Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι

Διάλεξη 22

Α. Δροσόπουλος

12-01-2024

Outline

1. Ασκήσεις
2. Συντονισμός

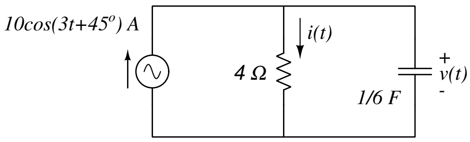
Topic

1. Ασκήσεις

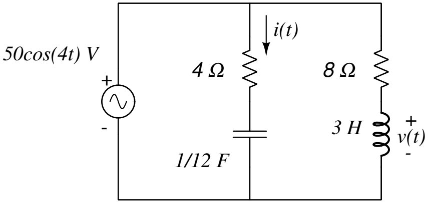
2. Συντονισμός

Άσκηση

Να βρεθούν η τάση $v(t)$ και το ρεύμα $i(t)$ στα παρακάτω κυκλώματα.



(a)



(b)

Άσκηση (συνέχεια 1)

Στο κύκλωμα (a) ο πυκνωτής έχει εμπέδηση $Z_C = -j/(3/6) = -j2\ \Omega$ και ο φάσορας της πηγής είναι $\dot{I}_s = (10/\sqrt{2})\ \underline{/45^\circ}$ A. Με διαιρέτη ρεύματος

$$\dot{I} = \frac{Z_C}{Z_C + 4}\,\dot{I}_s = 3 - j = 3.162\ \underline{/-18.435^\circ} \ \Rightarrow\ i(t) = 4.472\cos(3t - 18.435^\circ)\ \mathrm{A}$$

Η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι ίδια με την τάση στα άκρα της $4\ \Omega$. Άρα, $v(t) = 4i(t) = 17.89\cos(3t - 18.435^\circ)$ V.

Στο κύκλωμα (b) ο πυκνωτής έχει εμπέδηση $Z_C = -j/(4/12) = -j3\ \Omega$, το πηνίο $Z_L = j4\cdot 3 = j12\ \Omega$, και ο φάσορας της πηγής είναι $\dot{V}_s = (50/\sqrt{2})\ \underline{/0^\circ}$ V.

Η τάση στο μεσαίο κλάδο είναι η τάση της πηγής, άρα

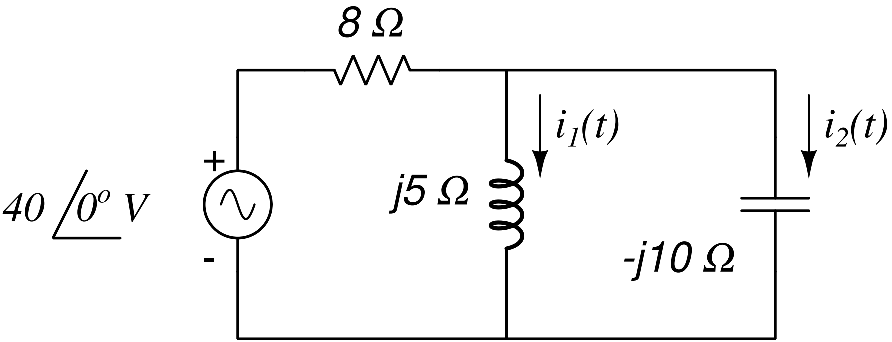
$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_s}{4 - j3} = 7.071\ \underline{/36.87^\circ} \ \Rightarrow\ i(t) = 10\cos(4t + 36.87^\circ)\ \mathrm{A}$$

Στον δεξιό κλάδο μπορούμε να εφαρμόσουμε διαιρέτη τάσης, άρα

$$\dot{V} = \frac{Z_L}{Z_L + 8}\,\dot{V}_s = 29.417\ \underline{/33.69^\circ} \ \Rightarrow\ v(t) = 41.603\cos(4t + 33.69^\circ)\ \mathrm{V}$$

Άσκηση

Να βρεθούν τα ρεύματα $i_1(t)$, $i_2(t)$ στο παρακάτω κύκλωμα εάν η συχνότητα της πηγής είναι $f = 50$ Hz.



