Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι

Διάλεξη 19

Α. Δροσόπουλος

15-12-2022

Outline

1 Θεωρήματα Thevenin, Norton και μέγιστη μεταφορά ισχύος

Topic

1. Θεωρήματα Thevenin, Norton και μέγιστη μεταφορά ισχύος

Θεώρημα Thevenin

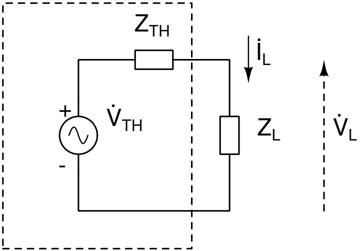
Ένα γραμμικό κύκλωμα με δύο ακροδέκτες A, B μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με ένα ισοδύναμο κύκλωμα που περιέχει μία πηγή τάσης σε σειρά με μία εμπέδηση. Η εμπέδηση, Z_{TH} είναι η εμπέδηση που φαίνεται από τους ακροδέκτες A, B όταν αντικαταστήσουμε τις πηγές με τις εσωτερικές τους αντιστάσεις (για πηγές πραγματικές) ή βραχυκυκλώσουμε τις πηγές τάσης και ανοίξουμε τις πηγές ρεύματος (για πηγές ιδανικές) στο κύκλωμα. Η τάση $\dot{V}_{TH}$ είναι η τάση που φαίνεται με το κύκλωμα ενεργό, στους ανοικτούς ακροδέκτες A, B.

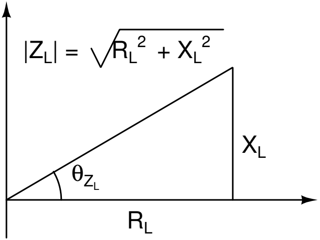
Θεώρημα Norton

Ένα γραμμικό κύκλωμα με δύο ακροδέκτες A, B μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με ένα ισοδύναμο κύκλωμα που περιέχει μία πηγή ρεύματος παράλληλα με μία εμπέδηση. Η εμπέδηση, Z_N είναι η εμπέδηση που φαίνεται από τους ακροδέκτες A, B όταν αντικαταστήσουμε τις πηγές με τις εσωτερικές τους αντιστάσεις (για πηγές πραγματικές) ή βραχυκυκλώσουμε τις πηγές τάσης και ανοίξουμε τις πηγές ρεύματος (για πηγές ιδανικές) στο κύκλωμα. Το ρεύμα I_N είναι το ρεύμα που παίρνουμε με το κύκλωμα ενεργό, όταν βραχυκυκλώσουμε τούς ακροδέκτες A, B.

Μέγιστη μεταφορά μέσης ή πραγματικής ισχύος

Μέγιστη μεταφορά πραγματικής ισχύος P σε κάποιο φορτίο Z_L από κάποιο κύκλωμα.





Στο αριστερό τμήμα του σχήματος βλέπουμε το ισοδύναμο κατά Thevenin ενός οποιουδήποτε γραμμικού κυκλώματος ενώ στο δεξιό τμήμα του σχήματος, έχουμε την απεικόνιση στο μιγαδικό επίπεδο του φορτίου Z_L.

Μέγιστη μεταφορά ισχύος (συνέχεια 1)

Οι εμπεδήσεις είναι $Z_{TH} = R_{TH} + jX_{TH}$ και $Z_L = R_L + jX_L$ ενώ το ρεύμα που διέρχεται από το φορτίο Z_L είναι

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{V}_{TH}}{Z_{TH} + Z_L}$$

Από διαιρέτη τάσης στο φορτίο έχουμε

$$\dot{V}_L = \frac{Z_L}{Z_{TH} + Z_L}\,\dot{V}_{TH}$$

Η μιγαδική ισχύς στο φορτίο είναι

$$\dot{S} = \dot{V}_L \dot{I}_L^* = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2\ Z_L}{|Z_{TH} + Z_L|^2}$$

και η πραγματική ισχύς στο φορτίο είναι

$$P = \Re e\{\dot{S}\} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2\ R_L}{|Z_{TH} + Z_L|^2} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2\ R_L}{(R_{TH} + R_L)^2 + (X_{TH} + X_L)^2}$$

Μέγιστη μεταφορά ισχύος (συνέχεια 2)

Η παραπάνω ισχύς P είναι πραγματική συνάρτηση δυο μεταβλητών, $P(R_L, X_L)$. Για την εύρεση των τιμών των R_L, X_L για τις οποίες έχουμε μέγιστη P, χρησιμοποιούμε γνωστό θεώρημα από τη μαθηματική ανάλυση όπου

$$\frac{\partial P}{\partial X_L} = -\frac{|\dot{V}_{TH}|^2 \; R_L \; 2\,(X_{TH} + X_L)}{\left[(R_{TH} + R_L)^2 + (X_{TH} + X_L)^2\right]^2} = 0 \;\Rightarrow\; X_L = -X_{TH}$$

και

$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2 \left[\left[(R_{TH} + R_L)^2 + (X_{TH} + X_L)^2\right] - 2R_L(R_{TH} + R_L)\right]}{\left[(R_{TH} + R_L)^2 + (X_{TH} + X_L)^2\right]^2} = 0 \;\Rightarrow$$

$$(R_{TH} - R_L)^2 + (X_{TH} + X_L)^2 = 0 \;\Rightarrow\; R_L = R_{TH}$$

Τελικά, για σύνθετο φορτίο (μιγαδικό φορτίο) Z_L έχουμε ακρότατο για

$$Z_L = Z_{TH}^*$$

Μέγιστη μεταφορά ισχύος (συνέχεια 3)

