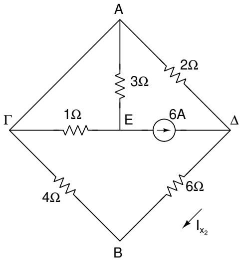


(b)

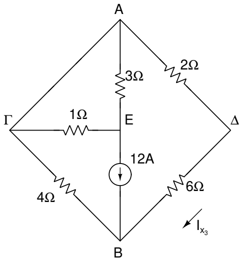
Παράδειγμα 2



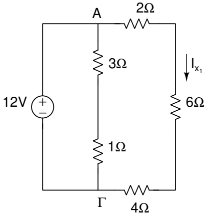
(b)



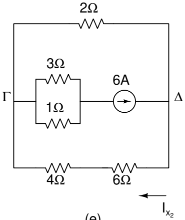
(d)



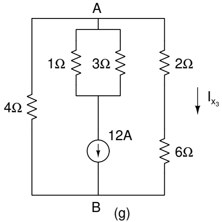
(f)



(c)



(e)



(g)

Παράδειγμα 3

Όταν μόνο η πηγή τάσης είναι ενεργός, έχουμε το κύκλωμα (b) και το ισοδύναμό του (c). Η τάση $V_{A\Gamma}$ στα άκρα του κλάδου που περιέχει την αντίσταση $6\ \Omega$ είναι 12 V. Οπότε,

$$I_{x_1} = \frac{12}{2+6+4} = 1 \text{ A}$$

Όταν μόνο η πηγή ρεύματος 6 A είναι ενεργός, έχουμε το κύκλωμα (d) και το ισοδύναμό του (e). Με διαιρέτη ρεύματος

$$I_{x_2} = \frac{2}{2+10}\, 6 = 1 \text{ A}$$

Όταν μόνο η πηγή ρεύματος 12 A είναι ενεργός, έχουμε το κύκλωμα (f) και το ισοδύναμό του (g). Και πάλι με διαιρέτη ρεύματος

$$I_{x_3} = -\frac{4}{4+8}\, 12 = -4 \text{ A}$$

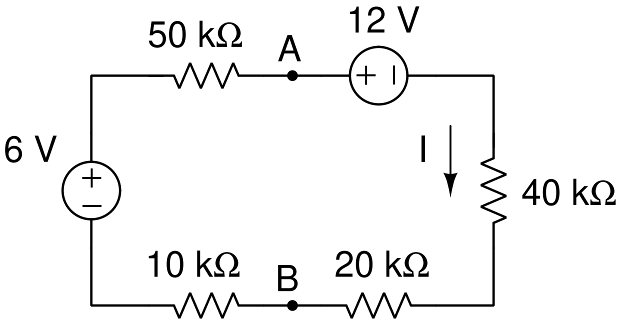
Τελικά, $I_x = I_{x_1} + I_{x_2} + I_{x_3} = 1 + 1 - 4 = -2$ A και $P = I_x^2 \cdot 6 = 24$ W.

Topic

1. Κανόνες Kirchhoff - Μέθοδος βρόχων (οφθαλμών)
2. Κυκλώματα
3. **Ασκήσεις**

Άσκηση 1

Να βρεθεί η V_{AB} και το I στο κύκλωμα.



1b

Κανόνας Τάσεων Kirchhoff

$$50I + 12 + 40I + 20I + 10I - 6 = 0 \Rightarrow I = -0.05 \text{ mA}$$

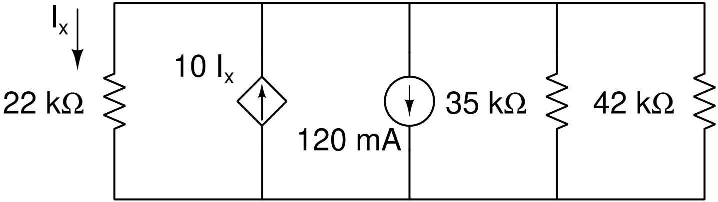
$$V_{AB} = 12 + 60I = 9 \text{ V}$$

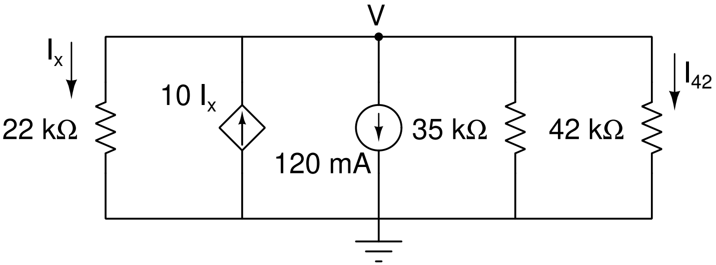
$$V_{AB} = -50I + 6 - 10I = 9 \text{ V}$$

```
octave:1> I = (-12+6)/(50+40+20+10)
I = -0.050000
octave:2> Vab = 12+60*I
Vab =  9
octave:3> Vab = -60*I+6
Vab =  9
```

Άσκηση 2

Να βρεθεί η τάση στα άκρα και το ρεύμα που διαρρέει την 42 kΩ.