Άσκηση (συνέχεια 1)

Το πηνίο και ο πυκνωτής είναι παράλληλα και η εμπέδηση είναι

$$Z = (j5) \parallel (-j10) = j10\ \Omega$$

Με διαιρέτη τάσης, η τάση στα άκρα του πηνίου και πυκνωτή είναι

$$\dot{V} = \frac{j10}{j10+8}\, 40 = 31.235\ \underline{/38.66^\circ}\ \mathrm{V}$$

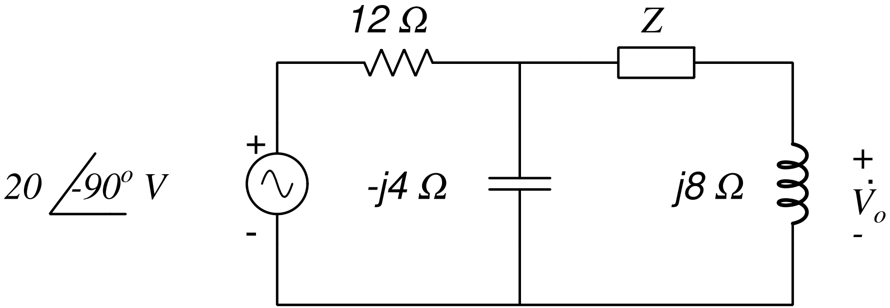
άρα

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}}{j5} = 6.247\ \underline{/-51.34^\circ} \ \Rightarrow\ i_1(t) = 8.834 \sin(2\pi 50 \cdot t - 51.34^\circ)\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}}{-j10} = 3.123\ \underline{/128.66^\circ} \ \Rightarrow\ i_2(t) = 4.417 \sin(2\pi 50 \cdot t + 128.66^\circ)\ \mathrm{A}$$

Άσκηση

Να βρεθεί η εμπέδηση Z στο παρακάτω κύκλωμα εάν $\dot{V}_o = 4\,\underline{/0^\circ}$ V.



Άσκηση (συνέχεια 1)

Το ρεύμα που διέρχεται από το πηνίο άρα και από την άγνωστη εμπέδηση είναι

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_o}{j8} = -j0.5 \text{ A}$$

Αν A ο επάνω κόμβος και γη ο κάτω, με κομβική ανάλυση

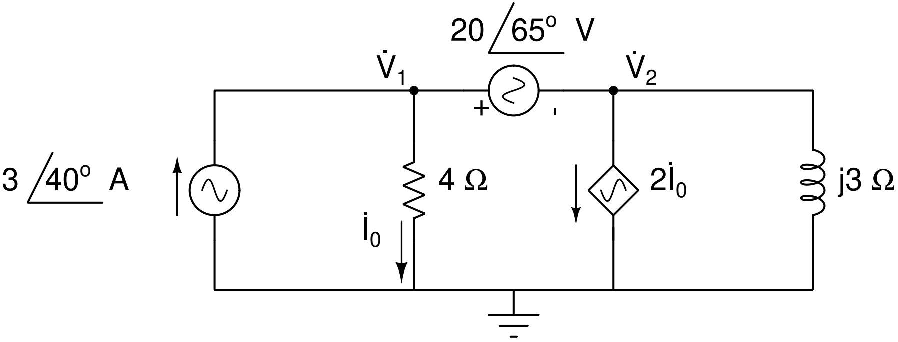
$$\frac{\dot{V}_A - (-j20)}{12} + \frac{\dot{V}_A}{(-j4)} + \dot{I} = 0 \Rightarrow \dot{V}_A = -4.2 - j1.4 \text{ V}$$

$$\dot{V}_A = \dot{I}Z + \dot{V}_o \Rightarrow Z = 16.6\underline{/-80.3^\circ} \;\Omega$$

```
octave:4> I=V0/(j*8)
I =  0.00000 - 0.50000i
octave:5> Va=(-j*20/12-I)/(1/12+j/4)
Va = -4.2000 - 1.4000i
octave:6> Z=(Va-V0)/I
Z =   2.8000 - 16.4000i
octave:7> [abs(Z) angle(Z)*180/pi]
ans =
   16.637  -80.311
```

Άσκηση

Να υπολογίσετε τις τάσεις $\dot{V}_1$, $\dot{V}_2$.