Εξετάζουμε την ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 P}{\partial R_L^2} & \dfrac{\partial^2 P}{\partial R_L \partial X_L} \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial X_L \partial R_L} & \dfrac{\partial^2 P}{\partial X_L^2} \end{vmatrix}$$

στο ακρότατο. Εφόσον $D > 0$ και $\partial^2 P/\partial R_L^2 < 0$ για $Z_L = Z_{TH}^*$, τότε το ακρότατο είναι μέγιστο. Το μέγιστο αυτό είναι

$$P_{\max} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{4R_{TH}} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{4\Re e\{Z_{TH}\}}$$

Μέγιστη μεταφορά ισχύος (συνέχεια 4)

Για την περίπτωση όπου το φορτίο είναι καθαρά ωμικό, δηλ. $X_L = 0$ ενώ $X_{TH} \neq 0$, έχουμε συνάρτηση μιας μεταβλητής. Οπότε

$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{|\dot{V}_{TH}|^2 \left[[(R_{TH}+R_L)^2 + X_{TH}^2] - 2R_L(R_{TH}+R_L) \right]}{\left[(R_{TH}+R_L)^2 + X_{TH}^2\right]^2} = 0 \;\Rightarrow$$

$$R_{TH}^2 + 2R_{TH}R_L + R_L^2 + X_{TH}^2 - 2R_{TH}R_L - 2R_L^2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$R_L = \sqrt{R_{TH}^2 + X_{TH}^2} = |Z_{TH}|$$

και η μέγιστη πραγματική ισχύς (πρόσημο δευτέρας παραγώγου αρνητικό στο ακρότατο) είναι τότε

$$P_{\max} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{2|Z_{TH}| + 2R_{TH}} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{2|Z_{TH}| + 2\Re e\{Z_{TH}\}}$$

Μέγιστη μεταφορά ισχύος (συνέχεια 5)

Συνοψίζοντας.

Για Z_L μιγαδικό:

$$Z_L = Z^*_{TH}$$

$$P_{\max} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{4\Re e\{Z_{TH}\}}$$

Για $Z_L = R_L$ πραγματικό:

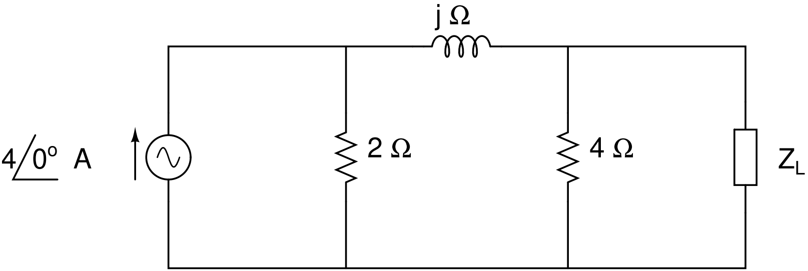
$$R_L = |Z_{TH}|$$

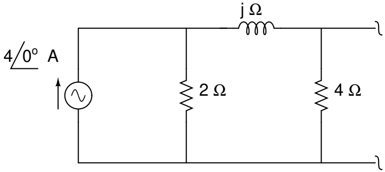
$$P_{\max} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{2|Z_{TH}| + 2\Re e\{Z_{TH}\}}$$

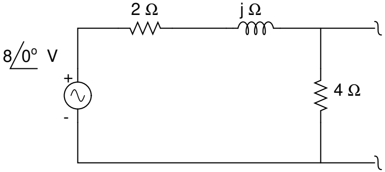
Τι γίνεται όταν Z_L είναι καθαρά φανταστικό και το φορτίο είναι πηνίο ή πυκνωτής;

Παράδειγμα 1

Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθεί το φορτίο Z_L που καταναλώνει μέγιστη πραγματική ισχύ από το κύκλωμα καθώς επίσης και η τιμή της μέγιστης αυτής ισχύος.







Αφαιρούμε πρώτα το φορτίο Z_L και απλοποιούμε το κύκλωμα, βρίσκοντας το ισοδύναμο κατά Thevenin.

$$Z_{TH} = \frac{4(2+j)}{4+2+j} = \frac{8+4j}{6+j}\,\frac{6-j}{6-j} = \frac{48-j^2 4+j24-j8}{36+1} = \frac{52+16j}{37} =$$
$$= 1.405 + j0.432 = 1.47\underline{/17.1^\circ}\ \Omega$$

άρα $Z_L = Z_{TH}^* = 1.47\underline{/-17.1^\circ}\ \Omega$. Η $\dot{V}_{TH}$ είναι η τάση στα άκρα της $4\ \Omega$ και με έναν διαιρέτη τάσης έχουμε

$$\dot{V}_{TH} = \frac{4}{4+2+j}\,8\ \underline{/0^\circ} = \frac{32\ \underline{/0^\circ}}{6.083\ \underline{/9.46^\circ}} = 5.261\ \underline{/-9.46^\circ}\ \mathrm{V}$$

οπότε

$$P_{\max} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{4\Re e\{Z_{TH}\}} = \frac{5.261^2}{4\cdot 1.405} = 4.92\ \mathrm{W}$$