Κομβική ανάλυση

$$\frac{V}{22} - 10I_x + 120 + \frac{V}{35} + \frac{V}{42} = 0$$

$$\frac{V}{22} = I_x$$

2c

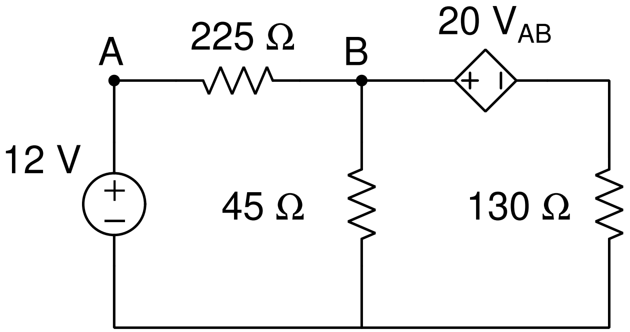
$$\frac{V}{22} - 10\frac{V}{22} + 120 + \frac{V}{35} + \frac{V}{42} = 0 \Rightarrow V\left(\frac{1}{22} - \frac{10}{22} + \frac{1}{35} + \frac{1}{42}\right) = -120 \Rightarrow$$

$$V = 336.41 \text{ V} \qquad \text{και} \qquad I_{42} = \frac{V}{42} = 8 \text{ mA}$$

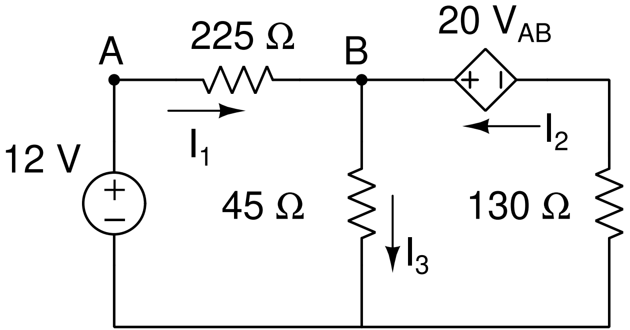
```
octave:4> V = -120/(1/22-10/22+1/35+1/42)
V =  336.41
octave:5> I42 = V/42
I42 =  8.0097
```

Άσκηση 3

Να βρεθεί η V_{AB} και το ρεύμα που κυκλοφορεί στην $130\ \Omega$.



Κλαδικά ρεύματα



3c

Κανόνες Kirchhoff - κλαδικά ρεύματα

$$\left.\begin{array}{rcl} I_1 + I_2 - I_3 & = & 0 \\ 225I_1 + 45I_3 & = & 12 \\ 20V_{AB} - 130I_2 - 45I_3 & = & 0 \\ V_{AB} & = & 225I_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcl} I_1 + I_2 - I_3 & = & 0 \\ 225I_1 + 45I_3 & = & 12 \\ 4500I_1 - 130I_2 - 45I_3 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$I_1 = \ 0.0085\text{A} \qquad I_2 = \ 0.2158\text{A} \qquad I_3 = 0.2243 \text{ A}$$

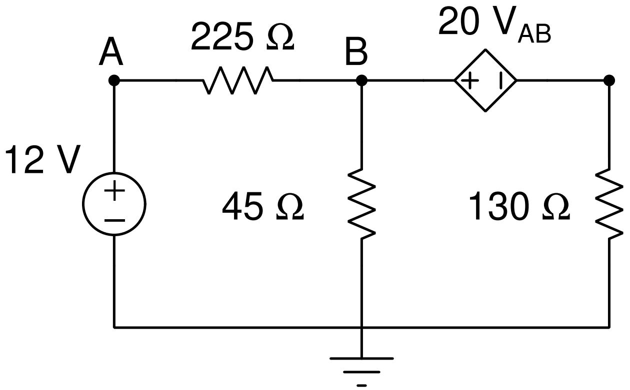
Το ρεύμα που κυκλοφορεί στην $130\ \Omega$ είναι $I_2 = 0.2158$ A.

Τάση $V_{AB} = 225I_1 = 1.91$ V.

3d

```
octave:6> 225*20
ans =  4500
octave:11> A=[1 1 -1; 225 0 45; 4500 -130 -45]
A =
      1      1     -1
    225      0     45
   4500   -130    -45
octave:12> b=[0; 12; 0]
b =
    0
   12
    0
octave:13> I=inv(A)*b
I =
   0.0084771
   0.2158038
   0.2242810
octave:14> 225*I(1)
ans =  1.9074
```

Κομβική ανάλυση



3f

Κανόνες Kirchhoff - κομβική ανάλυση

$$\frac{V_B - 12}{225} + \frac{V_B}{45} + \frac{(-20V_{AB} + V_B)}{130} = 0$$

$$V_{AB} = -V_{BA} = -(V_B - 12)$$

$$\frac{V_B - 12}{225} + \frac{V_B}{45} + \frac{20(V_B - 12) + V_B}{130} = 0 \Rightarrow$$

$$V_B\left(\frac{1}{225} + \frac{1}{45} + \frac{21}{130}\right) = \frac{12}{225} + \frac{240}{130} \Rightarrow$$

$V_B = 10.093$ V $\quad V_{AB} = 1.91$ V $\quad I_{130} = \frac{-20V_{AB} + V_B}{130} = -0.2158$ A

```
octave:17> Vb=(12/225+240/130)/(1/225+1/45+21/130)
Vb =  10.093
octave:19> Vab=12-Vb
Vab =  1.9074
octave:20> I=(-20*Vab+Vb)/130
I = -0.21580
```