Άσκηση (συνέχεια 1)

Με κομβική ανάλυση έχουμε

$$\left.\begin{array}{rcl} -3\underline{/40^\circ} + \dot{V}_1/4 + \dot{I}_{12} & = & 0 \\ -\dot{I}_{12} + 2\dot{I}_0 + \dot{V}_2/(j3) & = & 0 \\ \dot{I}_0 & = & \dot{V}_1/4 \\ \dot{V}_1 - \dot{V}_2 & = & 20\ \underline{/65^\circ} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} (3/4)\dot{V}_1 - (j/3)\dot{V}_2 & = & 3\underline{/40^\circ} \\ \dot{V}_1 - \dot{V}_2 & = & 20\ \underline{/65^\circ} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

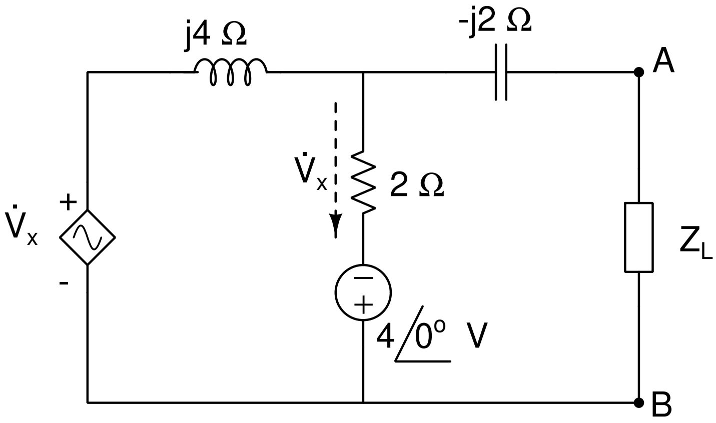
$$\dot{V}_1 = 10.2\underline{/17.9^\circ}\ \mathrm{V} \qquad \dot{V}_2 = 15.0\underline{/-85.1^\circ}\ \mathrm{V}$$

Άσκηση (συνέχεια 2)

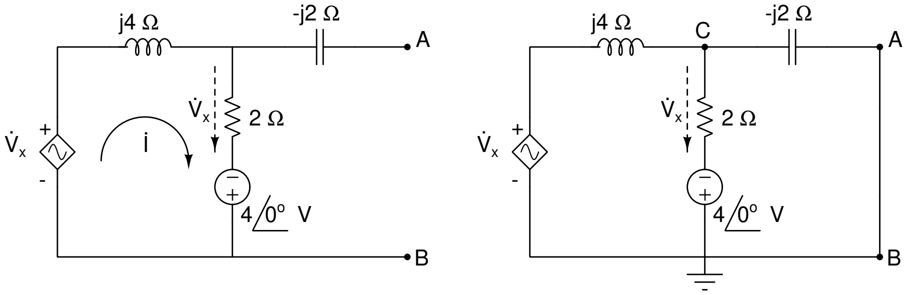
```
octave:9> A=[3/4 -j/3; 1 -1]
A =
   0.75000 + 0.00000i  -0.00000 - 0.33333i
   1.00000 + 0.00000i  -1.00000 + 0.00000i

octave:10> b=[3*exp(j*40*pi/180); 20*exp(j*65*pi/180)]
b =
    2.2981 +  1.9284i
    8.4524 + 18.1262i

octave:11> V=inv(A)*b
V =
    9.7259 +  3.1372i
    1.2736 - 14.9890i

octave:12> [abs(V) angle(V)*180/pi]
ans =
   10.219   17.878
   15.043  -85.143
```

Παράδειγμα 3

Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθεί το φορτίο Z_L που καταναλώνει μέγιστη πραγματική ισχύ από το κύκλωμα καθώς επίσης και η τιμή της μέγιστης αυτής ισχύος.



Παράδειγμα 3 (συνέχεια 1)



$$\left.\begin{array}{rcr} \dot{I}(2+j4) - 4\,\underline{/0^\circ} - \dot{V}_x & = & 0 \\ \dot{V}_x & = & -2\dot{I} \end{array}\right\} \Rightarrow 4(1+j)\dot{I} = 4 \Rightarrow \dot{I} = \frac{1}{1+j} = \frac{1-j}{2}\text{ A}$$

επομένως

$$\dot{V}_{TH} = 2\dot{I} - 4 = 1 - j - 4 = -3 - j = 3.16\underline{/-161.6^\circ}\text{ V}$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια 2)

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\dot{V}_C - \dot{V}_x}{j4} + \dfrac{\dot{V}_C + 4}{2} + \dfrac{\dot{V}_C}{(-j2)} & = & 0 \\[2ex] -4 - \dot{V}_C & = & \dot{V}_x \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{V}_C = 2(j-2)\ \mathrm{V}$$

$$\dot{I}_N = \frac{\dot{V}_C}{(-j2)} = -1 - j2\ \mathrm{A}$$

$$Z_{TH} = \frac{\dot{V}_{TH}}{\dot{I}_N} = 1 - j\ \Omega$$

$$Z_L = 1 + j = 1.41\underline{/45^\circ}\ \Omega \qquad P_{\max} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{4\Re e\{Z_{TH}\}} = 2.5\ \mathrm{W}$$

Topic

Άσκηση 1

Σε εν σειρά κύκλωμα συντονισμού έχουμε $R = 10\ \Omega$. Να βρεθούν οι τιμές L και C έτσι ώστε το κύκλωμα να έχει συχνότητα συντονισμού 100 kHz και εύρος ωφέλιμης ζώνης 1 kHz. Να βρεθούν κατόπιν τα άκρα της ωφέλιμης ζώνης και ο συντελεστής ποιότητας του κυκλώματος.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \;\Rightarrow\; LC = \frac{1}{(2\pi f_0)^2} = 2.5330 \times 10^{-12}$$

$$\Delta f = \frac{R}{2\pi L} \;\Rightarrow\; L = \frac{R}{2\pi \Delta f} = 1.5915 \times 10^{-3}\ \mathrm{H} \qquad \text{και}$$

$$C = \frac{LC}{L} = 1.5915 \times 10^{-9}\ \mathrm{F}$$

$$Q_s = \frac{f_0}{\Delta f} = 100$$

Άσκηση 1 (2)

$$f_1 f_2 = f_0^2 \qquad \text{και} \qquad f_2 - f_1 = \Delta f$$

$$f_2 = \frac{f_0^2}{f_1} \qquad \text{και} \qquad \frac{f_0^2}{f_1} - f_1 = \Delta f \;\Rightarrow\; f_1^2 + \Delta f \cdot f_1 - f_0^2 = 0 \;\Rightarrow$$

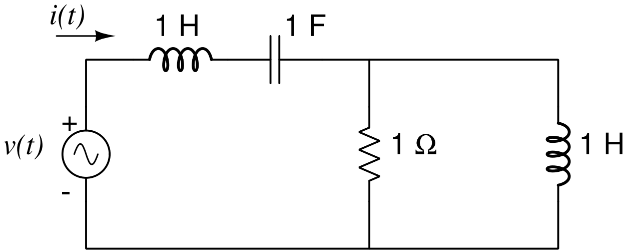
$$f_1 = 99501.25 \text{ Hz} \qquad \text{και} \qquad f_2 = \frac{f_0^2}{f_1} = 100501.25 \text{ Hz}$$

Με καλή προσέγγιση υπολογίζεται επίσης με

$$f_1 = f_0 - \frac{\Delta f}{2} = 99500 \text{ Hz} \qquad \text{και} \qquad f_2 = f_0 + \frac{\Delta f}{2} = 100500 \text{ Hz}$$

Άσκηση 2

Στο παρακάτω κύκλωμα υπολογίστε τη συχνότητα ω για την οποία $v(t)$ και $i(t)$ είναι εν φάση.



Άσκηση 2 (2)

$$\Im m\left\{(j\omega + \frac{1}{j\omega}) + (1 \parallel j\omega)\right\} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Im m\left\{j\omega - \frac{j}{\omega} + \frac{j\omega}{1+j\omega}\cdot\frac{1-j\omega}{1-j\omega}\right\} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\omega - \frac{1}{\omega} + \frac{\omega}{1+\omega^2} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\frac{\omega^2(1+\omega^2) - (1+\omega^2) + \omega^2}{\omega(1+\omega^2)} = 0 \;\Rightarrow\; \omega^4 + \omega^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow$$

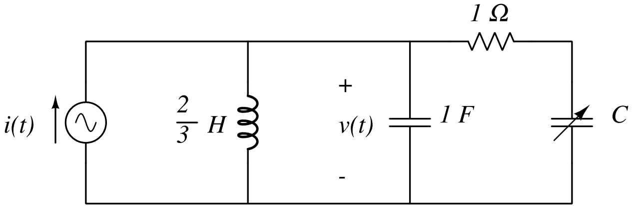
$$\omega^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0.61803 \;\Rightarrow$$

$$\omega = 0.78615 \text{ rad/s} \qquad \text{ή} \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.12512 \text{ Hz}$$

όπου κρατήσαμε μόνο τις θετικές τιμές των συχνοτήτων που έχουν φυσικό νόημα.

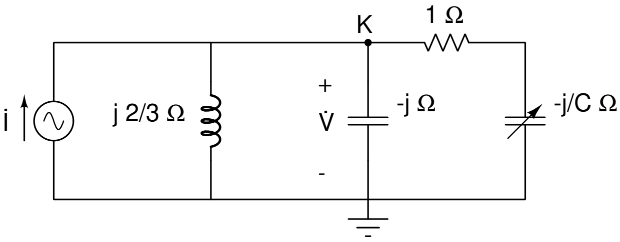
Άσκηση 3

Στο παρακάτω κύκλωμα έχουμε $i(t) = 10 \sin t$. Υπολογίστε την χωρητικότητα C έτσι ώστε $v(t) = V_0 \sin t$. Ποιά είναι η τιμή V_0;



Άσκηση 3 (2)

Μετατρέποντας σε φάσορες και σύνθετες αντιστάσεις έχουμε το παρακάτω κύκλωμα



Άσκηση 3 (3)

Με κομβική ανάλυση στον κόμβο K έχουμε:

$$-\dot{I}+\frac{\dot{V}}{j(2/3)}+\frac{\dot{V}}{(-j)}+\frac{\dot{V}}{1-j/C}=0\Rightarrow$$

$$\dot{V}=\frac{\dot{I}}{\left[-j\frac{3}{2}+j+\frac{C^2+jC}{1+C^2}\right]}=$$

$$=\frac{\dot{I}}{\left[\frac{C^2}{1+C^2}-j\frac{1}{2}+\frac{jC}{1+C^2}\right]}$$

Άσκηση 3 (4)

Και επειδή $\dot{V} = (V_0/\sqrt{2})\ \underline{/0^\circ}$ και $\dot{I} = (10/\sqrt{2})\ \underline{/0^\circ}$ έχουμε

$$V_0 = \frac{10}{\left[\dfrac{C^2}{1+C^2} - j\dfrac{1}{2} + \dfrac{jC}{1+C^2}\right]}$$

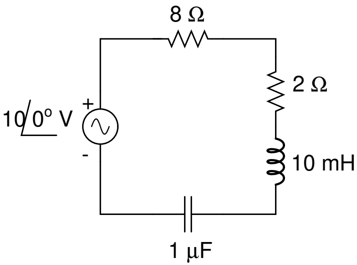
όπου V_0 πραγματικός αριθμός. Επομένως το φανταστικό μέρος στον παρονομαστή είναι μηδέν.

$$\frac{C}{1+C^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow C^2 - 2C + 1 = 0 \Rightarrow C = 1\ \mathrm{F} \qquad \text{και} \qquad V_0 = 20\ \mathrm{V}$$

Άσκηση 4

Να βρεθούν:

1. Συχνότητα συντονισμού σε rad/s και Hz.
2. Ολική μιγαδική αντίσταση που βλέπει η πηγή στο συντονισμό.
3. Το ρεύμα βρόγχου στο συντονισμό.
4. Τάσεις $\dot{V}_L$ και $\dot{V}_C$ στο συντονισμό.
5. Άεργος ισχύς Q_C και Q_L στο συντονισμό.
6. Συντελεστής ποιότητας Q_s.
7. Η μέγιστη ισχύς που καταναλώνεται στο κύκλωμα.
8. Το εύρος ζώνης $\Delta\omega$ και τις συχνότητες ω_1, ω_2.
9. Το ρεύμα βρόγχου και την ισχύ που καταναλώνεται στο κύκλωμα για τη συχνότητα ω_1.



Άσκηση 4 (2)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10000\ \mathrm{rad/s} \qquad f_0 = 1591.5\ \mathrm{Hz}$$

$$Z = 10\ \Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = \frac{10}{10} = 1\ \underline{/0^\circ}\ \mathrm{A}$$

$$\dot{V}_L = \dot{I} j\omega_0 L = j100\ \mathrm{V} \qquad \dot{V}_C = \frac{\dot{I}}{j\omega_0 C} = -j100\ \mathrm{V}$$

$$Q_C = \frac{I^2}{\omega C} = 100\ \mathrm{VAR} \qquad Q_L = I^2 \omega L = 100\ \mathrm{VAR}$$

$$Q_s = \frac{Q_L}{P} = \frac{100}{I^2 R} = \frac{100}{10} = 10$$

$$P_{\max} = \frac{|\dot{V}|^2}{R} = \frac{100}{10} = 10\ \mathrm{W}$$

Άσκηση 4 (3)

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_s} = \frac{10000}{10} = 1000 \text{ rad/s}$$

κατά προσέγγιση

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} = 9500 \text{ rad/s} \qquad \omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} = 10500 \text{ rad/s}$$

με ακρίβεια

$$\omega_1\omega_2 = \omega_0^2 \qquad \omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_0^2}{\omega_1} \qquad \frac{\omega_0^2}{\omega_1} - \omega_1 = \Delta\omega \;\Rightarrow$$

$$\omega_1^2 + \Delta\omega \cdot \omega_1 - \omega_0^2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\omega_1 = 9512.49 \text{ rad/s} \qquad \omega_2 = 10512.49 \text{ rad/s}$$

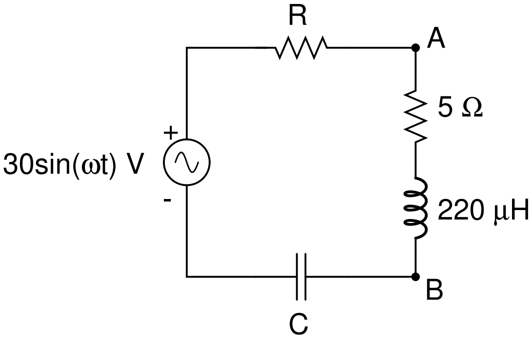
$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{10 + j\omega_1 L - j/(\omega_1 C)} = 0.707 \underline{/45^\circ} \text{ A}$$

$$P = |\dot{I}|^2 R = 0.707^2 \cdot 10 = 5 \text{ W}$$

Άσκηση 1

Να βρεθούν:

1. Οι τιμές R και C έτσι ώστε η συχνότητα συντονισμού να είναι $200\ \mathrm{kHz}$ και το εύρος ζώνης $16\ \mathrm{kHz}$.
2. Η μέγιστη ισχύς που καταναλώνεται στο κύκλωμα.
3. Η τάση $v_{AB}(t)$ στο συντονισμό.



Άσκηση 1 (2)

$$Q_s = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{200}{16} = 12.5$$

$$X_L = 2\pi f_0 L = 276.46\ \Omega \Rightarrow R + 5 = \frac{X_L}{Q_s} = 22.117 \Rightarrow R = 17.117\ \Omega$$

$$X_C = X_L \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi f_0 X_C} = 2.88\ \text{nF}$$

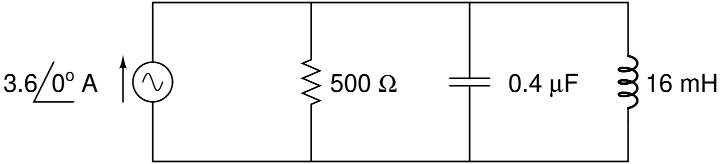
$$P = \frac{(30/\sqrt{2})^2}{22.117} = 20.347\ \text{W}$$

$$\dot{V}_i = \frac{30}{\sqrt{2}}\ \underline{/0^\circ} \qquad \dot{V}_{AB} = \frac{5 + jX_L}{R + 5 + jX_L - jX_C}\ \dot{V}_i = 265.21\ \underline{/88.96^\circ}\ \text{V}$$

$$v_{AB}(t) = 375.06 \sin(\omega t + 88.96^\circ)\ \text{V}$$

Άσκηση 2 (για σας)

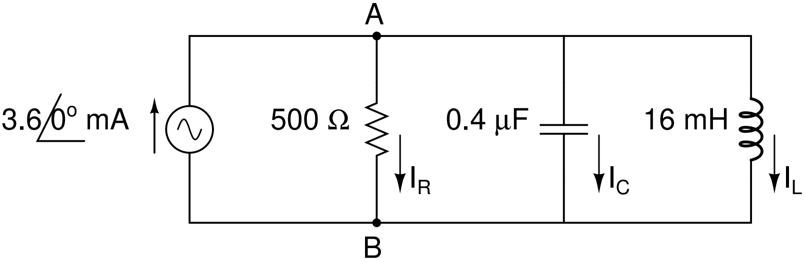
1. Προσδιορίστε τη συχνότητα συντονισμού σε $\mathrm{rad/s}$ και Hz.
2. Υπολογίστε το Q του κυκλώματος στο συντονισμό.
3. Την τάση $\dot{V}$ παράλληλα στους κόμβους στο συντονισμό.
4. Το ρεύμα και την ισχύ σε όλα τα στοιχεία στο συντονισμό.
5. Το εύρος ζώνης και τις συχνότητες ω_1, ω_2.
6. Σκιτσάρετε την απόκριση τάσης στο κύκλωμα.



Άσκηση 5

Στο παραπάνω κύκλωμα να βρεθούν:

1. Η συχνότητα συντονισμού ω_0 και f_0.
2. Ο συντελεστής ποιότητας Q στο συντονισμό.
3. Η τάση $\dot{V}_{AB}$ στο συντονισμό.
4. Τα ρεύματα $\dot{I}_R$, $\dot{I}_C$, $\dot{I}_L$ στο συντονισμό.
5. Το εύρος ζώνης $\Delta\omega$ και Δf καθώς και τα άκρα της ω_1, ω_2.
6. Σκίτσο της απόκρισης τάσης.



Άσκηση 5 (2)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 12.5\ \mathrm{krad/s} \qquad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1989.4\ \mathrm{Hz}$$

$$Q = Q_p = \frac{R}{\omega_0 L} = 2.5$$

$$\dot{V}_{AB} = \dot{I} \cdot R = (3.6\ \underline{/0^\circ}) \cdot 500 = 1.8\ \underline{/0^\circ}\ \mathrm{V}$$

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{V}}{R} = 3.6\ \underline{/0^\circ}\ \mathrm{mA}$$

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{V}}{j\omega_0 L} = 9\ \underline{/-90^\circ}\ \mathrm{mA}$$

$$\dot{I}_C = \dot{V} \cdot (j\omega_0 C) = 9\ \underline{/90^\circ}\ \mathrm{mA}$$

Άσκηση 5 (3)

$$\Delta\omega = \frac{G}{C} = 5\ \text{krad/s} \qquad \Delta f = \Delta\omega/(2\pi) = 795.8\ \text{Hz}$$

Προσεγγιστικά

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} = 15\ \text{krad/s} \qquad \omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} = 10\ \text{krad/s}$$

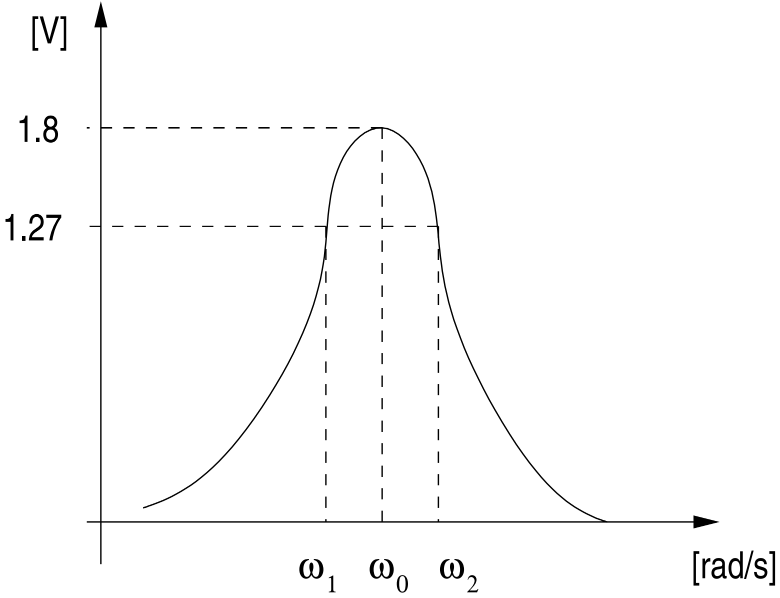
Με ακρίβεια

$$\omega_1\omega_2 = \omega_0^2 \qquad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_0^2}{\omega_2} \Rightarrow \omega_2^2 - \Delta\omega \cdot \omega_2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow$$

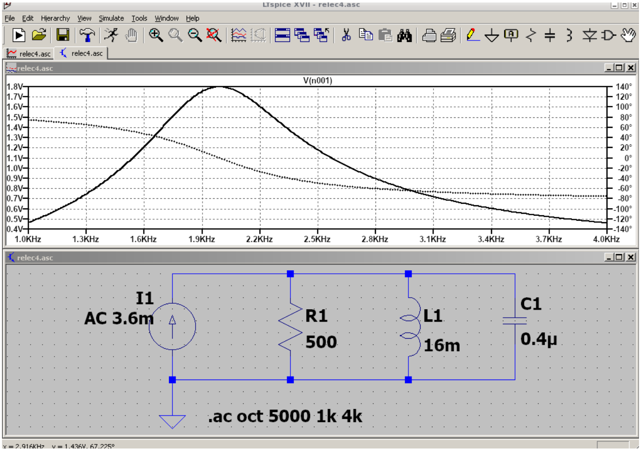
$$\omega_2 = 15247.5\ \text{rad/s} \qquad \omega_1 = 10247.5\ \text{rad/s}$$

Άσκηση 5 (4)



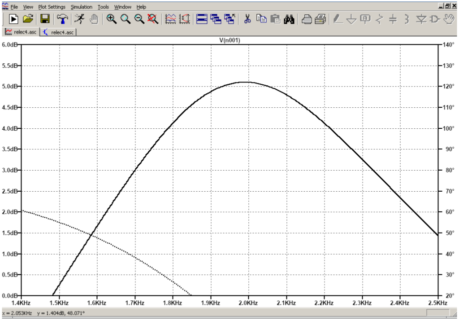
Άσκηση 5 (5)

Και με spice



Άσκηση 6

Δοθείσας της καμπύλης τάσης για παράλληλο συντονισμό και της τιμής $R = 500\ \Omega$ εκτιμήστε συχνότητα συντονισμού, Q και L, C.



$$f_0 = 1.99\ \mathrm{kHz} \quad f_1 = 1.63\ \mathrm{kHz} \quad f_2 = 2.43\ \mathrm{kHz} \quad \Delta f = 800\ \mathrm{Hz}$$

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 2.4875 \quad L = \frac{R}{2\pi f_0 Q} = 16.1\ \mathrm{mH} \quad C = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 L} = 0.398\ \mu\mathrm{F}$$

Αλλαγή κλίμακας μέτρου

$$R' \leftarrow K_M R \qquad L' \leftarrow K_M L \qquad C' \leftarrow \frac{C}{K_M}$$

οπότε η συχνότητα συντονισμού και οι συντελεστές ποιότητας παραμένουν ίδιοι

$$\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{K_M LC/K_M}} = \omega_0$$

$$Q_s' = \frac{\omega_0' L'}{R'} = \frac{\omega_0 K_M L}{K_M R} = Q_s \qquad \text{και} \qquad Q_p' = \frac{R'}{\omega_0' L'} = \frac{K_M R}{\omega_0 K_M L} = Q_p$$

Αλλαγή κλίμακας συχνότητας

Όπου $\omega' = K_F\,\omega$. Οι ωμικές αντιστάσεις είναι ανεξάρτητες της συχνότητας επομένως δεν αλλάζουν. Για τις επαγωγές έχουμε:

$$\omega' L' = \omega L \;\Rightarrow\; K_F\,\omega L' = \omega L \;\Rightarrow\; L' = \frac{L}{K_F}$$

Τα ίδια ισχύουν και για τις χωρητικότητες, οπότε

$$R' \leftarrow R \qquad L' \leftarrow \frac{L}{K_F} \qquad C' \leftarrow \frac{C}{K_F}$$

Η συχνότητα συντονισμού γίνεται τώρα:

$$\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{(L/K_F)(C/K_F)}} = K_F\,\omega_0$$

ενώ οι συντελεστές ποιότητας δεν αλλάζουν

$$Q_s' = \frac{\omega_0' L'}{R'} = \frac{K_F\,\omega_0 L}{K_F R} = Q_s \qquad \text{και} \qquad Q_p' = \frac{R'}{\omega_0' L'} = \frac{K_F R}{\omega_0 L} = Q_p$$